

Univerza  
v Ljubljani  
Fakulteta  
*za gradbeništvo  
in geodezijo*



Jamova cesta 2  
1000 Ljubljana, Slovenija  
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

**DRUGG** – Digitalni repozitorij UL FGG  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

V zbirki je izvorna različica izdajatelja.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

University  
of Ljubljana  
Faculty of  
*Civil and Geodetic  
Engineering*



Jamova cesta 2  
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia  
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

**DRUGG** – The Digital Repository  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is a publisher's version PDF file.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Vrečko, A., Ambrožič, T. 2013. Deformacijska analiza po postopku Fredericton. Geodetski vestnik 57, 3: 479-497.

[http://geodetski-vestnik.com/cms/images/57/3/gv57-3\\_vrecko.pdf](http://geodetski-vestnik.com/cms/images/57/3/gv57-3_vrecko.pdf)

# DEFORMACIJSKA ANALIZA PO POSTOPKU FREDERICTON

DEFORMATION ANALYSIS: THE FREDERICTON APPROACH

*Anja Vrečko, Tomaž Ambrožič*

UDK: 528.33

## IZVLEČEK

*V članku je opisan postopek Fredericton, ki je eden izmed postopkov deformacijske analize. Za opis razlik med geodetskimi opazovanji ali koordinatami točk v geodetski mreži v več terminskih izmerah predpostavimo več mogočih deformacijskih modelov. Na podlagi statističnih testov in razpoložljivih informacij o dogajanju na obravnavanem območju izberemo najboljši deformacijski model. V članku je najprej podano teoretično ozadje postopka, nato je postopek uporabljen na primeru generiranih opazovanj v dveh terminskih izmerah. Rezultati postopka Fredericton na obravnavanem primeru niso bistveno odstopali od rezultatov postopkov Delft, Karlsruhe in Hannover.*

## KLJUČNE BESEDE

*deformacijska analiza, postopek Fredericton, računski primer*

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.01

## ABSTRACT

*In this article, the Fredericton approach to deformation analysis is presented. It is possible to use several deformation models to determine the differences between the geodetic observations or between the coordinates of points in geodetic network in more epochs. The most appropriate deformation model has been chosen based on statistical testing and available information about dynamics at the area of interest. First, a theoretical background of the approach is described. Then it is applied to the generated observations in two epochs. In the present example, the results of the Fredericton approach differ only slightly from the results obtained with the Delft, Karlsruhe in Hannover approaches.*

## KEY WORDS

*deformation analysis, Fredericton approach, numerical example*

## 1 UVOD

Postopek Fredericton so razvili A. Chrzanowski, Y. Q. Chen in J. Secord na oddelku za geodezijo univerze New Brunswick v mestu Fredericton v Kanadi.

Avtorji so želeli zagotoviti splošno uporabnost postopka. Pri njegovem razvoju so postavili naslednje zahteve (Chen, 1983):

- Postopek mora biti uporaben za absolutne in relativne mreže. Absolutne so mreže, pri katerih nekatere točke, ki jih imenujemo osnovne (referenčne), ležijo zunaj območja deformacije, se ne premikajo in določajo koordinatni sistem. Pri relativnih mrežah pa vse točke ležijo na območju deformacij ali na objektu oziroma nismo prepričani glede njihovega premikanja (Mozetič in sod., 2006).

- Postopek mora biti uporaben za katerikoli tip deformacij, tako za določanje premika posamezne točke kot pri analizi deformacij bloka točk.
- Postopek mora biti uporaben za obravnavo 1D-, 2D- in 3D- geodetskih mrež.
- Postopek mora omogočati vključitev geodetskih in fizikalno-mehanskih opazovanj (nakloni, napetosti ...) v izračun deformacijskih parametrov.
- Postopek mora biti uporaben za poljubno geometrijo geodetske mreže, tudi za primere nepopolnih mrež z defektom konfiguracije.
- Postopek mora biti uporaben ne glede na določitev geodetskega datuma (vpeta mreža z minimalni številom vezi, prosta mreža) v koraku izravnave.

Osnovna ideja postopka je na podlagi statističnih značilnosti polja premikov izbrati najustreznejši deformacijski model z metodo najmanjših kvadratov določiti deformacijske parametre, ki jih (razen parametra rotacije) obravnavamo kot neodvisne od določitve geodetskega datuma (Marjetič, 2011; Stanek in Turk, 1998).

Pri tem imamo dve možnosti (Chrzanowski in sod., 1982):

- V izračun vključimo opazovanja. S poljem premikov tako podamo razliko med opazovanji v prvi in drugih terminskih izmerah (za vsako naslednjo terminsko izmero dobimo svoje polje premikov) za vsako točko obravnavanega objekta oziroma območja. Ta način poimenujmo pristop z opazovanji.
- Opazovanja predhodno izravnamo in izračunamo koordinate točk. S poljem premikov je v tem primeru podana razlika med položajem točke v prvi in drugih terminskih izmerah. Ta način poimenujmo koordinatni pristop.

Prednosti pristopa z opazovanji sta, da se s tvorjenjem razlik med opazovanji eliminirajo morebitni sistematični pogreški ter da so razlike med opazovanji v različnih terminskih izmerah neodvisne od geodetskega datuma. Prednost koordinatnega pristopa je, da je formulacija deformacijskega modela enostavna in pregledna. Grafična predstavitev razlik koordinat je bolj nazorna kakor grafična predstavitev razlik opazovanj, kar bistveno pripomore k boljši izbiri mogočih deformacijskih modelov. Druga pomembna prednost koordinatnega pristopa je, da omogoča odkrivanje in izločitev grobo pogrešenih opazovanj pred obravnavo deformacijskega modela.

Potek postopka Fredericton lahko razdelimo v pet korakov, ki so v nadaljevanju tudi podrobneje opisani (Secord, 1985; primerjaj tudi Savšek-Safić, 2002):

1. izravnava opazovanj v geodetski mreži po metodi najmanjših kvadratov (MNK) ter izločanje grobo pogrešenih opazovanj, ta korak se izvede, samo kadar uporabimo koordinatni pristop;
2. določitev mogočih deformacijskih modelov;
3. določitev deformacijskih parametrov za izbrane deformacijske modele;
4. pregled deformacijskih modelov in izbira najboljšega;
5. grafični prikaz izbranega modela.

## 2 TEORETIČNO OZADJE

### 2.1 Izravnava opazovanj v geodetski mreži po metodi najmanjših kvadratov in izločanje grobo pogrešenih opazovanj

Najprej vsako terminsko izmero posebej izravnamo po metodi najmanjših kvadratov (MNK), tako da minimiziramo uteženo vsoto kvadratov popravkov opazovanj. Postopek je podrobno opisan v Grigillo in Stopar (2003). V nadaljevanju opisovanja postopka Fredericton uporabimo spodaj naštetе količine iz izravnave posamezne terminske izmere:

- vektor izravnanih koordinat  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{x}^0 (\Delta + \Delta^0)$ ,
- pripadajočo matriko kofaktorjev koordinatnih neznank  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$  ( $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$ ),
- referenčno varianco a posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$  ( $\hat{\sigma}_0^2$ ),
- pripadajoče prostostne stopnje  $f(r)$ ,
- matriko normalnih enačb  $\mathbf{N}$  ( $\mathbf{N}$ ),
- datumsko matriko  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{H}$ ).

Oznake, ki jih uporabljamo, so identične oznakam, uporabljenim v Chen (1983), v oklepajih pa podajamo pripadajoče oznake iz članka Grigillo in Stopar (2003).

### 2.2 Določitev mogočih deformacijskih modelov

Cilj tega koraka je določiti/identificirati deformacijske modele, s katerimi bi lahko opisali premike v geodetski mreži in torej na obravnavanem objektu. Deformacijski model je povezava med opazovanimi količinami in deformacijskimi parametri (Chen, 1983).

Mogoče deformacijske modele izberemo na podlagi predhodnih podatkov in/ali izkušenj o dogajanju na območju. V primeru premikov površja so uporabne informacije o geološki sestavi tal, prelomih in premikih tektonskih plošč itd. Pri umetnih objektih se pri določanju mogočih deformacijskih modelov lahko opremo na informacije o lastnostih materiala, izpostavljenosti naravnim pojavom (npr. vetru, soncu, mrazu) ter delovanju drugih mehanskih sil na objekt (npr. posedanje terena v okolici objekta).

Pomagamo si tudi z grafično predstavitvijo vektorja premikov  $\mathbf{d}$  med terminskima izmerama, ki je lahko obremenjen z defektom geodetskega datuma. Ta vpliv reduciramo z iterativnim dodeljevanjem uteži vplivom posamezne točke na določitev datuma, tako da imajo točke z večjimi premiki manjši vpliv.

Osnovna ideja iterativnega dodeljevanja uteži IWP (angl. iterative weighted projection) je vektor  $\mathbf{d}$  transformirati v datum, ki ga bolj določajo (imajo večjo utež) točke z manjšo koordinatno razliko med dvema terminskima izmerama. Teoretično s tem postopkom določimo datum, ki minimizira prvo normo končne projekcije vektorja  $\mathbf{d}$  (Chen, 1983). Postopek je izpeljanka transformacije  $S$ , kjer sta v matriki uteži mogoči le vrednosti 0 ali 1 (Marjetič in Stopar, 2007). To je iterativni postopek, začetne vrednosti priredimo kot:

$$\mathbf{d}_0 = \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{W}_0 = \mathbf{I} \quad (1)$$

kjer sta:

$\mathbf{d}_0$  - vektor razlik izravnanih koordinat iz dveh terminskih izmer,

$\mathbf{W}_0$  - matrika uteži, ki določi, kolikšen naj bo vpliv posamezne točke pri določitvi geodetskega datuma.

Število v indeksu označuje, za kateri korak iteracije gre. V  $j$ -tem koraku iteracije izračunamo:

$$\mathbf{d}_j = (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{W}_{j-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W}_{j-1}) \mathbf{d}_{j-1}, \quad (2)$$

$$\mathbf{W}_j = \text{diag} \left( \frac{1}{|\mathbf{d}_j|} \right). \quad (3)$$

Na podlagi matrike  $\mathbf{W}$ , določene v zadnjem koraku, transformiramo tudi matriko kofaktorjev, ki jo potrebujemo za izris elips:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W}) \mathbf{Q}_{dd} (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W})^T, \quad (4)$$

kjer je:

$\mathbf{Q}_{dd} = (\mathbf{Q}_{x_1, x_1} + \mathbf{Q}_{x_2, x_2})$  - matrikako faktorjev razlik izravnanih koordinat iz dveh terminskih izmer.

Iteracije končamo, ko je razlika med vektorjema  $\mathbf{d}_j$  in  $\mathbf{d}_{j-1}$  dovolj majhna. V praksi izračun izvedemo v od štirih do šestih korakih. Pri tem se lahko zgodi, da bodo nekatere komponente v vektorju premikov zelo blizu 0, in torej pripadajoče uteži v matriki  $\mathbf{W}$  zelo velike, kar bi povzročilo numerično nestabilnost. Zato premikom, manjšim od neke vrednosti (npr.  $|\mathbf{d}_{ji}| < 10^{-6} \text{ m} = \delta$ ), dodelimo utež 0 v matriki  $\mathbf{W}$  (Chen, 1983). Problem bi lahko rešili tudi tako, da bi uteži takih premikov izračunali kot  $\mathbf{W}_j = \text{diag} \left( \frac{1}{|\mathbf{d}_j| + \delta} \right)$  (Chen in sod., 1990).

Polje premikov nato smiselno razdelimo na bloke (podobmočja), tako da lahko znotraj posameznega bloka predpostavimo homogene deformacije. Polje premikov modeliramo z aproksimacijskim polinomom, kjer upoštevamo le linearne člene (Secord, 1985):

$$dy = a_0 + a_1 y + a_2 x, \quad (5)$$

$$dx = b_0 + b_1 x + b_2 y. \quad (6)$$

Koeficienti v zgornjih enačbah imajo fizikalni pomen. Enačbi lahko pretvorimo v zapis:

$$dy = t_y + \varepsilon_{yy} y + (\varepsilon_{yx} + \omega) x, \quad (7)$$

$$dx = t_x + \varepsilon_{xx} x + (\varepsilon_{yx} - \omega) y, \quad (8)$$

kjer so:

$t_y, t_x$  - komponenti translacije togega telesa (bloka) v smereh koordinatnih osi,

$\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xx}$  - normalni deformaciji togega telesa (bloka),

$\varepsilon_{yx}$  - strižna deformacija togega telesa (bloka) in

$\omega$  - parameter rotacije togega telesa (bloka).

Enačbi (7) in (8) uporabimo za opise premikov posamezne točke v izbranih deformacijskih

modelih. Nekatere od šestih deformacijskih parametrov lahko izpustimo iz nekaterih deformacijskih modelov. Za vse točke v posameznem bloku zapišemo enačbi (7) in (8) v matrični obliki:

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{e}}, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ dy \\ dx \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & x & \vdots & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & 1 & x & -y & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_y \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yx} \\ t_x \\ \varepsilon_{xx} \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (10)$$

kjer sta:

$\mathbf{B}$  - matrika deformacijskega modela, ki povezuje deformacijske parametre z razlikami koordinat iz dveh terminskih izmer,

$\hat{\mathbf{e}}$  - vektor deformacijskih parametrov.

## 2.3 Določitev deformacijskih parametrov za izbrane deformacijske modele

### 2.3.1 Izračun za več terminskih izmer

Matematični model sloni na hipotezi, da je pričakovana vrednost opazovanj (koordinat) v  $i$ -ti izmeri enaka seštevku pričakovane vrednosti opazovanj (koordinat) v prvi terminski izmeri in premika, ki ga opisuje deformacijski model. Ničelno ( $H_0$ ) in alternativno ( $H_1$ ) hipotezo matematično formiramo (Chen, 1983):

- pri pristopu z opazovanji:

$$H_0 : E[\mathbf{l}_i] = E[\mathbf{l}_1] + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} \quad (11)$$

$$H_1 : E[\mathbf{l}_i] \neq E[\mathbf{l}_1] + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} \quad (12)$$

- pri koordinatnem pristopu:

$$H_0 : E[\mathbf{l}_i] = \mathbf{A}_i E[\mathbf{x}_i] = \mathbf{A}_i E[\mathbf{x}_1] + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}}$$

$$H_0 : E[\mathbf{x}_i] = E[\mathbf{x}_1] + \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} \quad (13)$$

$$H_1 : E[\mathbf{x}_i] \neq E[\mathbf{x}_1] + \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} \quad (14)$$

kjer so:

$E[\ ]$  - pričakovana vrednost,

$\mathbf{l}$  - vektor opazovanj,

$\mathbf{A}$  - matrika koeficientov enačb, ki povezujejo koordinate z opazovanji.

Oba pristopa se razlikujeta le v matriki  $\mathbf{A}$ , ki je pri koordinatnem pristopu enotska in jo lahko izpustimo. Zato je v nadaljevanju podan enak potek postopka za oba primera. Na podlagi ničelne hipoteze (11) ali (13) lahko tvorimo matematični model:

$$\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\xi}, \quad (15)$$

$$\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}}, \quad (16)$$

kjer so:

$\mathbf{x}$  - vektor opazovanj (pristop z opazovanji) ali ocenjenih koordinat (koordinatni pristop) posamezne izmere,

$\boldsymbol{\delta}$  - vektor popravkov opazovanj (pristop z opazovanji) ali popravkov koordinat (koordinatni pristop), ki se določijo pri ocenjevanju deformacijskih parametrov,

$\boldsymbol{\xi}$  - vektor konstant.

Cilj tega koraka je torej določiti vrednosti v vektorju  $\hat{\mathbf{e}}$ . To je mogoče, kadar je velikost (dimenzija) vektorja  $\mathbf{x}$  enaka v vseh terminskih izmerah. To pomeni, da morajo biti v vseh terminskih izmerah opazovana ista opazovanja in v izmero vključene iste točke. V praksi se to ne zgodi vedno. Ker je ena izmed zahtev za postopek, da ga je mogoče uporabiti tudi ob morebitnem defektu konfiguracije mreže, v takem primeru vektor  $\mathbf{x}$  ustrezno dopolnimo s približno vrednostjo manjkajočega opazovanja (koordinate), v matriki uteži pa na ustreza mesta postavimo ničle ter tako eliminiramo vpliv tega opazovanja (koordinate) na rezultate.

Sistem (15) in (16) je rešljiv, če je premikov točk v mreži (število enačb) vsaj toliko, kolikor je deformacijskih parametrov (število neznan). Če je premikov točk več kot deformacijskih parametrov, slednje ocenimo z metodo najmanjših kvadratov. Dobimo sistem normalnih enačb (izpeljava je zaradi preglednosti v prilogi A):

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i & \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \\ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i & \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \hat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \\ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \end{bmatrix}, \quad (17)$$

kjer je:

$\mathbf{P}_i$  - matrika uteži  $i$ -te terminske izmere.

Za koordinatni pristop to matriko določimo kot:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{N}_i = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i}^{-1} \quad (18)$$

za pristop z opazovanji kot:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{1i}, \quad (19)$$

kjer je:

$\mathbf{P}_{ii}$  – matrika uteži opazovanj.

Število normalnih enačb je enako številu neznanih parametrov in sistem (17) je enolično rešljiv. Iz enačb eliminiramo  $\xi$  tako, da ga izrazimo iz prve enačbe in vstavimo v drugo, nato izrazimo neznan vektor  $\hat{\mathbf{e}}$ :

$$\xi = \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} \right) \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \left[ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \right]^{-1} \cdot \left[ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \right]. \quad (21)$$

Pripadajočo kovariančno matriko vektorja  $\hat{\mathbf{e}}$  izračunamo kot:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} \quad (22)$$

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\sigma}_0^2 \left[ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \right]^{-1},$$

kjer je:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \hat{\sigma}_{0i}^2}{\sum_{i=1}^k f_i} - \text{referenčna varianca a posteriori iz izravnave } k\text{-izmer.}$$

Pri koordinatnem pristopu pomeni težavo še singularnost matrike  $\mathbf{P}_p$ , saj v nadaljnjem izračunu potrebujemo inverzijo matrike  $\mathbf{P}_p$ . Uporabimo tako imenovano generalizirano inverzijo  $(\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i)^{-}$ . Generalizirana inverzija ni enolično določena, vendar so deformacijski parametri neodvisni od načina določitve generalizirane inverzije. Če je defekt ranga matrike  $\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i$  posledica le defekta geodetskega datuma (in ne tudi defekta konfiguracije mreže), je izračun generalizirane inverzije preprost:

$$\left( \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-} = \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \right)^{-1}. \quad (23)$$

### 2.3.1 Izračun za dve terminski izmeri

Izračun deformacijskih parametrov se poenostavi, kadar primerjamo le dve terminski izmeri. Odštejemo enačbi v matematičnem modelu (15) in (16) in dobimo:

$$\mathbf{d} + \mathbf{v}_d = \mathbf{A}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{e}}, \quad (24)$$

kjer je:

$$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1.$$

Kovariančno matriko vektorja premikov izračunamo kot:



$$\Sigma_{dd} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{dd} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{Q}_{\hat{x}_1\hat{x}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{x}_2\hat{x}_2}). \quad (25)$$

Deformacijske parametre določimo po poenostavljeni enačbi (poenostavitev je zaradi preglednosti izpeljana v prilogi B):

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T \mathbf{A}_2^T (\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2) \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2]^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{A}_2^T (\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2) \mathbf{d}. \quad (26)$$

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\sigma}_0^2 [\mathbf{B}_2^T \mathbf{A}_2^T (\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2) \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2]^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}}, \quad (27)$$

kjer so:

$\Sigma_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}}$  - kovariančna matrika deformacijskih parametrov,

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}}$  - matrika kofaktorjev deformacijskih parametrov,

$\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2$  - paralelna vsota matrik uteži iz posamezne terminske izmere (definirana je v izpeljavi v prilogi B).

Za pristop z opazovanji to matriko določimo kot:

$$\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_{l_1}^{-1} \mp \mathbf{Q}_{l_2}^{-1} = (\mathbf{Q}_{l_1} + \mathbf{Q}_{l_2})^{-1}, \quad (28)$$

za koordinatni pristop kot:

$$\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2 = \mathbf{N}_1 (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_2 \quad (29)$$

Deformacijske parametre smo torej pri koordinatnem pristopu izračunali iz premikov, izračunanih neposredno iz izravnanih koordinat. Čeprav so ti premiki odvisni od določitve geodetskega datuma, lahko ocenjene deformacijske parametre, če ne pride do spremembe orientacije mreže (pojasnjeno na koncu poglavja), obravnavamo kot neodvisne od določitve geodetskega datuma. Vektor premikov  $\mathbf{d}$ , ki je izračunan iz izravnanih koordinat, lahko namreč zapišemo kot linearno kombinacijo vektorja  $\mathbf{d}_h$ , ki je odvisen od zagotovitve datuma v izravnavi in »pravega« vektorja premika  $\mathbf{d}_p$  (Chen, 1983):

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_p + \mathbf{d}_h. \quad (30)$$

Vektor  $\mathbf{d}_h$  je linearna kombinacija stolpcev matrike  $\mathbf{H}$ . Stolpci matrike  $\mathbf{H}$  predstavljajo bazo ničelnega prostora matrike  $\mathbf{N}$ . Vektor  $\mathbf{d}_h$  torej leži v ničelnem prostoru matrike  $\mathbf{N}$ . Pri določevanju deformacijskih parametrov, tj. določanju vrednosti elementov vektorja  $\hat{\mathbf{e}}$ , vektor premikov množimo z matriko  $\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2 = \mathbf{N}_1 (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_2$ . Ničelni prostor matrike  $\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2$  je enak kot ničelni prostor matrike  $\mathbf{N}$ . Za vektor  $\mathbf{d}_h$  torej velja, da leži tudi v ničelnem prostoru matrike  $\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2$  in se pri preslikavanju s to matriko preslika v  $\mathbf{0}$ :

$$(\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2) \mathbf{d}_h = \mathbf{0}. \quad (31)$$

To lastnost uporabimo v enačbi za določitev deformacijskih parametrov:

$$\hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{d} = \quad (32)$$

$$= (\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)(\mathbf{d}_p + \mathbf{d}_h) = \quad (33)$$

$$= (\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{d}_p + \quad (34)$$

$$+ \underbrace{(\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{d}_h}_0 =$$

$$= (\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{d}_p = \hat{\mathbf{e}} \quad (35)$$

Vidimo torej, da je rezultat (izračunani deformacijski parametri) enak ne glede na to, kako je določen geodetski datum.

Pri vpeti mreži je pri odpravi vpliva določitve datuma pomembno, da je parameter rotacije  $\omega$  vključen v deformacijski model. Če se namreč med terminskima izmerama premakne katera od točk, med katerima je definirana smer, se zasuka celotna mreža. V deformacijskem modelu prevzame parameter  $\omega$  nase ta vpliv in tako ostanejo drugi deformacijski parametri neodvisni od določitve geodetskega datuma. Element rotacije v model vključimo tako, da ga dodamo v vektor neznank  $\hat{\mathbf{e}}$  ter v matriko  $\mathbf{B}$  dodamo ustrezne odvode po neznankah (Chen, 1983).

## 2.4 Pregled deformacijskih modelov in izbira najboljšega

V fazi identifikacije kot mogoče podamo več modelov. Nato za vsakega določimo deformacijske parametre. V tej fazi je treba modele pregledati in izbrati najboljšega. To naredimo na podlagi statističnih testov. Računamo globalni test modela in stopnje zaupanja za posamezni deformacijski parameter.

Globalno primernost modela testiramo z drugo normo popravkov iz matematičnega modela. Modela ne moremo zavriniti, če velja (Chen, 1983):

$$T^2 = \frac{\hat{\sigma}_e^2}{\hat{\sigma}_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^k \delta_i^T \mathbf{P}_i \delta_i}{\hat{\sigma}_0^2 df_e} < F(\alpha, df_e, df) \quad (36)$$

kjer so:

$df = \sum_{i=1}^k f_i$  - število prostostnih stopenj pri izračunu referenčne variance a posteriori v vseh terminskih izmerah,

$f_i$  - število prostostnih stopenj za izračun a posteriori variance v posamezni terminski izmeri,

$df_e = \text{rang}(\mathbf{P}) - n_e = \text{rang}(\mathbf{P}) - u + d$  - število prostostnih stopenj pri izračunu referenčne variance a posteriori pri določevanju deformacijskih parametrov,

$\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_i)$  - matrika uteži,

$n_e$  - število deformacijskih parametrov v vektorju  $\hat{\mathbf{e}}$

$u$  - število neznank v matematičnem modelu (17),

$d$  – skupni defekt datuma iz vseh terminskih izmer<sup>1</sup>,

$F(\alpha, df, df)$  – kritična vrednost po Fisherjevi porazdelitvi,

$1 - \alpha$  – stopnja zaupanja testa.

Stopnjo zaupanja za posamezni deformacijski parameter  $i$  določimo tako, da izračunamo njegovo standardizirano formo ter poiščemo tisto vrednost stopnje zaupanja  $1 - \alpha$ , pri kateri je izpolnjen pogoj:

$$\frac{\hat{\mathbf{e}}_i^2}{\hat{\sigma}_0^2 \mathbf{q}_{\hat{\mathbf{e}}_i}} > F(\alpha, 1, df), \quad (37)$$

kjer sta:

$\hat{\mathbf{e}}_i$  – element vektorja  $\hat{\mathbf{e}}$ , izračunanega v enačbi (26), ki pripada obravnavanemu deformacijskemu parametru  $i$ ,

$\mathbf{q}_{\hat{\mathbf{e}}_i}$  – kofaktor obravnavanega deformacijskega parametra, tj.  $i$ -ti diagonalni element matrike

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{e}}}$  izračunane v enačbi (27).

Najboljši model izberemo glede na naslednja merila:

- manjše število deformacijskih parametrov,
- preprostejši deformacijski model,
- razlogi, ki imajo geofizikalno ozadje,
- minimalni vsota kvadratov popravkov,
- stopnja zaupanja parametrov.

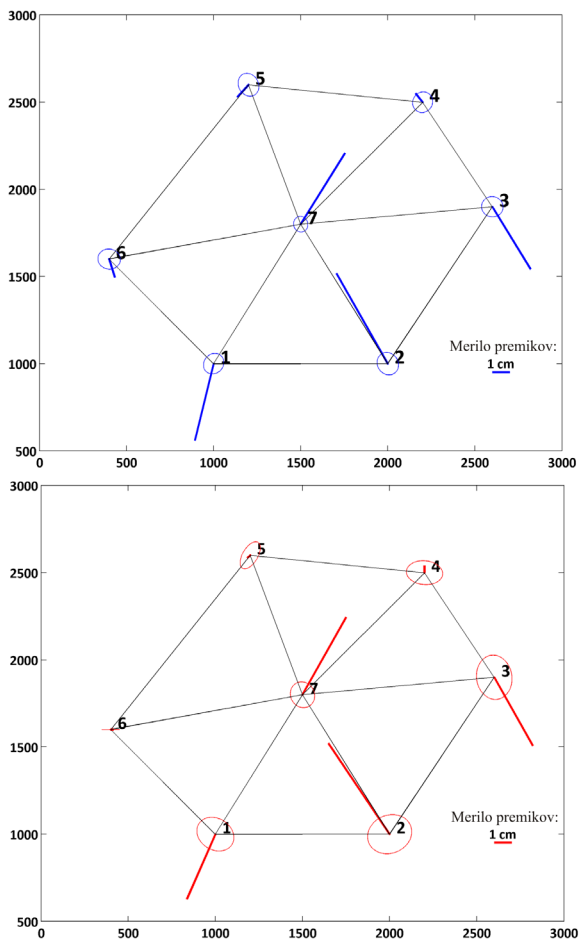
## 2.5 Grafični prikaz izbranega deformacijskega modela

Izbrani deformacijski model prikažemo še grafično. Prikažemo razporeditev točk v bloke in določene premike vsakega od blokov.

## 3 RAČUNSKI PRIMER

Postopek Fredericton smo uporabili na podatkih iz literature (Mihailović in Aleksić, 1994). Na istih podatkih so že bili preizkušeni postopki Hannover (Ambrožič, 2001), Karlsruhe (Ambrožič, 2004) in Delft (Marjetič in sod., 2012). Ponovitev izračuna je mogoča na podlagi vhodnih podatkov, ki so zapisani v Ambrožič (2001). Simulirani premiki so zaradi lažje primerjave z rezultati deformacijske analize po različnih postopkih zapisani v preglednici 3. Rezultate postopka Fredericton podajamo po zgoraj navedenih petih korakih.

<sup>1</sup> Na primer: če lahko v 1. terminski izmeri defekt datuma odpravimo s podanimi koordinatami  $y$  in  $x$  ene točke in eno podano smerjo, v 2. terminski izmeri pa s podanimi koordinatami  $y$  in  $x$  ene točke in eno podano dolžino, bo  $d = 4$ .



Slika 1: Ilustrativni prikaz spremembe vektorjev premikov pred uporabo postopka iterativnega dodeljevanja uteži (zgoraj) in po njem (spodaj)

Najprej smo za določitev premikov točk uporabili koordinatni pristop. Izravnavo simuliranih opazovanj smo opravili s programom GemWin. Rezultati izravnave so identični zapisanim v Ambrožič (2001) in Ambrožič (2004). Mogoče deformacijske modele smo določali izključno na podlagi polja premikov, saj gre za simulirane podatke in premikov točk ni bilo mogoče utemeljiti s fizikalnimi vzroki. Rezultat uporabe iterativnega prilagajanja uteži je prikazan na sliki 1. Medtem ko se vektorji premikov dejansko premaknjenih točk niso bistveno spremenili, so vektorji premikov na mirujočih točkah bistveno drugačni, tako po smeri kot po dolžini.

Na podlagi polja premikov smo določili štiri mogoče deformacijske modele in za vsakega izračunali vrednosti parametrov po enačbi (26), stopnje zaupanja parametrov po enačbi (37) in globalni test modela po enačbi (36). Rezultati so zbrani v preglednici 1.

$H_0$	Deformacijski parametri	Vrednosti parametrov [mm]	Stopnja zaupanja [%]	Globalni test [ $\alpha = 0.05$ ]	$df$ $df_e$
<b>Model 0:</b> ni premikov				91.43 > 1.80 $H_0$ zavrjnena	60 17
<b>Model 1:</b> premiki točk: 1, 2, 3 in 7	$d_{y1}$ $d_{x1}$ $d_{y2}$ $d_{x2}$ $d_{y3}$ $d_{x3}$ $d_{y7}$ $d_{x7}$	- 19.6 - 38.0 - 38.7 49.0 20.6 - 44.3 23.6 42.9	~ 100 ~ 100 ~ 100 ~ 100 ~ 100 ~ 100 ~ 100 ~ 100	0.12 < 2.04 $H_0$ ni zavrjnena	60 9
<b>Model 2:</b> premiki točk: 1, 2, 3, 4 in 7	$d_{y1}$ $d_{x1}$ $d_{y2}$ $d_{x2}$ $d_{y3}$ $d_{x3}$ $d_{y4}$ $d_{x4}$ $d_{y7}$ $d_{x7}$	- 18.0 - 37.3 - 36.6 51.3 22.1 - 41.0 1.1 3.2 24.6 44.4	99.9 ~ 100 ~ 100 ~ 100 ~ 100 ~ 100 22.6 41.2 ~ 100 ~ 100	0.09 < 2.17 $H_0$ ni zavrjnena	60 7
<b>Model 3:</b> premiki točk: 2, 3, 4 in 7	$d_{y2}$ $d_{x2}$ $d_{y3}$ $d_{x3}$ $d_{y4}$ $d_{x4}$ $d_{y7}$ $d_{x7}$	- 21.7 87.5 27.7 - 4.2 - 0.6 30.1 30.4 67.7	~ 100 ~ 100 ~ 100 48.8 12.3 ~ 100 ~ 100 ~ 100	11.32 > 2.04 $H_0$ zavrjnena	60 9

Preglednica 1: Vrednosti deformacijskih parametrov, njihove stopnje zaupanja in vrednosti testne statistike za globalni test modela za štiri izbrane deformacijske modele, po koordinatnem pristopu.

Za predlagana deformacijska modela 0 in 3 je vrednost testne statistike presegla kritično vrednost. Zato lahko v teh dveh primerih zavrujemo hipotezo  $H_0$ , ki pravi, da lahko polje premikov pojasnimo s predlaganim deformacijskim modelom. »Najboljši« deformacijski model smo zato izbirali med modeloma 1 in 2, ki se razlikujeta v tem, da slednji kot premaknjeno obravnava tudi točko 4. Glede na nizki stopnji zaupanja za premika te točke v smereh koordinatnih osi smo kot »najboljšega« izbrali model 1, torej premike točk 1, 2, 3 in 7.

Za primerjavo rezultatov smo za izbran deformacijski model določili vrednosti parametrov tudi s pristopom z opazovanji. Rezultati so podobni kot pri koordinatnem pristopu, premiki se

razlikujejo za največ 0,1 mm, nekoliko manjši sta tudi stopnji zaupanja v komponento  $y$  premika točk 1 in 3. Rezultati so podani v preglednici 2.

$H_0$	Deformacijski parametri	Vrednosti parametrov [mm]	Stopnja zaupanja [%]	Globalni test [ $\alpha = 0.05$ ]
<b>Model 1:</b> premiki točk: 1, 2, 3 in 7	$d_{y1}$	- 19.7	97.4	5.79 < 12.59 $H_0$ ni zavrnjena
	$d_{x1}$	- 38.1	~ 100	
	$d_{y2}$	- 38.8	~ 100	
	$d_{x2}$	49.0	~ 100	
	$d_{y3}$	20.6	~ 99.6	
	$d_{x3}$	- 44.4	~ 100	
	$d_{y7}$	23.6	~ 100	
$d_{x7}$	42.9	~ 100		

Preglednica 2: Ocenjene vrednosti parametrov in njihove stopnje zaupanja ter globalni test modela po pristopu z opazovanji.

#### 4 PRIMERJAVA Z REZULTATI DRUGIH METOD

Obravnavan računski primer smo primerjali tudi z drugimi postopki deformacijske analize. Rezultati so zbrani v preglednici 3, ki je povzeta po Marjetič in sod. (2012). Dodani so rezultati postopka Fredericton.

Iz Preglednice 3 je razvidno, da so premiki, določeni po vseh postopkih, zelo podobni. Razlike med njimi so reda velikosti nekaj desetink milimetra za posamezno koordinatno komponento, medtem ko od pravih (simuliranih vrednosti) odstopajo za približno 5 milimetrov, največje pa je odstopanje komponente  $y$  premika na točki 2, ki v absolutnem smislu znaša 8,8 milimetra.

	Točka	1	2	3	4	5	6	7
Simulirano	$d_y$ [mm]	- 20.0	- 30.0	25.0	0.0	0.0	0.0	25.0
	$d_x$ [mm]	- 34.6	52.0	- 43.3	0.0	0.0	0.0	43.3
	$d$ [mm]	40.0	60.0	50.0	0.0	0.0	0.0	50.0
	$\nu$ [°]	210	330	150	-	-	-	30
Delft	$\hat{d}_y$ [mm]	- 19.4	- 38.1	21.4	0.7	- 0.8	0.0	24.0
	$\hat{d}_x$ [mm]	- 37.5	49.5	- 43.5	1.0	- 2.3	1.3	42.9
	$d$ [mm]	42.2	62.5	48.5	1.2	2.4	1.3	49.2
	$\nu$ [°]	207	322	154	35	199	0	29
	Premik	<b>da</b>	<b>da</b>	<b>da</b>	<b>ne</b>	<b>ne</b>	<b>ne</b>	<b>da</b>
Karlsruhe	$\hat{d}_y$ [mm]	- 19.7	- 38.8	20.6	-	-	-	23.6
	$\hat{d}_x$ [mm]	- 38.0	49.0	- 44.4	-	-	-	42.9
	$d$ [mm]	42.8	62.5	48.9	-	-	-	49.0
	$\nu$ [°]	207	322	155	-	-	-	29
	Premik	<b>da</b>	<b>da</b>	<b>da</b>	<b>ne</b>	<b>ne</b>	<b>ne</b>	<b>da</b>
Hannover	$d_y$ [mm]	- 19.6	- 38.7	20.6	- 4.0	- 6.4	3.3	23.6
	$d_x$ [mm]	- 38.0	49.0	- 44.3	5.1	- 7.1	- 10.6	42.9
	$d$ [mm]	42.8	62.4	48.9	6.5	10.0	11.1	49.0
	$\nu$ [°]	207	322	155	322	222	163	29
	Premik	<b>da</b>	<b>da</b>	<b>da</b>	<b>ne</b>	<b>ne</b>	<b>ne</b>	<b>da</b>
Fredericton	$d_y$ [mm]	- 19.6	- 38.7	20.6	-	-	-	23.6
	$d_x$ [mm]	- 38.0	49.0	- 44.3	-	-	-	42.9
	$d$ [mm]	42.8	62.5	48.9	-	-	-	48.9
	$\nu$ [°]	207	322	155	-	-	-	29
	Premik	<b>da</b>	<b>da</b>	<b>da</b>	<b>ne</b>	<b>ne</b>	<b>ne</b>	<b>da</b>

Preglednica 3: Rezultati deformacijske analize po postopkih Delft, Karlsruhe, Hannover in Fredericton.

## 5 SKLEP

Prednost postopka Fredericton pred drugimi vidimo v tem, da poskuša premike smiselno povezati v sklenjene bloke in njihove deformacije utemeljiti z geofizikalnim dogajanjem na obravnavanem območju ali objektu. Postopka Fredericton ni mogoče popolnoma avtomatizirati, saj je v fazi identificiranja mogočih deformacijskih modelov potrebna strokovnjakova odločitev, katere točke je smiselno povezati v bloke in katere deformacijske parametre je, glede na polje premikov, smiselno določevati za posamezen blok. Pri tem je treba vedno obravnavati polje premikov, ki smo ga predhodno transformirali z iterativnim dodeljevanjem uteži (poglavje 2.2).

Korak identifikacije mogočih deformacijskih modelov je pomemben, saj uporabnih rezultatov ne moremo dobiti, dokler ne identificiramo dovolj dobrega modela (v nasprotnem primeru bo globalni test modela zavržen). Zanimivo pa bi bilo preskusiti, ali bi lahko ta korak zadovoljivo avtomatizirali z uporabo katerega od modernejših postopkov gručenja vektorjev premikov, na primer z nevronskimi mrežami.

Rezultati štirih postopkov, ki smo jih primerjali v poglavju 4, se le nekoliko razlikujejo med seboj. Pri tem je treba poudariti, da gre za test na simuliranem primeru, kjer so bili simulirani premiki glede na natančnosti določitve položajev točk veliki. Predvidevamo, da bi večje razlike med rezultati postopkov nastale pri obravnavi manjših premikov. Za boljše razumevanje vpliva posebnosti posameznega postopka na rezultate bi bilo nujno izvesti primerjavo rezultatov še za več različnih geodetskih mrež v več terminskih izmerah. Pri tem bi bilo smiselno opazovati, kako na različnost rezultatov med metodami vplivajo geometrija mrež, defekti konfiguracij med terminskimi izmerami, polje premikov in število nadštevilnih opazovanj. Taka primerjava bi lahko bila osnova za odločitev, katerega od postopkov uporabiti v konkretni situaciji.

## Literatura in viri:

- Ambrožič, T. (2001). *Deformacijska analiza po postopku Hannover*. *Geodetski vestnik*, 45(1-2), 38–53.
- Ambrožič, T. (2004). *Deformacijska analiza po postopku Karlsruhe*. *Geodetski vestnik*, 48(3), 315–331.
- Chen, Y. Q. (1983). *Analysis of Deformation Surveys – A Generalized Approach*. Doktorska disertacija. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Geodesy and Geomatics Engineering; pridobljeno 2. 6. 2010 s spletne strani: <http://gge.unb.ca/Pubs/TR94>.
- Chen, Y. Q., Chrzanowski, A., Secord J. M. (1990). *A Strategy for the Analysis of the Stability of Reference Points in Deformation Surveys*. *CISM Journal ACSGC*, 44(2), 141–149.
- Chrzanowski, A., Chen, Y. Q., Secord J. M. (1982). *A Generalized Approach to the Geometrical Analysis of Deformation Surveys*. 3rd international symposium on deformation measurements by geodetic methods, Budimpešta, 25.–27. avgust 1982.
- Grigillo, D., Stopar, B. (2003). *Metode odkrivanja grobih pogreškov v geodetskih opazovanjih*. *Geodetski vestnik*, 47(4), 387–403.
- Marjetič, A., Stopar, B. (2007). *Geodetski datum in S-transformacija*. *Geodetski vestnik*, 51(3), 549–564.
- Marjetič, A., Zemljak, M., Ambrožič, T. (2012). *Deformacijska analiza po postopku Delft*. *Geodetski vestnik*, 56(1), 9–26.
- Marjetič, A. (2011). *Statistična analiza značilnih premikov v geodetskih mrežah*. Doktorska disertacija. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
- Mihailović, K., Aleksić, I. (1994). *Deformaciona analiza geodetskih mreža*. Beograd: Univerzitet u Beogradu. Građevinski fakultet, Institut za geodezijo.
- Mozetič, B., Kogoj, D., Ambrožič, T. (2006). *Uporabnost izbranih metod deformacijske analize na praktičnih primerih geodetskih mrež*. *Geodetski vestnik*, 50(4), 620–631.
- Rao, C. R., Mitra, S. K. (1971). *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley and Sons.
- Savšek-Safič, S. (2002). *Optimalna metoda določevanja stabilnih točk v deformacijski analizi*. Doktorska disertacija. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
- Secord, M. J. (1985). *Implementation of a Generalized Method for the Analysis of Deformation Surveys*. Magistrska naloga. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Geodesy and Geomatics Engineering; pridobljeno 2. 6. 2010 s spletne strani: <http://gge.unb.ca/Pubs/TR117>.
- Stanek, M., Turk, G. (1998). *Osnove mehanike trdnih teles*. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.



## PRILOGA A:

### Izpeljava modela s pogojem najmanjših kvadratov popravkov

Imamo matematični model:

$$\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}}, \quad i = 2, \dots, k$$

Poiskati moramo tako rešitev, da bo utežena vsota kvadratov popravkov minimalna. Ta pogoj zapišemo kot:

$$\Phi = \boldsymbol{\delta}_1^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\delta}_1 + \sum_{i=2}^k \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\delta}_i = \min$$

$$\Phi = (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_1)^T \mathbf{P}_1 (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_1) + \sum_{i=2}^k (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{x}_i)^T \mathbf{P}_i (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{x}_i) = \min$$

Člene zmnožimo in seštejemo istovrstne člene. Pri tem upoštevamo, da so matrice  $\mathbf{P}_i$  diagonalne in velja  $\mathbf{P}_i^T = \mathbf{P}_i$  ter pravilo za množenje transponiranih matrik  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ .

$$\begin{aligned} \Phi = & \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \\ & + \sum_{i=2}^k (\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi} + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - \\ & - \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{x}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i) = \min. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\xi} - 2 \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \\ & + \sum_{i=2}^k (\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi} + 2 \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - 2 \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - 2 \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i + \\ & + \mathbf{x}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i) = \min. \end{aligned}$$

Ker moramo poiskati minimum, enačbo odvajamo po obeh neznankah, po  $\boldsymbol{\xi}$  in po  $\hat{\mathbf{e}}$ , ter oba odvoda enačimo z 0:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\xi}} = 2 \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\xi} - 2 \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \sum_{i=2}^k (2 \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi} + 2 \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - 2 \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{e}}} = \sum_{i=2}^k (2 (\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i)^T + 2 \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - 2 \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i) = 0$$

Obe enačbi delimo z 2 in seštejemo istovrstne člene:

$$\sum_{i=1}^k (\mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi}) + \sum_{i=2}^k (\mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}}) - \sum_{i=1}^k (\mathbf{P}_i \mathbf{x}_i) = 0$$

$$\sum_{i=2}^k (\mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi}) + \sum_{i=2}^k (\mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}}) - \sum_{i=2}^k (\mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i) = 0$$

Enačbi zapišemo v matrični obliki in izpeljava je končana:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i & \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \\ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i & \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \hat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \\ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \end{bmatrix}$$

## PRILOGA B:

### Izpeljava enačbe za izračun deformacijskih parametrov za dve terminski izmeri

Izpeljava je bila narejena na podlagi poglavij o paralelni vsoti matrik avtorjev Rao in Mitra (1971). V izpeljavi bomo uporabili naslednje zveze:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \bar{\pm} \mathbf{B} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} = \\ &= \mathbf{A} \underbrace{(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{B})}_{\mathbf{I}} - \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} \end{aligned}$$

Enačba za izračun deformacijskih parametrov iz poljubne št. terminskih izmer je (enačba 21):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}} &= \left[ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \left[ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \right] \end{aligned}$$

Zaradi preglednosti izpeljave obravnavamo matriko  $\mathbf{A}$  kot enotsko oziroma kot del matrike  $\mathbf{B}$ . Enačbo zapišemo za  $i = 1, 2$ :

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_2]^{-1} [\mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} (\mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2)]$$

Vidimo, da so vsi členi množeni z  $\mathbf{B}_2^T$ , v prvem oklepaju pa tudi z  $\mathbf{B}_2$ . Izpostavimo:

$$\hat{\mathbf{e}} = \left[ \mathbf{B}_2^T \underbrace{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_2)}_{\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2} \mathbf{B}_2 \right]^{-1} [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} (\mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2))]$$

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \mathbf{B}_2]^{-1} [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2)]$$

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \mathbf{B}_2]^{-1} \left[ \mathbf{B}_2^T \left( \underbrace{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_2)}_{\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2} \mathbf{x}_2 - \underbrace{\mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1}_{\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2} \right) \right]$$

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \mathbf{B}_2]^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \underbrace{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}_{\mathbf{d}}$$

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \mathbf{B}_2]^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \mathbf{d}$$

*Prispelo v objavo: 14. marec 2013*

*Sprejeto: 20. junij 2013*

*asist. Anja Vrečko, univ. dipl. inž. geod.*

*FGG - Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana*

*e-pošta: anja.vrecko@fgg.uni-lj.si*

*izr. prof. dr. Tomaž Ambrožič, univ. dipl. inž. geod., univ. dipl. inž. rud.*

*FGG - Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana*

*e-pošta: tomaz.ambrozic@fgg.uni-lj.si*