

Consistance des modèles de symétrie des milieux effectifs utilisés en diffusion multiple

M. CALEAP^{a,b}, C. ARISTEGUI^b, O. PONCELET^b

a. Department of Mechanical Engineering, University of Bristol, Queen's Building, University Walk, Bristol BS8 1TR, United Kingdom

b. Université de Bordeaux, CNRS, UMR 5295, I2M-APy, Talence, F-33405, France

Résumé :

La modélisation de la propagation d'ondes dans les structures multifissurées est d'un intérêt majeur pour leur contrôle (non destructif) et leur dimensionnement. La question posée dans cette communication touche à la capacité de décrire la propagation d'ondes cohérentes (ou ondes moyennes) suivant toutes les directions (de l'espace) de tels milieux, à partir de la seule connaissance des propriétés effectives du milieu le long de ses directions principales macroscopiques (de symétries matérielles). L'importance de cette question est illustrée en considérant la propagation de l'onde de cisaillement antiplane cohérente et homogène, en incidence oblique sur une distribution aléatoire de fissures plates mutuellement parallèles. Le choix de la loi de Hooke comme loi constitutive du milieu homogène équivalent, justifiée dans le cas statique (grandes longueurs d'ondes), s'avère inadaptée pour des longueurs d'ondes intermédiaires.

Abstract :

Attention is focused on the propagation of antiplane coherent wave obliquely incident on mutually parallel and randomly distributed cracks. A fundamental question in this study concerns the ability of describing the coherent wave propagation in all directions from the knowledge of the effective material properties along the effective principal directions, only. Its relevance is illustrated by considering propagation of homogeneous coherent wave propagation. This work reveals that the Hooke's laws, chosen as the constitutive equation for the equivalent homogeneous medium, is not appropriate for the intermediate wavelength regime.

Mots clefs : homogénéisation dynamique, diffusion multiple, onde cohérente, milieu effectif, symétrie matérielle

1 Introduction

L'homogénéisation consiste à décrire le comportement macroscopique d'une structure hétérogène par des variables dites effectives (champ moyen configurationnel ou spatial par exemple), satisfaisant des équations de la mécanique des milieux continus homogènes. Cette approche définit la notion de milieu homogène équivalent, dont le modèle de loi de comportement est choisi *a priori*.

Par sa forme élémentaire, la loi de Hooke, représentative en particulier des milieux viscoélastiques linéaires et reliant les spectres des contraintes et des déformations, est un premier choix naturel de loi constitutive pour un milieu homogène équivalent. Elle a en particulier conduit à la description de la propagation d'ondes ultrasonores le long de directions privilégiées au sein de distributions aléatoires d'hétérogénéités, à l'aide de rigidités et masses volumiques appropriées [1, 12, 5]. Une application directe de ces travaux a consisté à modéliser la réponse sous incidence normale d'un matériau à concentration de fissures variables, en considérant la structure endommagée comme un « empilement » de couches homogènes équivalentes à concentration de fissures fixée [2].

Dans cette communication, nous étudions, la capacité de la loi de Hooke à modéliser la propagation tridimensionnelle d'ondes dans des milieux multifissurés, à partir d'un tenseur des rigidités dynamiques effectif indépendant de l'orientation de la propagation. L'approximation de la lenteur de phase effective (inverse de la célérité de phase) calculée à partir de l'équation de dispersion spécifique aux milieux orthotropes est alors comparée à des résultats de référence obtenus par une méthode directe de calcul considérant des ondes incidentes sur les fissures [4]. Nous montrons en particulier que les rigidités effectives

présentes dans l'équation de dispersion du modèle dit orthotrope (*a priori* en adéquation avec la symétrie élastique du milieu) doivent être dépendantes de la direction de propagation des ondes incidentes afin que celles-ci soient consistantes avec les résultats de référence.

2 Équation de dispersion pour un milieu orthotrope

Soit un solide élastique linéaire et isotrope, de masse volumique ρ_0 et de module de cisaillement μ_0 , qui contient une distribution aléatoire de fissures plates identiques (de taille $2a$), mutuellement parallèles et de densité surfacique n_0 (nombre de fissures par unité de surface). Le comportement macroscopique de la matrice endommagée est anisotrope. Nous superposons au solide le système d'axes (y_1, y_2, y_3) tel que les lèvres des fissures sont parallèles à y_1 , les fissures étant elles-mêmes parallèles à y_2 , direction orthogonale au plan de propagation de l'onde incidente (voir Fig. 1).

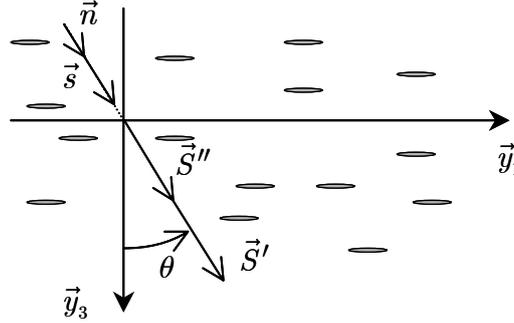


FIG. 1 – Ondes planes incidente et cohérente de lenteurs de phase respectives, $\vec{s} = s_T \vec{n}$ et $\vec{S} = \vec{S}' + i\vec{S}'' = (S' + iS'')\vec{n}$, se propageant dans un milieu contenant une distribution aléatoire de fissures plates mutuellement parallèles (longueur $2a$, densité surfacique n_0).

Considérons une onde de cisaillement antiplane d'amplitude u_0 et de pulsation ω . Sa propagation selon la direction \vec{n} dans la matrice vierge de fissures, est régie par le vecteur d'onde $\vec{k}_T = k_T \vec{n} = \omega s_T \vec{n}$, où la vitesse de phase s_T est telle que :

$$s_T^2 = \rho_0 / \mu_0. \quad (1)$$

Le déplacement de cette onde incidente est parallèle à la direction y_2 :

$$\vec{u} = u_2 \vec{e}_2 = u_0 \exp[i\omega(\vec{s} \cdot \vec{y})] \vec{e}_2, \quad (2)$$

où $\vec{s} = s_T \vec{n}$ désigne le vecteur vitesse de phase de l'onde incidente. Nous considérons la dépendance temporelle de la forme $e^{-i\omega t}$, mais par souci de clarté, ce terme multiplicatif temporel sera omis par la suite dans les expressions de déplacement et de contrainte associée.

En présence de la distribution de fissures, la propagation de l'onde incidente est affectée par des mécanismes de diffusion multiple [9]. Le champ acoustique résultant est alors décrit par la compétition des champs cohérent (qui résiste au désordre) et incohérent (qui se diffuse dans le plan de propagation). Il est montré que le champ cohérent, décrit par une moyenne configurationnelle sur le désordre, est antiplan et que le champ de déplacement associé s'écrit [9] :

$$\langle \vec{U} \rangle = u_0 \exp[i\omega(\vec{S}_{eff} \cdot \vec{y})] \vec{e}_2. \quad (3)$$

La propagation de l'onde de cisaillement antiplane cohérente est alors gouvernée par le vecteur d'onde à valeurs complexes [10, 9, 7] :

$$\vec{K}_{eff} (= K_{eff} \vec{n}) = \omega \vec{S}_{eff} (= \omega S_{eff} \vec{n}), \quad (4)$$

où K_{eff} et S_{eff} (que l'on notera ultérieurement K et S) désignent respectivement le nombre d'onde et la vitesse de phase effectifs.

Une alternative à cette description, est de considérer les propriétés effectives du milieu homogène équivalent (masse volumique, rigidités), qui supporte l'onde cohérente. Cette approche repose sur le choix *a priori* d'un modèle de loi de comportement pour le milieu effectif. La substitution du champ (3) dans l'équation de la dynamique conduit à :

$$\nabla \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = -\langle \rho \rangle \omega^2 \langle \vec{U} \rangle, \quad (5)$$

où $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ désigne le tenseur des contraintes effectif. En supposant que $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ et le tenseur des déformations effectif $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ sont reliés linéairement par le tenseur des rigidités effectif $\langle \mathbf{C} \rangle$ (loi de Hooke) :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbf{C} \rangle \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad (6)$$

la relation (5) se réduit à l'équation de dispersion suivante :

$$\langle C_{44} \rangle S_3^2 + \langle C_{66} \rangle S_1^2 - \langle \rho \rangle = 0, \quad (7)$$

associant propriétés de l'onde cohérente et du milieu ausculté vu comme un milieu effectif. Lorsque les hétérogénéités sont des fissures plates et parallèles, il a déjà été montré [3], dans le cadre du formalisme d'ondes moyennes [10], que :

$$\langle C_{44} \rangle = \mu_0 \left(1 - n_0 \frac{4\pi}{k_T^2} f_0(k_T) \right), \quad (8)$$

$$\langle C_{66} \rangle = \mu_0, \quad (9)$$

où $f_0(k_T)$ désigne la fonction de diffusion (vers l'avant) d'une fissure dans la matrice adjacente. Observons que la distribution de fissures n'affecte pas la propagation de l'onde cohérente se propageant selon la direction y_1 , Eq. (9). Ayant montré que la masse volumique effective associée à la propagation de l'onde antiplane cohérente selon les directions y_1 et y_3 est constante :

$$\langle \rho \rangle = \rho_0, \quad (10)$$

nous supposons dans la suite que l'inertie apparente du milieu effectif n'est pas affectée par la présence des fissures plates, quelle que soit la direction de propagation de l'onde :

$$\langle \rho \rangle(\vec{n}) = \rho_0, \quad \forall \vec{n} \in (y_1, y_3). \quad (11)$$

Les propriétés globales de l'onde antiplane cohérente étant définies à partir de celles connues selon les directions y_1 et y_3 , Eqs. (8)-(10), la question se pose de les prédire pour toute incidence ($\theta \in]0, \pi/2[$) à l'aide de l'équation de dispersion (7). La substitution dans cette équation, du vecteur lenteur de phase effectif $\vec{S} = S\vec{n}$ selon la direction de propagation \vec{n} , définie par l'angle θ , conduit à la relation suivante :

$$S^2 = \frac{\langle \rho \rangle}{\langle C_{44} \rangle \cos^2 \theta + \langle C_{66} \rangle \sin^2 \theta} = \frac{s_T^2}{\mu_0 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}. \quad (12)$$

La qualité de cette prédiction qualifera le choix de la loi de Hooke (6), comme modèle de comportement pour le milieu homogène équivalent. Dans la section suivante, est introduite la modélisation de référence qui permettra de discuter de la validité de l'approximation (12).

3 Ondes cohérentes sous incidence

3.1 Modélisation de référence

Dans le cadre du formalisme d'ondes moyennes [10], dans lequel ont été établies les expressions (8)-(12), a également été développé le calcul direct du vecteur d'onde effectif $\vec{K} = K\vec{n}$ de l'onde de cisaillement antiplane cohérente interagissant sous incidence oblique avec l'ensemble des fissures plates et parallèles. L'expression du nombre d'onde effectif établie [4] :

$$K^2 = k_T^2 + 4\pi n_0 \frac{\cot \theta}{2\pi} \int_{-a}^a b(\zeta) e^{-iK\zeta \sin \theta} d\zeta, \quad (13)$$

constitue pour la suite la formulation de référence. La fonction $b(\zeta)$ désigne la densité de dislocations généralement introduite pour décrire le saut de déplacements sur les lèvres de la fissure (Crack Opening Displacement).

3.2 Comparaison

Examinons l'aptitude de l'équation de dispersion (12) à prédire la propagation de l'onde de cisaillement antiplane cohérente pour un angle d'incidence θ ($\in]0, \pi/2[$). Les parties réelle et imaginaire de la lenteur de phase effective $S (= S' + iS'')$ sont évaluées à partir de l'équation (12) et de la relation implicite (13) (avec $K = \omega S$). Les résultats sont reportés sur la figure 2 pour plusieurs valeurs de fréquence réduite $\tilde{\omega} = k_T a$ et de densité de fissures $\varepsilon = n_0 a^2$. La différence entre les deux formulations est inférieure à 1% pour S' et à 25% pour S'' . Lorsque $\theta = \pi/2$, les fissures sont parallèles aux fronts d'onde et n'interagissent pas avec l'onde incidente, $S = s_T$.

Par ailleurs, les deux formulations coïncident parfaitement à incidence nulle, comme attendu. A basse fréquence, le concordance entre les deux approches est excellente. Lorsque la fréquence augmente, cela reste vrai pour la partie réelle S' alors que l'approximation de la partie imaginaire S'' se dégrade d'autant plus que la densité de fissures augmente. La dégradation étant maximale pour des directions de propagation proches de $\theta = \pi/4$, la confiance sur l'approximation de la lenteur S est d'autant plus importante que la direction de propagation est parallèle aux lèvres de fissures.

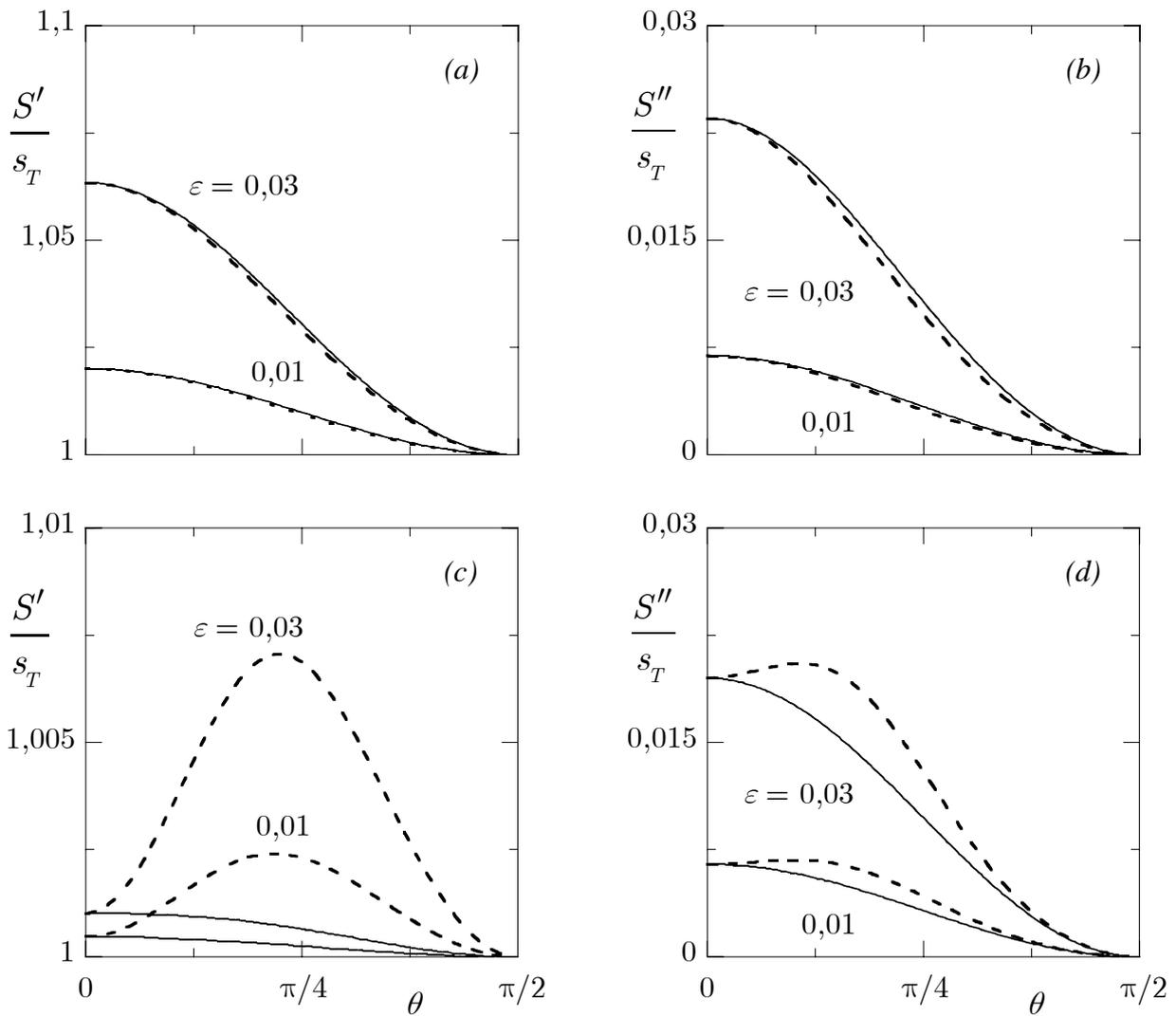


FIG. 2 – Parties réelle et imaginaire du vecteur lenteur de phase $\vec{S} = (S' + iS'')\vec{n}$ de l'onde antiplane cohérente se propageant selon la direction \vec{n} , définie par l'angle θ , pour différentes valeurs de fréquence réduite $\tilde{\omega} (= k_T a)$ et de densité de fissures ε . Comparaison entre les formulations (12) et (13), respectivement en traits continus et pointillés. (a) et (b) : $\tilde{\omega} = 0,8$; (c) et (d) : $\tilde{\omega} = 3$.

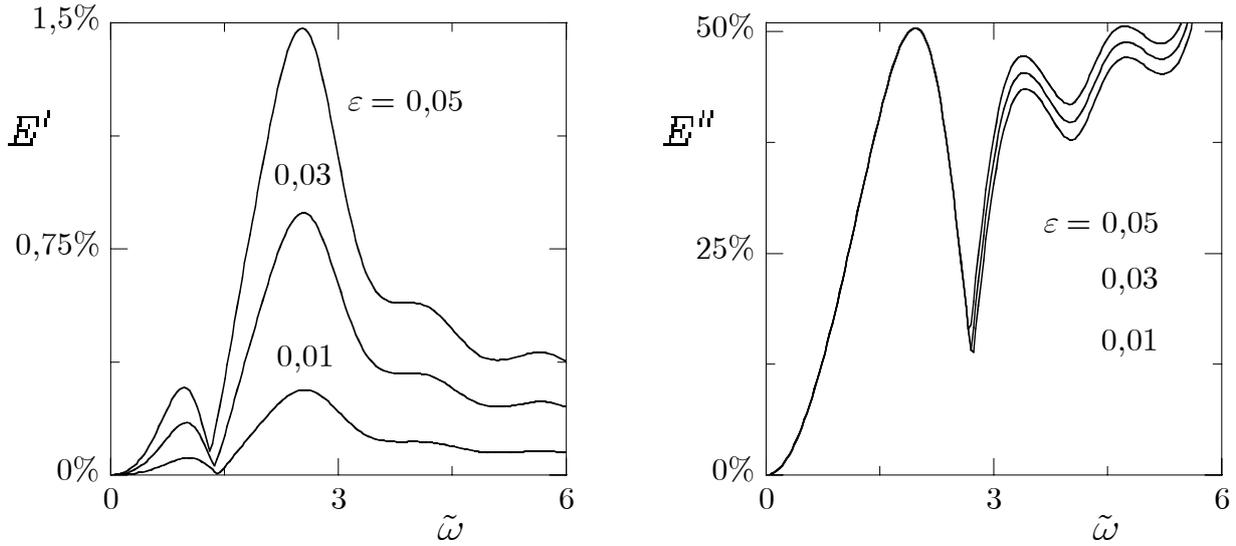


FIG. 3 – Maximum de l'erreur relative $E = E' + iE''$ pour les parties réelle et imaginaire de la lenteur de phase effective $S = S' + iS''$, en fonction de la fréquence réduite $\tilde{\omega} (= k_T a)$ et pour trois valeurs de densité de fissures ε . Pour une fréquence $\tilde{\omega}$ donnée et l'ensemble des valeurs de l'angle θ , seule l'erreur relative maximale entre les deux formulations est reportée.

L'impact de la fréquence sur la fiabilité de l'approximation (12) est illustrée Fig. 3, où est représenté en fonction de la fréquence $\tilde{\omega}$, le maximum de l'erreur relative $E = E' + iE''$ pour l'ensemble des angles d'incidence θ (évaluée comparativement à l'expression de référence (13)). Il apparaît que l'équation de dispersion (12) fournit des approximations de S' et S'' avec des erreurs inférieures à 1,5% et 50%.

Ces résultats sont consistants avec ceux obtenus par Eriksson *et al.* [8] pour des fissures se présentant sous formes de disques minces. Il a été en particulier établi que l'équation de dispersion (7) est appropriée pour approximer la lenteur de phase effective lorsque $\tilde{\omega} \leq 10$. La formulation de référence utilisée n'étant pas strictement applicable aux cas de l'incidence oblique, la démarche suivie est néanmoins discutable.

D'un point de vue général, notons que la différence entre les formulations (12) et (13) disparaîtrait si la rigidité dynamique à valeurs complexes $\langle C_{44} \rangle$, introduite dans l'équation de dispersion (12), dépendaient de l'angle d'incidence θ . Cette dépendance angulaire des propriétés dynamiques effectives a déjà été soulignée par ailleurs [15, 11, 6]. Nous l'illustrons ici par l'analyse basse fréquence de l'écart entre les deux formulations :

$$S_{\text{Eq. (13)}} - S_{\text{Eq. (12)}} = -\frac{1}{64} \frac{\phi \sin^2 2\theta}{(1 - \phi \cos^2 \theta)^{3/2}} \tilde{\omega}^2 \left(1 + O(\tilde{\omega}^4 \ln \tilde{\omega})\right) + iO(\tilde{\omega}^2 \ln \tilde{\omega}), \quad (14)$$

où $\phi = \pi\varepsilon$. Notons néanmoins, que les limites statiques de S' déduites des expressions (12) et (13) sont identiques, comme le premier ordre en $\tilde{\omega}^2$ du coefficient d'atténuation S'' .

4 Conclusion

La capacité de l'équation de dispersion (12) (appropriée au milieu homogène orthotrope) à estimer les propriétés de l'onde de cisaillement antiplane au sein d'une distribution aléatoire de fissures plates parallèles a été investiguée. Il s'est avéré que les rigidités effectives présentes dans l'équation de dispersion du modèle dit orthotrope (*a priori* en adéquation avec la symétrie élastique du milieu) doivent être dépendantes de la direction de propagation des ondes incidentes afin que celles-ci soient consistantes avec les résultats de référence.

Le choix de la loi de Hooke comme loi de comportement du milieu homogène équivalent s'est également avéré inappropriée à la modélisation du comportement dynamique de milieux périodiques [14]. Les problèmes structurels alors rencontrés ont été contournés en considérant les lois constitutives généralisées proposées par Milton et Willis [13], qui relient les contraintes effectives, à la fois aux déformations et aux impulsions (quantités de mouvement) effectives.

Remerciements

Cette étude a bénéficié du soutien du Conseil Régional d'Aquitaine et du programme CADMO du GIS Matériaux en Aquitaine.

Références

- [1] Aristégui C. et Angel Y. C., Effective material properties for shear horizontal acoustic waves in fiber composites, *Phys. Rev. E*, 75, 056607, 2007.
- [2] Aristégui C., Caleap M., Poncelet O., Shuvalov A. L. et Angel Y. C., Coherent wave propagation in solids containing spatially varying distributions of finite-size cracks, in *Ultrasonic Wave Propagation in Non Homogeneous Media*, Springer Proceedings in Physics (Springer, Berlin), 128, 423–435, 2009.
- [3] Caleap M. et Aristégui C., Effective antiplane properties in presence of frictional shear cracks, *J. Geophys. Res.: Solid Earth*, 115, B02302, 2010.
- [4] Caleap M. et Aristégui C., Coherent wave propagation in solids containing various systems of frictional shear cracks, *Waves Random Complex Media*, 20, 551–568, 2010.
- [5] Caleap M., Drinkwater B. W. et Wilcox P. D., Effective dynamic constitutive parameters of acoustic metamaterials with random microstructure, *New J. Phys.*, 14, 033014, 2012.
- [6] Caleap M., Aristégui C. et Poncelet O., Using dispersion equation for orthotropic media to model antiplane coherent wave propagation in cracked solids, *J. Acoust. Soc. Am.*, 133, 17–24, 2013.
- [7] Conoir J.-M. et Norris A. N., Effective wavenumbers and reflection coefficients for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers, *Wave Motion*, 47, 183–197, 2010.
- [8] Eriksson A. S., Boström A. et Datta S. K., Ultrasonic wave propagation through a cracked solid, *Wave Motion*, 22, 297–310, 1995.
- [9] Foldy L. L., The multiple scattering of waves. Part I: F=General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers, *Phys. Rev.*, 67, 107–119, 1945.
- [10] Kikuchi M., Dispersion and attenuation of elastic waves due to multiple scattering from cracks, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 27, 100–105, 1981.
- [11] Luppé F. et Conoir J.-M., Multiple scattering by cylinders randomly located in a fluid: Effective properties, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 269, 012015, 2011.
- [12] Martin P. A., Maurel A. et Parnell W. J., Estimating the dynamic effective mass density of random composites, *J. Acoust. Soc. Am.*, 128, 571– 577, 2010.
- [13] Milton G. W. et Willis J. R., On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics, *Proc. R. Soc. London. Ser. A*, 463, 855–880, 2007.
- [14] Shuvalov A. L., Kutsenko A. A., Norris A. N. et Poncelet O., Effective Willis constitutive equations for periodically stratified anisotropic elastic media, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 467, 1749–1769, 2011.
- [15] Twersky V., On scattering of waves by random distributions. I Free-space scatterer formalism, *J. Math. Phys.*, 3, 700–715, 1962.