УДК 378.65.011.56 doi: 10.20998/2220-4784.2018.40.07

О. П. ПРІЩЕНКО, Т. Т. ЧЕРНОГОР

АНАЛІЗ ПРИКЛАДІВ ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ХІМІЧНІЙ ТА ХАРЧОВІЙ ТЕХНОЛОГІЇ

В статті наведено приклади використання диференційних рівнянь в хімічній та харчовій технології. Зокрема, диференціальні рівняння широко використовуються в різноманітних галузях сучасної науки і техніки. Тому теорія диференціальних рівнянь, як окрема тема в курсі вищої математики, посідає важливе місце в системі підготовки фахівців з механіки, фізики, електротехніки, хімії та машинобудування. Показана можливість використання диференціальних рівнянь при розв'язанні різноманітних хімічних задач.

Ключові слова: хімія, диференціальне рівняння, реакція першого порядку, речовина, концентрація речовини, швидкість реакції, математична хімія, хімічна задача, математика в хімії.

О. П. ПРИЩЕНКО, Т. Т. ЧЕРНОГОР

АНАЛИЗ ПРИМЕРОВ ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ХИМИЧЕСКОЙ И ПИЩЕВОЙ ТЕХНОЛОГИИ

В статье приведены примеры решения дифференциальных уравнений в химической и пищевой технологии. В частности, дифференциальные уравнения широко используются в разнообразных областях современной науки и техники. Поэтому теория дифференциальных уравнений, как отдельная тема в курсе высшей математики, занимает важное место в системе подготовки специалистов по механике, физике, электротехнике, химии и машиностроению. Показана возможность использования дифференциальных уравнений при решении разнообразных химических задач.

Ключевые слова: химия, дифференциальное уравнение, реакция первого порядка, вещество, концентрация вещества, скорость реакции, математическая химия, химическая задача, математика в химии.

O. P. PRISHCHENKO, T. T. CHERNOGOR

ANALYSIS OF EXAMPLES OF APPLYING DIFFERENTIAL EQUATIONS IN CHEMICAL AND FOOD TECHNOLOGIES

The article deals with applying mathematics in chemistry and chemistry-technology. Specifically, differential equations are extensively used in various fields of science and technology. That is why the theory of differential equations, as a separate topic in the course of higher mathematics, is of major importance in educational system of future mechanics, physicists, electrical engineers, chemists, mechanical engineers etc. A possibility of using differential equations in solving various chemical problems is demonstrated. Some chemical technology problems are exemplified whose general solution is reduced to separating variables equations, first-order linear differential equations, second-order linear homogeneous differential equations. It is noteworthy that in solving chemical technology problems we deal with all of these types of differential equations. First-order homogeneous differential equations are applied in solving the following problems: chemical compounds chlorination; chemical agent consumption with maximum end product yield in complex reactions. Second-order non-homogeneous differential equations with constant coefficients are used in solving problems of a system of reverse reactions running at constant volume; continuous hydrolysis of solid fat in a spray column. Second-order differential equations which allow reduction of order are utilized for problems such as liquid movement in capillaries. Second-order linear non-homogeneous differential equations with constant coefficients are applied to solve various problems, e.g. to find a law of motion of a particle that falls as a precipitate in a liquid having no initial velocity.

Keywords: chemistry, differential equations, first-order reaction, substance, substance concentration, reaction rate, mathematical chemistry, chemical problem, mathematics in chemistry.

Вступ. Можливості розвитку компетентностей міжвузівських комплексних проектів тісно пов'язані з питаннями класифікації усіх видів взаємозв'язків дисциплін у межах курсів за навчальними програмами, а також вибором додаткових універсальних компетентностей. Математика для інженерів хіміків-технологів – це в першу чергу корисний інструмент для розв'язання багатьох хіміко-технологічних проблем та задач. Важко знайти такий розділ математики, який зовсім не використовується для вирішення цих проблем на усіх стадіях їх аналізу. Зокрема, основу статистичної термодинаміки складає теорія ймовірностей, органічна хімія для передбачення властивостей складних органічних молекул використовує теорію графів, основний інструмент хімічної кінетики – диференціальні рівняння, хімічна термодинаміка широко використовує методи топології та диференціальної геометрії [1–9].

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Метою представленого у статті наукового дослідження викладачів та студентів є підвищення конкурентоспроможності української технічної освіти на світовому ринку шляхом розробки та впровадження інноваційних моделей та методів. Хімічна та харчова технології вивчають властивості різновидів сировини та продуктів, залежність їх властивостей від умов технологічних режимів – температури, тиску, концентрації та ін. Тому дуже часто хімікам-технологам доводиться досліджувати функції однієї або кількох змінних. Як відомо, основний спосіб дослідження функції це аналіз її похідної [10–18]. Наприклад, при розв'язанні завдань з фізико-хімічним змістом можна рекомендувати таку послідовність дій:

1. Встановити, яким законом підпорядковується даний процес та вирішити, що вибрати за незалежну змінну (наприклад, час t) і що за шукану функцію (наприклад, $x = x(t)$).

2. Виходячи з умов завдання визначити початкові умови (наприклад, $x_0 = x(t_0)$).

3. Відобразити всі наявні в задачі величини через *t, x, x′*, використовуючи при цьому фізичний зміст похідної як швидкості зміни змінної x в досліджуваному процесі.

4. Виходячи з умов завдання та на підставі фізичного закону, якому підпорядковується даний процес, скласти диференціальне рівняння.

5. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

6. За початковими умовами знайти частинний розв'язок.

При розв'язанні великої кількості фізико-хімічних задач слід знати, що швидкість зміни змінної величини пропорційна значенням цієї змінної в першій степені. Такі процеси називаються процесами першого порядку і описуються рівнянням: $\frac{dx}{dt} = kx.$ У разі хімічної реакції величини, що входять до неї, означають: x – кількість речовини в одиниці об'єму, k – постійну величину при заданій температурі (стала швидкості реакції), t – час.

До таких процесів слід віднести радіоактивний розпад, зміна концентрації розчину, хімічну реакцію, що протікає відповідно до стехіометричного рівняння типу $A \rightarrow B$, закон охолодження тіла та ін.

Викладання основного матеріалу досліджень. Розглянемо деякі задачі для розв'язання яких застосовуються диференціальні рівняння.

Приклад. Ємність, стінки якої утворюють деяку поверхню обертання з вертикальною віссю, наповнена рідиною до висоти *h*. Нехай у дні посудини зроблено отвір з площею *f*, через який рідина витікає з посудини. Потрібно визначити час, необхідний для того, щоб рідина опустилася до заданого рівня або витекла повністю. За умови, що протягом всього процесу не відбувається припливу рідини в посудину і що різницею тиску повітря в поверхні і у вихідного отвору можна знехтувати, визначити час, який знадобиться для того, щоб рівень рідини в циліндричній посудині знизився внаслідок витікання рідини на 0,6 м, якщо діаметр циліндричної посудини 3 м, отвір у дні посудини має діаметр 57 мм, посудина, наповнена рідиною до 1,8 м. Визначити, через скільки часу витече вся вода з посудини.

Розв'язання. Кількість рідини dQ, що випливає за час $d\tau$ зі швидкістю ω_1 через отвір, очевидно, одно $f\omega_1 d\tau$. Рівень рідини, поверхня F якої протягом часу $d\tau$ буде вважатися незмінною, знизиться за цей час з деякою швидкістю ω на висоту $\omega d\tau$, а отже, обсяг рідини в посудині зменшиться на величину $F\omega d\tau$. Ця величина повинна дорівнювати величині dQ. Звідси отримуємо:

$$dQ = f\omega_1 d\tau = F\omega d\tau \qquad (1)$$

$$\text{або } f\omega_1 = F\omega. \qquad (2)$$

Згідно із законом, швидкість ω_1 витікання рідини з отвору з площею поперечного перерізу f дорівнює швидкості, яку набуває вільно падаюче тіло, пройшовши відстань, рівну висоті стовпа рідини над отвором.

Введемо тепер прямокутну систему координат, взявши за вісь *Ox* вісь посудини, а за вісь *Oy* будь-яку перпендикулярну до неї пряму, що лежить в площині, з якою співпадала поверхня рідини на початку процесу (в момент $\tau = 0$). Вісь *Ox* направимо вертикально вниз. Тоді, згідно з вищевказаним законом ми отримаємо для швидкості витікання ω_1 з отвору в момент τ наступний вираз $\omega_1 = \sqrt{2g(h-x)},$ де g – прискорення сили тяжіння; h – початкова висота стовпа рідини (при $\tau = 0$); x – рівень в момент τ. Підставляючи значення ω_1 у формулу (2), отримаємо вираз для швидкості ω падіння рівня в момент τ:

$$\omega = \frac{f}{F}\sqrt{2g(h-x)} \qquad (3)$$

Якщо ємність має форму вертикального циліндра або призми, то F постійна: якщо ж ємність являє собою тіло обертання, твірна якого має рівняння $y = f(x)$ (рис. 1), то $F = \pi y^2$.

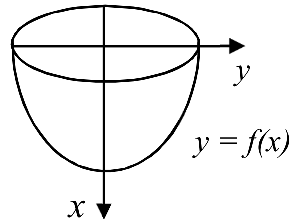


Рис. 1 – Графічна модель процесу

Підставляючи $\frac{dx}{d\tau}$ в рівняння (3) замість ω_1, отримаємо:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{f}{F}\sqrt{2g(h-x)} \text{ або } d\tau = \frac{1}{f\sqrt{2g}} \cdot \frac{Fdx}{\sqrt{h-x}}.$$

Розв'язуючи рівняння, маємо:

$$\tau = \frac{F}{f\sqrt{2g}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{h-x}}; \quad \tau = -\frac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}\sqrt{h-x} + C.$$

Скористаємось початковими умовами: в початковий момент закінчення зниження рівня рідини дорівнює нулю. Значить, якщо $\tau = 0$, то $x = 0$.

Отже:

$$C = \frac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}\sqrt{h},$$

звідки $\tau = \frac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}(\sqrt{h} - \sqrt{h-x}).$

Отримавши формулу, що дозволяє визначити час, необхідний для опускання рідини до заданого рівня, підставимо в неї дані задачі і визначимо час, необхідний для того, щоб рівень рідини знизився на 0,6 м, $g = 9{,}8$ м/с^2; $h = 1{,}8$ м; $x = 0{,}6$ м:

$$F_{\text{пос}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 9^2}{4} = 53{,}6 \text{ м}^3;$$

$$f_{\text{отв}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}057^2}{4} = 0{,}003;$$

$$\tau = \frac{53{,}6 \cdot 1{,}4}{0{,}003 \cdot \sqrt{9{,}8}}(\sqrt{1{,}8} - \sqrt{1{,}2}) \approx 26 \text{ хв.}$$

Для визначення часу, необхідного для того, щоб вся рідина витекла з посудини $x = h$, отримуємо формулу:

$$\tau = \frac{F\sqrt{2}}{f\sqrt{g}}\sqrt{h}, \quad \tau = \frac{53{,}6 \cdot 1{,}4}{0{,}003 \cdot \sqrt{9{,}8}}\sqrt{1{,}8} = 169 \text{ хв.}$$

Приклад. Отримати рівняння хімічної реакції, що складається з двох реакцій першого порядку $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ (послідовна реакція), за умови, що відомі сталі швидкості реакцій $x_{A_0}, x_{B_0}, x_{C_0}$, а також визначити концентрацію x_B в момент часу 120 с, якщо $x_{A_0} = 0{,}28\ кмоль/м^3$, $k_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-3} c^{-1}$, $k_2 = 5{,}5 \cdot 10^{-3} c^{-1}$, $x_{B_0} = 0$, $x_{C_0} = 0$.

Розв'язання. Нехай x_A, x_B, x_C – відповідно концентрації речовин *A, B, C*.

Рівняння швидкості реакцій для речовини *A*:

$$\frac{dx_A}{dt} = -k_1 x_A. \tag{4}$$

Речовина *B* утворюється з речовини *A*, тому швидкість утворення речовини *B* пропорційна концентрації речовини *A* у відповідний момент часу *t*. Сама речовина *B* є джерелом речовини *C* і швидкість розпаду (зворотного процесу утворення) речовини *B* пропорційна його концентрації у відповідний момент часу. Ці два процеси протікають одночасно; швидкість зміни кількості *B* визначається рівнянням [10–12, 14-17]:

$$\frac{dx_B}{dt} = k_1 x_A - k_2 x_B. \tag{5}$$

Швидкість реакції утворення речовини *C* визначається концентрацією x_B, відповідне рівняння має вигляд:

$$\frac{dx_C}{dt} = k_2 x_B. \tag{6}$$

Для рівняння (4) маємо:

$$x_A = x_{A_0} e^{-k_1 t}. \tag{7}$$

Якщо формулу (7) використаємо у рівняння (4) і (5), то отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dx_B}{dt} + k_2 x_B = k_1 x A_0 e^{-k_1 t}.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримаємо:

$$\frac{dx_B}{dt} + k_2 x_B = k_1 x_{A_0} e^{-k_1 t}, \ x_B = U(t)V(t),$$

$$x_B' = U'(t)V(t) + U(t)V'(t),$$

$$U'V + UV' + k_2 UV = k_1 x_{A_0} e^{-k_1 t}, \ V' + k_2 V = 0,$$

$$\int \frac{dV}{V} = -k_2 \int dt, \ln V = -k_2 t, V = e^{-k_2 t},$$

$$U' e^{-k_2 t} = k_1 x_{A_0} e^{-k_1 t},$$

$$dU = k_1 x_{A_0} e^{-(k_1 - k_2)t}, U = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-(k_1 - k_2)t} + C,$$

$$x_B = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-(k_1 - k_2)t} e^{-k_2 t} + C e^{-k_2 t},$$

при $t = 0$, $x_B = x_{B_0}$:

$$x_{B_0} = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} + C; \ C = x_{B_0} - \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1}$$

$$x_B = \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + x_{B_0} e^{-k_2 t} - \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1} e^{-k_2 t} =$$

$$= x_{B_0} e^{-k_2 t} + \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}). \tag{8}$$

Зауважимо, що x_C легше визначити не з рівняння (6), а з рівнянь матеріального балансу (7) і (8).

Рівняння матеріального балансу має вигляд:

$$x_{A_0} + x_{B_0} + x_{C_0} = x_A + x_B + x_C; \text{ звідси}$$

$$x_C = x_{A_0} + x_{B_0} + x_{C_0} - x_A - x_B = x_{A_0} + x_{B_0} + x_{C_0} - x_{A_0} e^{-k_1 t} -$$

$$- x_{B_0} e^{-k_2 t} - \frac{k_1 x_{A_0}}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Отримавши рівняння послідовної хімічної реакції, визначимо з рівняння (8) концентрацію x_B в заданий момент часу при заданих початкових умовах:

$$x = 0 \cdot e^{-5{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 120} + \frac{2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}28}{5{,}5 \cdot 10^{-3} - 2{,}5 \cdot 10^{-3}} \cdot$$

$$(e^{-2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 120} - e^{-5{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 120}) \approx 0{,}11 кмоль/м^3$$

Приклад. Лівий кінець стержня, довжина якого дорівнює L підтримується при постійній температурі T_1, а правий – при постійній температурі $T_2 < T_1$.

Стрижень зроблений з металу з теплопровідністю λ у вигляді бруска малої товщини з периметром поперечного перерізу P м і площею перерізу A м^2. Коефіцієнт тепловіддачі від поверхні стрижня до навколишнього середовища α може бути прийнятий постійним.

Температура навколишнього середовища дорівнює T_s. Потрібно встановити зв'язок між температурою стержня в будь-якій точці і відстанню цієї точки від гарячого кінця, за умови, що стержень досить тонкий; якщо теплопровідність його велика, то ми можемо без суттєвої помилки знехтувати температурними градієнтами в напрямках, перпендикулярних до осі стержня, і прийняти постійну температуру в кожній точці поперечного перерізу, перпендикулярного осі Ox.

Розв'язання. Дослідимо процес розповсюдження тепла в елементарному відрізку довжиною dx на відстані x від того кінця стержня, температура якого t_1 (рис. 2).

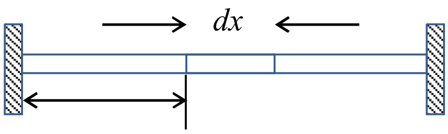


Рис. 2 – Графічна модель теплообміну

Кількість тепла, що проходить за час $d\tau$ через перетин стержня, що знаходиться на відстані x від початку стержня, згідно теорії теплопередачі, буде дорівнювати:

$$-\lambda A \frac{dT}{dx} d\tau.$$

Кількість тепла, що пройшло за час $d\tau$ через поперечний переріз, що знаходиться на відстані $x + dx$ від початку, буде:

$$-\lambda A \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) d\tau.$$

Ділянка стержня, розташована між перерізами, віддаленими від початку на відстанях x і $x + dx$, внаслідок теплопровідності набуває за час $d\tau$ кількість тепла, що дорівнює різниці вказаних кількостей, тобто:

$$\lambda A \frac{d^2T}{dx^2} dx d\tau.$$

За той же час втрата тепла від цієї ділянки в навколишнє середовище буде становити:

$$\alpha P dx (T - T_s) d\tau.$$

Але так як досліджуваний нами процес є стаціонарним, то

$$\lambda A \frac{d^2T}{dx^2} dx d\tau = \alpha P dx (T - T_s) d\tau.$$

Остаточно приходимо до наступного диференціального рівняння:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\alpha P}{\lambda A}(T - T_s). \qquad (9)$$

Нехай $\dfrac{\alpha P}{\lambda A} = a^2$. Зауважимо, що при $T_s = const$:

$$\frac{d(T - T_s)}{dx} = \frac{dT}{dx}; \ \frac{d^2(T - T_s)}{dx^2} = \frac{d^2T}{dx^2}.$$

Тому рівняння може бути переписано у наступному вигляді:

$$\frac{d^2(T - T_s)}{dx^2} - a^2(T - T_s) = 0.$$

Це рівняння має постійні коефіцієнти. Його загальний розв'язок буде:

$$T - T_s = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}. \qquad (10)$$

При розв'язанні прикладних задач для знаходження довільних сталих можуть бути використані граничні умови: в початковій точці стержня, тобто при $x = 0$, $T = T_1$ та у кінцевій, тобто при $x = \alpha$, $T = T_2$. Тоді з рівняння (10) знаходимо:

$$T_1 - T_s = C_1 + C_2; T_2 - T_s = C_1 e^{aL} + C_2 e^{-aL_1}. \qquad (11)$$

З цих рівнянь можна виразити C_1 і C_2 через відомі величини. Розв'язуючи рівняння (11) щодо C_1 і C_2 отримаємо:

$$C_1 = \frac{(T_2 - T_s) - (T_1 - T_s)e^{-aL_1}}{2\operatorname{sh} aL},$$

$$C_2 = \frac{(T_1 - T_s)e^{aL_1} - (T_2 - T_s)}{2\operatorname{sh} aL}.$$

Підстановка значень C_1 і C_2 в рівняння (11) дає:

$$T - T_s = \frac{(T_2 - T_s)\operatorname{sh} ax + (T_1 - T_s)\operatorname{sh} a(L - x)}{\operatorname{sh} aL}.$$

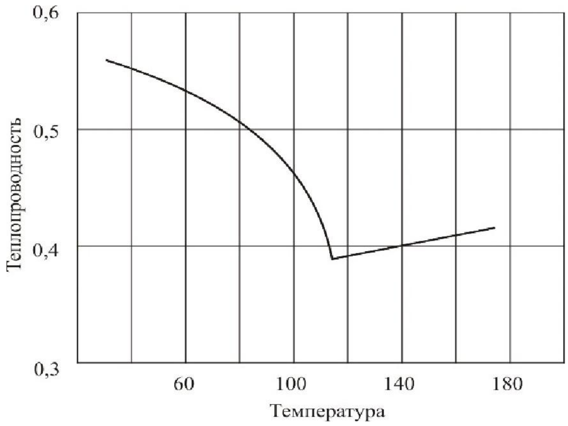
Отримавши рівняння, що встановлює залежність між температурою T і координатою x точки нагрітого стержня, визначимо, зокрема, температуру стержня завдовжки 1 м в точці, віддаленій від лівого кінця на відстань 0,4 м, за умови:

$$T_1 = 0\,;\ \alpha = 10\ \text{ккал/м}^2 \cdot \text{год} \cdot \text{град},\ \frac{A}{P} = 72,5\,;$$

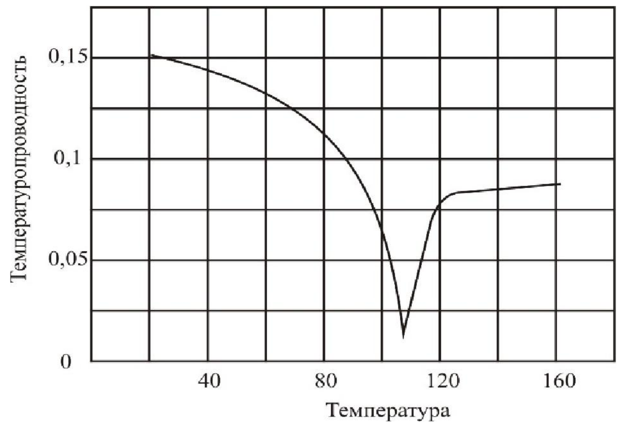
$$\lambda = 330\ \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{год} \cdot \text{град}};\ a = \sqrt{\frac{\alpha P}{xA}} = 1,48.$$

$$T = 47,9 \cdot \text{sh}1,48 \cdot 0,4 + 95,8 \cdot \text{sh}1,48(1-0,4)\,;$$
$$T = 126,7°.$$

Експериментальні залежності виготовленого з поліетилену виробу мають графічні залежності коефіцієнта теплопровідності λ (рис. 3а) і коефіцієнта температуропроводности α (рис. 3б), так само як і теплоємності c_p (рис. 4) нелінійного характеру, що ускладнює розв'язання математичного опису процесів теплопровідності [10–18].



а



б

Рис. 3 – Залежність коефіцієнтів від температури для ПЭВП: а – теплопровідності; б – температуропроводности

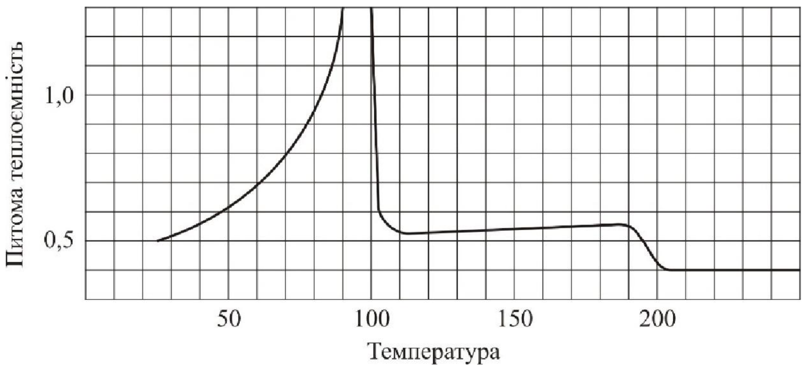


Рис. 4 – Залежність питомої теплоємності (c_p) від температури для ПЭВП

Різка зміна значень коефіцієнтів теплопровідності й температуропроводности при температурі фазового переходу пов'язана зі зміною значень c_p у цій області, як це показано на рисунку 4. Розтягнута область переходу пов'язана з полідисперсністю полімеру й розходженнями в здатності кристалізуватися для макромолекул різної довжини. В узагальненій формі незалежної від обраної системи координат рівняння теплопровідності має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{G}{\rho C_p},$$

де α – коефіцієнт температуропроводности; ∇^2 – оператор Лапласа для T; G – інтенсивність внутрішнього тепловиділення в системі віднесена до одиниці об'єму, кал/см^3·с.

Висновки та перспективи подальшого розвитку даного напрямку. У пропонованій роботі наведені деякі задачі хімічної технології, загальний розв'язок яких призводить нас до рівнянь з відокремлюваними змінними, до лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, до лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку. Слід зазначити, що при розв'язанні задач хімічної технології ми зустрічаємося з усіма цими типами диференціальних рівнянь.

Так, з однорідним диференціальним рівнянням першого порядку ми зустрічаємося при розв'язанні задач: процес хлорування органічних сполук, витрата реагенту при максимальному виході цільового продукту в складних реакціях; з неоднорідними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами – при розв'язанні задач:

система оборотних реакцій, що протікають при постійному об'ємі, безперервний процес гідролізу твердого жиру в розпилювальній колонці; з диференціальними рівняннями другого порядку, що допускають зниження порядку – рух рідини в капілярах; з лінійним неоднорідними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами – при розв'язанні багатьох задач, зокрема, наприклад, при знаходженні закону руху частинки, що випадає в осад в рідині без початкової швидкості.

В даній статті ми розглянули тільки декілька прикладів, які дають уявлення про те, як математика використовується в хімії. Вони формують хоча, звичайно, неповне уявлення про задачі, які розв'язують хіміки за допомогою математики.

Взаємодія хіміків та математиків не обмежується розв'язання тільки хімічних задач. Інколи і в хімічній технології виникають абстрактні задачі, які приводять навіть до появи нових областей математики. Так, математики до цього часу працюють над доведенням другого закону термодинаміки, який є одним із основних законів хімії, а для самих інженерів хіміків його справедливість очевидно випливає із всіх відомих на цей час експериментальних даних про хімічні речовини, хімічні реакції і відповідні хімічні технології.

Аналізуючи історію розвитку науки можна прийти до висновку, що на межах різних областей знань можуть виникати дуже цікаві явища. І хоча математики та інженери хіміки-технологи мислять зовсім по різному, ті випадки, коли їм вдається досягти взаємодії, призводять до появи а нетривіальних результатів і сприяють збагаченню обох цих наук. Завдяки таким діям можливо досягнути більш конкретизованих результатів за деякими питаннями з теми інноваційних досліджень.

Таким чином, заняття зі студентами та їх самостійна робота формують вміння при формулюванні висновків з проведеної роботи, наприклад, оформлення об'єктів ІВ [19–23]:

- класифікація об'єктів права інтелектуальної власності відповідно до діючого законодавства;
- обирання найбільш доцільного для кожного окремого випадку способу охорони права;
- оформлення відповідної документації в галузі охорони прав інтелектуальної власності.

При цьому у студентів виробляються необхідні навички: користування комп'ютерною технікою з метою виявлення закономірностей процесів та методів дослідження; проведення патентного пошуку та реалізації отриманих результатів; публічний захист наукової розробки, аналітичний компетентністній аналіз наукової та прикладної частини і т.і.

Список літератури

1. Высшая математика в примерах и задачах : учеб. пособ. : в 2 т. Т. 2 / Ю.Л. Геворкян, Л.А. Балака, С.С. Габриелян и др. ; под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 376 с.
2. Вища математика в прикладах і задачах : у 2 т. Т. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди : навч. посіб. / Л.В. Курпа, Н.О. Кириллова, Г.Б. Лінник та ін. ; за ред. Л.В. Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2009. – 432 с.
3. Геворкян Ю.Л. Краткий курс высшей математики : учеб. пособ. : в 2 ч. Ч. 2 / Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев, Н.А. Чикина. – Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 476 с.
4. Диференціальні рівняння та їх застосування : навч.-метод. посіб. / Пріщенко О.П., Черногор Т.Т. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – 88 с.
5. Ерёмин В. В. Математика в химии. – 2-е изд., испр. / В.В. Ерёмин. – М. : МЦНМО, 2016. – 64 с.
6. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 2 / Н.О. Чікіна, А.М. Гайдаш, В.Д. Крупка та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2013. – 216 с.
7. Методические указания к решению расчетных заданий по теме «Дифференциальные уравнения и их приложения» по курсу высшей математики для студентов химических специальностей / сост. А.М. Мануйлова, Е.И. Орлова, Т.Т. Черногор и др. – Харьков : ХПИ, 1989. – 76 с.
8. Скатецкий В.Г. Математические методы в химии : учеб. пособ. для студентов вузов / В.Г. Скатецкий, Д.В. Свиридов, В.И. Яшкин. – Минск : ТетраСистемс, 2006. – 368 с.
9. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах : у 3 ч. Ч. 3 : Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин. – Харків : ХНУРЕ, 2002. – 596 с.
10. Бухкало С. І. Деякі моделі процесів хімічного спінювання вторинного поліетилену // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Х.: НТУ «ХПІ». 2017, № 18 (1240), – с. 35–45.
11. Бухкало С. І. *Загальна технологія харчової промисловості: тестові завдання* (підручник з грифом МОНУ), Київ: Центр учбової літератури, 2014. – 412 с.
12. Бухкало С. І., Іглін С. П. Деякі моделі дослідження структурно-хімічних змін при експлуатації полімерних виробів. *Інтегровані технології та енергозбереження*. Х.: НТУ «ХПІ», 2016, № 3, – с. 52–57.
13. *Бухкало С.И.* Математическое моделирование процессов ресурсо- и энергосбережения для полиэтиленовых отходов / Бухкало С.И., Кукленко Д.В., Борхович А.А. и др. // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ». 2010, – № 32, – с. 117–122.
14. *Бухкало С.І.* Деякі властивості полімерних відходів у якості сировини для енерго- і ресурсозберігаючих процесів // Інтегровані технології та енергозбереження. – Х.: НТУ «ХПІ». 2014, – № 4, – с. 29–33.
15. *Бухкало С.І.* Моделі енергетичного міксу для утилізації полімерної частки ТПВ // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ». 2016, – № 19 (1191), – с. 23–32.
16. *Бухкало С.И.* Об утилизации полимерных отходов как комплексе инновационных проектов / Бухкало С.И., Сериков А.В., Ольховская О.И. и др. // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ». 2012, – № 10, – с. 160–166.
17. *Бухкало С.І.* Деякі моделі процесів хімічного спінювання вторинного поліетилену // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ». 2017, – № 18 (1240), – с. 35–45.
18. Бухкало С.І., Соловей В.М., Іглін С.П., Ольховська О.І. та ін. Алгоритм управління ефективним очищенням стічних вод комплексних підприємств. Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXVI міжн. н-пр. конф. MicroCAD-2018, 16-18 травня 2018р. Ч. ІІ. / за ред. проф. Сокола Є.І. Х :.НТУ «ХПІ». – с. 204.
19. S. Bukhkalo, A. Ageicheva, O. Komarova. Distance learning main trends. Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXVI міжн. н-пр. конф.

MicroCAD-2018, 16-18 травня 2018р. Ч. II / за ред. проф. Сокола Є.І. Х :.НТУ «ХПІ». – с. 205.

20. Бухкало С.І., Іглін С.П., Ольховська О.І., Соловей В.М. Комплексні методи навчання як основа розвитку фахових компетентностей ВНЗ в НТУ «ХПІ» // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Х.: НТУ «ХПІ». 2017, № 18, – с. 9–19.
21. Бухкало С.І., Іглін С.П. Деякі моделі дослідження структурно-хімічних змін при експлуатації полімерних виробів. Інтегровані технології та енергозбереження. Х.: НТУ «ХПІ», 2016, № 3, – с. 52–57.
22. Бухкало С.І., Білоус О.В., Демидов І.М. Розробка комплексного антиоксиданту із екстрактів листя горіху волоського та календули. Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015, № 1/6(73), – с. 22–26. Харьков : Технологический центр.
23. Bukhkalo S.I., Klemeš J.J., Tovazhnyanskyy L.L., Arsenyeva O.P., Kapustenko P.O., Perevertaylenko O.Y. Eco-friendly synergetic processes of municipal solid waste polymer utilization. Chemical Engineering Transactions, Vol.70, (2018), pp.2047–2052.

References (transliterated)

1. Vysshaja matematika v primerah i zadachah : ucheb. posob. : v 2 t. T. 2 / Ju.L. Gevorkjan, L.A. Balaka, S.S. Gabrieljan i dr. ; pod red. Ju.L. Gevorkjana. – Har'kov : Vid-vo «Pidruchnik NTU «KhPI», 2011, – 376 p.
2. Vishha matematika v prikladah i zadachah : u 2 t. T. 2 : Diferencial'ne ta integral'ne chislennja funkcij bagat'oh zminnih. Diferencial'ni rivnjannja ta rjadi : navch. posib. / L.V. Kurpa, N.O. Kirillova, G.B. Linnik ta in. ; za red. L.V. Kurpi. – Harkiv : NTU «KhPI», 2009, – 432 p.
3. Gevorkjan Ju.L. Kratkij kurs vysshej matematiki : ucheb. posob. : v 2 ch. Ch. 2 / Ju.L. Gevorkjan, A.L. Grigor'ev, N.A. Chikina. – Har'kov : Vid-vo «Pidruchnik NTU «KhPI», 2011, – 476 p.
4. Diferencial'ni rivnjannja ta ih zastosuvannja : navch.-metod. posib. / Prishhenko O.P., Chernogor T.T. – Harkiv : NTU «KhPI», 2017, – 88 p.
5. Erjomin V. V. Matematika v himii. – 2-e izd., ispr. / V.V. Erjomin. – M. : MCNMO, 2016, – 64 p.
6. Zbirnik rozrahunkovo-grafichnih zavdan' z vishhoї matematiki : u 2 ch. Ch. 2 / N.O. Chikina, A.M. Gajdash, V.D. Krupka ta in. ; za red. N.O. Chikinoї. – Harkiv : Vid-vo «Pidruchnik NTU «KhPI», 2013, – 216 p.
7. Metodicheskie ukazanija k resheniju raschetnyh zadanij po teme «Differencial'nye uravnenija i ih prilozhenija» po kursu vysshej matematiki dlja studentov himicheskih special'nostej / sost. A.M. Manujlova, E.I. Orlova, T.T. Chernogor i dr. – Har'kov : KhPI, 1989, – 76 p.
8. Skateckij V.G. Matematicheskie metody v himii : ucheb. posob. dlja studentov vuzov / V.G. Skateckij, D.V. Sviridov, V.I. Jashkin. – Minsk : TetraSistems, 2006, – 368 p.
9. Tevjashev A.D. Vishha matematika u prikladah ta zadachah : u 3 ch. Ch. 3 : Diferencial'ni rivnjannja. Rjadi. Funkciї kompleksnoї zminnoї. Operacijne chislennja : navch. posib. / A.D. Tevjashev, O.G. Litvin. – Kharkiv : HNURE, 2002, – 596 p.
10. Bukhkalo S. I. Dejaki modeli procesiv himichnogo spinjuvannja vtorinnogo polietilenu // Visnik NTU «KhPI». Kharkov: NTU «HPI». 2017, № 18 (1240), – c. 35–45.
11. Bukhkalo S. I. Zagal'na tehnologija harchovoї promislovosti: testovi zavdannja (pidruchnik z grifom MONU), Kiїv: Centr uchbovoї literaturi, 2014, – 412 p.
12. Bukhkalo S. I., Iglin S. P. Dejaki modeli doslidzhennja strukturno-himichnih zmin pri ekspluatacii polimernih virobiv. Integrovani tehnologiї ta energozberezhennja. Kharkov: NTU «KhPI», 2016, No. 3, – pp. 52–57.
13. Bukhkalo S.I. Matematicheskoe modelirovanie processov resurso- i jenergosberezhenija dlja polijetilenovyh othodov / Buhkalo S.I., Kuklenko D.V., Borhovich A.A. i dr. // Visnik NTU «HPI». – Kharkov: NTU «KhPI». 2010, No. 32, – pp. 117–122.
14. Bukhkalo S.I. Dejaki vlastivosti polimernih vidhodiv u jakosti sirovini dlja energo- i resursozberigajuchih procesiv // Integrovani tehnologiї ta energozberezhennja. – Kharkov: NTU «KhPI». 2014. – No. 4. – pp. 29–33.
15. Bukhkalo S.I. Modeli energetichnogo miksu dlja utilizaciї polimernoї chastki TPV // Visnik NTU «HPI». – Kharkov: NTU «HPI». 2016, No. 19 (1191), – pp. 23–32.
16. Bukhkalo S.I. Ob utilizacii polimernyh othodov kak komplekse innovacionnyh proektov / Buhkalo S.I., Serikov A.V., Ol'hovskaja O.I. i dr. // Visnik NTU «HPI». – Kharkov: NTU «KhPI». 2012, No. 10, – pp. 160–166.
17. Bukhkalo S.I. Dejaki modeli procesiv himichnogo spinjuvannja vtorinnogo polietilenu // Visnik NTU «HPI». – H.: NTU «HPI». 2017, No. 18 (1240), – pp. 35–45.
18. Bukhkalo S.I., Solovej V.M., Iglin S.P., Ol'hovs'ka O.I. ta in. Algoritm upravlinnja efektivnim ochishhennjam stichnih vod kompleksnih pidpriєmstv. Informacijni tehnologiї: nauka, tehnika, tehnologija, osvita, zdorov'ja: tezi dopovidej HXVI mizhn. n-pr. konf. MicroCAD-2018, 16-18 travnja 2018r. Ch. II. / za red. prof. Sokola Є.I. Kharkov:.NTU «KhPI». – p. 204.
19. S. Bukhkalo, A. Ageicheva, O. Komarova. Distance learning main trends. Informacijni tehnologiї: nauka, tehnika, tehnologija, osvita, zdorov'ja: tezi dopovidej HXVI mizhn. n-pr. konf. MicroCAD-2018, 16-18 travnja 2018r. Ch. II / za red. prof. Sokola Є.I. Kharkov: NTU «KhPI». – p. 205.
20. Bukhkalo S.I., Iglin S.P., Ol'hovs'ka O.I., Solovej V.M. Kompleksni metodi navchannja jak osnova rozvitku fahovih kompetentnostej VNZ v NTU «KhPI» // Visnik NTU «KhPI». Kharkov: NTU «KhPI». 2017, No. 18, – pp. 9–19.
21. Bukhkalo S.I., Iglin S.P. Dejaki modeli doslidzhennja strukturno-himichnih zmin pri ekspluatacii polimernih virobiv. Integrovani tehnologiї ta energozberezhennja. Kharkov: NTU «KhPI», 2016, No. 3, – pp. 52–57.
22. Bukhkalo S.I., Bilous O.V., Demidov I.M. Rozrobka kompleksnogo antioksidantu iz ekstraktiv listja gorihu volos'kogo ta kalendulr. *Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij.* No.1/6(73), 2015, – pp.22–26. Harkiv : «Tehnologicheskij centr».
23 Bukhkalo S.I., Klemeš J.J., Tovazhnyanskyy L.L., Arsenyeva O.P., Kapustenko P.O., Perevertaylenko O.Y. Eco-friendly synergetic processes of municipal solid waste polymer utilization. Chemical Engineering Transactions, 2018, Vol.70, – pp.2047–2052.

Надійшла (received) 23.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Пріщенко Ольга Петрівна (Прищенко Ольга Петровна, Prishchenko Olga Petrivna) – асистент кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0530-2131 e-mail: priolga2305@gmail.com

Черногор Тетяна Тимофіївна (Черногор Татьяна Тимофеевна, Chernogor Tetyana Timofiyivna) – старший викладач кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7823-7628 e-mail: tatyanachernogor54@gmail.com