Université de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :
Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité :
Mathématiques appliquées

Présentée et soutenue par

Elissar Nasreddine

le : 26 juin 2013

Titre :

Limite de diffusion de l'équation de Fokker-Planck avec un équilibre à décroissance lente. Modèles d'agrégation en dynamique de populations.

École doctorale :
Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

Unité de recherche :
Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)

Directeurs de thèse :
Philippe Laurençot (Université de Toulouse III Paul Sabatier)
Marjolaine Puel (Université de Nice Sophia-Antipolis)

Rapporteurs :
Lucilla Corrias (Université d'Evry Val d'Essonne)
Philippe Souplet (Université Paris 13)

Membres du jury :
Jean Dolbeault (Université Paris-Dauphine)
Eric Lombardi (Université de Toulouse III Paul Sabatier)
Florian Méhats (Université de Rennes 1)

Remerciements

Mes plus chaleureux remerciements s'adressent à mon directeur de thèse Philippe Laurençot, sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est. Je tiens également à le remercier pour la confiance et la sympathie dont il m'a témoignées au cours des années de thèse. Je tiens aussi à souligner sa gentillesse et ses qualités humaines qui m'ont permis de réaliser ce travail et de faire mes premiers pas dans la recherche, dans un environnement très agréable. Merci de m'avoir guidé et encouragé tout au long de cette thèse.

J'adresse mes profonds remerciements à mon encadrante Marjolaine Puel, pour m'avoir suivi et soutenu dès mon master de recherche effectué sous la direction de Naoufel Ben Abdallah. Merci d'avoir été à mes côtés, même dans les situations difficiles. Face à ma détermination, elle s'est toujours montrée disponible et patiente. Son encadrement et ses remarques m'ont permis de mener à bout cette thèse. Je tiens aussi à la remercier pour avoir pris de son temps afin de relire ce manuscrit et ainsi contribuer à son amélioration.

J'exprime ma sincère gratitude à Lucilla Corrias et à Philippe Souplet, pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour le temps passé à la lecture de mes travaux et à la rédaction des rapports, pour l'intérêt porté à mon travail et pour leurs précieuses remarques. Je tiens aussi à remercier Jean Dolbeault et Florian Méhats qui ont accepté de faire partie du jury de cette thèse.

J'adresse ma sincère reconnaissance à Eric Lombardi pour ses conseils et pour l'intérêt qu'il a toujours porté à mon travail depuis mon stage de master de recherche. Je suis très heureuse de le compter parmi les membres de mon jury.

Un grand merci à tous les membres de l'équipe MIP de l'Institut de Mathématiques de Toulouse qui rendent l'ambiance vraiment conviviale et détendue. Je remercie tous les collègues et amis : Marion, Hai Yen, Lien, Fabien, Mathieu, Amira, Rémi, Laurent et Minh.
Je remercie la direction, le corps administratif et technique ainsi que les membres de l'UPS que j'ai côtoyés et qui ont fait preuve de gentillesse et de sympathie à mon égard.

Tous mes remerciements se portent enfin sur mes parents et mes frères, pour leur amour et leur soutien constant. Je suis heureuse que vous ayez fait le déplacement du Liban pour être à mes côtés le jour de ma soutenance. Cette thèse leur est dédiée.

Merci à toutes les personnes que je n'ai pas citées mais qui, je l'espère, se reconnaitront dans ces quelques lignes.

Table des matières

Introduction Générale

Cette introduction est divisée en deux sections. Dans la section 1, nous considérons une équation cinétique de type Fokker-Planck dans le cas particulier où les équilibres décroissent polynômialement en vitesse. Nous présentons les résultats et les méthodes utilisées pour l'étude de la limite de diffusion de cette équation, ensuite nous présentons les difficultés que nous avons rencontrées en étudiant le cas de la diffusion anormale. La section 2 introduit les deux modèles d'agrégation en dynamique des populations étudiés dans cette thèse, le modèle de chimiotactisme de Keller-Segel avec diffusion non linéaire, et un modèle de regroupement des individus introduit par Grindrod dans [37].
Nous nous appliquerons, dans cette introduction, à présenter les principaux résultats et les méthodes des preuves utilisées en s'affranchissant des détails plus techniques. Le lecteur intéressé pourra se reporter, pour une preuve plus détaillée et plus complète, aux articles de journaux formant les différents chapitres de ce manuscrit.

0.1 Limite de diffusion de l'équation de Fokker-Planck : Equilibre à décroissance lente

L'équation de Fokker-Planck décrit de manière déterministe le régime cinétique d'un ensemble de particules, dont l'interaction avec l'environnement se traduit par un changement aléatoire de la vitesse.

On s'intéresse dans cette section à la limite de diffusion dans le cas particulier où les équilibres de l'équation de Fokker-Planck décroissent polynômialement en vitesse.
Les fonctions de distribution à décroissance de type puissance s'appellent les fonctions de distribution à queue épaisse, et interviennent dans des contextes différents, tels que l'astrophysique ([53, 75]), ou bien dans l'étude des milieux granulaires (voir [16, 34]). De plus, les articles [51, 52] forment des références concernant la pertinence des fonctions de distribution à queue épaisse dans diverses applications.

0.1.1 Limite de diffusion

Le but de la limite de diffusion est d'approcher les solutions d'une équation cinétique microscopique par un équilibre en vitesse multiplié par une fonction densité, qui dépend juste de t et de x, solution d'une équation macroscopique plus simple. Les modèles macroscopiques décrivent l'évolution d'un ensemble d'individus, ces modèles ont l'avantage de pouvoir être analysés numériquement. Les modèles généralement utilisés sont des équations d'advection-diffusion.
Le terme de diffusion traduit au niveau macroscopique, le comportement aléatoire des individus, alors que le terme d'advection exprime dans quelle direction se dirigent (en moyenne) les particules.

Ainsi, la dérivation d'équations macroscopiques telles que les équations de diffusion est un sujet qui a reçu beaucoup d'attention ces dernières années. L'étude de la limite de diffusion a été entamée par A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolaou [9] et E.W. Larsen et J.B. Keller [46] et il a été le sujet de plusieurs articles comme ceux de C. Bardos, R. Santos et R. Sentis [4] et P. Degond, T. Goudon et F. Poupaud [27].

Cette méthode consiste à considérer la situation où le temps caractéristique des interactions entre les particules est beaucoup plus petit que le temps macroscopique sur lequel est observé le système. Dans la limite où le rapport entre ces deux temps devient nul, un équilibre s'établit menant à un régime macroscopique.

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de diffusion de l'équation de Fokker-Planck. On sait que si l'équilibre est une Gaussienne, l'équation limite obtenue est une équation de diffusion (voir [28]). Dans cette thèse, on s'intéresse au cas particulier où les équilibres de l'équation de Fokker-Planck sont à décroissance polynômiale. Et on démontre que, si le taux de décroissance est assez fort, l'équation limite obtenue est une équation de diffusion. Néanmoins, si le taux de décroissance est assez faible, l'intégrale définissant le cœfficient de diffusion est divergente. Ce cas nécessite un changement d'échelle en temps pour faire apparaître le bon opérateur limite.

0.1.2 Equation de Fokker-Planck et principaux résultats

Notre point de départ est l'équation de Fokker-Planck, une équation cinétique, qui décrit d'une façon déterministe le mouvement Brownien d'un ensemble des particules. Cette équation est donnée par la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f &= Q(f) \quad \text{dans } [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ f(0,x,v) &= f_0(x,v) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1}$$

L'inconnu $f(t,x,v) \geq 0$ représente la densité des particules à l'instant $t \geq 0$, à la position $x \in \mathbb{R}^N$, et à la vitesse $v \in \mathbb{R}^N$.

Nous considérons un opérateur de collision Q ayant une forme différentielle

$$Q(f) := \nabla_v \cdot \left(\frac{1}{\omega} \nabla_v \, (f \, \omega) \right) \tag{2}$$

dont le noyau est engendré par la fonction $\frac{1}{\omega}$.

Lorsque le phénomène de diffusion domine le phénomène d'advection, on peut approcher la solution de (1) par une densité qui dépend de t et de x, multipliée par un profil en vitesse correspondant à l'équilibre local $\frac{1}{\omega}$. Dans le cas où l'équilibre thermodynamique est une fonction Gaussienne, les auteurs dans [28] prouvent que la densité vérifie une équation de diffusion. Dans cette thèse, nous considérons le cas où l'état d'équilibre correspond à une fonction à décroissance de type puissance, et notemmant $\frac{1}{\omega}$ avec $\omega = (1 + ||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}$ pour un certain $\beta > N$.

Nous supposons que les collisions sont très nombreuses et que le temps d'observation est très grand, c'est-à-dire, l'échelle de temps correspondant aux collisions est très petite par rapport au temps d'observation, pour cela, nous introduisons le paramètre $\varepsilon \ll 1$, qui désigne le libre parcours moyen, temps caractéristique entre deux collisions, nous considérons ensuite le changement d'échelle suivant

$$x' = \varepsilon \, x \text{ et } \; t' = \theta(\varepsilon) \, t, \; \text{ avec } \theta(\varepsilon) \to 0.$$

Puis nous renormalisons la fonction

$$f^\varepsilon(t', x', v) = f(t,x,v).$$

L'équation mise à l'échelle (on omet les primes)

$$\begin{cases} \theta(\varepsilon) \, \partial_t f^\varepsilon + \varepsilon \, v \cdot \nabla_x f^\varepsilon &= Q(f^\varepsilon), \\ f^\varepsilon(0,x,v) &= f_0(x,v). \end{cases} \tag{3}$$

Nous nous intéressons dans la suite au comportement de la solution de l'équation (3) lorsque $\varepsilon \to 0$.
Nous démontrons dans cette thèse (voir Chapitre 1 ou [61]), que lorsque $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^2$, nous approchons la solution de (3) par un équilibre local $F = \frac{K}{\omega}$ avec $\int_{\mathbb{R}^N} \frac{K}{\omega}\, dv = 1$, associé à une densité ρ satisfaisant une équation de diffusion

$$\partial_t \rho - \nabla_x \cdot (D\ \nabla_x \rho) = 0, \tag{4}$$

où D est le cœfficient de diffusion. Cette convergence est démontrée sous quelques hypothèses sur l'équilibre F qui garantissent que le cœfficient D est bien défini, et notamment si le taux de décroissance est assez fort, et plus particulièrement, sous la condition $\beta > N + 4$.
Notre principale résultat est formulé dans le Théorème 0.1.1. La preuve de ce théorème, nécessite des espaces de Sobolev à poids. Ce poids $\frac{1}{\omega}$ vient du fait que notre opérateur de collision Q est symmétrique dans l'éspace

$$H_2(\mathbb{R}^N) = \left\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2\ \omega\ \mathrm{d}v < \infty \right\}.$$

Plus généralement, pour tout $p \geq 2$, on définit les espaces

$$H_p(\mathbb{R}^N) = \left\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^N} |f|^p\ \omega^{p-1}\ \mathrm{d}v < \infty \right\}, \tag{5}$$

et

$$Y^p_\omega\left(\mathbb{R}^{2N}\right) = L^p\left(\mathbb{R}^N,\ H_p(\mathbb{R}^N)\right),$$

où $\omega = (1 + ||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}$. L'espace fonctionnel d'existence de la solution de (1) est

$$Y = \left\{ f \in L^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^N, V\right),\ \ \partial_t f + v \cdot \nabla_x f \in L^2\left([0,T] \times \mathbb{R}^N, V'\right) \right\},$$

où

$$V = \left\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2\ \omega\ \mathrm{d}v < \infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla_v (f\ \omega)|^2}{\omega}\ \mathrm{d}v < \infty \right\}, \tag{6}$$

et V' représente le dual de V.

Théorème 0.1.1. *Supposons que f_0 est une fonction non négative dans $Y^2_\omega \cap Y^p_\omega$ avec $p > 2$ et $\beta > N + 4$. Soit f^ε la solution de (1), où $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^2$, dans Y avec la condition initiale f_0. Alors f^ε converge faiblement étoile dans $L^\infty\left([0,T],\ Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2N})\right)$ vers $\rho(t,x)\ \frac{K}{\omega}$ où $\rho(t,x)$ est l'unique solution de*

$$\partial_t \rho - \nabla_x \cdot (D\ \nabla_x \rho) = 0, \tag{7}$$

où la condition initiale ρ_0 est donnée par $\rho_0(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f_0 \, dv$, et le cœfficient de diffusion D est donné par

$$D = \int_{\mathbb{R}^N} v \otimes \chi \, dv, \tag{8}$$

où χ est l'unique solution du problème auxiliaire suivant $Q(\chi) = \frac{-K\ v}{\omega}$ avec $\int_{\mathbb{R}^N} \chi \, dv = 0$.

L'étude de la limite de diffusion de l'équation (1) ne serait pas complète si nous ne traitons pas le problème de l'existence de la solution de (1). Pour cela nous inspirons de [26, 28] pour résoudre ce problème d'existence.

Théorème 0.1.2. *Supposons que $f_0 \in Y^2_\omega(\mathbb{R}^N)$. Alors l'équation (1) admet une unique solution f dans la classe des fonctions Y.*

La preuve de ce Théorème se base sur l'application du Théorème de Lions [49].

0.1.3 Preuve du Théorème 0.1.1, [Chapitre 1]

0.1.3.1 Analyse formelle (Méthode de Hilbert)

Pour identifier l'équation limite, on utilise le développement de Hilbert. En effet, on écrit formellement

$$f^\varepsilon = f^0 + \varepsilon f^1 + \varepsilon^2 f^2,$$

avec f^k indépendantes de ε, et on identifie les différentes puissances de ε et on obtient

$$Q(f^0) = 0, \tag{9}$$

$$Q(f^1) = v \cdot \nabla_x f^0, \tag{10}$$

$$Q(f^2) = \partial_t f^0 + v \cdot \nabla_x f^1. \tag{11}$$

D'après (9) on déduit que f_0 est dans le noyau de Q alors

$$f^0 = \frac{\rho(t,x)\ K}{(1 + ||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}}.$$

Comme f_0 est paire, (10) admet une solution

$$f^1 = -\chi \cdot \nabla_x \rho \ \text{ avec } \chi = Q^{-1}\left(\frac{-vK}{(1 + ||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}}\right).$$

Pour que f_2 existe, il faut que $\int \partial_t f^0 + v \cdot \nabla_x f^1 \, dv = 0$, ce qui donne l'équation suivante vérifiée par ρ

$$\partial_t \rho - \nabla_x \cdot (\int_{\mathbb{R}^N} v f_1 dv) = 0,$$

autrement dit,

$$\partial_t \rho - \nabla_x \cdot (D \, \nabla_x \rho) = 0, \quad \text{avec} \quad D = \int_{\mathbb{R}^N} v \otimes \chi \, dv \quad \text{et} \quad Q(\chi) = -\frac{vK}{(1 + ||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}}. \tag{12}$$

Et donc ρ vérifie bien une équation de diffusion.

0.1.3.2 Etude rigoureuse, méthode des moments

Pour obtenir rigoureusement l'équation (12) vérifiée par $\rho(t, x)$, nous utilisons la méthode des moments. Cette méthode est basée sur la formulation faible de l'équation (3). De plus, cette méthode consiste à effectuer un developpement en ε sur la fonction test et non sur f^ε, ce qui nécessite des hypothèses plus faible sur la condition initiale que la méthode de développement de Hilbert.

Pour tout fonction test $\varphi(t, x, v)$, la formulation faible de (3) est

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} f^\varepsilon \, \varphi \, \omega \, \mathrm{dvdx} = \int_{\mathbb{R}^{2N}} f^\varepsilon \, \left(\partial_t \varphi + \frac{1}{\varepsilon} \, v \cdot \nabla_x \varphi + \frac{1}{\varepsilon^2} \, Q(\varphi) \right) \, \omega \, \mathrm{d}v \mathrm{d}x. \tag{13}$$

Choisissons une fonction test de la forme $\varphi = \phi(t, x) \, \frac{K}{\omega} = \phi(t, x) \, F(v)$, où ϕ à support compact et ne dépend que de t et de x, notons que la présence de $F(v)$ dans la fonction test φ vient du fait qu'on utilise des espaces de Sobolev à poids, avec un produit de dualité contenant le facteur $\frac{1}{F(v)}$. La fonction test ϕ choisie est indépendante de la variable en vitesse car l'équation limite est une équation pour la densité $\rho(t, x) = \int f \, dv$. Avec cette fonction test, la formulation faible de (3) sera

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} f^\varepsilon \, \phi \, \mathrm{dvdx} = \int_{\mathbb{R}^{2N}} f^\varepsilon \, \left(\partial_t \phi + \frac{1}{\varepsilon} \, v \cdot \nabla_x \phi \right) \, \mathrm{d}v \mathrm{d}x. \tag{14}$$

En passant à la limite $\varepsilon \to 0$ dans la formulation faible ci-dessus, on remarque que le second terme du côté droite de (14) est d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$. Pour cela, il faut introduire une correction d'ordre ε en écrivant $\varphi(t, x, v) = \phi(t, x) \, F(v) + \varepsilon \, \psi(t, x, v)$, la fonction ψ vérifie le problème auxiliaire suivant

$$Q(\psi) = -F(v) \, v \cdot \nabla_x \phi = -\frac{K}{\omega} \, v \cdot \nabla_x \phi, \tag{15}$$

et permet de compenser le terme $\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int f^\varepsilon v \cdot \nabla_x \phi \; dvdx$.
Nous intégrons en temps (13), pour obtenir

$$\begin{aligned}
-K\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f^\varepsilon(0)\;\phi(0)\;\mathrm{d}v\mathrm{d}x \quad - \quad & K\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f^\varepsilon\;\partial_t\phi\;\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
= \quad & \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f^\varepsilon(0)\;\psi(0)\;\omega\;\mathrm{d}v\mathrm{d}x \\
+ \quad & \varepsilon\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f^\varepsilon\;\partial_t\psi\;\omega\;\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
+ \quad & \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f^\varepsilon\;v\cdot\nabla_x\psi\;\omega\;\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Pour étudier la limite $\varepsilon \to 0$ dans (16), nous démontrons la compacité de f^ε solution de (3). Pour cela, nous cherchons des estimations a priori vérifiées par f^ε et $\rho^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} f^\varepsilon \, dv$, et plus particulièrement si $f_0 \in Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2N})$ tels que $p \geq 2$ et $T > 0$, on montre que

$$||f^\varepsilon(T)||^p_{Y^p_\omega} + \frac{p\;(p-1)}{\theta(\varepsilon)}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\nabla_v(f^\varepsilon\;\omega)|^2}{\omega}\;(f^\varepsilon)^{p-2}\;\omega^{p-2}\;\mathrm{dvdxdt} \leq ||f_0||^p_{Y^p_\omega}, \qquad (17)$$

et

$$||\rho^\varepsilon(t)||^p_p \leq \frac{1}{K^{p-1}}||f_0||^p_{Y^p_\omega} \quad \text{pour tout} \quad t\in[0,T]. \qquad (18)$$

L'estimation (18) assure l'existence de $\rho(t,x)$ dans $L^\infty([0,T];L^p(\mathbb{R}^N))$ tel que, à sous-suite près, la densité ρ^ε converge faiblement étoile vers ρ dans cet espace, et l'estimation (17) garantit l'existence de $f(t,x,v)$ dans $L^\infty([0,T];Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2N}))$ telle que, à sous-suite près, f^ε converge faiblement étoile vers $f(t,x,v) = \frac{K\;\rho(t,x)}{\omega} = \rho(t,x)\;F(v)$.

Maintenant, on peut utiliser ces convergences pour passer à la limite dans (16). En effet, la convergence faible de ρ^ε nous permet de passer facilement à la limite dans la première ligne de (16). Ensuite, pour étudier le passage à la limite dans le deuxième ligne de (16), nous avons besoin d'expliciter la fonction test ψ, pour cela nous déduisons de (15) que

$$\psi(t,x,v) = \chi\cdot\nabla_x\phi(t,x), \quad \text{avec} \quad Q(\chi) = -\frac{v\;K}{\omega} = -v\;F(v). \qquad (19)$$

De plus, dans l'Annexe A nous calculons explicitement χ solution de

$$Q(\chi) = \nabla_v\cdot\left(\frac{1}{\omega}\;\nabla_v(\chi\;\omega)\right) = -\frac{v\;K}{\omega} \quad \text{avec} \quad \int_{\mathbb{R}^N}\chi\;dv = 0, \quad \text{et} \quad \omega = (1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}$$

pour obtenir

$$\chi = \frac{||v||^2+3}{3\beta-2(N+2)}\;\frac{K\;v}{(1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}}. \qquad (20)$$

D'après les estimations a priori sur f^ε, la forme explicite de χ, et l'inégalité de Hölder, la deuxième ligne dans (16) tend vers zéro.

La partie la plus délicate dans cette limite, c'est la limite du dernier terme dans (16). En effet, pour $p, q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ce dernier terme s'écrit, en utilisant l'inégalité de Hölder, sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f^\varepsilon \; v \cdot \nabla_x \psi \; \omega \; \mathrm{d}v \mathrm{d}x \mathrm{d}t &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f^\varepsilon \; (v \otimes \chi : D^2 \phi) \; \omega \; \mathrm{d}v \mathrm{d}x \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty < f^\varepsilon ; \; v \otimes \chi : D^2 \phi >_{Y_\omega^p, Y_\omega^q} \; dt \qquad (21) \\ &= I^\varepsilon . \end{aligned}$$

On montre que $v \otimes \chi$ est admissible dans Y_ω^q pour $q < \frac{\beta - N}{4}$. Comme l'inégalité de Hölder impose $q > 1$, donc on obtient une condition sur β tels que $\beta > N + 4$. Par conséquent, sous la condition $\beta > N + 4$, on passe à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (21) pour obtenir

$$I^\varepsilon \longrightarrow \int_0^\infty < \frac{K \; \rho}{\omega} ; \; v \otimes \chi : D^2 \phi >_{Y_\omega^p, Y_\omega^q} \; dt.$$

Remarquons que, sous la condition $\beta > N + 4$, le cœfficient de diffusion

$$D = \int_{\mathbb{R}^N} v \otimes \chi \; dv = \int_{\mathbb{R}^N} (v \otimes v) \; \frac{||v||^2 + 3}{3\beta - 2(N+2)} \; \frac{K}{(1 + ||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}} \; \mathrm{d}v \qquad (22)$$

est bien définie. Combinons toutes ces limites, alors ρ vérifie

$$\begin{aligned} -K \int_{\mathbb{R}^N} \rho(0) \; \phi(0) \; \mathrm{d}x &= K \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \partial_t \phi \; \rho \; \mathrm{d}x \mathrm{d}t \\ &+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} (v \otimes \chi : D^2 \phi) \; \rho \; K \; \mathrm{d}v \mathrm{d}x \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

Et par la suite ρ vérifie la formulation faible de l'équation de diffusion (7), la régularité de (7) garantit que ρ est bien la solution forte de (7) et par conséquent cette limite est unique, et donc toute la suite f^ε converge vers $\rho(t, x) \; F(v)$.

0.1.4 Diffusion anormale : Cas des équilibres à décroissance de type puissance

Toujours dans le cadre de l'approximation de diffusion, il y a des cas où le cœfficient de diffusion n'est pas défini : Par exemple pour l'équation de Fokker Planck étudiée ci-dessus, lorsque $\beta \leq N + 4$, le cœfficient de diffusion D donné par (22) est infini. Dans ce cas, après une remise à l'échelle en temps, on peut obtenir encore une équation macroscopique. On parle alors de la diffusion anormale.

D'autres exemples ont été étudiés récemment sur la diffusion anormale, mais cette fois sur l'équation de Botlzmann linéaire, particulièrement dans le cas où les équilibres sont un profil de type puissance au voisinage des grandes vitesses de la forme $F(v) = \frac{1}{|v|^{N+\alpha}}$. Dans ce cas, le cœfficient de diffusion D n'est pas définit lorsque $\int v \otimes v \ F(v) \ dv$ n'est pas borné, notamment lorsque $\alpha \in (0,2)$, (voir [8, 51, 52]).

Dans [51, 52], la limite de diffusion de l'équation de Boltzmann, dans le cas où $\alpha \in (0,2)$, est décrite par une diffusion fractionnaire. D'après [51], le cas $\alpha = 2$ est critique, dans la mesure où, même si le cœfficient de diffusion D est infini, le comportement asymptotique peut encore être décrit par une équation de diffusion standard sous l'échelle de temps appropriée $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^2 \ |\ln \varepsilon|$.

Donc, par anologie aux résultats de la diffusion anormale obtenus sur l'équation de Boltzmann, il nous semble que, dans l'étude de la limite de diffusion pour l'équation de Fokker-Planck, le cas $\beta = N+4$ est un cas critique, le cœfficient de diffusion D est infini, mais le comportement asymptotique peut encore être décrit par une équation de diffusion standard sous l'échelle de temps appropriée $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^2 \ |\ln \varepsilon|$. De plus, dans le cas où $\beta < N+4$, une diffusion fractionnaire peut survenir lorsque $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha$ avec $\alpha \in (0,2)$.

0.1.4.1 Cas de l'équation de Boltzmann

Dans cette section, nous rappelons l'étude de la limite de diffusion éffectuée sur l'équation de Boltzmann linéaire, et particulièrement le cas de la diffusion anormale.
Notre point de départ ici, est l'équation de Boltzmann, une équation cinétique, ayant la même forme que (1)

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f & = & Q(f) & \text{dans } [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ f(0,x,v) & = & f_0(x,v) & \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

L'inconnu $f(t,x,v) \geq 0$ représente la densité des particules à l'instant $t \geq 0$, à la position $x \in \mathbb{R}^N$, et à la vitesse $v \in \mathbb{R}^N$. Ici, nous considérons un opérateur de collision linéaire de type BGK au lieu d'un opérateur dérivé comme pour Fokker-Planck,

$$Q(f) = \int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x,v,v')[f(v')F(v) - f(v)F(v')] \ dv'.$$

Dans cette expression, la fonction d'équilibre thermodynamique $F(v)$ est donnée et correspond à un profil en vitesse. L'équilibre F est une fonction à décroissance polynômiale. En utilisant le scaling classique de la diffusion, l'équation de Boltzmann mise à l'échelle

$$\varepsilon^2\, \partial_t f^\varepsilon + \varepsilon\, v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = Q(f^\varepsilon).$$

Il est bien connu que, lorsque F est une Gaussienne (voir [27] par exemple), la fonction f^ε converge, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $\rho(t,x)\; F(v)$ où ρ est la solution de l'équation de diffusion

$$\partial_t \rho - \nabla_x \cdot (D \nabla_x \rho) = 0,$$

où

$$D = \int \frac{v \otimes v}{\nu(x,v)}\, F(v)\, dv, \quad \text{avec} \quad \nu(x,v) = \int \sigma(x,v,v')\, F(v')\, dv'.$$

On considère comme pour Fokker-Planck, le cas où l'équilibre F est une fonction à décroissance de type puissance de type

$$F(v) = \frac{\kappa_0}{||v||^{N+\alpha}}, \quad \nu(x,v) = \nu_0(x) \quad \text{pour tout} \quad ||v|| \geq C, \tag{23}$$

avec $\alpha \in (0,2)$. Dans ce cas le cœfficient de diffusion D est infini. Cette intérprétation ressemble beaucoup au cas de l'opérateur de Fokker Planck étudié dans la section précédente lorsque $\beta \leq N+4$.

Dans ce cas, comme le cœfficient de diffusion n'est pas défini, il faut procéder à une nouvelle mise à l'échelle en temps de l'équation de Boltzmann ($\theta(\varepsilon) = \varepsilon^{-\alpha}$), l'équation de Boltzmann mise à l'échelle devient

$$\varepsilon^\alpha\, \partial_t f^\varepsilon + \varepsilon\, v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = Q(f^\varepsilon), \tag{24}$$

où α correspond au paramètre introduit dans (23). L'équation limite obtenue, lorsque le libre parcours moyen tend vers zéro dans (24), est une équation de diffusion fractionnaire.

Le premier résultat de diffusion anormale a été obtenu dans [52], où la section efficace σ ne dépend pas de la variable x, en utilisant la téchnique de Fourrier. Ensuite dans [51], par la méthode des moments, en choisissant une fonction test particulière. Dans [51], Mellet a introduit un problème auxiliaire vérifié par χ^ε suivant

$$\nu(x,v)\; \chi^\varepsilon - \varepsilon v \cdot \nabla_x \chi^\varepsilon = \nu(x,v)\; \phi(t,x)$$

pour une fonction test ϕ à support compact dans $[0,\infty) \times \mathbb{R}^N$. Ensuite, grâce à la nouvelle réorganisation du développement de Hilbert dans [8], on intérprète que ce choix du problème auxiliaire de [51], repose sur le fait de décomposer l'opérateur de collision de Boltzmann en un terme de gain et un terme de perte

$$Q(f) = K(f) - \nu f, \quad \text{avec} \quad K(f) = \int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x,v,v')\ f(x,v')\ F(v)\ dv',$$

et de supposer que le terme de gain est négligeable par rapport au terme de perte, et ce dernier soit de même ordre en ε que le terme d'advection. Soulignons que le choix des fonctions à queue épaisse nous oblige à ne plus tuer le terme d'advection qui n'est plus négligeable pour les grandes vitesses, contrairement au cas lorsque l'équilibre thérmodynamique est une Maxwellienne.
Remarquons que cette fonction test peut s'écrire comme

$$\chi^\varepsilon = \phi(t,x) + \psi^\varepsilon(t,x,v), \quad \text{avec} \quad -\nu\ \psi^\varepsilon + \varepsilon v \cdot \nabla_x \psi^\varepsilon = \varepsilon\ v \cdot \nabla_x \phi.$$

La solution de ce problème auxiliaire peut s'écrire ensuite

$$\chi^\varepsilon = \int_0^\infty e^{-\int_0^z \nu(x+\varepsilon vs, v)\ ds}\ \nu(x+\varepsilon vz, v)\ \phi(x+\varepsilon vz, t)\ dz.$$

En multipliant (24) par χ^ε, et intégrant par rapport à x, v, t, la formulation faible de l'équation de Boltzmann est

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} f^\varepsilon\ \partial_t \chi^\varepsilon\ dxdvdt \quad &- \int_{\mathbb{R}^{2N}} f_0\ \chi^\varepsilon(x,v,0)\ dxdv \\ &= \varepsilon^{-\alpha} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} \left(K(f^\varepsilon)\chi^\varepsilon - \nu f^\varepsilon \chi^\varepsilon + f^\varepsilon\ \varepsilon v \cdot \nabla_x \chi^\varepsilon\right)\ dxdvdt, \end{aligned}$$

en écrivant $f^\varepsilon = \rho^\varepsilon F + g^\varepsilon$, on obtient

$$\begin{aligned} &-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} f^\varepsilon\ \partial_t \chi^\varepsilon\ dxdvdt - \int_{\mathbb{R}^{2N}} f_0\ \chi^\varepsilon(0,x,v)\ dxdv \\ = \quad &\varepsilon^{-\alpha} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^\varepsilon \nu F\ [\chi^\varepsilon - \phi]\ dxdvdt + \varepsilon^{-\alpha} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} K(g^\varepsilon)\ [\chi^\varepsilon - \phi]\ dxdvdt. \end{aligned} \tag{25}$$

Pour passer à la limite dans la formulation ci-dessus, on montre que f^ε converge faiblement vers $\rho(t,x)\ F(v)$ et χ^ε converge fortement vers ϕ. Alors on peut passer facilement à la limite dans la première ligne. Puis, on montre que le dernier terme dans (25) tend vers zéro, ce qui est cohérent avec la supposition que le terme de gain $K(f)$ est négligeable devant le terme de perte $\nu\ f$. Ensuite, la limite de premier terme à droite dans (25) donne un opérateur elliptique non local de type opérateur de diffusion fractionnaire. En effet, on trouve, en passant à la limite

$$\begin{aligned}
& -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \rho\ \partial_t \phi\ dxdt - \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho_0\ \phi(0,x)\ dxdv \\
= & \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^\varepsilon \nu(x,v) F(v)\ [\chi^\varepsilon - \phi]\ dxdvdt \\
= & \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^\varepsilon \nu(x,v) F \int_0^\infty e^{-\int_0^z \nu(x+\varepsilon vs, v) ds} \nu(x+\varepsilon vz, v)[\phi(x+\varepsilon vz) - \phi(x,v)] dxdzdtdv.
\end{aligned}$$

En remplaçant $F(v)$ par sa valeur (23), et après un changement de variables

$$-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \rho\ \partial_t \phi\ dxdt - \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho_0\ \phi(0,x)\ dxdv$$

$$= VP \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho(t,x)\ \nu_0(x)\ \nu_0(x+\omega)\ z^\alpha e^{-z\int_0^1 \nu_0(x+sw)\ ds}\ \frac{\phi(t,x+\omega) - \phi(t,x)}{|\omega|^{N+\alpha}}\ d\omega dz dx dt,$$

qui n'est autre que la formulation variationnelle d'une équation elliptique non locale pour ρ.

0.1.4.2 Etude formelle de la diffusion anormale pour l'équation de Fokker-Planck

Dans cette partie, nous donnons une preuve formelle de la limite de diffusion de l'équation de Fokker-Planck lorsque $\beta < N+4$. Cette preuve est formelle et n'est pas complète rigoureusement.

Si nous utilisons le développement formel de Hilbert $f^\varepsilon = f_0 + \varepsilon\ f_1 + \varepsilon^2 f_2$, pour identifier l'équation limite, a priori, le développement classique utilisé dans la section 0.1.3.1 donne une équation de diffusion satisfaite par ρ, où le cœfficient de diffusion est infini sous l'hypothèse $\beta < N+4$, donc nous proposons, par anologie au cas de Boltzmann linéaire, une réorganisation du développement. Pour cela, nous décomposons, en premier temps notre opérateur en deux parties

$$Q(f^\varepsilon) = \nabla_v \cdot \left(\frac{1}{\omega} \nabla_v (f^\varepsilon\ \omega)\right) = -\nu(v)\ f^\varepsilon + K(f^\varepsilon) = \nabla_v \cdot (\nabla_v(\log(\omega))\ f^\varepsilon) + \Delta_v f^\varepsilon,$$

avec

$$\nu(v) = \Delta_v(\log \omega) = \beta\ \frac{2||v||^2 - N(1+||v||^2)}{(1+||v||^2)^2}, \quad \text{et} \quad K(f^\varepsilon) = \Delta_v f^\varepsilon + \frac{\nabla_v f^\varepsilon \cdot \nabla_v \omega}{\omega},$$

et nous supposons que le terme de dérivé $K(f)$ est négligeable devant le terme multiplicatif $\nu\ f$.

Dans un second temps, le scaling normale adapté dans la limite de diffusion ne marche plus. Pour cela, on change le scaling, et on cherche le bon α correspond au scaling $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha$ pour $\alpha \in (0,2)$, l'équation rescalée devient

$$\varepsilon^\alpha \ \partial_t f^\varepsilon + \varepsilon v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = Q(f^\varepsilon). \tag{26}$$

Pour identifier α, et trouver l'équation limite formellement, nous utilisons, par anologie au cas de Boltzmann linéaire, une nouvelle réorganisation du developpement de Hilbert.

$$Q(f_0) = 0, \tag{27}$$

$$\nu(v) \ f_1^\varepsilon + \varepsilon v \cdot \nabla_x f_1^\varepsilon = -\varepsilon v \cdot \nabla_x f_0, \tag{28}$$

$$Q(f_2^\varepsilon) = -K(f_1^\varepsilon) + \varepsilon^\alpha \ \partial_t f_0. \tag{29}$$

Remarquons que ce developpement est plus complexe que celui de la diffusion normale, car la dépendence du correcteur en ε est moins évidente ($\varepsilon \ f_1$ devient f_1^ε).
Nous définissons l'opérateur suivant

$$\tau_\varepsilon(g) = \nu \ g + \varepsilon v \cdot \nabla_x g,$$

on démontre que cet opérateur est inversible avec

$$\tau_\varepsilon^{-1}(f) = -\int_0^\infty e^{\nu \ z} \ f(x + \varepsilon v z, v) \ dz \tag{30}$$

L'équation (27) implique que $f_0 = \frac{K \ \rho(t,x)}{\omega}$. L'équation (28) devient

$$\tau_\varepsilon(f_1^\varepsilon) = -\varepsilon \frac{K}{\omega} \ v \cdot \nabla_x \rho,$$

La dernière équation plus (30) implique que

$$f_1^\varepsilon = \varepsilon \int_0^\infty e^{\nu \ z} \ \frac{K}{\omega} \ v \cdot \nabla_x \rho(t, x + \varepsilon v z) \ dz. \tag{31}$$

Ainsi, l'équation de compatibilité de l'équation déterminant f_2^ε, (29) donne

$$\partial_t \rho - \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} K(f_1^\varepsilon) \ dv = 0. \tag{32}$$

Maintenant, cherchons l'ordre en ε de $\int K(f_1^\varepsilon)\ dv$, pour que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} \ \int_{\mathbb{R}^N} K(f_1^\varepsilon)\ dv$ soit fini et non nulle. Pour cela , en utilisant (31) on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} K(f_1^\varepsilon)\ dv = \int_{\mathbb{R}^N} \nu(v) f_1^\varepsilon\ dv \ &= \ \int \nu(v) \int_0^\infty e^{\nu\ z}\ \frac{K}{\omega}\ \varepsilon v\cdot\nabla_x \rho(t,x+\varepsilon vz)\ dzdv \\
&= \ \int_{\mathbb{R}^N} \nu(v) \int_0^\infty e^{\nu\ z}\ \frac{K}{\omega}\ \partial_z \rho(t,x+\varepsilon vz)\ dzdv \\
&= \ \int_{\mathbb{R}^N} \nu(v) \int_0^\infty e^{\nu\ z}\ \frac{K}{\omega}\ \partial_z [\rho(t,x+\varepsilon vz) - \rho(t,x)]\ dzdv \\
&= \ -\int_{\mathbb{R}^N} \nu(v)^2 \int_0^\infty e^{\nu\ z}\ \frac{K}{\omega}\ [\rho(t,x+\varepsilon vz) - \rho(t,x)]\ dzdv.
\end{aligned}$$

Pour trouver la limite de cet opérateur, nous le décomposons en deux rangs en vitesse, et nous posons $s=-\nu z$:

$$\begin{aligned}
I_1 \ &= \ -\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{||v||\geq \varepsilon^{-\frac{1}{3}}} \nu(v)^2 \int_0^\infty e^{\nu\ z}\ \frac{K}{\omega}\ [\rho(t,x+\varepsilon vz) - \rho(t,x)]\ dzdv, \\
&= \ -K\ \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{||v||\geq \varepsilon^{-\frac{1}{3}}} -\nu(v) \int_0^\infty e^{-s} \frac{\rho(t,x-\varepsilon\frac{vs}{\nu(v)}) - \rho(t,x)}{\omega} dsdv \\
&= \ K\ \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha}\ \varepsilon^{\frac{\beta+2-N}{3}} \int_{||u||\geq 1} \nu\left((\varepsilon\ ||u||^2)^{-\frac{1}{3}}\ u\right) \int_0^\infty e^{-s} \frac{\rho(t,x-h^\varepsilon(u)s) - \rho(t,x)}{\omega^\varepsilon(u)\ ||u||^{\frac{2\ N}{3}}} dsdu,
\end{aligned}$$

avec $h^\varepsilon(u) \ = \ \dfrac{u}{||u||^{\frac{2}{3}}} \dfrac{1}{\beta} \left(\dfrac{(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + ||u||^{\frac{2}{3}})^2}{2||u||^{\frac{2}{3}} - N(\varepsilon^{\frac{2}{3}} + ||u||^{\frac{2}{3}})} \right) \sim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{u}{\beta(2-N)}$ et $w^\varepsilon(u) \ = \ (\varepsilon^{\frac{2}{3}} + ||u||^{\frac{2}{3}})^{\frac{\beta}{2}}$ où $u = \varepsilon v ||v||^2$.

Pour que I_1 soit finie et non nulle, on choisit alors le scaling $t' = \varepsilon^\alpha\ t$ où $0 < \alpha = \dfrac{\beta+2-N}{3} < 2$. Ensuite, en passant à la limite, on trouve

$$\begin{aligned}
I_1 \ &= \ K\ \beta\ (2-N) \int_{||u||\geq 1} \int_0^\infty e^{-s} \frac{\rho(t,x-\frac{us}{\beta(2-N)}) - \rho(t,x)}{||u||^{N+\alpha}} dsdu \\
&= \ -K\ \beta\ (N-2) \int_{||u||\geq 1} \int_0^\infty e^{-s} \frac{\rho(t,x+\frac{us}{\beta(N-2)}) - \rho(t,x)}{||u||^{N+\alpha}} dsdu
\end{aligned}$$

D'autre part, pour les petites vitesses, nous posons aussi $s=-\nu\ z$, pour trouver

$$\begin{aligned}
I_2 \ &= \ -\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{||v||\leq \varepsilon^{-\frac{1}{3}}} \nu(v)^2 \int_0^\infty e^{\nu\ z}\ \frac{K}{\omega}\ [\rho(t,x+\varepsilon vz) - \rho(t,x)]\ dzdv. \\
&= \ -K\ \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{||v||\leq \varepsilon^{-\frac{1}{3}}} \nu(v)^2 \int_0^\infty e^{\nu(v) z} \frac{\rho(t,x+\varepsilon vz) - \rho(t,x) + \varepsilon z\ v\cdot\nabla_x\rho(t,x)}{\omega} dzdv \\
&= \ K\ \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{||v||\leq \varepsilon^{-\frac{1}{3}}} \int_0^\infty e^{-s} \frac{\varepsilon v\cdot\nabla_x\rho(t,x-\varepsilon\frac{vs}{\nu(v)}) - \varepsilon v\cdot\nabla_x\rho(t,x)}{\omega} dsdv.
\end{aligned}$$

Intégrons par parties ci-dessus par rapport à s, et choisissons le même changement de variable $u = \varepsilon\ v\ ||v||^2$, nous trouvons

$$\begin{aligned} I_2 &= K \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2-\alpha} \int_{||v||\le \varepsilon^{-\frac13}} \frac{1}{(-\nu(v))} \int_0^\infty e^{-s} \frac{v\ D^2\rho(t,x-\varepsilon\frac{vs}{\nu(v)})\ v^\perp}{\omega}\ dsdv \\ &= -K \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{||u||\le 1} \left(\frac{(\varepsilon^{\frac23}+||u||^{\frac23})^2}{\beta(2||u||^{\frac23} - N(\varepsilon^{\frac23}+||u||^{\frac23}))} \right) \int_0^\infty e^{-s} \frac{u\ D^2\rho(t,x-s\ h^\varepsilon(u))\ u^\perp}{||u||^{\frac43}\ \omega^\varepsilon(u)\ ||u||^{\frac{2\ N}{3}}}\ dsdu. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la valeur de $\alpha = \frac{\beta-N+2}{3}$ on peut écrire

$$I_2 = \frac{K}{\beta(N-2)} \int_{||u||\le 1} \int_0^\infty e^{-s}\ \frac{u\ D^2\rho\left(t, x+\frac{s\ u}{\beta\ (N-2)}\right)\ u^\perp}{||u||^{N+\alpha}}\ dsdu.$$

Notons que cette dernière intégrale est finie car $2-\alpha > 0$. Et par la suite

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} \int K(f_1)\ dv &= \frac{K}{\beta(N-2)} \int_{||u||\le 1} \int_0^\infty e^{-s}\ \frac{u\ D^2\rho\left(t, x+\frac{s\ u}{\beta\ (N-2)}\right)\ u^\perp}{||u||^{N+\alpha}}\ dsdu \\ &- K\ \beta(N-2) \int_{||u||\ge 1} \int_0^\infty e^{-s} \frac{\rho\left(t, x+\frac{us}{\beta(N-2)}\right) - \rho(t,x)}{||u||^{N+\alpha}} dsdu. \end{aligned}$$

Enfin ρ vérifie bien une équation de diffusion fractionnaire.

0.1.4.3 Problème ouvert

La démonstration rigoureuse du raisonnement formel précédent, dans le cas où $\beta < N+4$, est incomplète. Plus particulièrement, la justification du fait que le terme de dérivé est d'ordre inférieure que celui du terme multiplicatif dans la décomposition de l'opérateur est incomplète pour le moment.
Nous voulons utiliser la méthode des moments. pour cela, en s'inspirant de (28) on définit la fonction auxiliaire suivante

$$\chi^\varepsilon = K \int_0^\infty (-\nu(v))\ e^{\nu(v)z}\ \frac{\phi(t, x+\varepsilon v z)}{\omega}\ dz \quad \text{satisfaisant} \quad \nu(v)\ \chi^\varepsilon + \varepsilon\ v\cdot\nabla_x \chi^\varepsilon = \nu \frac{K\ \phi}{\omega}, \tag{33}$$

où $\phi(t,x)$ est une fonction test à support compact dans $(0,\infty)\times\mathbb{R}^N$. Notons que, nous pouvons aussi écrire cette fonction test comme un développement en ε, comme suit

$$\chi^\varepsilon = \frac{K\ \phi}{\omega} + \psi^\varepsilon \quad \text{avec} \quad \nu(v)\psi^\varepsilon + \varepsilon v\cdot\nabla_v \psi^\varepsilon = K\ \varepsilon v\cdot\nabla_v \frac{\phi}{\omega}.$$

Ensuite, nous rescalons l'équation suivant le nouveau scaling

$$t' = \varepsilon^\alpha\ t, \quad \text{et} \quad x' = \varepsilon\ x,$$

avec $0 < \alpha = \frac{\beta+2-N}{3} < 2$. L'équation rescalée est

$$\varepsilon^{\alpha}\, \partial_t f^{\varepsilon} + \varepsilon v \cdot \nabla_x f^{\varepsilon} = Q(f^{\varepsilon}). \tag{34}$$

Multiplions (34) par la fonction test $\chi^{\varepsilon}\, \omega$, et intégrons l'équation pour trouver

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t f^{\varepsilon}\, \chi^{\varepsilon}\, \omega\, dxdvdt \;&=\; \varepsilon^{-\alpha}\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} [K(f^{\varepsilon}) - \nu(v) f^{\varepsilon} - \varepsilon v\cdot\nabla_x f^{\varepsilon}]\ \chi^{\varepsilon}\, \omega \\
&=\; \varepsilon^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (\chi^{\varepsilon}\, \omega - \varphi)\ \nu(v)\ \frac{\rho^{\varepsilon}\ K}{\omega} \\
&+\; \varepsilon^{-\alpha}\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (\chi^{\varepsilon}\, \omega - \varphi)\ K(f^{\varepsilon} - \frac{\rho^{\varepsilon}}{K\ \omega}).
\end{aligned} \tag{35}$$

Pour identifier l'équation limite de (34), on passe à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (35). Remarquons que l'estimation (17) est vraie pour tout $\beta > N$, alors la convergence, lorsque $\varepsilon \to 0$, de f^{ε} vers $\dfrac{K\ \rho(t,x)}{\omega}$ dans l'espace $L^{\infty}\left(0,T; Y^p_{\omega}(\mathbb{R}^{2N})\right)$, avec $p \geq 2$, reste vraie lorsque $\beta < N+4$. Ensuite, en utilisant la forme de χ^{ε} dans (33) nous démontrons la compacité de χ^{ε} et de $\partial_t \chi^{\varepsilon}$, et plus particulièrement on démontre

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\chi^{\varepsilon}\ \omega - \varphi|^2}{\omega}\ dvdx + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\partial_t \chi^{\varepsilon}\ \omega - \partial_t \varphi|^2}{\omega}\ dvdx \leq C(\varepsilon), \tag{36}$$

avec $C(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Alors, en combinant la compacité de f^{ε} avec l'estimation (36), nous pouvons alors passer à la limite dans le terme à gauche de l'équation (35), et plus particulièrement

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t f^{\varepsilon}\ \chi^{\varepsilon}\ \omega\ dxdvdt \quad &= \quad -\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f^{\varepsilon}\ \partial_t \chi^{\varepsilon}\ \omega\ dxdvdt \\
&- \quad \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f_0(x,v)\ \chi^{\varepsilon}\ \omega\ dxdv \\
&\overrightarrow{\varepsilon \to 0} \quad -K\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \rho(t,x)\ \partial_t\varphi\ dxdt - K\int_{\mathbb{R}^N} \rho(0,x)\ \varphi(0,x)\ dx \\
&\overrightarrow{\varepsilon \to 0} \quad K\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t \rho(t,x)\ \varphi\ dxdt.
\end{aligned}$$

La partie la plus difficile dans ce passage à la limite, c'est la limite du terme à droite dans (35). En effet, pour que notre supposition au départ soit compatible avec le passage à la limite, il faut démontrer que la limite du premier terme du côté droite de (35) donne un opérateur elliptique non local, et le second terme à droite doit tendre vers zéro. Ce qui est cohérent avec la supposition que le terme de dérivé est négligeable devant le terme multiplicatif.

Pour cela, nous utilisons la technique de la section précédente mais plus rigoureusement pour démontrer

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(\chi^\varepsilon\omega-\varphi)\ \nu(v)\ \frac{\rho^\varepsilon\ K}{\omega}\ dv\ dx=\int_{\mathbb{R}^N}L(\rho)\varphi\ dx=\int_{\mathbb{R}^N}\rho L^*(\varphi)\ dx.$$

Où

$$\begin{aligned} L(\rho) &= \frac{K}{\beta(N-2)}\int_{||u||\le 1}\int_0^\infty e^{-s}\ \frac{u\ D^2\rho\left(t,x+\frac{s\ u}{\beta\ (N-2)}\right)\ u^\perp}{||u||^{N+\alpha}}\ dsdu \\ &- K\ \beta(N-2)\int_{||u||\ge 1}\int_0^\infty e^{-s}\frac{\rho\left(t,x+\frac{us}{\beta(N-2)}\right)-\rho(t,x)}{||u||^{N+\alpha}}dsdu. \end{aligned}$$

Finalement, le problème ouvert dans cette étude est de démontrer que le reste tend vers zéro, c'est à dire

$$\varepsilon^{-\alpha}\int\int(\chi^\varepsilon\omega-\varphi)K(f^\varepsilon-\frac{\rho^\varepsilon}{\omega})\longrightarrow 0\quad\text{lorsque}\quad\varepsilon\to 0. \tag{37}$$

Cette limite est incomplète parce que cette limite nécessite une inégalité de poincarré, par contre cette inégalité n'est pas vraie avec notre poids ω, ce qui nous empêche de passer à la limite.

0.2 Modéles d'agrégation en dynamique des populations.

La deuxième partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de deux modèles d'agrégation en biologie. Dans un premier temps, nous étudions le modèle de chimiotactisme de Keller-Segel. Nous nous intéressons à l'existence globale de la solution du système parabolique-elliptique avec une diffusion critique et dégénérée. Dans un second temps, nous passons à l'étude d'un modèle de regroupement d'individus pour lequel nous montrons l'existence globale des solutions en dimension 1 et 2 en considérant deux choix différents du taux de reproduction, puis nous étudions la convergence de la solution en temps grand vers une solution stationnaire. Ensuite nous étudions le comportement de la solution lorsque la diffusion tend vers zéro. Cette section sera clôturée par une partie dédiée aux perspectives.

0.2.1 Motivation biologique : le regroupement des individus et le chimiotactisme

L'étude mathématique des phénomènes biologiques soulève l'intérêt des mathématiciens depuis plusieurs décennies. Un de ces thèmes est le mouvement de la population biologique qui repésente la dynamique et la dispersion de cette population. Plus précisement, en considérant une seule population mobile de densité u, on modélise classiquement la dispersion spatiale de la population par une équation de diffusion de la forme

$$\partial_t u = \Delta(\Phi(u)) + f, \tag{38}$$

où f décrit le taux de reproduction de la population en fonction des naissances et des décès. La dispersion des individus peut être due à un mouvement aléatoire quand $\Phi(u) = u$ ou repose sur l'hypothèse que les individus se dispersent pour éviter l'encombrement et dans ce cas Φ satisfait

$$\Phi(0) = 0, \quad \text{and } \Phi'(u) > 0, \quad \text{for } u > 0. \tag{39}$$

Cette équation couplée à une ou plusieurs équations à travers des termes non linéaires, modélise par exemple le modèle proie-prédateur, voir [12, 25, 36, 48].

Le concept de diffusion peut être considéré naïvement comme la tendance d'un groupe de particules, initialement concentré au voisinage d'un point dans l'espace, à s'étaler dans le temps, progressivement sur une superficie toujours plus grande autour du point initial. Ici, le terme particules se réfère non seulement aux particules physiques, mais ainsi à une population biologique.

Mais, ce dernier modèle ne prend pas en considération les interférences entre les divers organismes. De plus, dans certaines circonstances, ce modèle induit un comportement individuel loin de la réalité. Par exemple, Grindrod dans [37] cite le cas où f est de la forme

$$f(u) = u\ (1-u)\ (u-a), \text{ pour } a \in (0,1). \tag{40}$$

Dans ce modèle, on suppose que les naissances et les décès ne sont pas explicitement dépendants de la position et du temps, et on suppose que le taux de mortalité est plus élevé que celui de natalité dans les régions où la densité de population est faible ($u < a$) ou bien élevée ($u > 1$), et les individus situés dans une région à faible densité sont supposés migrer vers les régions d'isolement de plus en plus importante. Pourtant, ces individus devraient logiquement se regrouper dans le but d'augmenter leur densité de population locale au-dessus du seuil $u = a$, afin que le taux de natalité l'emporte sur celui de mortalité.

Pour cela, il faudrait que les individus soient capables d'utiliser des informations sur leur habitat local pour déclencher une réponse naturelle dans leur comportement. De plus, des phénomènes comme le fourmillement, l'élevage et d'autres formes de regroupement des individus sont relativement intérréssants. En bref, si les individus sont capables de former des agrégations locales, ils peuvent par conséquent, augmenter leurs chances de survie pour eux-mêmes et pour leurs descendances car cela favorise la chasse, les accouplements et la défense contre les prédateurs.

Un autre exemple qui illustre l'interrêt de regroupement des individus est l'exemple de Galton. Galton a observé le comportement de la moitié des troupeaux de bœufs sauvages en Afrique du Sud et a noté que si un bœuf a été obligé de séparer de son troupeau, l'animal s'est efforcé avec toutes ses forces pour revenir à son troupeau. En outre, les lions apparemment préfèrent attaquer les bêtes isolées ou marginales. Galton considère le positionnement au sein d'un troupeau comme un comportement social que cherche chaque animale pour réduire ses chances de se faire prendre par un prédateur.

Posons la question suivante :

Quelle est la différence entre la diffusion et le regroupement ?

Un exemple concrèt dans [63] illustre la réponse à cette question. Considérons deux photographies aériennes, le premier un essaim de criquets, et l'autre un patch colorant libéré en mer. La taille et l'apparence de ces deux photographies sont similaires, mais les deux entités sont fondamentalement différentes dans le sens que la nappe de colorant va bientôt diffuser et disperser, alors que l'essaim de criquets va maintenir sa cohésion tout en voyageant sur de longues distances pendant des heures ou des jours, en dépit des aléas considérables dans le mouvement individuel.
D'autre part, observons un essaim de moustiques, c'est un phénomène plutôt familier les soirs d'été, on peut avoir l'impression que les moustiques individuels volent complètement au hasard. En fait, ils ne présentent pas un vol aléatoire simple. En effet, un essaim de moustiques qui diffuserait, cesserait d'exister. En réalité, l'essaim persiste pendant longtemps, avec un peu de changement dans sa dimension. Nous devons donc conclure qu'un facteur inconnu agit contre le pouvoir de diffusion.

Pour modéliser le phénomène d'agrégation, Shigesada et Teramoto en (1978) dans [70] ont présenté un modèle mathématique d'advection et de diffusion, dans le but de montrer que la dispersion des individus est controlée par l'interférence entre les individus et avec les conditions environnementales. Leur formulation est basée sur l'hypothèse que les animaux se déplacent sous l'influence des forces suivantes

- Une force de dispersion associée au mouvement aléatoire des animaux.
- Une force d'attraction qui attire les individus vers des environnements plus favorables.
- La pression démographique due à l'interférence entre les individus.

Ainsi, Shigesada et Teramoto ont présenté l'équation suivante

$$\partial_t u = \nabla \cdot (D \, \nabla u) - \nabla \cdot (u \, \nabla \phi) \,, \tag{41}$$

où u représente la densité des individus ; D représente le cœfficient de diffusion, et ϕ désigne le potentiel d'attraction de l'environnement, qui induit la vitesse d'advection $\boldsymbol{\omega} = \nabla \phi$ vers les régions favorables. L'advection dans (41) représente l'effect attractif des individus vers une région particulière et qui par conséquent augmente le taux de reproduction des individus.

Dans les années 70', E. F . Keller et L. A. Segel dans [42], ont présenté un modéle de chimiotactisme, dans le but de décrire le phénomène d'agrégation observé chez une population d'amibes.
Le chimiotactisme est un processus dans lequel les bactéries, ou, plus généralement, les cellules, se déplacent dans une direction déterminée par des stimuli chimiques. La réponse à ces stimuli peut être un déplacement dans la direction de la source du stimulus on parle de chimiotactisme positif ou en s'en éloignant on parle de chimiotactisme négatif. Ces stimuli peuvent être émis par les cellules elles-mêmes ou bien émis par des sources extérieures. Dans ce modèle, la densité des cellules vérifie une équation parabolique de type (41), et même une équation plus générale que (41) avec une diffusion non linéaire, couplée à une équation (elliptique ou bien parabolique) vérifiée par la concentration du stimulus chimique.

L'exemple le plus étudié de chimiotactisme est celui d'une espèce d'amibe appelé Dictyostelium discoideum qui déplace d'une manière chimiotactique positive à l'égard de la plus forte concentration de cAMP (cyclique Adénosime mono-phosphate). Les substances qui conduisent à un chimiotactisme positif sont appelés les chimioattractants et celles qui conduisent à un chimiotactisme négatif sont appelés les répulsifs.
Une population de Dictyostelium discoideum (voir [38, 39]) vit sur les tapis de feuilles mortes dans les forêts et croît par division cellulaire tant qu'il y a de la nourriture suffisante. Ces amibes et ce chimioattractant cAMP se diffusent en suivant la loi de Fick dans l'espace. En cas de carence nutritionnelle, une amibe sécrète un chimioattractant le cAMP qui stimule les autres amibes à en emettre aussi. De plus, les amibes sont attirés par la concentration de plus fort gradient de cAMP. Lorsque la densité des amibes est assez importante ces amibes s'agrègent. Ensuite cet amas des amibes entraine la formation d'un pseudo-plasmoide qui va déplacer par photo-taxis positive. Ce pseudo-plasmoide va fructifier et le corps forme en dernière instance des spores, qui deviennent des amibes et le cycle recommence (voir [38, 39]) .

Un développement du modèle d'agrégation de Shigesada et Teramoto, est élaboré par Grindrod [37], en proposant un modèle de dispersion des individus avec un mécanisme d'agrégation dans des communautés simples et multi-espèces. De plus, il a supposé que chaque individu réagit directement à d'autres personnes dans sa propre localité, et se déplace de façon à augmenter ses chances de survie, sans l'intervention des attractifs ou répulsives intermédiaires. Selon Grindrod, la densité de la population u vérifie une équation de type (41), avec un terme qui décrit le taux de reproduction des individus, couplée à un système elliptique vérifié par la vitesse de dispersion des individus $\boldsymbol{\omega}$.

0.2.2 Le modèle de Keller-Segel

Cette section est consacrée à l'étude du modèle de Keller-Segel qui décrit le phénomène d'agrégation observé chez une population d'amibe, le Dictyostelium discoideum (voir [38, 40]). Nous nous intéressons à des solutions non négatives faibles du système de Keller-Segel suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u &=& \nabla\cdot(\nabla u^m - u\,\nabla\varphi) & x\in\Omega, t>0,\\ -\Delta\varphi &=& u - <u> & x\in\Omega, t>0,\\ <\varphi(t)> &=& 0 & t>0,\\ \partial_\nu u = \partial_\nu \varphi &=& 0 & x\in\partial\Omega, t>0,\\ u(0,x) &=& u_0(x) & x\in\Omega, \end{array}\right. \tag{42}$$

dans un ouvert borné $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, où u est la densité de bactéries ou amibes, et φ est la concentration de chimioattractant, rapelons que $<u>=\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u(t,x)\,dx.$
Ce modèle modélise le phénomène d'agrégation en réponse à un stimulus chimique que l'on s'attend à retrouver dans de nombreuses phénomènes biologiques comme dans le développement des tumeurs cancéreuses.

Aussi, ce modèle est utilisé en astrophysique, il modélise le mouvement du champ moyen de nombreuses particules autogravitantes et browniennes, et en particulier la version de Chandrasekhar [21] qui modélise l'équilibre gravitationnel des étoiles poly-tropiques. Ce système est connu sous le nom de système généralisé de Smulochowski-Poisson, (voir [64]) par exemple.

L'équation (42), est en effet la version parabolique-elliptique du système introduit par E. F. Keller et L. A. Segel (voir [42]) avec une diffusion non linéaire et dégénérée. C'est une équation conservative, la masse notée M est consérvée :

$$M =< u >= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(t,x)\ dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x)\ dx. \tag{43}$$

Ce système modélise une compétition entre le processus de diffusion représenté par le terme diffusif $\nabla\cdot(\nabla u^m)$ et le processus chimiotactique, représenté par le terme $\nabla\cdot(u\nabla\varphi)$. On peut imaginer que si la densité des amibes est suffisement petite et les amibes sont très étalées, le processus de diffusion l'emportera. Par contre, Si la densité est assez forte, on verra apparaître des agrégats. Du point de vue mathématique, si le processus de diffusion l'emporte, on s'attend à un résultat d'existence globale des solutions. Par contre si le processus de chimioactisme l'emporte il s'agit de montrer que les solutions explosent. Dans cette partie on cherche à prouver que, lorsque $m = m_c = \frac{2(N-1)}{N}$ et $N \geq 3$, le système (42) admet une solution globale en temps sous restriction de la masse initiale [57]. Ce résultat complète le résultat récent de T. Cieślak et Ph. Laurençot [22] dans lequel ils montrent que la solution explose en temps fini si la masse initiale est au delà d'un seuil.

Cette section est divisée en trois parties, dans la première partie on rapelle les principaux résultats relatifs à l'existence et l'explosion des solutions de (42). La deuxième partie est consacrée à l'énoncé de mes principaux résultats. Je donne ensuite une idée de la preuve de ces résultats.

0.2.2.1 Existence et explosion

Les questions mathématiques que l'on pose en analysant le système (42), dans un ouvert borné ou bien dans l'espace tout entier $\mathbb{R}^N$, sont les questions classiques de l'existence locale et globale en temps d'une solution faible ou forte, l'unicité de la solution, son comportement asymptotique en temps grand dans le cas d'existence globale et la caracterisation de l'explosion en cas de non-existence. Cette partie est un historique des principaux résultats relatifs à l'existence et l'explosion des solutions seulement, pour arriver à mon cas qui complète l'étude de l'existence-explosion des solutions du système (42).

Notons que les études faites sur la dynamique de (42) dépendent largement des paramètres N, m et M.

Etude du modèle de Keller-Segel dans un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Ici, on considère une version plus générale de (42) où la première équation de (42) serait remplacée par

$$\partial_t u = \nabla\cdot(\phi(u)\ \nabla u - u\ \nabla\varphi), \quad t > 0, \quad x \in \Omega,$$

où le terme de diffusion ϕ est une fonction positive de classe C^1.

Cas de la diffusion linéaire : C'est le cas où $\phi(u) = 1$. En dimension 1, la solution existe globalement en temps, et elle est uniformement bornée quelle que soit la masse initiale. En dimension 2, un phénomène de seuil apparait dans l'étude de la solution, Jäger et Luckhaus dans [41] ont présenté le premier résultat d'éxistence d'une solution globale en temps, sous restriction de la masse initiale, ainsi que la construction d'une solution radiale et explosive. La condition de petitesse bidimensionnelle pour l'existence globale en temps de la solution lorsque $\Omega = B(0, 1)$, a été aussi determinée dans [55] par $M < 8\pi$, et la condition initiale d'explosion en temps fini est déterminée par $M > 8\pi$. Et plus généralement, dans un ouvert borné quelconque Ω et toujours en dimension 2, les auteurs dans [10, 35, 54, 56, 62] ont déjà demontré que, sous restriction de la masse initiale $M < 4\pi$, la solution existe globalement en temps et explose en temps fini ailleurs lorsque u_0 est concentré en un point sur la frontière ou bien à l'intérieur.
Par contre, la situation est complètement différente lorsque $N \geq 3$. Plus précisement, si $N \geq 3$, [55] présente un résultat d'explosion en temps fini de la solution : quelle que soit la masse initiale M, il existe une condition initiale de masse M pour laquelle la solution explose en temps fini.

Cas de la diffusion non linéaire : Dans ce cas, on considère le terme de diffusion ϕ est une fonction positive de classe C^1 qui ne croit pas trop vite à l'infini.
Les auteurs de [24] prouvent l'existence d'une puissance critique $m = m_c = \frac{2(N-1)}{N}$, telle que si la diffusion croît beaucoup plus vite que cette puissance, la solution existe globalement en temps et elle est uniformément bornée, (cf [55] pour le cas $N = 2$), Ensuite on peut resumer les principaux résultats de [24] comme suit

– Pour $N \geq 1$, la solution existe globalement en temps et elle est uniformément bornée si
$$\phi(u) \geq C(1 + u)^{m-1} \quad \text{et} \quad m > m_c.$$
– Pour $N \geq 1$, la solution explose en temps fini, sous des conditions initales à symétrie radiale si
$$\phi(u) \leq C(1 + u)^{m-1} \quad \text{et} \quad m < m_c,$$
pour certaines conditions initiales suffisamment concentrées.

Cas de la diffusion non linéaire critique : A l'exception du cas $N = 2$, le cas critique $\phi(u) = \frac{1}{m_c}\ u^{m_c-1}$ où $m_c = \frac{2\ (N-1)}{N}$ n'est pas étudié dans [24]. Récemment Cieślak et Laurençot dans [22] ont démontré que si $\phi(u) \geq C\ (1 + u)^{m_c-1}$, $N \geq 3$ et si la condition initiale est concentrée, la solution explose en temps fini si la masse initiale M est supérieure à un seuil critique $M_* > 0$. Dans le but de compléter le résultat de Cieślak et Laurençot lorsque $N \geq 3$ et $\phi(u) = \frac{1}{m_c}\ u^{m_c-1}$, et pour mettre en évidence le

phénomène d'agrégation en dimension $N \geq 3$ avec une diffusion non linéaire, il reste à démontrer que la solution existe globalement en temps sous une condition de petitesse sur la masse initiale. Ce dernier problème est au centre de mes recherches dans cette section, dans laquelle nous montrons (voir Théorème 0.2.2) que, si la masse initiale est inférieure à une masse explicite M_c, la solution existe globalement en temps [57]. En combinant notre résultat avec le résultat obtenu dans [22], on peut déduire que, lorsque $N \geq 3$ et $\phi(u) = \frac{1}{m_c}\ u^{m_c-1}$, ils existent $0 < M_c < M_* < \infty$ telles que la solution de (42) existe globalement en temps si la masse initiale $M \in [0, M_c)$ et peut exploser en temps fini lorsque $M > M_*$.
Une question importante posée ici, est de trouver une relation entre M_c et M_* d'une part, et de savoir si $M_c = M_*$ lorsque Ω est une boule de $\mathbb{R}^N$ et u_0 est à symétrie radiale d'autre part. On peut rappeler que, dans le cas radial, où $N = 2$ avec une diffusion linéaire, le seuil explicite de l'explosion est égal à $M_c = M_* = 8\ \pi$ voir [41, 55]. Aussi, toujours en dimension 2, avec une diffusion linéaire, mais dans un domaine ouvert, borné et convexe, les auteurs de [10, 35, 54, 56, 62] ont démontré que $M_c = 4\ \pi = \frac{M_*}{2}$. Un tel résultat reste incomplèt pour le cas où $N \geq 3$ et $\phi(u) = \frac{1}{m_c}\ u^{m_c-1}$.

Avant d'introduire notre étude effectuée sur l'équation (42) dans un ouvert borné Ω où $m = m_c$, je complète cette section en rapellant d'autres résultats sur l'existence globale et l'explosion de la solution, mais cette fois dans l'espace tout entier $\mathbb{R}^N$, pour compléter l'historique de l'état de l'art de ce problème.

Etude du modèle de Keller-Segel dans $\mathbb{R}^N$

Sur $\mathbb{R}^N$, la deuxième équation dans (42) serait remplacée par $\varphi = E_N * u$, avec E_N le noyau de Poisson donné par les formes suivantes,

$$E_2(x) = -\frac{1}{2\ \pi}\ \log|x| \quad \text{ou} \quad E_N(x) = c_N\ |x|^{-(N-2)} \quad \text{si} \quad N \geq 3,$$

de sorte que $-\Delta\varphi = u$.
Dans ce cas, on définit la fonctionnelle de Liapunov par

$$L(u(t)) = \int_{\mathbb{R}^N} A(u(t,x))\ dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (E_N * u)(t,x)\ u(t,x)\ dx, \tag{44}$$

avec
- $A(r) = r\log r - r \geq -1$ si $m = 1$,
- $A(r) = \frac{r^m}{m-1} \geq 0$ si $m > 1$.

D'après la forme (44) de la fonctionnelle de Liapunov, on peut remarquer qu'il y a deux termes qui sont en compétition dans L.

Remarquons que, en dimension 2, le terme négatif de la fonctionnelle de Liapunov est quadratique en u. Alors, la solution existe globalement si le terme positif domine le terme négatif, et ceci est vraie lorsque A croit plus rapidement que le terme quadratique, et notamment lorsque $m > 2$, par contre, cette constante n'est pas optimale. Plus généralement, la condition

$$m > m_c = \frac{2(N-1)}{N} \quad (m_c = 1 \quad \text{si } N = 2)$$

garantit l'existence globale de la solution du modèle (42) modifié, pour plus de details voir [24, 74].

D'autre part, pour préciser la condition de petitesse sur la masse initiale, on utilise l'indentité de Viriel, et plus particulièrement, on considère le second moment de u définit par

$$M_2(t) = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \; u(t,x) \; dx.$$

Dans le cas où $N = 2$ et $m = m_c = 1$ on obtient

$$\frac{d}{dt} M_2(t) = -\frac{M}{4\;\pi}(M - 8\;\pi),$$

ce qui implique la non-existence des solutions globales lorsque $M > 8\;\pi$. Cependant lorsque $m = m_c$ et $N \geq 3$ on trouve

$$\frac{d}{dt} M_2(t) = 2(N-2)\; L(u(t)) \leq 2\;(N-2)\; L(u_0),$$

cette dernière inégalité assure la non-existence des solutions globales si u_0 est tels que $L(u_0) < 0$.
A partir de cette petite introduction, on peut résumer les résultats de l'existence-explosion de la solution dans $\mathbb{R}^N$comme suit :

Cas linéaire : C'est le cas où $m = 1$. En dimension 2, La solution explose en temps fini lorsque $||u_0||_1 > 8\;\pi$, et elle existe globalement en temps lorsque $||u_0||_1 < M_c < 8\;\pi$, (voir [41]), cette preuve utilise l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg. Dans [31, 32], les auteurs ont amélioré le résultat de [41], en montrant que la solution existe globalement en temps lorsque $||u_0||_1 < 8\;\pi$. En outre, la situation est diférente si $N = 1$ et si $N \geq 3$. En effet, en dimension 1, la solution existe globalement en temps sans aucune restriction sur la masse initiale, et lorsque $N \geq 3$ la solution explose en temps fini, quelle que soit la masse initiale.
Cas non linéaire : La solution existe globalement en temps et elle est uniformement bornée lorsque $m > m_c$ avec $N \geq 1$.

Lorsque $1 < m < m_c$, et dans l'espace tout entier $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 1$, le modèle modifié de (42) admet une solution globale et uniforme en temps sous une condition de petitesse sur la masse initiale, et elle explose en temps fini lorsque la masse initiale est suffisemment grande, voir [72, 73].

Cas critique et non linéaire : Plusieurs travaux sont effectués sur l'étude de la dynamique de la solution du modèle modifié dans $\mathbb{R}^N$ où $m = m_c$. En effet, Sugiyama dans [72, 73] démontre qu'il existe $0 < M_1 < M_2 < \infty$ tels que la solution existe globalement en temps si $M < M_1$ et explose en temps fini lorsque $M > M_2$.

Ensuite, les travaux des auteurs dans [14] décrivent plus précisement la dynamique de la solution du modèle modifié lorsque $N \geq 3$ et $m = m_c = \frac{2(N-1)}{N}$. Les auteurs dans [14], utilisent l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev : pour tout $h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^m(\mathbb{R}^N)$, il existe une constante optimale C_* telle que

$$\left| \int \int \frac{h(x)\ h(y)}{|x-y|^{N-2}}\ dxdy \right| \leq C_*\ ||h||_m^m\ ||h||_1^{\frac{2}{N}},$$

pour montrer qu'il existe un seuil explicite $M_c = [\frac{2}{(m_c-1)\ C_*\ c_N}]^{\frac{N}{2}}$ telles que la solution du modèle modifié de (42) dans $\mathbb{R}^N$ existe globalement en temps si la masse initiale est inférieure à M_c, et explose en temps fini lorsque $M > M_c$.

0.2.2.2 Principaux résultats, [Chapitre 2].

Pour étudier l'existence globale des solutions faibles en temps de (42), il est nécessaire de compléter ce système par une densité initiale positive au sens large u_0, ($u_0 \geq 0$), Ceci implique que nous allons considérer, tout au long de cette section, les solutions positives de (42), en cohérence avec leur interprétation biologique. Donc pour u_0 positive dans $L^\infty(\Omega)$ on définit notre système étudié par

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u &=& \nabla\cdot(\nabla u^{m_c} - u\ \nabla\varphi) & x\in\Omega, t>0, \\ -\Delta\varphi &=& u- <u> & x\in\Omega, t>0, \\ <\varphi(t)> &=& 0 & t>0, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu\varphi &=& 0 & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(0,x) &=& u_0(x) & x\in\Omega, \end{array} \right. \tag{45}$$

avec $m_c = \frac{2(N-1)}{N}$ lorsque $N \geq 3$. On définit la solution faible de (45) comme suit

Définition 0.2.1. *Soit $T \in (0;\infty]$. Une couple (u,φ) des fonctions $u : [0,T)\times\Omega \longrightarrow [0,\infty)$, $\varphi : [0,T)\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée une solution faible de (45) dans $[0,T)\times\Omega$ si*
- *$u \in L^\infty((0,T); L^\infty(\Omega))$; $u^{m_c} \in L^2((0,T); H^1(\Omega))$ et $<u>= M$.*
- *$\varphi \in L^2((0,T); H^1(\Omega))$ et $<\varphi>= 0$.*

– *(u,φ) satisfait les équations au sens de distributions ; C.à.d,*

$$-\int_0^T\int_\Omega \left(\nabla u^{m_c}\cdot\nabla\psi - u\nabla\varphi\cdot\nabla\psi - u\ \partial_t\psi\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega u_0(x)\ \psi(0,x)\ \mathrm{d}x,$$

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\psi\ dxdt = \int_0^T\int_\Omega (u-M)\ \psi\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

pour toute fonction continûment différentiable $\psi\in C^1([0,T]\times\overline{\Omega})$ avec $\psi(T)=0$ et $T>0$.

Pour $\varphi\in H^1(\Omega)$ satisfaisant $<\varphi>=0$, on définit C_s la constante de Sobolev telle que

$$||\nabla\varphi||_2 \geq C_s\ ||\varphi||_{2^*},\quad \text{avec}\quad 2^* = \frac{2\ N}{N-2}.$$

Notre principale résultat est consacré à l'existence globale en temps de la solution faible du système (45) sous restriction de la masse initiale de u_0, (voir [57])

Théorème 0.2.2. *Définissons*

$$M_c := \left(\frac{2\ C_s^2}{(m-1)\ |\Omega|^{\frac{2}{N}}}\right)^{\frac{N}{2}}. \tag{46}$$

Soient u_0 une fonction positive dans $L^\infty(\Omega)$ satisfaisant

$$||u_0||_1 < M_c. \tag{47}$$

Alors le système (45) admet une solution globale en temps (u,φ) au sens de la Définition 0.2.1. De plus, si on suppose que

$$\varphi\in L^\infty((0,T);W^{2,\infty}(\Omega)) \tag{48}$$

pour tout $T>0$, alors cette solution est unique.

La preuve de ce théorème consiste à approcher la solution de (45) par une solution du système approché, car (45) est un système à diffusion dégénérée, et plus précisément, la première équation de (45) est une équation quasilinéaire dégénérée. Par conséquent, on ne pourra pas espérer que le système (45) admette une solution classique lorsque u s'annule.

0.2.2.3 Propriétés sur la solution du problème approché

Afin de prouver l'existence de solution faible de (45) sous restriction de la masse initiale, on utilise une méthode de compacité, et on approche la solution de notre système par la solution de

$$\begin{cases} \partial_t u_\delta &= \nabla\cdot(\nabla(u_\delta+\delta)^{m_c} - u_\delta\nabla\varphi_\delta) & x\in\Omega, t>0,\\ -\Delta\varphi_\delta &= u_\delta - < u_\delta > & x\in\Omega, t>0,\\ \partial_\nu u_\delta = \partial_\nu\varphi_\delta &= 0 & x\in\partial\Omega, t>0,\\ u_\delta(0,x) &= u_0(x) & x\in\Omega, \end{cases} \tag{49}$$

où $\delta\in(0,1)$. Notons que la masse totale est conservée, c'est-à-dire

$$M = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_\delta(t,x)\,dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)\,dx, \quad t>0.$$

Pour cela, on montre un résultat d'existence globale en temps de la solution classique du problème approché (49), sous une restriction de la masse initiale, voir [57].

Théorème 0.2.3. *Soient $\delta\in(0,1)$ et $T>0$. Considèrons une condition initiale positive $u_0\in L^\infty(\Omega)$ telle que $||u_0||_1 < M_c$, où M_c est donnée par la forme (46), alors le système (49) admet une solution globale en temps $(u_\delta,\varphi_\delta)$, cette solution est bornée dans $L^\infty((0,T)\times\Omega)$ pour tout $T>0$ uniformement par rapport à δ.*

La preuve de ce théorème repose sur les estimations a priori en temps de normes convenables de $u(t)$ et $\varphi(t)$. Ces estimations sont uniformes par rapport à δ, cette preuve est détaillée dans le Chapitre 2.

L'étude de (49) ne serait pas complète si nous ne rappelons pas le problème de l'existence de solution maximale en temps de (49). Cependant en faisant appel aux résultats de [24, Lemme 1.2] on pourra dire que

Lemme 0.2.4 (Existence locale en temps du système approché)**.** *Soit $\delta\in(0,1)$. Pour tout $K>\frac{M}{2}$, il existe $T=T(K)>0$ tels que si $u_0\in C_0^\infty(\Omega)$ et satisfait $M=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)\,dx$ et $0\le u_0\le K$ dans Ω, alors (49) admet une unique solution classique $(u_\delta,\varphi_\delta)$, avec $(u_\delta,\varphi_\delta)\in C^{2,1}([0,T]\times\bar{\Omega})$ et $0\le u_\delta\le K$ dans $(0,T)\times\Omega$.*

La preuve de ce lemme est basée sur un théorème de type point fixe. En démontrant l'existence et l'unicité de la solution classique de (49) les auteurs se basent sur le theorème de Schauder. Toutefois, ce résultat se base sur une hypothèse assez forte sur la densité initiale de cellule u_0 bornée.
Dans le cas d'une condition initiale moins forte, la preuve de l'existence de solution maximale est basée sur une procédure qui cherche à approcher la solution par une solution locale donnée dans le Lemme 0.2.4. De plus la solution de (49) vérifie le principe de Blow-up, Voir [24, Théorème 1.3]

Théorème 0.2.5 (Solution maximale du système approché)**.** *Soient* $\delta \in (0,1)$. *On considère une condition initiale positive* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. *Alors il existe un temps maximal* $T^\delta_{\max} \in (0,\infty]$ *et une unique solution* $(u_\delta, \varphi_\delta)$ *de* (49) *dans* $[0, T^\delta_{\max}) \times \Omega$. *De plus,*

$$\text{si} \quad T^\delta_{\max} < \infty \quad \text{alors} \quad \lim_{t \to T^\delta_{max}} ||u_\delta(t,.)||_\infty = \infty.$$

Enfin, $< u_\delta(t) >=< u_0 >= M$ *pour tout* $t \in [0, T^\delta_{\max})$.

0.2.2.4 Méthodes de preuve

– **Existence globale de la solution de** (49) **: preuve de Théorème 0.2.3**
Comme la solution de (49) vérifie le principe de Blow-up décrit dans le Théorème 0.2.5, alors la preuve de l'existence globale de la solution consiste à démontrer que la norme L^∞ de la solution u_δ de (49) est bornée, uniformement par rapport à δ, pour tout $T > 0$. Pour cela, nous avons besoin d'une série d'estimations a priori, qui nous induisent la norme L^∞. Tout d'abord, pour tout $\delta > 0$, le système (49) possède une fonctionnelle de Liapunov, donnée par

$$L_\delta(u_\delta, \varphi_\delta)(t) = \int_\Omega \left(b_\delta(u(t,x)) + \frac{1}{2}|\nabla \varphi_\delta(t,x)|^2 - u_\delta(t,x)\ \varphi_\delta(t,x) \right)\ \mathrm{d}x,$$

où

$$b_\delta(u)(t,x) := \int_1^{u_\delta(t,x)} \int_1^z \frac{m_c(\sigma+\delta)^{m_c-1}}{\sigma}\, d\sigma\ dz,$$

tel que $b_\delta(1) = b'_\delta(1) = 0$ et $b(u) \geq 0$. Cette fonctionnelle est décroissante, et elle est fondamentale dans la recherche d'estimations a priori, et plus particulièrement dans la recherche d'une estimation $L^{m_c}(\Omega)$ sur u_δ. En effet, on voit clairement que dans la fonctionnelle de Liapunov, le premier terme est d'ordre m_c en u_δ. Alors, pour que le terme positif domine le terme négatif dans L_δ, nous utilisons des inégalités de Sobolev, de Young et de Hölder, pour borner supérieurement $\int_\Omega u_\delta\ \varphi_\delta\ dx$ par la norme $||u_\delta||^{m_c}_{m_c}$ comme suit

$$\int_\Omega u_\delta\ \varphi_\delta\ dx \leq \frac{1}{2}||\nabla \varphi_\delta||_2^2 + \frac{C_s^{-2}}{2}\ M^{\frac{2}{N}}\ |\Omega|^{\frac{2}{N}}\ ||u_\delta||^{m_c}_{m_c}. \tag{50}$$

En combinant (50) avec la décroissance de la fonctionelle de Liapunov, on trouve

$$\begin{aligned} L_\delta(u_0,\varphi_0) + \frac{m}{m-1}\ M\ |\Omega| \quad &\geq \quad L_\delta(u_\delta(t), \varphi_\delta(t)) + \frac{m_c}{m_c - 1}\ M\ |\Omega| \\ &\geq \quad \frac{|\Omega|^{\frac{2}{N}}}{2\ C_s^2}\ (M_c^{\frac{2}{N}} - M^{\frac{2}{N}})\ ||u_\delta(t)||^{m_c}_{m_c}, \end{aligned}$$

pour $t \in [0, T^\delta_{max})$. De plus, comme $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ la fonction $L_\delta(u_0,\varphi_0)$ est borné indépendement de δ. Alors, on voit bien que sous la condition $||u_0||_1 =$

$M < M_c$, la fonctionelle de Liapunov est bornée inférieurement, ce qui induit une borne $L^{m_c}(\Omega)$ sur u_δ indépendante de $T^\delta_{\max}$ et de δ.

Ensuite, à partir de la norme L^{m_c} sur u_δ, nous cherchons une estimation L^p, pour tout $p > 2$, sur u_δ uniformement par rapport à δ. Pour $K > 0$, il s'agit d'utiliser l'idée due à Jäger et Luckhaus [41], i.e,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}||(u_\delta - K)_+||_p^p \quad &\leq \quad -m_c\ (p-1) \int_\Omega (u_\delta + \delta - K)^{m_c - 1}\ (u_\delta - K)_+^{p-2}\ |\nabla u_\delta|^2\ \mathrm{d}x \\ &+ \quad 3p\ ||(u_\delta - K)_+||_{p+1}^{p+1} + C(p)\ K^{p+1}. \end{aligned} \tag{51}$$

Remarquons que l'estimation L^p de $(u_\delta - K)_+$ dépend de la norme L^{p+1} de $(u_\delta - K)_+$. Pour cela, nous appliquons l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg et l'estimation L^{m_c} de u_δ pour faire absorber le terme L^{p+1} dans le terme négatif de (51). Ensuite nous choisissons K suffisement grand, pour obtenir une estimation uniforme par rapport à δ sur le terme de dérivé dans l'inégalité (51). On obtient alors pour tout $p \geq 2$

$$||u_\delta(t)||_p \leq C(p,T), \quad t \in [0, T_{\max}) \cap [0,T], \tag{52}$$

$$\int_0^t \int_\Omega (\delta + u_\delta)^{m_c - 1}\ u_\delta^{p-2}\ |\nabla u_\delta|^2\ dxds \leq C(p,T), \quad t \in [0, T_{\max}) \cap [0,T] \tag{53}$$

où $C(p,T)$ est une constante indépendante de δ.

Suite à l'estimation (52) et à la régularité elliptique, le gradient de φ_δ est borné en espace et en temps. Ensuite, l'estimation (52) avec la première équation de (49), nous permettent de trouver une estimation L^∞ sur u_δ, en effet

$$\sup_{0<t<T} ||u_\delta(t)||_r \leq C(T)^{\frac{1}{r}}\ r^{\frac{\alpha}{r}} \max\left\{C, \sup_{0<t<T} ||u_\delta(t)||_{\frac{r}{4}}\right\}, \tag{54}$$

où $\alpha > 0$. L'inégalité (54) plus la méthode itérative de Moser, adaptée par Alikakos aux systèmes de réaction-diffusion [1], donnent une estimation L^∞ sur u_δ uniforme par rapport à δ. Par conséquent, le Théorème 0.2.5 assure que la solution u_δ de (49) ne peut pas exploser en temps fini, et elle est globale en temps.

– **Existence et unicité de (45) : preuve du Théorème 0.2.2**
Pour prouver l'existence de solution de (45) il suffit d'appliquer le lemme de compacité de Simon [71, Corrolary 4]. Pour cela on cherche une estimation de $\partial_t u_\delta^{m_c}$ dans l'espace dual de $W^{1,N+1}$.
On obtient alors, pour tout $T > 0$ et $p \in (1, \infty)$, la convergence forte de la suite u_{δ_n} vers $u > 0$ dans l'espace $L^p((0,T) \times \Omega)$ et la convergence de φ_{δ_n} vers φ dans $L^p((0,T); W^{2,p}(\Omega))$ lorsque $\delta_n \to 0$. En passant à la limite dans la formulation faible de (49) on trouve que la limite (u, φ) n'est autre que la solution faible de (45) au sens

de la Définition 0.2.1.

En présence d'une diffusion non linéaire, l'unicité de la solution est prouvée en utilisant la technique de dualité classique.
Cette approche était déjà utilisée dans [6, 11], sans aucune hypothèse supplémentaire sur φ, mais dans le cas où les effets non locaux sont modélisés par une convolution avec un noyau singulier ou non singulier, plus précisement, lorsque la deuxième équation dans (45), vérifiée par φ, sera remplacée par

$$\varphi = \nabla K * u. \tag{55}$$

Bertozzi et Slepčev dans [11], démontrent l'existence et l'unicité de la solution du modèle modifié, mais en se limitant à des noyaux non singuliers. Plus tard, Bedrossian, Bertozzi et Rodriguez dans [6] étendent le travail de [11], pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution, mais avec des noyaux singuliers, plus particulièrement avec les potentiels de Newton et de Bessel. Leurs idées reposent sur le choix des noyaux admissibles (voir[6]), qui vérifient certaines caractéristiques qui jouent un rôle important dans la preuve de l'unicité. Plus précisement, en utilisant l'inégalité de Calderón-Zygmund (voir [76, Theorem 2.2]), on conclut que $D^2 K * u$ est une distribution bornée dans L^p pour $1 < p < \infty$, et on a le Lemme suivant (voir [6])
Lemme 0.2.6. *Soient K un noyau admissible et $\varphi = \nabla K * u$. Alors, pour tout $1 < p < \infty$, il existe $C(p)$ tels que*

$$||\nabla \varphi||_p \leq C(p)\ ||u||_p, \quad C(p) \lesssim p \quad \text{pour} \quad 2 \leq p < \infty. \tag{56}$$

La dépendance linéaire de la constante par rapport à p est cruciale pour l'unicié. Cependant, et toujours dans le cas d'un ouvert borné avec des conditions de Neumann aux bords, on sait que, d'après l'inégalité de Calderón-Zygmund, $||D^2\varphi||_p \leq\ C(p)\ ||u- < u>||_p$, mais le fait qu'on peut estimer $C(p) \lesssim p$ comme dans (56) n'est pas clair pour le moment.

0.2.3 Modèle de regroupement des individus, Grindrod [37]

Cette section est consacrée à l'étude d'un modèle de regroupement des individus avec un mécanisme d'agrégation. Ce modèle est proposé par Grindrod en 1988 dans [37].

0.2.3.1 Modèle bien posé

Soit u la densité de la population, nous nous intéressons à des solutions non négatives u de l'équation

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u\ \boldsymbol{V}(u,t,x)) + u\ E(u,t,x), \tag{57}$$

où $\boldsymbol{V}$ représente la vitesse moyenne de dispersion des individus, et E le taux de reproduction par individu à l'instant t et à la position x. Pour compléter ce modèle, il faut trouver le lien entre $\boldsymbol{V}$ et E. D'après [37], nous supposons que chaque individu se disperse aléatoirement avec une probabilité $\delta \in (0,1)$, et se disperse d'une manière déterministe avec une vitesse moyenne $\boldsymbol{\omega}$, afin d'augmenter le taux de reproduction avec une probabilité $1-\delta$. La dispersion aléatoire est représentée par une diffusion de Fick de la forme $\frac{\nabla u}{u}$, d'où nous écrivons

$$\boldsymbol{V} = -\frac{\delta\ \nabla u}{u} + (1-\delta)\ \boldsymbol{\omega}. \tag{58}$$

Ici, $\boldsymbol{\omega}$ représente la vitesse moyenne des individus, qui devrait être dans le sens de l'augmentation du taux de reproduction $E(u,t,x)$, par exemple, de la forme $\lambda\ \nabla E(u,t,x)$ avec $\lambda > 0$. L'évolution de $\boldsymbol{\omega}$ est décrite par

$$-\ \varepsilon\ \Delta\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} = \lambda\ \nabla E(u), \tag{59}$$

où $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon\ \Delta\boldsymbol{\omega}$ cherche à lisser toute variation locale de $\nabla E(u)$.
En rassemblant (57)-(59), nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \delta\ \Delta u - (1-\delta)\ \nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}) + u\ E(u,t,x) \\ -\varepsilon\ \Delta\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} & = & \lambda \nabla E(u,t,x). \end{cases} \tag{60}$$

Pour simplifier l'équation, nous faisons ensuite le scaling suivant

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\lambda}, \quad \tilde{t} = t\ (1-\delta)\ \lambda, \quad \tilde{\delta} = \frac{\delta}{(1-\delta)\ \lambda}, \quad r = \frac{1}{(1-\delta)\ \lambda},$$

omettons les tildas, et supposons que les environnements sont homogènes c-à-d E ne dépend pas explicitement de t et de x. L'équation (60) devient

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \delta\ \Delta u - \nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}) + r\ u\ E(u) \\ -\varepsilon\ \Delta\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} & = & E'(u)\ \nabla u, \end{cases} \tag{61}$$

dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$, $1 \le N \le 3$. Nous complétons (61) avec des conditions de flux nul aux bords, en prenant en compte que aucun individu peut entrer ou bien quitter le domaine Ω aux bords, c-à-d

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla u = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0 \quad x \in \partial\Omega,\ t \ge 0. \tag{62}$$

Cependant, ces dernières conditions (62) ne sont pas suffisantes pour que l'équation elliptique, verifiée par $\boldsymbol{\omega}$, soit bien posée dans l'espace à dimension supérieure. Pour cela on est obligé d'ajouter une condition supplémentaire aux bords sur $\boldsymbol{\omega}$. Cette condition est introduite dans [29, 30, 69]

$$\partial_n \boldsymbol{\omega} \times n = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0. \tag{63}$$

Comme d'habitude, $v \times \omega$ est égale à $v_1\ \omega_2 - v_2\ \omega_1$ si $N = 2$ et égale au champ vecteur $(v_2\ \omega_3 - v_3\ \omega_2, -v_1\ \omega_3 + v_3\ \omega_1, v_1\ \omega_2 - v_2\ \omega_1)$ si $N = 3$. Rapelons que cette condition au bord (63) est inutile si $N = 1$.

Etant donnée une fonction lisse E, les paramètres $\delta \in (0,1), \varepsilon > 0$ et $r \geq 0$, nous nous intéressons dans cette section à étudier les solutions $(u, \boldsymbol{\omega})$ de

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \delta\ \Delta u - \nabla \cdot (u\ \boldsymbol{\omega}) + r\ u\ E(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ -\varepsilon\ \Delta\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} & = & \nabla E(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_n u = 0 & , & \boldsymbol{\omega} \cdot n = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \partial_n \boldsymbol{\omega} \times n & = & 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{64}$$

Dans l'étude de (64), nous considérons deux choix différents de taux de reproduction E qui sont suggérées dans [37], notamment le cas monostable où

$$E(u) = 1 - u, \tag{65}$$

et le cas bistable, où

$$E(u) = (1-u)\ (u-a), \quad \text{pour un certain} \quad a \in (0,1). \tag{66}$$

Notons que le problème elliptique suivant est bien posé

$$\begin{cases} -\varepsilon\ \Delta\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} & = & f, & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} & = & 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n} & = & 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{67}$$

où $f \in (L^p(\Omega))^N$, $N = 2,3$, $p > 1$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. D'après [29, 30, 69], il existe une unique solution forte $\boldsymbol{\omega} \in \left(W^{2,p}(\Omega)\right)^N$ de (67). De plus, la solution forte de (67) a la même régularité que les équations elliptiques avec des conditions aux bords classiques, et on a

$$||\boldsymbol{\omega}||_{W^{2,p}} \leq \frac{K(p)}{\varepsilon}\ ||f||_p, \tag{68}$$

où $p > 1$ et $K(p) = K(p, \Omega)$.

Dans la Remarque 0.2.7 suivante, nous soulignons la relation entre le modèle (64) dans le cas monostable et le modèle de chimiorépulsion étudié dans [23].

Remarque 0.2.7. *Dans le cas monodimensionnel, il y a une forte relation entre ce modèle lorsque $E(u) = 1 - u$ et $r = 0$, et le modèle de chimiorépulsion suivant,*

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \delta\ \partial^2_{xx} u + \partial_x (u\ \partial_x \psi), & \text{dans } (0,\infty) \times (-1,1) \\ -\varepsilon\ \partial^2_{xx}\psi + \psi & = & u, & \text{dans } (0,\infty) \times (-1,1) \\ \partial_x u(t,\pm 1) & = & \partial_x \psi(t,\pm 1) = 0 & \text{sur } (0,\infty). \end{cases} \tag{69}$$

En effet, définissons $\varphi = -\partial_x \psi$, et remplaçons la par sa valeur dans (69), ensuite différentions la seconde équation dans (69) nous trouvons

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \delta\ \partial^2_{xx} u - \partial_x (u\ \varphi), & \text{dans } (0,\infty) \times (-1,1) \\ -\varepsilon\ \partial^2_{xx}\varphi + \varphi & = & -\partial_x u = \partial_x E(u), & \text{dans } (0,\infty) \times (-1,1) \\ \partial_x u(t,\pm 1) & = & \varphi(t,\pm 1) = 0 & \text{sur } (0,\infty). \end{cases} \tag{70}$$

Et par conséquent u est la solution de (64).

Dans le cas monostable, remarquons que $E' < 0$, donc les individus qui se dispersent de façon à maximiser E, recherchent l'isolement. Ainsi, aucun phénomène d'agrégation n'est possible. Cette remarque est cohérente avec cette intérprétation tant que dans les modèles de chimiorépulsion aucun phénomène d'agrégation est possible.

Cette section est divisée en deux parties. La première partie est consacrée à l'énoncé de mes résultats sur l'étude de (64). Ces résultats correspondent à mes trois articles qui se trouvent dans les Chapitres 3, 4 et 5. Dans la deuxième partie je donne une idée sur la preuve qui sera après détaillée dans les Chapitres 3, 4 et 5.

0.2.3.2 Principaux résultats, [Chapitres 3, 4, 5]

Tout au long de cette section, nous supposons que

$$E \in C^2(\mathbb{R}),\ \ \delta \in (0,1),\ \ \varepsilon > 0,\ \ r \geq 0.$$

Nos résultats sur l'étude de (64) se décomposent en deux catégories : Résultats d'existence de la solution en dimension 1 et 2 pour les deux choix différents (65) et (66) du taux de reproduction, et la caractérisation du comportement asymptotique de la solution en dimension 1 dans le cas monostable. La deuxième catégorie est consacrée aux résultats de convergence de la solution. Le premier résultat de convergence est lorsque $\varepsilon \to 0$ lorsque $N = 1$ et E est de la forme (65), et le deuxième est lorsque $\delta \to 0$ en dimension 1 et pour les deux choix de E : (65) et (66)

Résultats d'éxistence :

Premièrement, définissons la solution de (64) utilisée dans cette section comme suit

Définition 0.2.8. *Soient $T > 0$, $p > N$, et une condition initiale $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Une solution forte de (64) dans $[0, T)$ est une fonction*

$$u \in C\left([0,T), W^{1,p}(\Omega)\right) \cap C\left((0,T), W^{2,p}(\Omega)\right),$$

tels que

$$\begin{cases} \partial_t u &= \delta\ \Delta u - \nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}_u) + r\ u\ E(u), & \text{p.p. dans } [0,T)\times\Omega \\ u(0,x) &= u_0(x), & \text{p.p. dans } \Omega \\ \partial_n u &= 0, & \text{p.p. sur } [0,T)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{71}$$

où pour tout $t \in [0, T)$, $\boldsymbol{\omega}_u(t)$ est la solution unique dans $W^{2,p}(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta\boldsymbol{\omega}_u(t) + \boldsymbol{\omega}_u(t) &= \nabla E(u(t)) \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ \boldsymbol{\omega}_u(t)\cdot n = \partial_n\boldsymbol{\omega}_u(t)\times n &= 0 \qquad\quad\ \ \text{p.p. sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{72}$$

Nous traitons avant tout le problème de l'existence locale en temps des solutions de (64), pour cela nous démontrons dans [58]

Théorème 0.2.9. *Soient $p > N$ et une fonction positive $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors, pour un certain $T_{\max} \in (0, \infty]$, il existe une unique solution maximale et non négative $u \in C\left([0, T_{\max}), W^{1,p}(\Omega)\right) \cap C\left((0, T_{\max}), W^{2,p}(\Omega)\right)$ de (64) au sens de la Définition 0.2.8. D'autre part, si pour tout $T > 0$, il existe $C(T)$ tels que*

$$||u(t)||_{W^{1,p}} \leq C(T), \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}),$$

alors $T_{\max} = \infty$.

La preuve de ce Théorème se base sur l'utilisation du Théorème du point fixe de Banach.

Nous passons maintenant à la question de l'existence globale des solutions de (64), où E possède les deux formes particuliers (65) et (66), et nous nous concentrons sur les cas de la dimension 1 et 2. (Voir [58, 59])

Théorème 0.2.10. *Supposons que $N = 1, 2$, et u_0 est une fonction positive dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour un certain $q > N$. Pour les deux formes de E : $E(u) = (1-u)(u-a)$ avec $a \in (0, 1)$ ou $E(u) = 1 - u$, (64) admet une solution positive et globale en temps u au sens de la Définition 0.2.8.*

Ensuite, nous prouvons que, lorsque $E(u) = 1 - u$, $N = 1$ et $\Omega = (-1, 1)$, la solution converge, lorsque $t \to \infty$, vers les solutions stationnaires. ([58, 59])

Théorème 0.2.11. *Soient u_0 une fonction positive dans $W^{1,2}(-1, 1)$, et $E(u) = 1 - u$. Alors la solution de (64) donnée par le Théorème 0.2.10, appartient à $L^\infty\big([0, \infty); W^{1,2}(-1, 1)\big)$. De plus, si $r = 0$,*

$$\lim_{t\to\infty} \left|\left| u(t) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u_0 \; dx \right|\right|_2 = 0,$$

et si $r > 0$ la solution $u(t)$ converge soit vers 0 soit vers 1 dans $L^2(-1, 1)$ quand $t \to \infty$.

Résultats de convergence

Nous étudions le comportement de la solution lors $\varepsilon \to 0$. Heuristiquement, lorsque ε tend vers zéro, la vitesse $\boldsymbol{\omega}$ devient extrêmement sensible aux fluctuations locales de $E(u)$, et le système de (64) se réduit à une seule équation

$$\partial_t u = \nabla \cdot \big((\delta - u\ E'(u))\ \nabla u\big) + r\ u\ E(u). \tag{73}$$

On voit bien que (73) est parabolique seulement si $\delta - u\ E'(u) \geq 0$ pour tout $u > 0$. Ceci est vrai particulièrement lorsque $E(u) = 1-u$. Notons que, lorsque $E(u) = (1-u)(u-a)$, l'équation limite est mal posée, en effet, la répartition de la population devient discontinue lorsque les individus voisins décident de se disperser en sens inverse, c'est pourquoi je n'étudie pas cette limite dans le cas bistable.

Dans le cas monostable et $N = 1$ nous démontrons le résultat suivant ([58])

Théorème 0.2.12. *Supposons que u_0 est une fonction positive dans $W^{1,2}(-1, 1)$, et $E(u) = 1 - u$. Pour $\varepsilon > 0$, soient u_ε la solution globale de (64) donnée par le Théorème 0.2.11. Alors, pour tout $T > 0$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T ||u_\varepsilon(t) - u(t)||_2^2 \; dt = 0,$$

où u est la solution unique de

$$\begin{cases} \partial_t u &= \partial^2_{xx}(\delta\ u + \frac{1}{2}\ u^2) + r\ u\ (1-u), & x \in (-1, 1), t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in (-1, 1), \\ \partial_x u(t, \pm 1) &= 0, & t > 0. \end{cases} \tag{74}$$

Vu que $\delta + u > 0$ pour $u \geq 0$, l'équation précédente (74) est uniformément parabolique et admet une unique solution u, voir [44] par exemple.
La preuve du Théorème 0.2.12 est effectuée en adaptant une méthode de compacité.

Ensuite, nous nous intéréssons au cas où le mécanisme d'agrégation domine celui de la diffusion, et ceci est vrai lorsque le paramètre δ est suffisement petit.
Pour les modèles biologiques, ce mécanisme change dramatiquement le comportement de la solution. Prenons par exemple, le modèle de Keller-Segel sans diffusion, les solutions explosent en temps fini (voir [68]).
Toutefois, il existe des cas dans lesquels l'étude de la limite de diffusion petite est en quelque sorte "stable". Par exemple, dans les modèles physiques issus de l'étude sur les semi conducteurs ([50]), et le système de Keller-Segel avec "volume-filling effect" ([33, 66]), les auteurs montrent que, lorsque la diffusion est petite, la solution du système parabolique, converge vers la solution entropique du système hyperbolique correspondant.

En prenant le cas de la diffusion petite comme motivation, nous avons étudié le comportement de la solution de (64), en dimension 1, lorsque $\delta \to 0$ en choisissant les deux formes de E, (66) ou (65), et on obtient ce résultat (Voir [60])

Théorème 0.2.13. *Soit $N = 1$. Supposons que u_0 est une fonction positive dans $W^{1,2}(-1,1)$ et $E(u) = (1-u)(u-a)$ pour un certain $a \in (0,1)$ ou $E(u) = 1-u$. Pour $\delta > 0$, soit u_δ la solution globale et positive de (64) donnée par le Théorème 0.2.10. Alors, pour tout $T > 0$*

$$\lim_{\delta \to 0} ||u_\delta(t) - u(t)||_C = 0 \quad \text{pour tout } t \in (0,T),$$

où $u \in C\left([0,T]; L^2(-1,1)\right) \cap L^\infty\left((0,T); W^{1,2}(-1,1)\right)$ est l'unique solution forte du système parabolique correspondant suivant

$$\partial_t u = -\partial_x\left(u\ \varphi\right) + r\ u\ E(u), \quad x \in (-1,1), t > 0,$$

$$-\varepsilon\ \partial_x^2 \varphi + \varphi = E'(u)\ \partial_x u, \quad x \in (-1,1), t > 0$$

avec des condition initiales et des conditions aux bords suivantes

$$\varphi(t, \pm 1) = 0, \ \text{pour tout } t > 0, \ \text{et } u(0,x) = u_0(x), \ x \in (-1,1).$$

La preuve de ce Théorème conduit à démontrer que la solution $(u_\delta, \varphi_\delta)$ de (64) converge vers la solution du problème de transport non local suivant

$$\begin{cases} \partial_t u & = & -\partial_x (u\ \varphi) + r\ u\ E(u), & x \in (-1,1), t > 0, \\ -\varepsilon\ \partial_x^2 \varphi + \varphi & = & \partial_x E(u), & x \in (-1,1), t > 0, \\ \varphi(t, \pm 1) & = & 0, & t > 0, \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in (-1,1), \end{cases} \tag{75}$$

lorsque le cœfficient de la diffusion δ s'approche de zéro. Cela conduit, à démontrer l'existence et l'unicité de solution forte de (75).

0.2.3.3 Idées de la preuve, [Chapitres 3, 4, 5].

– **Existence locale de la solution de (64) : Preuve du Théorème 0.2.9**

Pour $T \in (0,1)$, la preuve du Théorème 0.2.9 repose sur l'utilisation du Théorème du point fixe de Banach appliqué sur la réprésentation de Duhamel de la solution

$$\Lambda u(t,x) = (e^{t\ (\delta\ \Delta)}\ u_0)(x) + \int_0^t e^{(t-s)\ (\delta\ \Delta)} \left[-\nabla \cdot (u\ \boldsymbol{\omega}) + r\ u\ E(u)\right](s,x)\ ds, \tag{76}$$

dans l'espace métrique complet

$$X_R(T) := \left\{ u \in C\left([0,T]; W^{1,p}(\Omega)\right), \sup_{t \in [0,T]} ||u(t)||_{W^{1,p}} \leq R \right\},$$

pour un $p > N$ et $R > 0$ fixés. Cet espace est complet pour la distance d_X

$$d_X(u,v) = \sup_{t \in [0,T]} ||u(t) - v(t)||_{W^{1,p}}, \quad (u,v) \in X_R(T) \times X_R(T).$$

La première partie de la preuve consiste à démontrer que Λ est une application de $X_R(T)$ dans lui-même. Ensuite nous prouvons que Λ induit une stricte contraction pour T suffisement petit. Et par conséquent, Λ admet un seul point fixe u. D'autre côté, comme $u \in C\left([0,T], W^{1,p}(\Omega)\right)$ pour $p > N$, cela garantit que $\nabla E(u) \in C\left([0,T], L^p(\Omega)\right)$. Cette dernière inclusion avec la régularité de $\boldsymbol{\omega}$, nous permettent de déduire que $\boldsymbol{\omega} \in C\left([0,T], W^{2,p}(\Omega)\right)$. En Combinant ces properiétés avec le fait que $W^{1,p}(\Omega)$ est une algèbre, nous obtenons ensuite que $\nabla \cdot (u\ \boldsymbol{\omega}_u)$ et $u\ E(u)$ appartiennent à $C\left([0,T], L^p(\Omega)\right)$. Les properiétés classiques de la régularité de l'équation de la chaleur garantissent que $u \in C\left((0,T], W^{2,p}(\Omega)\right)$ et par conséquent u est la solution forte de (64).

– **Existence globale de (64), cas bistable : Preuve du Théorème 0.2.10.**

1. *Cas de la dimension 1*

   Dans ce cas (64) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \delta\ \partial_{xx}^2 u - \partial_x(u\ \varphi) + r\ u\ (u-a)(1-u), & x \in (-1,1), t > 0 \\ -\varepsilon\ \partial_{xx}^2\varphi + \varphi & = & (-2u + (a+1))\ \partial_x u, & x \in (-1,1), t > 0 \\ \partial_x u(t,\pm 1) & = & \varphi(t,\pm 1) = 0, & t > 0, \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in (-1,1), \end{cases} \tag{77}$$

   avec $u_0 \in W^{1,2}$. L'idée de la preuve repose sur la recherche d'une estimation $L^\infty(W^{1,2})$ sur u qui induit la non-explosion de la solution en temps fini. Pour cela, notre point de départ consiste à chercher une estimation $L^\infty(L^2)$ sur u, pour cela nous multiplions la première équation dans (77) par u, et nous multiplions la seconde équation par φ dans le but d'annuler les termes cubiques dans les deux équations. La somme de ces deux équation nous donne une estimation de u dans $L^\infty(L^2)$, une estimation de $\partial_x u$ dans $L^2(L^2)$, et une estimation de φ dans $L^2\left(W^{1,2}\right)$. Ces estimations a priori, ne sont pas suffisantes pour avoir directement une estimation $L^\infty(L^2)$ sur $\partial_x u$. Pour cela, nous appliquons ces premières estimations sur u et $\partial_x u$ dans la deuxième équation de (77), pour utiliser la régularité elliptique de la solution, et déduire une estimation $L^1(L^\infty)$ sur $\partial_x\varphi$. Une fois, que l'on a cette nouvelle estimation, on peut déduire de la première équation une estimation L^∞ sur u, et ensuite une borne $L^\infty(L^2)$ sur $\partial_x u$.

2. *Cas de la dimension 2*

   Dans le cas de dimension 2, il faut ajouter la condition supplémentaire (63) aux bords sur $\boldsymbol{\omega}$, le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \delta\ \Delta u - \nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}) + r\ u\ (1-u)\ (u-a), & x \in \Omega, t > 0 \\ -\varepsilon\ \Delta\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} & = & [-2\ u + (a+1)]\ \nabla u, & x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_{\boldsymbol{n}} u = 0 & , & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n} = \partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{78}$$

   où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné.

   La condition initiale $u_0 \in W^{1,q}$ pour un certain $q > 2$. Alors, pour que la solution existe globalement en temps, nous montrons que u est bornée dans $L^\infty(W^{1,q})$. Pour cela, nous entamons la preuve, comme en dimension 1, par des estimations $L^\infty(L^2)$ sur u, $L^2(L^2)$ sur ∇u. Ces estimations sont obtenus après annulation des termes de couplages entre les deux équations, qui donnent aussi une estimation $L^2(L^2)$ sur $\boldsymbol{\omega}$ et une estimation $L^2(L^2)$ sur $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}$. Dans le but de démontrer que u et ∇u sont bornés dans $L^\infty(L^q)$, nous avons besoin d'améliorer ces estimations sur u. En effet, l'estimation $L^2(L^2)$ sur $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}$ et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg sont suffisantes pour avoir directement une estimation $L^\infty(L^p)$ sur u, et une estimation

$L^2(L^2)$ sur $\nabla u^{\frac{p}{2}}$, pour tout $p > 1$, sans passer par la régularité de la deuxième équation de (78), et sans utiliser la norme $L^\infty(L^2)$ sur u, comme on a fait dans le cas de la dimension 1. Grâce à ces deux dernières estimations, on obtient une estimation $L^\infty(L^2)$ sur ∇u. Ensuite, cette dernière estimation avec la régularité elliptique, nous permettent d'obtenir une borne L^∞ sur u, qui par conséquent nous induit une estimation $L^\infty(L^q)$ sur ∇u, en utilisant la forme intégrale de la solution et en appliquant le lemme de Gronwal singulier.

- **Existence globale de (64), cas monostable : Preuve du Théorème 0.2.10.**
  1. *Cas de la dimension 1*

     Dans ce cas (64) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \delta\ \partial^2_{xx} u - \partial_x(u\ \varphi) + r\ u\ (1-u) & x \in (-1,1),\ t>0 \\ -\varepsilon\ \partial^2_{xx}\varphi + \varphi & = & -\ \partial_x u, & x \in (-1,1),\ t>0 \\ \partial_x u(t,\pm 1) = \varphi(t,\pm 1) & = & 0 & t>0, \\ u(0,x) & = & u_0(x) & x \in (-1,1), \end{cases} \tag{79}$$

     avec $u_0 \in W^{1,2}$. Afin d'aboutir à l'existence globale en temps de la solution, il est alors nécessaire de trouver une estimation $L^\infty(W^{1,2})$ sur u.

     Contrairement au cas bistable, il n'est pas possible de commencer la preuve de l'existence globale par une estimation $L^\infty(L^2)$ sur u. Néanmoins, il y a toujours une compensation entre les deux équations, mais cette fois pour obtenir une estimation $L^\infty(L \log L)$ sur u et une estimation $L^2(L^2)$ sur $\partial_x \sqrt{u}$. Pour cela, on multiplie la première équation dans (79) par $(\log u + 1)$ et la deuxième équation par φ, pour annuler les termes cubiques de deux équation. La somme de ces deux équations nous donne aussi une estimation $L^\infty\left(W^{1,2}\right)$ sur φ.

     Ensuite, on continue la preuve, en cherchant une estimation $L^\infty(L^2)$ sur u et une estimation $L^2(L^2)$ sur $\partial_x u$, pour raisonner comme dans le cas bistable. Pour cela, on remarque que, l'estimation $L^2(L^2)$ sur $\partial_x \varphi$, l'inégalité de Gagliardo Nirenberg et la première équation dans (79) nous permet d'obtenir ces estimations. Ensuite, grâce à l'estimation $L^\infty(L^2)$ sur u, nous pouvons raisonner comme dans le cas bistable en dimension 1, et utiliser ensuite l'équation elliptique vérifiée par φ, pour obtenir une estimation L^∞ sur u, qui induit avec la première équation une estimation $L^\infty(L^2)$ sur $\partial_x u$.
  2. *Cas de la dimension 2*

     Dans ce cas, on ajoute la condition (63) aux bords, pour que le problème elliptique vérifié par $\boldsymbol{\omega}$, soit bien posé. Et dans ce cas (64) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u & = \quad \delta\ \Delta u - \nabla \cdot (u\ \boldsymbol{\omega}) + r\ u\ (1-u), & x \in \Omega, t > 0 \\ -\varepsilon\ \Delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} & = \quad -\ \nabla u, & x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_{\boldsymbol{n}} u = 0 & , \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} = \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0,x) & = \quad u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{80}$$

avec $u_0 \in W^{1,q}$ pour certain $q > 2$.

On commence la preuve de l'existence globale de la solution par une estimation $L^\infty(L \log L)$ sur u, une estimation $L^2(L^2)$ sur $\nabla\sqrt{u}$, une estimation $L^2(L^2)$ sur $\boldsymbol{\omega}$ et une estimation $L^2(L^2)$ sur $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}$. Ces estimations venant de la compensation des termes cubiques de deux équations.

Comme la preuve de l'existence globale en dimension 2 dans le cas bistable se base sur le fait que $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}$ est borné dans $L^2(L^2)$ sans utiliser la norme $L^\infty(L^2)$ de u, alors la preuve de l'existence de la solution en dimension 2 dans le cas monostable suit les même lignes de la preuve du cas bistable en dimension 2.

– **Comportement asymptotique de la solution : Preuve du Théorème 0.2.11**
L'idée de la preuve consiste tout d'abord à montrer que l'ensemble $\{u(t) :\ t \geq 0\}$ est borné dans $W^{1,2}(-1,1)$ uniformement en temps. Pour cela, on a besoin du même type d'estimations a priori que dans la preuve de l'existence, mais cette fois, ces estimations doivent être indépendentes du temps. Pour cela, nous introduisons la fonctionnelle de Liapunov suivante

$$L(u) = \int_{-1}^{1} (u\ \log u - u + 1)\ dx \geq 0.$$

Cette fonctionelle est décroissante, et bornée indépendemment de temps. Cette décroissance, donne naissance à des estimations a priori uniformes en temps. Grâce à ces estimations, nous montrons que l'ensemble $\{u(t) :\ t \geq 0\}$ est borné dans $W^{1,2}(-1,1)$ uniformement en temps. Comme l'injection de $W^{1,2}(-1,1)$ dans $L^2(-1,1)$ est compacte, alors à sous-suite près, il existe une suite positive (t_n), telle que $t_n \to \infty$, et $z \in L^2(-1,1)$ et que

$$z = \lim_{n\to\infty} u(t_n) \quad \text{dans} \quad L^2(-1,1) \quad \text{et p.p dans } (-1,1).$$

Pour identifier la limite z, nous appliquons la méthode utilisée dans [45], et nous utilisons la dissipation de la fonctionnelle de Liapunov, pour montrer que

$$\int_{-1}^{1} \Big(r\ ||U_n\ \log U_n\ (U_n - 1)||_1 + ||\partial_x \sqrt{U_n}||_2^2 + ||\Phi_n||_2^2 + \varepsilon\ ||\partial_x \Phi_n||_2^2 \Big)\ ds \longrightarrow 0$$

lorsque $n \to \infty$, et $\partial_x z = 0$.

Alors, si $r = 0$, la conservation de la norme L^1 de u donne $z =< u_0 >$. Et alors $< u_0 >$ est l'unique point d'accumulation de $\{u(t),\ t \geq 0\}$. Comme $\{u(t),\ t \geq 0\}$ est relativement compacte dans $L^2(-1,1)$, nous déduisons que $u(t)$ converge vers $< u_0 >$ dans $L^2(-1,1)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$. En revanche, si $r > 0$, la dissipation de la fonctionnelle de Liapunov nous donne $z\ \log z\ (z-1) = 0$, et parsuite $z = 0$ ou $z = 1$. Par conséquent, 0 et 1 sont les deux seuls points d'accumulations de $\{u(t),\ t \geq 0\}$ lorsque $t \to \infty$. Comme l'ensemble ω-limit de u est un sous ensemble compact et connexe de $L^2(-1,1)$, voir [19, Theorem 9.1.8] par exemple, nous déduisons que $u(t)$ converge soit vers 0 soit vers 1 dans $L^2(-1,1)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

– **Etude de la solution lorsque $\varepsilon \to 0$: Preuve du Théorème 0.2.12**

Soit $T > 0$, dans cette partie nous donnons une idée sur la preuve du comportement de la solution u_ε, donnée par le Théorème 0.2.11, du système suivant

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon & = & \delta\ \partial_{xx}^2 u_\varepsilon - \partial_x(u_\varepsilon\ \varphi_\varepsilon) + r\ u_\varepsilon\ (1-u_\varepsilon) & \text{dans } (0,T)\times(-1,1), \\ u_\varepsilon(0,x) & = & u_0(x) & \text{dans } (-1,1), \\ \partial_x u_\varepsilon(t,\pm 1) & = & 0 & \text{sur } (0,T), \end{cases} \tag{81}$$

où φ_ε est l'unique solution de

$$\begin{cases} -\varepsilon\ \partial_{xx}^2\varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon & = & -\partial_x u_\varepsilon & \text{in } (0,T)\times(-1,1), \\ \varphi_\varepsilon(t,\pm 1) & = & 0 & \text{on } (0,T). \end{cases}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.

Cette preuve repose sur des estimations a priori uniformes par rapport à ε. Nous démontrons que la suite des solutions est compacte et nous passons à la limite. Cette technique peut se résoudre à l'aide du Lemme de compacité de Simon [71].

– **Etude de la solution lorsque $\delta \to 0$: Preuves du Théorème 0.2.13**

Pour $T > 0$, nous étudions dans cette partie la limite $\delta \to 0$ du système suivant

$$\begin{cases} \partial_t u_\delta & = & \delta\ \partial_x^2 u_\delta - \partial_x(u_\delta\ \varphi_\delta) + r\ u_\delta\ E(u_\delta), & \text{p.p. dans } [0,T)\times(-1,1) \\ u_\delta(0,x) & = & u_0(x), & \text{p.p. dans } (-1,1) \\ \partial_x u_\delta(t,\pm 1) & = & 0, & \text{p.p. dans } [0,T), \end{cases} \tag{82}$$

où pour tout $t \in [0,T)$, $\varphi_\delta(t)$ est l'unique solution dans $W^{2,2}(-1,1)$ de

$$\begin{cases} -\varepsilon\partial_x^2\varphi_\delta(t) + \varphi_\delta(t) & = & \partial_x E(u_\delta(t)) & \text{p.p. dans } (-1,1) \\ \varphi_\delta(t,\pm 1) & = & 0 \end{cases}$$

où E prend les deux valeurs particulières (65) ou (66). Nous démontrons que la suite $(u_\delta, \varphi_\delta)$ converge, lorsque $\delta \to 0$, vers la solution unique du problème de transport non-local suivant

$$\begin{cases} \partial_t u & = & -\partial_x (u\ \varphi) + r\ u\ E(u), & x \in (-1,1), t \in (0,T), \\ -\varepsilon\ \partial_x^2 \varphi + \varphi & = & \partial_x E(u), & x \in (-1,1), t \in (0,T), \\ \varphi(t,\pm 1) & = & 0, & t \in (0,T), \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in (-1,1). \end{cases} \tag{83}$$

la démonstration comporte deux étapes, l'unicité de la solution de (83), et la compacité de (u_δ). Nous montrons d'abord que, pour une valeur initiale $u_0 \in W^{1,2}(-1,1)$ et $E \in C^2(\mathbb{R})$, le système (83) admet au plus une solution telle que

$$u \in L^\infty\left((0,T), W^{1,1}(-1,1)\right), \quad \text{et} \quad \varphi \in L^\infty\left((0,T); W^{1,\infty}(-1,1)\right).$$

Soient u_1 et u_2 deux solutions différentes de (83) ayant la même valeur initiale. Fixons $T > 0$, puis définissons

$$(u,\varphi) = (u_1 - u_2, \varphi_1 - \varphi_2), \text{ dans } [0,T] \times (-1,1).$$

Nous multiplions l'équation satisfaite par u par $\mathrm{sign}(u)$, nous l'intégrons sur $(-1,1)$ et utilisons les injections de Sobolev pour trouver

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_1 \leq C\ ||\partial_x \varphi||_1 + C\ ||\varphi||_\infty + C\ ||u||_1. \tag{84}$$

On voit bien que l'estimation de la norme L^1 de u dépend de la norme $||\partial_x\varphi||_1$, pour cela nous exprimons ce dernier en fonction de $||u||_1$ en intégrant l'équation vérifiée par φ entre (x,y) puis entre $(-1,1)$.
Ensuite, pour majorer la norme $||\varphi||_\infty$, nous utilisons une téchnique de dualité pour obtenir une estimation de $||\varphi||_2$ en fonction de $||u||_1$, puis on utilise une inégalité d'interpolation pour obtenir l'estimation de $||\varphi||_\infty$ souhaitée.

Nous passons maintenant à l'étude de la limite $\delta \to 0$ de la solution u_δ de (82) pour les deux valeurs particulières de E. Autrement dit, nous vérifions l'existence des solutions du problème (83) pour les deux valeurs de E.

1. *Cas bistable*

   Cette preuve consiste à trouver des estimations uniformes par rapport à δ sur u_δ et φ_δ, ensuite demontrer que la suite $(u_\delta)_\delta$ est compacte, et passer à la limite. Cette technique utilise le lemme de compacité de Simon [71].

   Nous commençons la preuve par des estimations $L^\infty(L^2)$ sur u_δ et $L^2(W^{1,2})$ sur φ_δ venant de la compensation des deux termes de couplage de deux équations. Notons que ces estimations sont uniformes par rapport à δ.

Pour appliquer le lemme de compacité de Simon, nous avons besoin d'une estimation uniforme par rapport à δ sur la dérivée de u_δ, et plus particulièrement, besoin d'une estimation toujours uniforme par rappport à δ sur la norme $L^\infty\left(W^{1,2}\right)$ de u_δ. Cette estimation n'est pas simple à obtenir directement à partir de ces premières estimations. En revanche, en dérivant la première équation dans (82) nous obtenons une estimation $L^\infty(L^1)$ sur $\partial_x u_\delta$. Cette nouvelle estimation avec la conservation de la norme L^1 de u_δ nous donnent une estimation $L^\infty(W^{1,1})$ sur u_δ. Ensuite, cette dernière avec la régularité elliptique et les injections de Sobolev nous donnent des estimations uniformes par rapport à δ, en particulier une estimation L^∞ sur u_δ et une estimation L^∞ sur $\partial_x\varphi_\delta$. Ensuite, ces deux dernières estimations nous donnent une estimation uniforme par rapport à δ de la norme $L^\infty(L^2)$ de $\partial_x u_\delta$. On termine nos estimations par une estimation sur la dérivée en temps de u_δ dans un espace de Sobolev négatif, pour appliquer le lemme de compacité de Simon.

Par suite, $(u_\delta)_\delta$ est bornée dans $L^\infty\left((0,T);W^{1,2}(-1,1)\right)$ et $(\partial_t u_\delta)_\delta$ est bornée dans $L^\infty\left((0,T);(W^{1,2})'(-1,1)\right)$. Par conséquent, et à sous-suite près, la suite u_{δ_j} converge lorsque $\delta_j\to 0$ vers u dans $C\left([0,T]\times[-1,1]\right)$, et φ_{δ_j} converge faiblement vers φ dans $L^2\left((0,T)\times(-1,1)\right)$. Ensuite, en passant à la limite $\delta\to 0$ dans la formulation faible de (82), nous obtenons facilement que (u,φ) n'est autre que la solution forte du problème de transport correspondant.

2. *Cas monostable*

   Pour étudier la convergence $\delta\to 0$, de la solution de (82) dans le cas monostable, on cherche aussi des estimations uniformes par rapport à δ sur u_δ et φ_δ. Les premières estimations venant de la compensation des termes cubiques dans les deux équations sont telles que, une estimation $L^\infty(L\log L)$ sur u_δ, et une estimation $L^2(W^{1,2})$ sur φ_δ. Remarquons que, dans ce cas aussi, il n'est pas évident de trouver à partir de ces estimations a priori une estimation sur la dérivé de u_δ. Par contre, on peut extraire de l'équation elliptique vérifiée par φ_δ une majoration de $\partial_x\varphi_\delta$, pour obtenir une estimation $L^\infty(W^{1,1})$, uniforme par rapport à δ, sur u_δ, et procèder ensuite, par anologie au cas précédant, pour avoir la bonne estimation sur u_δ, en tenant compte les petites différences dans la preuve technique.

0.2.4 Perspectives

Les problèmes ouverts concernant l'analyse du système de Keller-Segel sont nombreux. Citons par exemple, pour le système (45), le cas où $m=m_c=\frac{2(N-1)}{N}$, dans un ouvert borné, est de savoir si $M_c=M_*$. Bien que dans l'espace tout entier $\mathbb{R}^N$ et d'après [14] on a $M_c=M_*$.

Une autre question posée ici, est de savoir la forme explicite de la constante de l'inégalité de Caldéron-Zygmund, pour le problème elliptique dans un ouvert borné, avec des conditions de Neumann aux bords, pour résoudre le problème d'unicité de la solution sans aucune condition supplémentaire.

Pour le système de regroupement des individus étudié dans cette thèse, dit modèle de Grindrod, les méthodes utilisées en dimension 1 et 2 ne s'appliquent pas dans le cas de la dimension 3. Plus précisement, les estimations trouvées a priori ne sont pas suffisantes, en dimension 3, pour trouver la bonne estimation sur la solution pour garantir l'existence globale en temps de la solution. Cette difficulté persiste dans le cas des solutions radiales. Ceci, nous laisse poser la question sur le comportement de la solution en dimension 3. A-t-on existence globale, ou bien la solution explose en temps fini.
Toujours dans le problème de Grindrod, l'étude du comportement asymptotique, lorsque $t \to \infty$, de la solution dans le cas bistable est un problème ouvert, tant qu'on ne connaît pas la fonctionnelle de Liapunov dans ce cas.
Enfin, Grindrod dans son article [37] montre, d'après des manipulations numériques, que les solutions ressemblent à des ondes progressives lorsque t est grand. Donc, il est intéressant de chercher des solutions de ce problème sous forme des ondes progressives.

Bibliographie

[1] N. D. Alikakos. L^p bounds of solutions of reaction-diffusion equations. *Communication in Partial Differential Equations 4(1979), no. 8, 827-868.*

[2] H. Amann. Linear and quasilinear parabolic problems . *Volume I . Abstract linear theory , (1995).*

[3] J. P. Aubin. Un théorème de compacité. *C. R. Acad. Sci. Paris 256, (1963), 5042-5044.*

[4] C. Bardos, R. Santos, R. Sentis. Diffusion approximation and computation of the critical size. *Numerical solutions of nonlinear problems (Rocquencourt, 1983), INRIA, Rocquencourt, (1984), 139.*

[5] J. Bedrossian, I. C. Kim. Global Existence and Finite Time Blow-Up for Critical Patlak-Keller-Segel Models with Inhomogeneous Diffusion, preprint arXiv :1108.5301.

[6] J. Bedrossian, N. Rodriguez and A. Bertozzi. Local global well-possedness for aggregation equations and Patlak-Keller-Segel models with degenerate diffusion, *Nonlinearity 24 (2011), 1683-1714.*

[7] N. Ben Abdallah, A. Mellet, M. Puel. Anomalous diffusion limit for kinetic equations with degenerate collision frequency. *M3AS Volume No.21, Issue No. 11, (2011), 2249-2262.*

[8] N. Ben Abdallah, A. Mellet, M. Puel. Fractional diffusion limit for collisional kinetic equations : a Hilbert expansion approach. *KRM Vol. 4, no. 4, (2011), 873-900.*

[9] A. Bensoussan, J-L. Lions, G. Papanicolaou. Boundary layers and homogenization of transport processes. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. 15 (1979), no. 1, 53-157.*

[10] P. Biler. Local and global solvability of some parabolic systems modelling chemotaxis. *Adv. Math. Sci. Appl. 8 (1998), no. 2, 715-743.*

[11] A. L. Bertozzi, L. A. Slepčev. Existence and uniqueness of solutions to an aggregation equation with degenerate diffusion. *Commun. Pure Appl. Anal. 9 (2010), no. 6, 1617-1637.*

[12] M. Bertsch, M. E. Gurtin,D. Hilhorst, L. A Peletier. On interacting populations that disperse to avoid crowding : preservation of segregation. *J. Math. Biol. 23 (1985), no. 1, 1-13.*

[13] A. Blanchet. On the parabolic-elliptic Patlak-Keller-Segel system in dimension 2 and higher. *To appear in Sémin. Équ. Dériv. Partielles. (2011)*

[14] A. Blanchet. J. A. Carrillo. Ph. Laurençot. Critical mass for a Patlak-Keller-Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions. *Calc. Var. Partial Differential Equations 35 (2009), no. 2,133-168.*

[15] A.V. Bobylev, I.M. Gamba. Boltzmann equations for mixtures of Maxwell gases : exact solutions and power like tails. *J. Stat. Phys. 124 (2006), no. 2-4, 497516. http ://dx.doi.org/10.1007/s10955-006-9044-8.*

[16] C. Borgers, C. Greengards, E. T Homann. The diffusion limit of free molec- ular flow in thin plane channels. *SIAM J. Appl. Math. 52 (1992), no. 4, 10571075. http ://dx.doi.org/10.1137/0152062.*

[17] V. Calvez, J. A. Carrillo. Volume effect in the Keller-Segel model : energy estimates preventing blow-up. *J. Math. Pures. Appl. 86 (2006), 155-175.*

[18] J.A. Carrillo, M. DiFrancesco, A. Figalli, T. Laurent, D. Slepčev. Global-in-time weak measure solutions and finite-time aggregation for nonlocal interaction equations. *Duke Math. J. 156 (2011), no. 2, 229-271.*

[19] T. Cazenave. A. Haraux. An Introduction to semilinear evolution equations. *Oxford lecture series in mathematics and it applications.*

[20] F. Chalub, P. A. Markowich, B. Perthame, C. Schmeiser. Kinetic models for chemotaxis and their drift-diffusion limits. *Monatsh. Math. 142 (2004), no. 1-2, 123-141.*

[21] S. Chandrasekhar. An introduction to the study of stellar structure. *Dover Publications, Inc., New York, N. Y. 1957.*

[22] T. Cieślak, Ph. Laurençot. Finite time blow-up for radially symmetric solutions to a critical quasilinear Smoluchowski-Poisson system.*C.R. Acad. Sci. Paris, ser. I 347(2009) 237-242.*

[23] T. Cieślak, Ph. Laurençot, C. Morales-Rodrigo. Global existence and convergence to steady states in a chemorepulsion system. Parabolic and Navier-Stokes equations.

Part 1, (2008), 105-117, Banach Center Publ., 81, Part 1, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw.

[24] T. Cieślak, M. Winkler. Finite-time blow-up in a quasilinear system of chemotaxis. *Nonlinearity 21 (2008), 1057-1076.*

[25] E. D. Conway. Diffusion and predator-prey interaction : pattern in closed systems. *Partial differential equations and dynamical systems, (1984) , 85-133, Res. Notes in Math., 101, Pitman, Boston, MA.*

[26] P. Degond. Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in one and two spaces dimensions. *Annales scientifiques de l'E.N.S 4 e serie, tome 19, n 4 ,(1986), p.519-542.*

[27] P. Degond, T. Goudon, F. Poupaud. Diffusion limit for nonhomogeneous and non-micro-reversible processes. *Indiana Univ. Math. J. 49 (2000), no. 3, 1175-1198.*

[28] P. Degond, P. Mas-Gallic . Existence of solutions and diffusion approximation for a model Fokker-Planck equation. *Proceedings of the conference on mathematical methods applied to kinetic equations (Paris, 1985). Transport Theory Statist. Phys. 16 (1987), no. 4-6, 589-636.*

[29] J. P. Dias. A simplified variational model for the bidimensional coupled evolution equations of a nematic liquid crystal. *J. Math. Anal. Appl. 67 (1979), no. 2, 525-541.*

[30] J. P. Dias. Un problème aux limites pour un système d'équations non linéaires tridimensionnel. *Bolletino, U. M.I. (5) 16-B (1979), 22-31.*

[31] J. I. Diaz, T. Nagai, J.M. Rakotoson. Symmetrization techniques on unbounded domains : application to a chemotaxis system on RN. *J. Differential Equations 145 (1998), no. 1, 156-183.*

[32] J. Dolbeault, B. Perthame. Optimal critical mass in the two-dimensional Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339 (2004), no. 9, 611616.*

[33] Y. Dolak, C. Schmeiser. The Keller-Segel model with logistic sensitivity function and small diffusivity. *SIAM J. Appl. Math. 66 (2005), no. 1, 286-308.*

[34] M.H. Ernst and R. Brito. Scaling solutions of inelastic Boltzmann equations with over-populated high energy tails. *J. Statist. Phys. 109 (2002), no. 3-4, 407432, Special issue dedicated to J. Robert Dorfman on the occasion of his sixty-fifth birthday.*

[35] H. Gajewski, K. Zacharias. Global behaviour of a reaction-diffusion system modelling chemotaxis. *Math. Nachr. 195 (1998), 77-114.*

[36] M. E. Gurtin, R. C. MacCamy. On the diffusion of biological populations. *Math. Biosci. 33 (1977), no. 1-2, 35-49.*

[37] P. Grindrod. Models of individual aggregation or clustering in single and multi-species communities. *J. Math. Biol. (1988) 26 :651-660.*

[38] D. Horstmann. From 1970 until present : the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences. I. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. (2003), 105(3) : 103-165.*

[39] D. Horstmann. From 1970 until present : the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences. II. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. (2004), 106(2) : 51-69.*

[40] D. Horstmann. Lyapunov functions and L^p-estimates for a class of reaction-diffusion systems. *Colloq. math. 87 (2001) no. 1, 113-127.*

[41] W. Jäger, S. Luckhaus, On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis. *Trans. Amer. Math. Soc. 329(2)(1992) 819-824.*

[42] E. F. Keller and L. A. Segel. Initiation of slide mold aggregation viewed as an instability. *J. Theor. Biol.*, 26 :399–415, 1970.

[43] R. Kowalczyk. Preventing blow-up in a chemotaxis model. *J. Math. Anal. Appl. 305 (205)566-588.*

[44] O. A. Ladyzenskaja. V . A. Solonnikov. N. N. Uraltseva. Linear and quasi-linear equations of parabolic type. *Providence (R.I.) , American Mathematical Society.*

[45] M. Langlais, D. Phillips. Stabilization of solutions of nonlinear and degenerate evolution equations. *Nonlinear Anal. 9 (1985), no. 4, 321-333.*

[46] E. Larsen, , J. Keller. Asymptotic solution of neutron transport problems for small mean free paths. *J. Mathematical Phys. 15 (1974), 75-81.*

[47] T. Laurent. Local and global existence for an aggregation equation. *Comm. Partial Differential Equations 32 (2007), no. 10-12, 1941-1964.*

[48] S. A. Levin. Population models and community structure in heterogeneous environments. *Mathematical ecology (Miramare-Trieste, 1982), (1986), 295-320, Biomathematics, 17, Springer, Berlin.*

[49] J. L. Lions, Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. *Springer, Berlin, 1961.* 2003, *vol.* 9, *pp.* 371 – 398.

[50] P. Markowhich, P. Szmolyan. A system of convection-diffusion equations with small diffusion coefficient arising in semiconductor physics. *J. Diff. Eq. 81, (1989) 234-254.*

[51] A. Mellet. Fractional diffusion limit for collisional kinetic equations : a moments method. *Indiana Univ. Math. J. 59 (2010), no. 4, 1333-1360.*

[52] A. Mellet, S. Mishler and C. Mouhot. Fractional diffusion limit for collisional kinetic equations. *Arch. Ration. Mech. Anal. 199 (2011), no. 2, 493-525.*

[53] D.A. Mendis, M. Rosenberg. Cosmic dusty plasma. *Annu. Rev. Astron. Astrophys. 32 (1994), 41963. http ://dx.doi.org/10.1146/annurev.aa.32.090194.002223.*

[54] T. Nagai. Blow-up of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modelling chemotaxis in two-dimensional domains. *J. Inequal. Appl. 6 (2001) 37-55.*

[55] T. Nagai. Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system, *Advances in Mathematical Sciences and Applications 5 (1995), no. 2, 581-601.*

[56] T. Nagai, T. Senba, T. Suzuki. Keller-Segel system and the concentration lemma. *Variational problems and related topics (Japanese) (Kyoto, 1997).*

[57] E. Nasreddine. Global existence of solutions to a parabolic-elliptic chemotaxis system with critical degenerate diffusion. *Preprint 2012, Arxiv :1207.4453*

[58] E. Nasreddine. Well-posedness for a model of individual clustering. Accepted in DCDS série-B. *Preprint 2012, ArXiv :1211.2969v1.*

[59] E. Nasreddine. Two-dimensional individual clustering or aggregation model. Accepted in DCDS-S. *Preprint 2013, ArXiv :1302.0190*

[60] E. Nasreddine. A model of individual clustering with vanishing diffusion. *Preprint 2012, ArXiv :1301.4847*

[61] E. Nasreddine, M. Puel. Diffusion limit of Fokker-Planck equation with heavy tail equilibria. *preprint 2013*

[62] H. Ohtsuka, T. Senba, T. Suzuki. Blowup in infinite time in the simplified system of chemotaxis. *Adv. Math. Sci. Appl. 17 (2007), no. 2, 445-472.*

[63] A. Okubo, A. L. Simon. Diffusion and ecological problems. *Interdisciplinary applied mathematics vol (14). mathematical biology, second edition, (2000), Springer.*

[64] T. Padmanabhan. Statistical mechanics of gravitating systems. *Phys. Rep. 188 (1990), no. 5, 285-362.*

[65] C.S. Patlak, Random walk with persistence and external bias, *Bull. Math. Biophys. 15 (1953) 311-338.*

[66] B. Perthame, PDE models for chemotactic movements. Parabolic, hyperbolic and kinetic, *Appl. Math. 49 (6) (2005) 539-564.*

[67] B. Perthame, A.L Dalibard. Existence of solutions of the hyperbolic Keller-Segel model. *Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 5, 2319-2335.*

[68] M. Rascle, C. Ziti. Finite time blow-up in some models of chemotaxis. *J. Math. Biol. 33 (1995), no. 4, 388-414.*

[69] M. Schoenauer. Quelques résultats de régularité pour un système elliptique avec conditions aux limites couplées. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 5e série, tome 2, n2(1980), 125-135.*

[70] N. Shigesada, E. Teramoto, A consideration on the theory of environmental density. *Jpn. J. Ecol. 28. (1978) 1-8.*

[71] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *1987, Annali di Mathematica Pura ed Applicata (IV), vol. CXLVI, 65-96.*

[72] Y. Sugiyama. Global existence in sub-critical cases and finite time blow-up in super-critical cases to degenerate Keller-Segel systems. *Differential and Integral Equations 19 (2006), no. 8, 841-876.*

[73] Y. Sugiyama. Time global existence and asymptotic behavior for solutions to degenerate quasi-linear parabolic systems of chemotaxis. *Differential and Integral Equations 20 (2007), no. 2, 133-180.*

[74] Y. Sugiyama, H. Kunii. Global existence and decay properties for a degenerate Keller-Segel model with a power factor in drift term. *J. Differential Equations 227 (2006), no. 1, 333-364.*

[75] D. Summers , R.M. Thorne. The modified plasma dispersion function. *Phys. Fluids 83 (1991), 18351847. http ://dx.doi.org/10.1063/1.859653.*

[76] E. M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. *Princeton Mathematical Series, No. 30 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970.*

[77] Y. Tao, M. Winkler. Boundedness in a quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system with subcritical sensitivity. *J. Differential Equations 252 (2012), no. 1, 692715.*

Publications

– Revues internationales avec comité de lecture

1. Nasreddine, E. Global existence of solutions to a parabolic-elliptic chemotaxis system with critical degenerate diffusion. *Preprint (2012), Submitted.* arXiv :1207.4453
2. Nasreddine, E. Well-posedness for a model of individual clustering . *Accepted in DCDS-série B, Special issue on chemotaxis.*
3. Nasreddine, E. A model of individual clustering with vanishing diffusion. *Preprint (2013), Submitted* . arXiv :1301.4847.
4. Nasreddine, E. Puel, M. Diffusion limit for Fokker -Planck equation with heavy tail equilibra. *Preprint (2013), Submitted.*

– Conférences nationales avec comité de lecture et acte

1. Nasreddine, E. Two-dimensional model of individual clustering. Accepted in proceeding conference DCDS-serie S. *Beyrouth, septembre 10-14, 2012, Workshop en mécanique des fluides et dynamique de populations. Modèles, problèmes d'existence, stabilité et méthodes numériques.*

– Ecole d'été avec présentation de posters

1. "Multiscale modeling in the life sciences". Lyon, May 27-31, 2013. Présentation de poster : *Well-posedness for a model of individual clustering.*
2. International School on "Recent advances in partial differential equations and applications". University of Milan, Department of Mathematics, Milano June 17-22, 2013. Présentation de poster : *Diffusion limit of Fokker Planck equation.*

– Communications orales sans actes dans un congrés national

1. Symposium on Partial Differential Equations. Beyrouth, Mai 7-11, 2013- AUB, CAMS. Titre de l'exposé : *Well posedness for a a model of individual clustering.*

Première partie

Limite de diffusion pour l'équation de Fokker-Planck

Chapitre 1

Diffusion limit of Fokker-Planck equation with heavy tail equilibria

Ce chapitre est la version préliminaire de [61] en collaboration avec Marjolaine Puel. Il est rédigé en anglais.

Diffusion limit of Fokker-Planck equation with heavy tail equilibria [1]

Elissar Nasreddine[a] Marjolaine Puel [b]

[a] *Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse, F–31062 Toulouse cedex 9, France*

e-mail : elissar.nasreddine@math.univ-toulouse.fr

[b] *Laboratoire Dieudonné, Université de Nice Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France*

e-mail : Marjolaine.Puel@unice.fr

Abstract. This paper is devoted to the diffusion limit of the Fokker-Planck equation of plasma physics, in which the equilibrium function decays towards zero at infinity like a negative power function. We prove that for an appropriate time scale, in a suitable weighted Sobolev space, the small mean free path limit gives rise to a diffusion equation.

1.1 Introduction

We consider a collisonal kinetic equation given by

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f &= Q(f) \quad \text{in } [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \\ f(0,x,v) &= f_0(x,v) \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1.1}$$

Such a problem naturally arises when modeling the behaviour of a cloud of particles. The unknown $f(t,x,v) \geq 0$ can be interpreted as the density of particles occupying at time $t \geq 0$, the position $x \in \mathbb{R}^d$ with a physical state described by the variable $v \in \mathbb{R}^d$. This variable v represents the velocity of the particles.

We focus in this paper on the Fokker-Planck equation when the collisional operator Q has a diffusive form :

$$Q(f) := \nabla_v \cdot (\frac{1}{\omega} \nabla_v (f\,\omega)) \tag{1.2}$$

and where the equilibria are characterised by the choice of ω (Indeed, this operator has one dimensional kernel spanned by the function $\frac{1}{\omega}$). In this equation, the scattering in velocity is modeled by a diffusion phenomenon coming from a deterministic formulation of a Brownian motion.

1. This work is dedicated to the memory of Naoufel Ben Abdallah, who proposed this subject to E. N. during her Master degree.

Another classical example of collision operator is given by the linear (semiconductor) Boltzmann equation where Q is given by an integral operator

$$Q(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(v,v') \, [f(v') \, F(v) - f(v) \, F(v')] \, dv', \quad \text{with } \sigma(v,v') = \sigma(v',v), \tag{1.3}$$

where σ is the scattering function and $\sigma(v,v') \, F(v)$ models the probability of a particle to pass from a velocity v' before the collision to velocity v after the collision.

For both problems, when the scattering phenomena is much stronger than the advection phenomena, it is possible to approximate the solution of (1.1) by a density depending only on the time and space variable multipied by a velocity profile given by the thermodynamical equilibrium. For example, when the equilibria are given by Maxwellian (or Gaussian) distribution functions, the density is proved to satisfy a diffusion equation. This process is known as the diffusion approximation and has been investigated for a long time, starting with A. Bensoussan, J.L. Lions and G. Papanicolaou [4] and E.W. Larsen and J.B. Keller [9] and it has been the topic of many papers since then (see in particular C. Bardos, R. Santos and R. Sentis [1] and P. Degond, T. Goudon and F. Poupaud [8] and references therein). In recent works (see A. Mellet, S. Mischler, C. Mouhot and A. Mellet, N. Ben Abdallah, A. Mellet, and the second author [2, 3, 11, 12]) similar asymptotic analysis are performed when the equilibrium function is not a Maxwellian distribution, but rather a heavy tail function in the case of the linear Boltzmann problem. Depending on the power of the tail, the diffusion coefficient involved in the equation satisfied by the density is well defined or not. When it is not well defined, we talk about anomalous diffusion and after an ad hoc rescaling, the density satisfies a non local equation such as a fractional diffusion equation. In the present paper, we consider equilibria corresponding to $\omega = (1 + ||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}$ for $\beta > d$, then we start with the obtention of a classical diffusion equation in the case where the diffusion coefficient is well defined. The main difference with Boltzmann is the functional setting, and this difficulty is the reason why the case of anomalous diffusion is still not clear.

Mathematically speaking, we introduce a small parameter $\varepsilon \ll 1$ which describes the mean free path of the particles, then we consider the following rescaling

$$x' = \varepsilon \; x \text{ and } \; t' = \theta(\varepsilon) \; t, \text{ with } \theta(\varepsilon) \to 0.$$

Typically, it means that we assume that the mean free path is very small and the time scale is very large. Then, we rescale the distribution function

$$f^\varepsilon(t', x', v) = f(t, x, v).$$

The function f^ε is now solution of (we skipped the primes)

$$\begin{aligned} \theta(\varepsilon)\ \partial_t f^\varepsilon + \varepsilon\ v \cdot \nabla_x f^\varepsilon &= Q(f^\varepsilon), \\ f^\varepsilon(0,x,v) &= f_0(x,v). \end{aligned} \tag{1.4}$$

The goal is then to study the behaviour of the solution as $\varepsilon \to 0$.

The usual diffusion limit correspond to $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^2$. It may be formally studied using the so-called *Hilbert expansion method* (see [6, 7]), which is based on a formal expansion of the solution in the form

$$f^\varepsilon = f^0 + \varepsilon\ f^1 + \varepsilon^2\ f^2.$$

Inserting this expansion in (1.4) and identifying the term of same order in ε yields to a diffusion equation verified by $\rho(t,x) = \int f^0\ dv$, see Section 3.

To make the formal proof rigorous, we thus propose a different method, the *moment method* classically used to obtain weak convergence in the study of limits of kinetic equations under weaker assumptions on the initial data. This method relies on the introduction of an appropriate auxiliary problem and a weak formulation of (1.4), (1.2). More precisely, the corner stone of the proof is to multiply equation (1.4) by a test function $\phi(t,x)\ F(v) + \varepsilon\ \psi(t,x,v)$, where the correction ψ is the solution of the auxiliary equation

$$Q(\psi) = -F(v)\ v \cdot \nabla_x \phi,$$

where ϕ is a smooth test function. Note the presence of $F(v)$ due to the fact that we use weighted Sobolev spaces with a duality product involving the factor $\frac{1}{F(v)}$. Thanks to the moment method, we prove that for $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^2$, the function $f^\varepsilon(t,x,v)$ converges weakly, when ε goes to zero, to a function of the form $\rho\ F(v)$ where the density $\rho(t,x)$ solves the diffusion equation :

$$\partial_t \rho - \nabla_x \cdot (D\ \nabla_x \rho) = 0. \tag{1.5}$$

This convergence is proved under some assumptions on F that guarantee that the diffusion tensor D, which depends on F, is finite, namely $\beta > d+4$, see Theorem 1.2.2 below.

The case $\beta = d + 4$, is critical in the sense that even though the diffusion coefficient is unfinite, the asymptotic behavior may still be described by a standard diffusion equation under the appropriate time scale $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^2\ |\ln \varepsilon|$, and when $\beta < d + 4$ a fractional diffusion may arise in the asymptotic limit, but the last two cases are not adressed in this paper.

From now on, we assume that

$$Q(f) := \nabla_v \cdot \ (\frac{1}{\omega}\ \nabla_v\ (f\ \omega)\ )$$

where $\omega = (1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}$ and $\beta > d$ and we denote $K > 0$ the constant renormalizing the equilibrium ; i.e. satisfying $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{K}{\omega}\ dv = 1$.

1.2 Main result

We start with an existence result. For that purpose, let us define the functional spaces $Y^p_\omega\left(\mathbb{R}^{2d}\right) = L^p\left(\mathbb{R}^d,\ H_p(\mathbb{R}^d)\right)$, where

$$H_p(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\ \omega^{p-1}\ \mathrm{d}v < \infty \right\}, \tag{1.6}$$

where $\omega = (1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}$ and

$$V = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2\ \omega\ \mathrm{d}v < \infty \text{ and } \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla_v (f\ \omega)|^2}{\omega}\ \mathrm{d}v < \infty \right\}, \tag{1.7}$$

V' being its dual. Thanks to Lion's theorem [10] we obtain the following theorem

Theorem 1.2.1. *Assume that $f_0 \in Y^2_\omega(\mathbb{R}^d)$, the system (1.1) has a unique solution f in the class of functions Y defined by :*

$$Y = \left\{ f \in L^2\left([0,T]\times\mathbb{R}^d, V\right),\quad \partial_t f + v\cdot\nabla_x f \in L^2\left([0,T]\times\mathbb{R}^d, V'\right) \right\}.$$

As we said, passing from the microscopic to the macroscopic scales relies on a rescaling of (1.1) involving the small parameter $\varepsilon \ll 1$. The study of the behaviour of the solution as $\varepsilon \to 0$ is the object of our main result :

Theorem 1.2.2. *Assume that f_0 is a nonnegative function in $Y^2_\omega \cap Y^p_\omega$ with $p > 2$ and $\beta > d+4$. Let f^ε be the solution of (1.4) in Y with initial data f_0, when $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Then, f^ε converges weakly star in $L^\infty\left([0,T],\ Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d})\right)$ towards $\rho(t,x)\ \frac{K}{\omega}$ where $\rho(t,x)$ is the unique solution of the system*

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot j = 0 \tag{1.8}$$

$$j = -D\ \nabla_x \rho, \tag{1.9}$$

where the initial datum is given by $\rho_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_0 \, dv$, *and the diffusion tensor* D *is given by*

$$D = \int_{\mathbb{R}^d} v \otimes \chi \, dv, \tag{1.10}$$

where χ *is the unique solution of the cell equation* $Q(\chi) = \frac{-K \, v}{\omega}$ *with* $\int_{\mathbb{R}^d} \chi \, dv = 0$.

Remark 1.2.3. 1. *We can remark that the diffusion tensor* D *in* (1.10) *has the same form of Boltzmann coefficient,*

$$D = \int_{\mathbb{R}^d} v \otimes \chi \, dv, \quad Q(\chi) = -v \; F(v),$$

but here, χ *can be substituted by its explicit form* (1.30).

2. *The most difficult point in this problem is the introduction of weighted functional spaces in the proof of the convergence result. Indeed, it involves duality products that degenerate in the critical case where* $\beta = d + 4$ *which leads to an additional difficulty in the study of the anomalous diffusion.*

The paper is organized as follows : in Section 3 we derive formally the diffusion equation satisfied by the limiting density using Hilbert expansion. Then, in section 4, we prove existence and uniqueness for equations (1.1). Section 5 is devoted to the study of the auxiliary problem leading to χ and of the diffusion coefficient D. The final step is the obtention of the convergence via moment method and is performed in Section 6.

1.3 Formal asymptotics

In this section we give a formal heuristic of Theorem 1.2.2. Recall that we investigate the asymptotic behaviour as ε goes to zero of the solution of equation (1.4), when $\beta > d + 4$ and $\theta(\varepsilon) = \varepsilon^2$.

The formal limit $\varepsilon \to 0$ can be seen following two points of view.

We can perform the Hilbert expansion (see e.g [6] for the general theory or [7] for an application in the context of Fokker-Planck equations)

$$f^\varepsilon = f^0 + \varepsilon f^1 + \varepsilon^2 f^2,$$

with f^k being independent of ε. Inserting it into (1.4) and identifying terms having the same power of ε, we obtain the following set of cell equations, in which the x variable is a parameter :

$$Q(f^0) = 0, \tag{1.11}$$

$$Q(f^1) = v \cdot \nabla_x f^0, \tag{1.12}$$

$$Q(f^2) = \partial_t f^0 + v \cdot \nabla_x f^1. \tag{1.13}$$

Equation (1.11) means that f^0 lies in the Kernel of Q, and by Proposition 1.4.1

$$f^0 = \frac{\rho(t,x)\ K}{(1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}},$$

where $\rho(t,x)$ is a function still to be determined.
Since f_0 is even with respect to v, the Fredholm alternative says that equation (1.12) leads to

$$f^1 = -\chi \cdot \nabla_x \rho \ \text{ where } \chi = Q^{-1}(\frac{-vK}{(1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}}). \tag{1.14}$$

In order to determine ρ, we integrate (1.13) with respect to $v \in \mathbb{R}^d$ and use that $\int_{\mathbb{R}^d} Q(f)\ dv = 0$.

We get

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\int_{\mathbb{R}^d} v f_1 dv) = 0$$

that is system (1.8), (1.9).

We can also define the density $\rho^\varepsilon(t,x)$ and the current $j^\varepsilon(t,x)$ by

$$\rho^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ dv, \quad j^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} v\ f^\varepsilon\ dv. \tag{1.15}$$

By integrating equation (1.4), we find

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \nabla_x \cdot j^\varepsilon = 0. \tag{1.16}$$

Note that this equation is valid for all values of ε. Then we write the formal expansion $f^\varepsilon = f_0 + \varepsilon f_1$.

Integrating it with respect to v, letting $\varepsilon \to 0$, we formally have $\rho^\varepsilon \to \rho$ since $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{K}{(1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}}\, dv = 1$. Moreover, we have

$$\begin{aligned} j^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} f^0 v\ dv + \int_{\mathbb{R}^d} f^1 v\ dv + O(\varepsilon) \\ &= 0 + \int_{\mathbb{R}^d} f^1 v\ dv + O(\varepsilon), \end{aligned} \tag{1.17}$$

because f^0 is even in v. Therefore j^ε has a limit when $\varepsilon \to 0$, and this limit is given by

$$j(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f^1\ v\ dv = \int_{\mathbb{R}^d} -v\ \chi \cdot \nabla_x \rho\ dv. \tag{1.18}$$

To make this proof rigorous, we need to justify all the formal convergence. What we are going to do is using the moment method which consists in integrating the equation against suitable test functions.

Now, we prove the existence result Theorem 2.3.1 for the Fokker-Planck equation (1.1), (1.2).

1.4 Functional setting and existence result

1.4.1 Properties of the collision operator and adapted functional setting

The following proposition gives some properties of the collision operator Q.

Proposition 1.4.1. *Let f and g be smooth functions in V defined in (5). The following assertions hold true :*

1. *The operator Q is conservative, thus equation (1.4) preserves the total mass of the distribution*
$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f)\ dv = 0, \quad \text{for all } f \in V.$$
2. *The operator Q is self-adjoint with respect to the measure ω dv :*
$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f)\ g\ \omega\ dv = -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\nabla_v(f\ \omega)\cdot\nabla_v(g\ \omega)}{\omega}\ dv = \int_{\mathbb{R}^d} f\ Q(g)\ \omega\ dv, \tag{1.19}$$
3. *The operator Q is dissipative :*
$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f)\ f\ \omega\ dv = -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla_v(f\ \omega)|^2}{\omega}\ dv \le 0. \tag{1.20}$$
4. *The kernel of Q is one-dimensional and spanned by $\frac{1}{\omega}$.*
5. *The operator Q is continuous from $V \longrightarrow V'$.*

Démonstration. In this proof we show 4 and 5.

1. It is clear that $\frac{\mathbb{R}}{\omega} \subset Ker(Q)$.
   For $f \in V$ such that $Q(f) = 0$ then for any $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$ we have :
$$< \nabla_v \cdot (\frac{1}{\omega}\nabla_v(f\omega)), \varphi >= 0,$$
   therefore
$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\nabla_v(f\ \omega)\cdot\nabla_v(\varphi\ \omega)}{\omega}\ dv = 0.$$

Since $D(\mathbb{R}^d)$ is dense in V, then $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla_v(f\ \omega)|^2}{\omega}\, dv = 0$ and there exists a constant $\rho \in \mathbb{R}$ such that $f = \frac{\rho}{\omega}$ and we obtain $Ker\ Q \subset \frac{\mathbb{R}}{\omega}$.

2. Using Cauchy Schwarz inequality we obtain that for a test function $\phi \in D(\mathbb{R}^d)$ and $f \in V$,

$$\begin{aligned} |< Q(f), \phi >| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\nabla_v(f\ \omega) \cdot \nabla_v(\phi\ \omega)}{\omega} \right| \mathrm{d}v \\ &\leq \left|\left| \frac{\nabla_v(f\ \omega)}{\omega^{\frac{1}{2}}} \right|\right|_2 \left|\left| \frac{\nabla_v(\phi\ \omega)}{\omega^{\frac{1}{2}}} \right|\right|_2 \\ &\leq ||f||_V\ ||\phi||_V. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} ||Q(f)||_{V'} &= \sup_{\phi \in V} \frac{|< Q(f), \phi >|}{||\phi||_V} \\ &\leq ||f||_V \end{aligned}$$

hence the continuity holds.

□

Proposition 1.4.1 shows that the natural L^2 norm associated with this operator has a weight ω and that the H^1 semi norm is given by the right-hand side of (1.20). This motivates the introduction of the following functional spaces, endowed with their naturally associated norms :

$$H = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R};\ \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2\ \omega\ \mathrm{d}v < \infty \right\}, \tag{1.21}$$

$$V = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R};\ \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2\ \omega\ \mathrm{d}v < \infty \text{ and } \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla_v(f\ \omega)|^2}{\omega}\ \mathrm{d}v < \infty \right\}, \tag{1.22}$$

$$H_p = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R};\ \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\ \omega^{p-1}\ \mathrm{d}v < \infty \right\}, \tag{1.23}$$

$$V_p = \left\{ f \in H_p;\ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_v(f\ \omega)|^p\ \omega^{-p+1}\ \mathrm{d}v < \infty \right\}, \tag{1.24}$$

$$X = L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d_x, V);\quad Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d}) = L^p(\mathbb{R}^d_x, H_p);\quad X_p = L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d_x, V_p). \tag{1.25}$$

Now, we are in a position to define the dual space of $Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d})$.

Lemma 1.4.2. *For $p \in [1, \infty[$, define p' by $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Then $Y^{p'}_\omega(\mathbb{R}^{2d})$ is the dual espace of $Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d})$.*

Démonstration. Let us consider that $f \in Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d})$ and $g \in Y^{p'}_\omega(\mathbb{R}^{2d})$, then Hölder inequality gives that :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^{2d}} f\ g\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(|f|\ \omega^{\frac{p-1}{p}} \right) \left(|g|\ \omega^{\frac{-(p-1)}{p}}\ \omega \right) \mathrm{d}v\ \mathrm{d}x, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(|f|\ \omega^{\frac{p-1}{p}} \right) \left(|g|\ \omega^{\frac{p'-1}{p'}} \right) \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} |f|^p\ \omega^{p-1}\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} |g|^{p'}\ \omega^{p'-1}\ dvdx \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= ||f||_{Y^p_\omega}\ ||g||_{Y^{p'}_\omega},
\end{aligned}$$

which gives the result. □

1.4.2 Existence and uniqueness

In this section we prove the theorem establishing the existence and uniqueness of a solution to (1.1). The proof relies to Lions theorem see [10], [5].

Proof of Theorem 2.3.1. : For any $\lambda > 0$, the change of known :

$$f_\lambda(x, v, t) = e^{-\lambda t} f(t, x, v)$$

leads to the equation :

$$\begin{cases} \partial_t f_\lambda + v.\nabla_x f_\lambda + \lambda f_\lambda = \nabla_v \cdot (\frac{1}{\omega}\ \nabla_v(f_\lambda \omega)) \\ f_\lambda(0, x, v) = f_0(x, v). \end{cases} \tag{1.26}$$

We will prove existence and uniqueness for f_λ.
Let

$$X = L^2\left([0, T] \times \mathbb{R}^d, V\right), \text{ and } ||\varphi||^2_X = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(t, x, v)|^2\ \omega\ dvdxdt.$$

and S be the space $]0, T[\times\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ of infinitely differentiable functions, with compact support in $]0, T[\times\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, provided with Hilbertian norm :

$$||\varphi||^2_S = ||\varphi||^2_X + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \omega\ |\varphi(0, x, v)|^2\ dvdx, \quad \forall \varphi \in S.$$

The bilinear form E, and the linear form L, are defined by :

$$E(f_\lambda, \varphi) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left[f_\lambda\ \omega\ (-\frac{\partial \phi}{\partial t} - v \cdot \nabla_x \varphi + \lambda \varphi) + \frac{1}{\omega}\ \nabla_v(\varphi\ \omega) \cdot \nabla(f_\lambda\ \omega) \right]\ dvdxdt$$

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f_0(x,v)\ \varphi(0,x,v)\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x.$$

The bilinear form E is coercive since

$$\begin{aligned}
E(\varphi,\varphi) &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\varphi\ \omega(-\partial_t\varphi - v\cdot\nabla_x\varphi + \lambda\varphi) + \frac{1}{\omega}\ \nabla_v(\varphi\ \omega)\cdot\nabla(\varphi\ \omega)\right]\ dvdxdt \\
&= \lambda\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\omega\ |\varphi|^2\ dvdxdt + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\omega\ |\varphi(0,x,v)|^2 dvdx \\
&+ \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\nabla_v(\varphi\ \omega)|^2}{\omega}\ dvdxdt \\
&\geq \min(\lambda,1)\ ||\varphi||_X^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\omega\ |\varphi(0,x,v)|^2\ dvdx \\
&\geq \min(\lambda,1)\ ||\varphi||_S^2 \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

Then Lions's theorem applies and the variational equation $E(f_\lambda,\varphi) = L(\varphi)$ admits a solution f_λ in X. Then f_λ satisfies (1.1) in the sense of distributions, and in particular, we deduce that :

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f_\lambda = \nabla_v\cdot\left(\frac{1}{\omega}\nabla_v(f\omega)\right) - \lambda\ f_\lambda \in L^2\left([0,T]\times\mathbb{R}^d_x, V'\right)$$

so that f_λ and then f belong to Y.
In order to give a meaning to the initial condition, and to show uniqueness, we have to prove a trace theorem, and a Green formula for the functions of Y. Consequently, we admit the following lemma whose proof is a straightforward adaptation of [5] in the weighted Sobolev spaces. And for this reason, the proof is omitted.

Lemma 1.4.3. *(i) If $f\in Y$, f admits (continuous) trace value $f(0,x,v)$ in $Y^2_\omega(\mathbb{R}^{2d})$.*
(ii) For f_1 and f_2 in Y, we have :

$$< \frac{\partial f_1}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f_1, f_2 >_{X'X} + < \frac{\partial f_2}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f_2, f_1 >_{X'X} =$$

$$-\int\int f_1(0,x,v)\ f_2(0,x,v)\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x. \qquad (1.28)$$

So, using the equation (1.26) and the Green formula (1.28), we deduce that the solution f satisfies :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}[f(0,x,v) - f_0(x,v)]\ \varphi(0,x,v)\ \omega\ dvdx = 0, \quad \forall\varphi\in S.$$

Consequently, the initial condition is satisfied in $Y^2_\omega(\mathbb{R}^{2d})$.
Now, for uniqueness, we suppose that f_1 and f_2 are two differents solutions of (1.26). Then we get that $f = f_1 - f_2$ is a solution of (1.26) with $f_0 = 0$, which belongs to Y.

Applying (1.28) we obtain :

$$\begin{aligned} 0 &= < \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f, f >_{X'X} - < \nabla_v \cdot (\frac{1}{\omega} \nabla_v (f\omega)), f >_{X'X} + \lambda < f, f >_{X'X} \\ &\geq \lambda \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f|^2 \ \omega \ dvdxdt. \end{aligned}$$

Which proves that f is equal to zero almost everywhere. □

1.5 Preliminary computations

1.5.1 Study of auxiliary equation

We first compute the solution of auxiliary problem satisfying by χ solution of

$$Q(\chi) = -v \ F(v).$$

Then we give some properties of χ.

Lemma 1.5.1. *The unique solution of the cell equation*

$$Q(\chi) = \nabla_v \cdot \left(\frac{1}{\omega} \ \nabla_v (\chi \ \omega) \right) = -\frac{v \ K}{\omega} \quad \text{with} \int_{\mathbb{R}^d} \chi \ dv = 0, \tag{1.29}$$

is given by :

$$\chi = \frac{||v||^2 + 3}{3\beta - 2(d+2)} \ \frac{K \ v}{\omega}. \tag{1.30}$$

Démonstration. First, since $F(v)$ is even with respect to v, the Fredholm alternative implies that there exists a solution to (1.29) which is unique as soon as we impose the constraint $\int_{\mathbb{R}^d} \chi \ dv = 0$. In order to compute the solution of (1.29), we use the following ansatz

$$\chi = \frac{\varphi(||v||^2)}{\omega} \ v \ K$$

where φ is a function to determine.
Let us consider $r = ||v||^2$, a simple computation gives

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv_j} \left(\frac{1}{\omega} \ \frac{d}{dv_j} \left(\varphi(r) \ v_i \right) \right) &= \frac{\delta_{ij}}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}}} \ 2v_j \ \frac{d\varphi(r)}{dr} - \beta \ \frac{2 \ v_i \ v_j^2}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}+1}} \ \frac{d\varphi(r)}{dr} + \frac{v_i}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}}} \ \frac{d^2\varphi(r)}{dv_j^2} \\ &+ \frac{\delta_{ij}}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}}} \ \frac{d\varphi(r)}{dr} \ 2 \ v_j - \delta_{ij} \ \beta \ \frac{v_j \ \varphi(r)}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}+1}}. \end{aligned}$$

Let us consider $\varphi(r) = ar + b$, then insert it in the last equality we get by identification

$$a = \frac{-1}{-3\beta + 2(d+2)} \quad \text{and} \quad b = \frac{-3}{-3\beta + 2(d+2)}.$$

We finally obtain

$$\chi = \frac{||v||^2 + 3}{3\beta - 2(d+2)} \; \frac{K\ v}{\omega}.$$

□

In the following lemma we study some properties of χ.

Lemma 1.5.2. *Recall that H_q is defined by :*

$$H_q = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}; \int_{\mathbb{R}^d} |f|^q \ \omega^{q-1} \ \mathrm{d}v < \infty\}$$

1. *For $q < \frac{\beta-d}{3}$ we have $\chi \in H_q$.*
2. *For $q < \frac{\beta-d}{4}$ we have $v \cdot \chi \in H_q$.*

Démonstration. 1. Let us rewrite

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\chi|^q \ \omega^{q-1} \ \mathrm{d}v \ \leq \ \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{||v||^2 + 3}{3\beta - 2(d+2)} \ \frac{K\ ||v||}{(1 + ||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}} \right)^q \ (1 + ||v||^2)^{\frac{\beta\ (q-1)}{2}} \ \mathrm{d}v.$$

We write $r = ||v||$, and $\mathrm{d}v = r^{d-1} \ \mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma$, where $\mathrm{d}\sigma$ is the measure of the unit sphere S^{d-1} in $\mathbb{R}^d$. Then we get

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\chi|^q \ \omega^{q-1} \ \mathrm{d}v \ &\leq \ \int_{S^{d-1}} \int_0^\infty \left(\frac{r^2 + 3}{3\beta - 2(d+2)} \ \frac{K\ r}{(1 + r^2)^{\frac{\beta}{2}}} \right)^q \ \left(1 + r^2\right)^{\frac{\beta\ (q-1)}{2}} \ r^{d-1} \ \mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma, \\ &\leq \ C \int_0^\infty \frac{r^{d-1+q} \ (3 + r^2)^q}{(1 + r^2)^{\frac{\beta}{2}}} \ dr, \end{aligned}$$

then for $q < \frac{\beta-d}{3}$ we have $\chi \in H_q$.

2. In the same way, for $r = ||v||$ we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |v\ \chi|^q \ \omega^{q-1} \ \mathrm{d}v \ &\leq \ \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{||v||^2 + 3}{3\beta - 2(d+2)} \ \frac{K\ ||v||^2}{(1 + ||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}} \right)^q \ (1 + ||v||^2)^{\frac{\beta\ (q-1)}{2}} \ \mathrm{d}v, \\ &\leq \ C \int_0^\infty \frac{\left(3 + r^2\right)^q \ r^{2q+d-1}}{(1 + r^2)^{\frac{\beta}{2}}} \ dr, \end{aligned}$$

then for $q < \frac{\beta-d}{4}$, we get that $v \cdot \chi \in H_q$.

□

1.5.2 Study of diffusion coefficient D

As a consequence of Lemma 1.5.1 we can define the tensor D by

$$D = \int_{\mathbb{R}^d} (v \otimes v) \frac{||v||^2 + 3}{3\beta - 2(d+2)} \frac{K}{\omega} \, \mathrm{d}v. \tag{1.31}$$

Proposition 1.5.3. *The tensor D is symmetric and positive definite .*

Démonstration. Let $X \in \mathbb{R}^d$ and $Y \in \mathbb{R}^d$, we have $< DX, Y >= \sum_{i,j} D_{ij}\ X_i\ Y_j$ with

$$D_{ij} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{K\ v_i}{\omega} \chi_j\ \omega\ \frac{dv}{K} = -\int_{\mathbb{R}^d} Q(\chi_i)\ \chi_j\ \omega\ \frac{dv}{K} = -\frac{1}{K}\ < Q(\chi_i), \chi_j >_H$$

Since Q is selfadjoint in H, we get $D_{ij} = D_{ji}$. In addition,

$$\begin{aligned}\langle DX, X\rangle &= \sum_{i,j} D_{ij} X_i X_j = -\frac{1}{K}\sum_{i,j} < Q(\chi_i), \chi_j > \ X_i\ X_j \\ &= -\frac{1}{K}\ < Q(f_X), f_X >= \frac{1}{K}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla(f_X\ \omega)|^2}{\omega}\, \mathrm{d}v \\ &> 0\end{aligned}$$

where $f_X(v) = \sum_{i=1}^d X_i \chi_i(v)$.

If $< DX, X >= 0$ we obtain that $f_X(v) = \sum_{i=1}^d X_i \chi_i(v) = \frac{\rho(t,x)}{\omega}$, since Q is linear we have $\sum_{i=1}^d X_i\ Q(\chi_i)(v) = 0$ which leads to $\sum_{i=1}^d X_i\ \frac{v_i}{\omega} = 0$. Since $\{\frac{v_i}{\omega}\}_{1\le i\le d}$ is linearly independant, then for all $i; 1 \le i \le d$ we have $X_i = 0$ and finally $X = 0$. □

Lemma 1.5.4. *For $\beta > d + 4$, the diffusion tensor D is finite.*

Démonstration. Using (1.31) we can see that

$$|D| \le \int_{\mathbb{R}^d} ||v||^2 \frac{||v||^2 + 3}{3\beta - 2(d+2)} \frac{K}{(1 + ||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}}\, \mathrm{d}v,$$

therefore, for $\beta > d + 4$, D is finite. □

1.6 Rigorous asymptotics

1.6.1 Compactness

Our aim in this section is to study the asymptotic behaviour as ε goes to zero of the solution f^ε of the rescaled equation (1.4), by proving that $f^\varepsilon - \frac{K\,\rho^\varepsilon}{\omega}$ converges weakly to zero. We start with a priori estimate for f^ε.

Lemma 1.6.1. *For initial datum $f_0 \in Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d})$ where $p \geq 2$ and a positive time T.*

1. *The solution f^ε of (1.4) is bounded in $L^\infty\left([0,T];\ Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d})\right)$ uniformly with respect to ε since it satisfies*

$$||f^\varepsilon(T)||^p_{Y^p_\omega} + \frac{p\ (p-1)}{\theta(\varepsilon)} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{|\nabla_v(f^\varepsilon\ \omega)|^2}{\omega}\ (f^\varepsilon)^{p-2}\ \omega^{p-2}\ \mathrm{dvdxdt} \leq ||f_0||^p_{Y^p_\omega}. \tag{1.32}$$

2. *The density $\rho^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ \mathrm{d}v$ is such that*

$$||\rho^\varepsilon(t)||^p_p \leq \frac{1}{K^{p-1}} ||f_0||^p_{Y^p_\omega} \quad \text{for all} \quad t \in [0,T]. \tag{1.33}$$

3. *Then, up to a subsequence, the density ρ^ε converges weakly star in $L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^d))$ to ρ.*

4. *Up to a subsequence, the sequence f^ε converges weakly star in $L^\infty([0,T]; Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d}))$ to $f = \rho(t,x)\frac{K}{\omega}$.*

Démonstration. 1. Multiplying (1.4) by $(f^\varepsilon)^{p-1}\ \omega^{p-1}$ and integrating it with respect to x and v, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \partial_t f^\varepsilon\ (f^\varepsilon)^{p-1}\ \omega^{p-1}\ \mathrm{dvdx} \quad = \quad \frac{1}{\theta(\varepsilon)} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \nabla_v \cdot \left(\frac{1}{\omega}\nabla_v(f^\varepsilon\ \omega)\right)\ (f^\varepsilon)^{p-1}\ \omega^{p-1}\ \mathrm{dvdx}.$$

An integration by parts in v gives :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\ ||f^\varepsilon||^p_{Y^p_\omega} &= -\frac{1}{\theta(\varepsilon)} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{\nabla_v(f^\varepsilon\omega)\cdot\nabla_v((f^\varepsilon)^{p-1}\ \omega^{p-1})}{\omega}\ \mathrm{dvdx} \\
&= -\frac{1}{\theta(\varepsilon)} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{\nabla_v(f^\varepsilon\omega)\cdot\nabla_v(f^\varepsilon\ \omega)}{\omega}\ (p-1)\ (f^\varepsilon)^{p-2}\ \omega^{p-2}\ \mathrm{dvdx} \\
&= -\frac{1}{\theta(\varepsilon)} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{|\nabla_v(f^\varepsilon\ \omega)|^2}{\omega}\ (p-1)\ (f^\varepsilon)^{p-2}\ \omega^{p-2}\ \mathrm{dvdx}.
\end{aligned}$$

An integration in time gives (1.32).

2. The Cauchy-Schwarz inequality implies :

$$\rho^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f^\varepsilon \; K^{\frac{p-1}{p}} \; \omega^{\frac{p-1}{p}}}{K^{\frac{p-1}{p}} \; \omega^{\frac{p-1}{p}}} \; dv \le \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{(f^\varepsilon)^p \; \omega^{p-1}}{K^{p-1}} \; dv \right)^{\frac{1}{p}} \; \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{K}{\omega} \; dv \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

then,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\rho^\varepsilon)^p dx \le \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{(f^\varepsilon)^p \; \omega^{p-1}}{K^{p-1}} \; dv \right) \; dx,$$

and

$$\sup_{t>0} \int (\rho^\varepsilon)^p \; dx \le \frac{1}{K^{p-1}} \; \sup_t \int \int (f^\varepsilon)^p \; \omega^{p-1} \; dvdx.$$

Using (1.32) we obtain

$$||\rho^\varepsilon(t)||_p^p \le \frac{1}{K^{p-1}} \; ||f_0||^p_{Y^p_\omega}, \quad \text{for all } t \in [0,T].$$

3. The previous inequality gives that ρ^ε is bounded in $L^\infty\left([0,T], L^p(\mathbb{R}^d)\right)$, and Banach-Alaoglu theorem gives that there exist $\rho \in L^\infty\left([0,T], L^p(\mathbb{R}^d)\right)$ and a subsequence , still denoted by ρ^ε which converges weakly star in $L^\infty\left([0,T]; L^p(\mathbb{R}^d)\right)$ to ρ.
4. Using (1.32) we have (f^ε) is a bounded sequence in $L^\infty\left([0,T]; Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d})\right)$ uniformly with respect to ε, since it satisfies

$$||f^\varepsilon(T)||_{Y^p_\omega} \le ||f_0||_{Y^p_\omega}. \tag{1.34}$$

Therefore, there exists $f \in L^\infty\left([0,T], Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d})\right)$ and a subsequence, still denoted by f^ε satisfying

$$f^\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} f \text{ in } L^\infty\left([0,T], Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d})\right) \text{ weak star.} \tag{1.35}$$

Furthermore, multiplying (1.4) by a test funcion $\phi(t,x,v)$ and integrating it with respect to v we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} Q(f^\varepsilon) \; \phi \; dvdxdt \;\; &= \;\; -\theta(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f_0 \phi dvdx - \theta(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon \partial_t \phi dvdxdt \\ &\quad -\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \nabla_x \phi f^\varepsilon dvdxdt \end{aligned} \tag{1.36}$$

using (1.35) we obtain that

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} Q(f^\varepsilon) \; \phi \; dvdxdt \longrightarrow 0, \text{ as } \varepsilon \to 0, \quad \text{for all } \phi.$$

Therefore, we deduce that $f \in Ker(Q)$ and there exist $C(t,x)$ such that $f = \frac{K \; C(t,x)}{\omega}$. Now, let us prove that $C(t,x) = \rho(t,x)$.

For some p' verifies $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ and for all $\varphi \in C_c^\infty\left([0,T], Y_\omega^{p'}(\mathbb{R}^{2d})\right)$, and by (1.35) we have

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} f^\varepsilon\ \varphi\ \omega\ dvdxdt \to \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{K\ C(t,x)}{\omega}\ \varphi\ \omega\ dvdxdt. \tag{1.37}$$

Choosing

$$\varphi(t,x,v) = \frac{\theta(t,x)}{\omega}, \tag{1.38}$$

where $\theta(t,x) \in C_c^\infty([0,T], L^{p'}(\mathbb{R}^d))$, we obtain that $\frac{\theta(t,x)}{\omega} \in Y_\omega^{p'}(\mathbb{R}^{2d})$. Substituting (1.38) into (1.37) and using the convergence of ρ^ε we obtain

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} f^\varepsilon \varphi\ \omega\ dvdxdt = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d} \rho^\varepsilon \theta\ dxdt \longrightarrow \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d} \rho\ \theta\ dxdt,\ \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

On another hand, using the convergence of f^ε we have

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} f^\varepsilon \varphi\ \omega\ dvdxdt \longrightarrow \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{K\ C(t,x)}{\omega}\ \theta\ dxdt,\ \text{ as } \varepsilon \to 0. \tag{1.39}$$

Since $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{K}{\omega}\ dv = 1$, we have

$$\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{K\ C(t,x)}{\omega}\ dv = C(t,x).$$

Which ends the proof of the Lemma. □

1.6.2 Study of the current

We recall the definition of the macroscopic current

$$j^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{v\ f^\varepsilon}{\varepsilon}\ \mathrm{d}v. \tag{1.40}$$

We prove that j^ε has a weak limit as ε goes to zero.

Lemma 1.6.2. *For $\beta > d+2$ and fixed $\varepsilon > 0$ the current j^ε is defined.*

Démonstration. The Cauchy-Schwarz inequality implies :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} v f^\varepsilon\ \mathrm{d}v\right| \le \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|v\ f^\varepsilon|\ \sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega}}\ dv \le \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{||v||^2}{\omega}\ dv\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f^\varepsilon|^2\ \omega\ \mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{2}}.$$

We deduce that for $\beta > d+2$ the current j^ε is defined. □

Lemma 1.6.3. *For $\beta > d+4$, the current j^ε is bounded uniformly with respect to ε in $L^2_{loc}\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$.*

Démonstration. We remark that $\frac{v}{\omega} = \frac{1}{-\beta}\ \nabla_v\big(\frac{1}{(1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}-1}}\big)$, then

$$j^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{v}{\omega}\ (f^\varepsilon\ \omega)\ dv \ = \ \frac{1}{-\beta\ \varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_v\left(\frac{1}{(1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}-1}}\right)\ (f^\varepsilon\ \omega)\ dv$$
$$= \ \frac{1}{\beta\ \varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} (1+||v||^2)^{\frac{-\beta}{2}+1}\ \sqrt{\omega}\ \frac{\nabla_v(f^\varepsilon\ \omega)}{\sqrt{\omega}}\ dv.$$

Cauchy-Schwarz inequality implies,

$$|j^\varepsilon| \ \leq \ c\left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+||v||^2)^{-\beta+2}\ (1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}\ dv\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\nabla_v(f^\varepsilon\ \omega)|^2}{\varepsilon^2\ \omega}\ dv\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Using (1.34) with $p=2$, there exists a constant C such that

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^{2d}}\frac{|\nabla_v(f^\varepsilon\ \omega)|^2}{\varepsilon^2\ \omega}\ dvdxdt \leq C,$$

then for any bounded domain $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, we have :

$$\int_0^T\int_\Omega |j^\varepsilon|^2\ dxdt \ \leq \ \int_0^T\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^d}(1+||v||^2)^{-\beta+2}\ (1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}\ dvdxdt$$
$$\times\ \int_0^T\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\nabla_v(f^\varepsilon\ \omega)|^2}{\varepsilon^2\ \omega}\ dvdxdt.$$

Finally, for $\beta > d+4$,

$$\int_{\mathbb{R}^d}(1+||v||^2)^{-\beta+2}\ (1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}}\ dv < \infty,$$

and j^ε is bounded in $L^2_{loc}\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$, and thus j^ε converges weakly in $L^2_{loc}\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$. □

It remains to identify the limiting flux j.

1.6.3 Moment method

Proposition 1.6.4. *Under the assumptions of Theorem 1.2.2, we identify the limit $\rho(t,x)$ solution to the diffusion equation (1.8) and we conclude that the whole sequence f^ε converges weak star in $L^\infty([0,T];Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d}))$.*

Démonstration. Take any subsequence still denotes by f^ε. Let us rewrite a weak formulation of (1.4)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} f^\varepsilon\ \varphi\ \omega\ \mathrm{dvdx} = \int_{\mathbb{R}^{2d}} f^\varepsilon\ \left(\partial_t\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\ v\cdot\nabla_x\varphi + \frac{1}{\varepsilon^2}\ Q(\varphi)\right)\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x, \tag{1.41}$$

for all test function $\varphi(t,x,v)$ in the space $C_c^\infty\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, H_q\right)$ with $q < \frac{\beta-d}{3}$. In the weak formulation (1.41), we take as a test function $\varphi(t,x,v) = \frac{K\ \phi(t,x)}{\omega} + \varepsilon\psi(t,x,v)$, where $\psi(t,x,v)$ is a solution to the cell equation :

$$Q(\psi) = -\frac{K\ v\cdot\nabla_x\phi(t,x)}{\omega},$$

which means that $\psi(t,x,v) = \chi\cdot\nabla_x\phi(t,x)$, where $\chi = Q^{-1}(\frac{-v\ K}{\omega})$, and ϕ is a smooth compactly supported vector test function of (t,x).

Using the expression of j^ε in (1.40), and since by Lemma 1.6.2, we can write

$$K\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\varepsilon}\ f^\varepsilon\ v\cdot\nabla_x\phi\ dvdx = \int_{\mathbb{R}^d} j^\varepsilon\cdot\nabla_x\phi\ dx = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ Q(\psi)\ \omega\ dvdx, \tag{1.42}$$

then, (1.41) becomes

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ \left(\frac{K\ \phi}{\omega} + \varepsilon\ \psi\right)\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ K\ \partial_t\phi\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ v\cdot\nabla_x\psi\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ &\quad + \varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ \partial_t\psi\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x. \end{aligned}\tag{1.43}$$

Integrating the above equation with respect to time, we obtain

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(0)\ \left(\frac{K\ \phi(0)}{\omega} + \varepsilon\ \psi(0)\right)\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x \quad &= \quad \varepsilon\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ \partial_t\psi\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ K\ \partial_t\phi\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ v\cdot\nabla_x\psi\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

The trace at $t=0$ has a meaning, thanks to a trace formula for function in Y which is proven in Lemma 1.4.3.

Which reads

$$\begin{aligned}
-K\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(0)\ \phi(0)\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x \quad &- \quad K\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ \partial_t\phi\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(0)\ \psi(0)\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ \partial_t\psi\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ v\cdot\nabla_x\psi\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \qquad (1.44)
\end{aligned}$$

Using the weak convergence of ρ^ε, we deduce that the left hand side in (1.44) converges, more precisely

$$K\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(0)\ \phi(0)\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x = K\int_{\mathbb{R}^d}\rho^\varepsilon(0)\phi(0)\ dx \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} K\int_{\mathbb{R}^d}\rho(0)\ \phi(0)\ \mathrm{d}x,$$

and

$$K\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ \partial_t\phi\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = K\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\rho^\varepsilon\ \partial_t\phi\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} K\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\rho\ \partial_t\phi\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

It remains to pass to the limit $\varepsilon\to 0$ in the right hand side in (1.44). We show that the first line in the right hand side in (1.44) goes to zero when $\varepsilon\to 0$. Indeed, by Hölder inequality, we have for $p>1,\ q>1$ satisfying $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\begin{aligned}
\left|\varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(0)\ \psi(0)\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\right| \quad &\leq \quad \varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f^\varepsilon(0)\ \chi\cdot\nabla_x\phi(0)\ \omega|\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x \\
&\leq \quad \varepsilon\ ||f_0\ \omega^{\frac{p-1}{p}}||_p\ ||\chi\cdot\nabla_x\phi(0)\ \omega^{\frac{q-1}{q}}||_q \\
&\leq \quad \varepsilon\ ||f_0||_{Y^p_\omega}\ ||\chi\cdot\nabla_x\phi(0)||_{Y^q_\omega}. \qquad (1.45)
\end{aligned}$$

Since $f_0\in Y^p_\omega(\mathbb{R}^{2d})$, and since by Lemma 1.5.2, for $1<q<\frac{\beta-d}{4}$, $\chi\in Y^q_\omega(\mathbb{R}^{2d})$, we deduce from (1.45) that

$$\varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon(0)\ \psi(0)\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x \longrightarrow 0,\ \text{ when } \varepsilon\to 0.$$

Similarly for $1<q<\frac{\beta-d}{4}$ and by Hölder inequality, we obtain for (p,q) satisfying $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\begin{aligned}
\left|\varepsilon\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon\ \partial_t\psi\ \omega\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \quad &\leq \quad \varepsilon\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f^\varepsilon\ \partial_t\psi\ \omega|\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\leq \quad \varepsilon\int_0^\infty ||f^\varepsilon||_{Y^p_\omega}\ ||\chi\cdot\nabla_x(\partial_t\phi)||_{Y^q_\omega}\ \mathrm{d}t \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon\to 0.
\end{aligned}$$

The last integral in (1.44) becomes

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon \ v \cdot \nabla_x \psi \ \omega \ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon \ (v \otimes \chi : D^2\phi) \ \omega \ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad (1.46)$$

denoting $A : B = tr(AB^T) = \sum_{i,j=1}^d A_{ij}B_{ij}$ for two $d \times d$ matrices A and B.
Take $1 < q < \frac{\beta - d}{4}$, by Lemma 1.5.2, $v \otimes \chi : D^2\phi \in Y_\omega^q$, then for p satisfying $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$I^\varepsilon = \int_0^\infty < f^\varepsilon; \ v \otimes \chi : D^2\phi >_{Y_\omega^p, Y_\omega^q} \ dt.$$

By taking the limit $\varepsilon \to 0$ we have

$$I^\varepsilon \longrightarrow \int_0^\infty < \frac{K \ \rho}{\omega}; \ v \otimes \chi : D^2\phi >_{Y_\omega^p, Y_\omega^q} \ dt$$

Note that this is possible since $\beta > d+4$ and that this argument degenerates for $\beta = d+4$.

Finally, combining all this limits we obtain

$$\begin{aligned} -K \int_{\mathbb{R}^d} \rho(0) \ \phi(0) \ \mathrm{d}x \quad = \quad & K \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \phi \ \rho \ \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ & + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (v \otimes \chi : D^2\phi) \ \rho \ K \ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

which is nothing but the weak formulation of the drift-diffusion equation satisfied by ρ, with initial datum ρ_0. By uniqueness of the limit, the whole sequence f^ε converges. This concludes the proof. □

Acknowledgment

We thank Philippe Laurençot for fruitful discussion.

Bibliographie

[1] C. Bardos, R. Santos, R. Sentis. Diffusion approximation and computation of the critical size. *Numerical solutions of nonlinear problems (Rocquencourt, 1983), INRIA, Rocquencourt, (1984), 139.*

[2] N. Ben Abdallah, A. Mellet, M. Puel. Anomalous diffusion limit for kinetic equations with degenerate collision frequency. *M3AS Volume No.21, Issue No. 11, (2011), 2249-2262 .*

[3] N. Ben Abdallah, A. Mellet, M. Puel. Fractional diffusion limit for collisional kinetic equations : a Hilbert expansion approach. *KRM Vol. 4, no. 4, (2011), 873-900*

[4] A. Bensoussan, J-L. Lions, G. Papanicolaou. Boundary layers and homogenization of transport processes. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. 15 (1979), no. 1, 53-157.*

[5] P. Degond. Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in one and two spaces dimensions. *Annales scientifiques de l'E.N.S 4 e serie, tome 19, n 4 ,(1986), p.519-542.*

[6] P. Degond. Macroscopic limits of the Boltzmann equation : a review. Modeling and computational methods for kinetic equations, 357, *Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhauser Boston, Boston, MA, 2004.*

[7] P. Degond, P. Mas-Gallic . Existence of solutions and diffusion approximation for a model Fokker-Planck equation. *Proceedings of the conference on mathematical methods applied to kinetic equations (Paris, 1985). Transport Theory Statist. Phys. 16 (1987), no. 4-6, 589-636.*

[8] P. Degond, T. Goudon, F. Poupaud. Diffusion limit for nonhomogeneous and non-micro-reversible processes. *Indiana Univ. Math. J. 49 (2000), no. 3, 1175-1198.*

[9] E. Larsen, , J. Keller. Asymptotic solution of neutron transport problems for small mean free paths. *J. Mathematical Phys. 15 (1974), 75-81.*

[10] J. L. Lions, Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. *Springer, Berlin, 1961.* (2003), *vol.* 9, *pp.* 371 – 398.

[11] A. Mellet. Fractional diffusion limit for collisional kinetic equations : a moments method. *Indiana Univ. Math. J. 59 (2010), no. 4, 1333-1360.*

[12] A. Mellet, S. Mishler and C. Mouhot. Fractional diffusion limit for collisional kinetic equations. *Arch. Ration. Mech. Anal. 199 (2011), no. 2, 493-525.*

Annexe A

Dans cet Annexe, on donne la preuve détaillée de la solution du problème auxiliaire, utilisée dans le Chapire 1.

Proposition 1.6.5. *Le problème auxiliaire suivant*

$$Q(\chi) = \nabla_v \cdot (\frac{1}{\omega}\ \nabla_v(\chi\ \omega)) = -\frac{v\ K}{\omega} \quad \text{telle que} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \chi\ dv = 0$$

admet une solution unique de la forme suivant

$$\chi = \frac{||v||^2 + 3}{3\beta - 2(N+2)}\ \frac{K\ v}{\omega}.$$

Démonstration. Tout d'abord, nous cherchons une solution de la forme suivant

$$\chi = \frac{\varphi(||v||^2)}{\omega}\ v\ K$$

où φ est une fonction à déterminer. Alors, on obtient

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\left(\frac{1}{\omega}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\left(\varphi(||v||^2\ v_i)\right)\right) = -\frac{v_i}{\omega}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\left(\frac{1}{\omega}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\left(\varphi(||v||^2\ v_i)\right)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\left[\frac{v_i}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\varphi(||v||^2)+\frac{\delta_{ij}}{\omega}\ \varphi(||v||^2)\right]\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\left(\frac{v_i}{\omega}\right)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\varphi(||v||^2)+\frac{v_i}{\omega}\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2v_j}\ \varphi(||v||^2)\\
&+ \delta_{ij}\frac{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\varphi(||v||^2)\ \omega-\frac{\beta}{2}(1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}-1}\ 2v_j\ \varphi(||v||^2)\right]}{\omega^2}\\
&= \frac{\delta_{ij}\ \omega-\frac{\beta}{2}(1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}-1}\ v_i\ 2\ v_j}{\omega^2}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\varphi(||v||^2)+\frac{v_i}{\omega}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v_j^2}\varphi(||v||^2)\\
&+ \frac{\delta_{ij}}{\omega}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\varphi(||v||^2)-\delta_{ij}\ \frac{\beta\ v_j\ \varphi(||v||^2)}{(1+||v||^2)^{\beta+1}}\\
&= \frac{\delta_{ij}}{\omega}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\varphi(||v||^2)-\beta\frac{v_i\ v_j}{(1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}+1}}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\varphi(||v||^2)\\
&+ \frac{\delta_{ij}}{\omega}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\varphi(||v||^2)-\delta_{ij}\ \frac{\beta\ v_j\ \varphi(||v||^2)}{(1+||v||^2)^{\beta+1}}
\end{aligned}$$

Prenons $r=||v||^2$ et $dr=2\ v_i\ dv_i$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\left(\frac{1}{\omega}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\left(\varphi(r\ v_i)\right)\right) &= \frac{\delta_{ij}}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}}}\ 2v_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\varphi(r)-\beta\frac{2v_i\ v_j^2}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}+1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\varphi(r)\\
&+ \frac{v_i}{\omega}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v_j^2}\varphi(r)+\frac{\delta_{ij}}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\varphi(r)\ 2v_j-\delta_{ij}\beta\frac{v_j\ \varphi(r)}{(1+||v||^2)^{\frac{\beta}{2}+1}}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v_j^2}\varphi(r)=4\ v_j^2\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\varphi(r)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\varphi(r).$$

Considérons $\varphi(r)=ar+b$, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\left(\frac{1}{\omega}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_j}\left(\varphi(r\ v_i)\right)\right)=\frac{\delta_{ij}}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}}}\ 2v_j\ a-\beta\frac{2v_i\ v_j^2}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}+1}}\ a+2\frac{v_i}{\omega}\ a+2v_j\frac{\delta_{ij}}{\omega}\ a-\beta\delta_{ij}\ v_j\frac{v_j\ (ar+b)}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}+1}}.$$

Par la suite

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\delta_{ij}}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}}}\ 2v_j\ a-\beta\frac{2v_i\ v_j^2}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}+1}}\ a+2\frac{v_i}{\omega}\ a+2v_j\frac{\delta_{ij}}{\omega}\ a-\beta\delta_{ij}\ v_j\frac{v_j\ (ar+b)}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}+1}}\right)=\frac{-v_i}{\omega}.$$

Donc,

$$\frac{2v_i\ a}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}}} - \frac{2\beta r\ v_i\ a}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}+1}} + \frac{2v_i Na}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}}} + \frac{2v_i a}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}}} - \frac{\beta v_i(ar+b)}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}+1}} = \frac{-v_i}{(1+r)^{\frac{\beta}{2}}}$$

$$2v_i a - \frac{2\beta r v_i\ a}{1+r} + 2v_i Na + 2v_i a - \frac{\beta v_i(ar+b)}{1+r} = -v_i,$$

$$2a - \frac{2\beta ra}{1+r} + 2Na + 2a - \frac{\beta(ar+b)}{1+r} = -1$$

$$4a(1+r) - 2\beta ra + 2Na(1+r) - \beta(ar+b) = -1-r$$

par identification, nous trouvons

$$\left\{ \begin{array}{lllll} 4a & + & 2Na & -\beta b & = & -1 \\ 4a & -2\beta a & +2Na & - & \beta a = & -1 \end{array} \right.$$

Finallement, $a = \dfrac{-1}{-3\beta + 2(N+2)}$ et $b = \dfrac{-3}{-3\beta + 2(N+2)}$. Et

$$\chi = \frac{r+3}{3\beta - 2(N+2)}\ \frac{K\ v}{\omega} = \frac{||v||^2+3}{3\beta - 2(N+2)}\ \frac{K\ v}{\omega}.$$

□

Deuxième partie

Modèles d'agrégation en dynamique de populations

Chapitre 2

Global existence of solutions to a parabolic-elliptic chemotaxis system with critical degenerate diffusion

Ce chapitre est indépendant du chapitre 1. Il est rédigé sous forme d'un article et a été soumis à la revue : Journal of mathematical analysis and applications. Il est donc écrit en anglais et il est la version préliminaire de [57].

Global existence of solutions to a parabolic-elliptic chemotaxis system with critical degenerate diffusion

Elissar Nasreddine

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse, F–31062 Toulouse cedex 9, France

e-mail : elissar.nasreddine@math.univ-toulouse.fr

28 juin 2013

Abstract This paper is devoted to the analysis of non-negative solutions for a degenerate parabolic-elliptic Patlak-Keller-Segel system with critical nonlinear diffusion in a bounded domain with homogeneous Neumann boundary conditions. Our aim is to prove the existence of a global weak solution under a smallness condition on the mass of the initial data, there by completing previous results on finite blow-up for large masses. Under some higher regularity condition on solutions, the uniqueness of solutions is proved by using a classical duality technique.

Keywords : Chemotaxis ; Keller-Segel model ; Parabolic equation ; Elliptic equation ; Global existence ; Uniqueness.

2.1 Introduction

Chemotaxis is the movement of biological organisms oriented towards the gradient of some substance, called the chemoattractant. The Patlak-Keller-Segel (PKS) model (see [13], [12] and [17]) has been introduced in order to explain chemotaxis cell aggregation by means of a coupled system of two equations : a drift-diffusion type equation for the cell density u, and a reaction diffusion equation for the chemoattractant concentration φ. It reads

$$(PKS)\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div}(\nabla u^m - u \cdot \nabla\varphi) & x \in \Omega, t > 0, \\ -\Delta\varphi = u - < u > & x \in \Omega, t > 0, \\ < \varphi(t) > = 0 & t > 0, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu \varphi = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is an open bounded domain, ν the outward unit normal vector to the boundary $\partial\Omega$ and $m \geq 1$. An important parameter in this model is the total mass M of cells, which is formally conserved through the evolution :

$$M =< u >= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)\ dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)\ dx. \tag{2.2}$$

Several studies have revealed that the dynamics of (2.1) depend sensitively on the parameters N, m and M. More precisely, if $N = 2$ and $m = 1$, it is well-known that the solutions of (2.1) may blow up in finite time if M is sufficiently large (see [16, 17]) while solutions are global in time for M sufficiently small [17], see also the survey articles [4, 10].

The situation is very different when $m = 1$ and $N \neq 2$. In fact, if $N = 1$, there is global existence of solutions of (2.1) whatever the value of the mass of initial data M, see [8] and the references therein. If $N \geq 3$, for all $M > 0$, there are initial data u_0 with mass M for which the corresponding solutions of (2.1) explode in finite time (see [16]). Thus, in dimension $N \geq 3$ and $m = 1$, the threshold phenomenon does not take place as in dimension 2, but we expect the same phenomenon when $N \geq 3$ and m is equal to the *critical* value $m = m_c = \frac{2(N-1)}{N}$. More precisely, we consider a more general version of (2.1) where the first equation of (2.1) is replaced by

$$\partial_t u = \mathrm{div}(\phi(u)\ \nabla u - u\ \nabla\varphi), \quad t > 0, \quad x \in \Omega,$$

and the diffusivity ϕ is a positive function in $C^1([0,\infty[)$ which does not grow to fast at infinity. In [8], the authors proved that there is a critical exponent such that, if the diffusion has a faster growth than the one given by this exponent, solutions to (2.1) (with $\phi(u)$ instead of mu^{m-1}) exist globally and are uniformly bounded, see also [6, 14] for $N = 2$. More precisely, the main results in [8] read as follows :

- If $\phi(u) \geq c(1+u)^p$ for all $u \geq 0$ and some $c > 0$ and $p > 1 - \frac{2}{N}$ then all solutions of (2.1) are global and bounded.
- If $\phi(u) \leq c(1+u)^p$ for all $u \geq 0$ and some $c > 0$ and $p < 1 - \frac{2}{N}$ then there exist initial data u_0 such that

$$\lim_{t\to T} ||u(.,t)||_\infty = \infty, \text{ for some finite T} > 0.$$

Except for $N = 2$, the critical case $m = \frac{2(N-1)}{N}$ is not covered by the analysis of [8]. Recently, Cieślak and Laurençot in [7] show that if $\phi(u) \leq c(1+u)^{1-\frac{2}{N}}$ and $N \geq 3$, there are solutions of (2.1) blowing up in finite time when M exceeds an explicit threshold. In order to prove that, when $N \geq 3$ and $m = \frac{2\ (N-1)}{N}$, we have a threshold phenomenon similar to dimension $N = 2$ with $m = 1$, it remains to show that solutions of (2.1) are global when M is small enough. The goal of this paper is to show that this is indeed true, see Theorem 2.2.2 below.

By combining Theorem 2.2.2 with the blow-up result obtained in [7], we conclude that, for $N \geq 3$ and $m = \frac{2(N-1)}{N}$, there exists $0 < M_1 \leq M_2 < \infty$ such that the solutions of (2.1) are global if the mass M of the initial data u_0 is in $[0, M_1)$, and may explode in finite time if $M > M_2$. An important open question is whether $M_1 = M_2$ when Ω is a ball in $\mathbb{R}^N$ and u_0 is a radially symmetric function. Notice that, in the radial case, this result is true when $N = 2$ and $m = 1$, and the threshold value of the mass for blow-up is $M_1 = M_2 = 8\pi$, see [6, 15, 16, 18]. Again, for $N = 2$ and $m = 1$, but for regular, connected and bounded domain, it has been shown that $M_1 = 4\pi = \frac{M_2}{2}$ (see [15, 16] and the references therein). Such a result does not seem to be known for $N \geq 3$ and $m = \frac{2(N-1)}{N}$.

Still, in the whole space $\Omega = \mathbb{R}^N$ when the equation for φ in (2.1) is replaced by the Poisson equation $\varphi = E_N * u$, with E_N being the Poisson kernel, it has been shown in [2, 3, 5, 9, 20, 21] that :

- When $N \geq 3$ and $1 \leq m < 2 - \frac{2}{N}$, this modified version of (2.1) has a global weak solution if $M = \|u_0\|_1$ is sufficiently small, while finite time blow-up occurs for some initial data with sufficiently large mass.
- When $N \geq 2$ and $m > 2 - \frac{2}{N}$, this modified version of (2.1) has a global weak solution whatever the value of M.
- When $N \geq 2$ and $m = 2 - \frac{2}{N}$, there is a threshold mass $M_c > 0$ such that solutions to this modified version of (2.1) exist globally if $M = \|u_0\|_1 \leq M_c$, and might blow up in finite time if $M > M_c$.

From now on, we assume that

$$N \geq 3 \quad \text{and} \quad m = \frac{2(N-1)}{N}.$$

2.2 Main Theorem

Throughout this paper , we deal with weak solutions of (2.1). Our definition of weak solutions now reads :

Definition 2.2.1. *Let $T \in (0;\infty]$. A pair (u, φ) of functions $u : \Omega \times [0, T) \longrightarrow [0, \infty)$, $\varphi : \Omega \times [0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ is called a weak solution of (2.1) in $\Omega \times [0, T)$ if*

- *$u \in L^\infty((0, T); L^\infty(\Omega))$; $u^m \in L^2((0, T); H^1(\Omega))$ and $< u >= M$.*
- *$\varphi \in L^2((0, T); H^1(\Omega))$ and $< \varphi >= 0$.*
- *(u, φ) satisfies the equation in the sense of distributions ; i.e,*

$$-\int_0^T \int_\Omega (\nabla u^m \cdot \nabla \psi - u \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - u\, \partial_t \psi)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega u_0(x)\ \psi(0, x)\ \mathrm{d}x,$$

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \; dxdt = \int_0^T \int_\Omega (u - M) \; \psi \; \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

for any continuously differentiable function $\psi \in C^1([0,T] \times \overline{\Omega})$ *with* $\psi(T) = 0$ *and* $T > 0$.

For $\varphi \in H^1(\Omega)$ satisfying $< \varphi >= 0$, we denote by C_s the Sobolev constant where

$$||\nabla\varphi||_2 \geq C_s ||\varphi||_{2^*}, \quad \text{where } 2^* = \frac{2N}{N-2}. \tag{2.3}$$

The main theorem gives the existence and uniqueness of a time global weak solution to (2.1) which corresponds to a degenerate version of the “Nagai model" for the semi-linear Keller-Segel system, when $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ and the initial data is assumed to be small.

Theorem 2.2.2. *Define*

$$M_* := \left(\frac{2 \; C_s^2}{(m-1) \; |\Omega|^{\frac{2}{N}}} \right)^{\frac{N}{2}}, \tag{2.4}$$

where C_s *is the Sobolev constant in* (3.25)*.*
Assume that u_0 *is nonnegative function in* $L^\infty(\Omega)$*, which satisfies*

$$||u_0||_1 < M_*. \tag{2.5}$$

Then the equation (2.1) *has a global weak solution* (u, φ) *in the sense of Definition* 3.2.1*. Moreover, if we assume that*

$$\varphi \in L^\infty((0,T); W^{2,\infty}(\Omega)) \tag{2.6}$$

for all $T > 0$ *then this solution is unique.*

In order to prove the previous theorem, we introduce the following approximated equations

$$(KS)_\delta \left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u_\delta &=& \mathrm{div}\,(\nabla(u_\delta + \delta)^m - u_\delta \nabla\varphi_\delta) & x \in \Omega, t > 0, \\ -\Delta\varphi_\delta &=& u_\delta - < u_\delta > & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_\nu u_\delta = \partial_\nu \varphi_\delta &=& 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u_\delta(0,x) &=& u_0(x) & x \in \Omega, \end{array} \right.$$

where $\delta \in (0,1)$, and we show that under a smallness condition on the mass of initial data, the Liapunov function

$$L_\delta(u,\varphi) = \int_\Omega (b_\delta(u) + \frac{1}{2}|\nabla\varphi_\delta|^2 - u_\delta \; \varphi_\delta) \; \mathrm{d}x,$$

yields the L^m bound of $u_\delta(t)$ independent of δ. Then using Gagliardo-Nirenberg and Poincaré inequalities, we obtain for $p > m$, the L^p bound for $u_\delta(t)$ independent of δ. As a consequence of Sobolev embedding theorem, we improve the regularity of φ_δ. And thus, under the same assumptions on the initial data, Moser's iteration technique yields the uniform bound of u_δ. Then, thanks to the local well-posedness result [8, Theorem 3.1] we obtain the existence of a global solution of $(KS)_\delta$. The existence of solutions stated in Theorem 2.2.2 is then proved using a compactness method; for that purpose we show an additional estimate on $\partial_t u_\delta^m$ which, together with the already derived estimates, guarantees the compactness in space and time of the family $(u_\delta)_{\delta\in(0,1)}$. Finally, in the presence of nonlinear diffusion and under some additional regularity assumption on φ_δ, we prove the uniqueness using a classical duality technique.

2.3 Approximated Equations

The first equation of (2.1) is a quasilinear parabolic equation of degenerate type. Therefore, we cannot expect the system (2.1) to have a classical solution at the point where u vanishes. In order to prove Theorem 2.2.2, we use a compactness method and introduce the following approximated equations of (KS) :

$$(KS)_\delta \begin{cases} \partial_t u_\delta &= \operatorname{div}\left(\nabla(u_\delta+\delta)^m - u_\delta\nabla\varphi_\delta\right) \quad x\in\Omega, t>0, \\ -\Delta\varphi_\delta &= u_\delta - <u_\delta> \quad x\in\Omega, t>0, \\ \partial_\nu u_\delta = \partial_\nu\varphi_\delta &= 0 \quad x\in\partial\Omega, t>0, \\ u_\delta(0,x) &= u_0(x) \quad x\in\Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

where $\delta\in(0,1)$.
The main purpose of this section is to construct the time global strong solution of (2.7).

2.3.1 Existence of global strong solution of $(KS)_\delta$

Theorem 2.3.1. *For $\delta\in(0,1)$ and $T>0$, we consider an initial condition $u_0\in L^\infty(\Omega)$, $u_0\geq 0$ and such that $||u_0||_1 < M_*$ where M_* is defined in (2.4). Then $(KS)_\delta$ has a global strong solution $(u_\delta,\varphi_\delta)$ which is bounded in $L^\infty((0,T)\times\Omega)$ for all $T>0$ uniformly with respect to $\delta\in(0,1)$.*

The starting point of the proof of Theorem 2.3.1 is the following local well-posedness result [8, Theorem 1.3] :

Lemma 2.3.2. *Let the same assumptions as that in Theorem 2.3.1 hold. There exists a maximal existence time $T^\delta_{max}\in(0,\infty]$ and a unique solution $(u_\delta,\varphi_\delta)$ of $(KS)_\delta$ in $[0,T^\delta_{max})\times\Omega$. Moreover,*

$$\text{if } T^\delta_{max}<\infty \text{ then } \lim_{t\to T^\delta_{max}} ||u_\delta(t,.)||_\infty = \infty.$$

In addition $< u_\delta(t) > = < u_0 > = M$ *for all* $t \in [0, T^\delta_{\max})$.

To prove Theorem 2.3.1 we need to prove some lemmas which control L^m norm, L^p norm and L^∞ norm of the solution u_δ of (2.7).

2.3.2 L^p -estimates, $1 \leq p \leq \infty$.

Our goal is to show that if $||u_0||_1$ is small enough then all solutions are global in time and uniformly bounded.

Let us first prove the L^m bound for u_δ.

Lemma 2.3.3. *Let the same assumptions as that in Theorem 2.3.1 hold and* $(u_\delta, \varphi_\delta)$ *be the nonnegative maximal solution of* $(KS)_\delta$. *Then,* u_δ *satisfies the following estimate*

$$||u_\delta(t)||_m \leq C_0, \text{ for all } t \in [0, T^\delta_{\max})$$

and $||u_\delta(t)||_1 = ||u_0||_1$ *where* C_0 *is a constant independent of* T^δ_{max} *and* δ.

Démonstration. In this proof, the solution to equation (2.7) should be denoted by $(u_\delta, \varphi_\delta)$ but for simplicity we drop the index.
Let us define the functional L_δ by

$$L_\delta(u, \varphi) = \int_\Omega (b_\delta(u) + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - u\ \varphi)\ dx,$$

where

$$b_\delta(u) := \int_1^u \int_1^z \frac{m(\sigma+\delta)^{m-1}}{\sigma}\ d\sigma\ dz,$$

such that $b_\delta(1) = b'_\delta(1) = 0$ and $b(u) \geq 0$. According to [11] it is a Liapunov functional for $(KS)_\delta$. Indeed,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L_\delta(u(t), \varphi(t)) &= \int_\Omega b'_\delta(u)\ \partial_t u\ dx - \int_\Omega \Delta\varphi\ \partial_t\varphi\ dx - \int_\Omega \partial_t u\ \varphi\ dx - \int_\Omega u\ \partial_t\varphi\ dx \\
&= \int_\Omega \partial_t u\ (b'_\delta(u) - \varphi)\ dx - \int_\Omega (\Delta\varphi + u)\ \partial_t\varphi\ dx \\
&= \int_\Omega \operatorname{div}\left(m\ (u+\delta)^{m-1}\ \nabla u - u\ \nabla\varphi\right)\ (b'_\delta(u) - \varphi)\ dx - \int_\Omega < u(t) >\ \partial_t\varphi\ dx \\
&= -\int_\Omega (m\ (u+\delta)^{m-1}\ \nabla u - u\ \nabla\varphi)\ (b''_\delta(u)\ \nabla u - \nabla\varphi)\ dx - M\ \frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi\ dx \\
&= -\int_\Omega u\ (b''_\delta(u)\ \nabla u - \nabla\varphi)^2\ dx \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Then, we can conclude that for all $t \in [0, T^\delta_{max})$ we have $L_\delta(u(t), \varphi(t)) \leq L_\delta(u_0, \varphi_0)$. Using Sobolev inequality (2.3), Hölder inequality, and Young inequality we obtain

$$\int_\Omega u\ \varphi\ dx \leq ||\varphi||_{2^*}\ ||u||_{\frac{2N}{N+2}} \leq C_s^{-1} ||\nabla\varphi||_2\ ||u||_{\frac{2N}{N+2}} \leq \frac{1}{2}||\nabla\varphi||_2^2 + \frac{C_s^{-2}}{2}||u||^2_{\frac{2N}{N+2}}.$$

Since $\frac{2\ N}{N+2} < m$, and using interpolation inequality we get,

$$||u||_{\frac{2N}{N+2}} \leq ||u||_1^{\frac{1}{N}}\ ||u||_m^{\frac{N-1}{N}} \leq M^{\frac{1}{N}}\ |\Omega|^{\frac{1}{N}}\ ||u||_m^{\frac{m}{2}}.$$

Then,

$$\int_\Omega u\ \varphi\ \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}||\nabla\varphi||_2^2 + \frac{C_s^{-2}}{2}\ M^{\frac{2}{N}}\ |\Omega|^{\frac{2}{N}}\ ||u||_m^m.$$

Substituting this into the Liapunov functional, we find :

$$\begin{aligned} L_\delta(u,\varphi) &\geq \int_\Omega (b_\delta(u) + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2)\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2}||\nabla\varphi||_2^2 - \frac{C_s^{-2}}{2}\ M^{\frac{2}{N}}\ |\Omega|^{\frac{2}{N}}\ ||u||_m^m \\ &\geq \int_\Omega b_\delta(u)\ \mathrm{d}x - \frac{C_s^{-2}}{2}\ M^{\frac{2}{N}}\ |\Omega|^{\frac{2}{N}}\ ||u||_m^m. \end{aligned}$$

We next observe that :

$$\begin{aligned} b_\delta(u) &= m\int_1^u \int_1^z \frac{(\delta+s)^{m-1}}{s}\ dsdz \geq m\int_1^u\int_1^z s^{m-2}\ dsdz \\ &\geq \frac{u^m}{m-1} - \frac{m}{m-1}u + 1 \geq \frac{u^m}{m-1} - \frac{m}{m-1}u. \end{aligned}$$

Then :

$$\begin{aligned} L_\delta(u,\varphi) &\geq \frac{1}{m-1}\ ||u||_m^m - \frac{C_s^{-2}}{2}\ |\Omega|^{\frac{2}{N}}\ M^{\frac{2}{N}}\ ||u||_m^m - \frac{m}{m-1}\ M\ |\Omega| \\ &= \left(\frac{1}{m-1} - \frac{C_s^{-2}}{2}\ M^{\frac{2}{N}}\ |\Omega|^{\frac{2}{N}}\right)\ ||u||_m^m - \frac{m}{m-1}\ M\ |\Omega|. \end{aligned}$$

Let us define ω_M by

$$\omega_M := \frac{1}{m-1} - \frac{C_s^{-2}}{2}\ M^{\frac{2}{N}}\ |\Omega|^{\frac{2}{N}} = \frac{|\Omega|^{\frac{2}{N}}}{2\ C_s^2}\ (M_*^{\frac{2}{N}} - M^{\frac{2}{N}}).$$

Since $M = ||u_0||_1 < M_*$, then ω_M is positive. Finally we get,

$$L_\delta(u_0,\varphi_0) + \frac{m}{m-1}\ M\ |\Omega| \geq L_\delta(u(t),\varphi(t)) + \frac{m}{m-1}\ M\ |\Omega| \geq \omega_M\ ||u(t)||_m^m \text{ for } t \in [0, T^\delta_{max}).$$

In addition, we can see that $L_\delta(u_0,\varphi_0) \leq C$ where C is independent of $\delta \in (0,1)$. In fact,

$$L_\delta(u_0,\varphi_0) = \int_\Omega (b_\delta(u_0) + \frac{1}{2}|\nabla\varphi_0|^2 - u_0\ \varphi_0)\ \mathrm{d}x,$$

and, since $(\delta+s)^{m-1} \leq \delta^{m-1}+s^{m-1} \leq 1+s^{m-1}$ we obtain

$$b_\delta(u_0) = m\int_1^{u_0}\int_1^z \frac{(\delta+s)^{m-1}}{s}\,dsdz \leq m\int_1^{u_0}\int_1^z \frac{1+s^{m-1}}{s}\,dsdz$$
$$\leq m(u_0\ln u_0 - u_0+1) + \frac{m}{m-1}\left(\frac{u_0^m}{m} - u_0 + 1\right).$$

Using Young inequality we get

$$L_\delta(u_0,\varphi_0) \leq m\ ||u_0||_2^2 + m\ |\Omega| + \frac{||u_0||_m^m}{m-1} + \frac{m\ |\Omega|}{m-1} + \frac{1}{2}||\nabla\varphi_0||_2^2 + \frac{1}{2}||u_0||_2^2 + \frac{1}{2}||\varphi_0||_2^2.$$

since $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ and $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ we get $L_\delta(u_0,\varphi_0) \leq C$ where C is independent of δ and the proof of the lemma is complete. □

Thanks to Lemma 2.3.3, let us now show that for all $p > m$ the L^p bound for u_δ.

Lemma 2.3.4. *Let the same assumptions as that in Theorem 2.3.1 hold. Then for all $T > 0$ and all $p \in (1,\infty)$ there exists $C(p,T)$ independent on δ such that, for all $t \in [0,T^\delta_{\max}) \cap [0,T]$, the solution $(u_\delta,\varphi_\delta)$ to $(KS)_\delta$ satisfies*

$$||u_\delta(t)||_p \leq C(p,T), \tag{2.8}$$

and

$$\int_0^t\int_\Omega (\delta+u_\delta)^{m-1}\ u_\delta^{p-2}\ |\nabla u_\delta|^2\ dxds \leq C(p,T). \tag{2.9}$$

To prove the previous lemma we need the following preliminary result [20].

Lemma 2.3.5. *Consider $0 < q_1 < q_2 \leq 2^*$. There is C_1 depending only on N such that*

$$||u||_{q_2} \leq C_1^\theta\ ||u||^\theta_{H^1(\Omega)}\ ||u||_{q_1}^{1-\theta},\ \text{ for } u \in H^1(\Omega), \tag{2.10}$$

with

$$\theta = \frac{2N\ (q_2-q_1)}{q_2[(N+2)q_1 + 2N(1-q_1)]} \in [0,1].$$

Démonstration. For $u \in H^1(\Omega)$ we have by Sobolev inequality

$$||u||_{2^*} \leq C_N ||u||_{H^1}. \tag{2.11}$$

By interpolation inequality we have for $0 < q_1 < q_2 \leq 2^*$

$$||u||_{q_2} \leq ||u||^\theta_{2^*}\ ||u||^{1-\theta}_{q_1}, \tag{2.12}$$

where $\frac{1}{q_2} = \frac{\theta(N-2)}{2N} + \frac{1-\theta}{q_1}$. Hence, substitute (2.11) into (2.12) and the lemma is proved. □

Now, we recall the following generalized Poincaré inequality.

Lemma 2.3.6. *For $u \in H^1(\Omega)$ we have for $0 < q_1 \leq 1$ the following inequality*

$$||u||_{H^1}^2 \leq C_2(q_1)\ (||\nabla u||_2^2 + ||u||_{q_1}^2),$$

where C_2 depends only on Ω and q_1.

Now using the last two lemmas, let us prove Lemma 2.3.4.

Démonstration. In this proof, the solution to equation (2.7) should be denoted by $(u_\delta, \varphi_\delta)$ but for simplicity we drop the index.
We choose $p > 1$, $K \geq 0$ and we multiply the first equation in (2.7) by $(u-K)_+^{p-1}$ and integrate by parts using the boundary conditions for u and φ to see that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}||(u-K)_+||_p^p &= -m(p-1)\int_\Omega (\delta+u)^{m-1}\ (u-K)_+^{p-2}\ |\nabla u|^2\ \mathrm{d}x \\
&+ (p-1)\int_\Omega u\ \nabla\varphi\ (u-K)_+^{p-2}\cdot\nabla u\ \mathrm{d}x \\
&= -m(p-1)\int_\Omega (\delta+u-K+K)^{m-1}\ (u-K)_+^{p-2}\ |\nabla u|^2\ \mathrm{d}x \\
&+ (p-1)\int_\Omega (u-K+K)\ \nabla\varphi\cdot(u-K)_+^{p-2}\ \nabla u\ \mathrm{d}x \\
&\leq -m(p-1)\int_\Omega (u+\delta-K)^{m-1}\ (u-K)_+^{p-2}\ |\nabla u|^2\ \mathrm{d}x \\
&+ (p-1)\int_\Omega (u-K)_+^{p-1}\ \nabla\varphi\cdot\nabla u\ \mathrm{d}x + (p-1)K\int_\Omega \nabla\varphi\ (u-K)_+^{p-2}\cdot\nabla u\ \mathrm{d}x \\
&\leq -m(p-1)\int_\Omega (u+\delta-K)^{m-1}\ (u-K)_+^{p-2}\ |\nabla u|^2\ \mathrm{d}x \\
&- \frac{p-1}{p}\int_\Omega (u-K)_+^p\ \Delta\varphi\ \mathrm{d}x - K\int_\Omega (u-K)_+^{p-1}\ \Delta\varphi\ \mathrm{d}x \\
&\leq -m(p-1)\int_\Omega (u+\delta-K)^{m-1}\ (u-K)_+^{p-2}\ |\nabla u|^2\ \mathrm{d}x + (I),
\end{aligned}$$

where, thanks to the second equation in (2.7),

$$\begin{aligned}
(I) &= \frac{p-1}{p}\int_\Omega (u-K)_+^p\ (u-M)\ \mathrm{d}x + K\int_\Omega (u-K)_+^{p-1}\ (u-M)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{p-1}{p}||(u-K)_+||_{p+1}^{p+1} + \frac{p-1}{p}(K-M)||(u-K)_+||_p^p \\
&+ K||(u-K)_+||_p^p + K(K-M)||(u-K)_+||_{p-1}^{p-1} \\
&\leq K^2\ ||(u-K)_+||_{p-1}^{p-1} + 2K\ ||(u-K)_+||_p^p + ||(u-K)_+||_{p+1}^{p+1}.
\end{aligned}$$

Since for $a > 0$ and $b > 0$ we have $a^{p-1}b \leq a^{p+1} + b^{\frac{p+1}{2}}$ and $a^p b \leq a^{p+1} + b^{p+1}$ then,

$$(I) \quad \leq \quad 3||(u-K)_+||_{p+1}^{p+1} + (2K)^{p+1} + K^{p+1}, \tag{2.13}$$

and we get

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}||(u-K)_+||_p^p \quad &\leq \quad -m(p-1)\int_\Omega (u+\delta-K)^{m-1}\ (u-K)_+^{p-2}\ |\nabla u|^2\ \mathrm{d}x \\ &+ \quad 3p||(u-K)_+||_{p+1}^{p+1} + C_p\ K^{p+1}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

for all $t \in [0, T_{\max}^\delta)$.
The term $||(u-K)_+||_{p+1}^{p+1}$ can be estimated with the help of Lemma 2.3.5 and Lemma 2.3.6. Assuming now that $p > 2$ we remark that $0 < \frac{2}{p+m-1} \leq 1$ and $1 < \frac{2(p+1)}{p+m-1} = \frac{2N}{N-2}\ \frac{1+p}{1+\frac{Np}{N-2}} \leq \frac{2N}{N-2}$, then thanks to Lemma 2.3.5 and Lemma 2.3.6 we obtain

$$\begin{aligned} ||(u-K)_+^{\frac{p+m-1}{2}}||_{\frac{2(p+1)}{p+m-1}}^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}} \quad &\leq \quad C(p)\ \left(||\nabla (u-K)_+^{\frac{p+m-1}{2}}||_2^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}\theta}\ ||(u-K)_+^{\frac{p+m-1}{2}}||_{\frac{2}{p+m-1}}^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}(1-\theta)} \right. \\ &+ \quad \left. ||(u-K)_+^{\frac{p+m-1}{2}}||_{\frac{2}{p+m-1}}^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}} \right), \end{aligned} \tag{2.15}$$

where

$$\theta = \frac{p+m-1}{p+1} \quad \in (0,1). \tag{2.16}$$

Since

$$||(u-K)_+^{\frac{p+m-1}{2}}||_{\frac{2(p+1)}{p+m-1}}^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}} = \int_\Omega (u-K)_+^{p+1}\ \mathrm{d}x = ||(u-K)_+||_{p+1}^{p+1}, \tag{2.17}$$

$$||(u-K)_+^{\frac{p+m-1}{2}}||_{\frac{2}{p+m-1}}^{\frac{2(p+1)}{p+m-1}(1-\theta)} = \left(\int_\Omega (u-K)_+\ \mathrm{d}x \right)^{(p+1)(1-\theta)} = ||(u-K)_+||_1^{\frac{2}{N}}, \tag{2.18}$$

and by Lemma 2.3.3

$$||(u-K)_+||_1 = \int_{u\geq K} (u-K)\ \mathrm{d}x \leq \frac{1}{K^{m-1}} \int_{u\geq K} K^{m-1}\ u\ dx \leq \frac{||u||_m^m}{K^{m-1}} \leq \frac{C_0^m}{K^{m-1}}, \tag{2.19}$$

we substitute (2.17), (2.18) and (2.19) into (2.15) and obtain

$$||(u-K)_+||_{p+1}^{p+1} \leq C_3(p) \left\{ ||\nabla (u-K)_+^{\frac{m+p-1}{2}}||_2^2\ K^{\frac{-2(m-1)}{N}} + K^{-(m-1)(p+1)} \right\}. \tag{2.20}$$

We may choose $K = K_*$ large enough such that

$$3\ p\ C_3(p)\ K_*^{\frac{-2(m-1)}{N}} \leq \frac{2\ p\ (p-1)\ m}{(m+p-1)^2},$$

Hence

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}||(u-K_*)_+||_p^p \leq C(p)\ K_*^{p+1},$$

so that

$$||(u(t)-K_*)_+||_p^p \leq C(p)\ t + ||u_0||_p^p,\ \text{ for } t \in [0, T_{\max}^{\delta}).$$

As

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^p\ \mathrm{d}x &\leq \int_{u<2K_*} (2\ K_*)^{p-1}\ |u|\ \mathrm{d}x + \int_{u\geq 2K_*} |u-K_*+K_*|^p\ \mathrm{d}x \\
&\leq (2K_*)^{p-1}\ M + \int_{u\geq 2K_*} (2\ |u-K_*|)^p\ \mathrm{d}x, \\
&\leq (2K_*)^{p-1}\ M + 2^p\ ||(u-K_*)_+||_p^p,
\end{aligned}$$

the previous inequality warrants that

$$||u(t)||_p \leq C(p,T), \quad t \in [0, T_{\max}) \cap [0,T], \tag{2.21}$$

where $C(p,T)$ is a constant independent of δ.

We next take $K=0$ in (2.14), integrate with respect to time and use (2.8) to obtain (2.9). ☐

Thanks to Lemma 2.3.4, we can improve the regularity of φ_δ.

Lemma 2.3.7. *Let the same assumptions as that in Theorem 2.3.1 hold, the solution φ_δ satisfies*

$$||\nabla\varphi_\delta(t)||_\infty \leq L(T),\ t \in [0, T_{\max}^{\delta}) \cap [0,T]$$

where $T>0$ and L is a positive constant independent of δ.

Démonstration. Using standard elliptic regularity estimates for φ_δ, we infer from Lemma 2.3.4 that given $T>0$, and $p \in (1,\infty)$, there is $C(p,T)$ such that

$$||\varphi_\delta(t)||_{W^{2,p}} \leq C(p)\ ||u_\delta(t)||_p \leq C(p,T),\ \text{ for } t \in [0, T_{\max}) \cap [0,T].$$

Lemma 2.3.7 then readily follows from Sobolev embedding theorem upon choosing $p > N$. ☐

Lemma 2.3.8. *Let $N \geq 3$, $r \geq 4$, $u \in L^{\frac{r}{4}}(\Omega)$, and $u^{\frac{r+m-1}{2}} \in H^1(\Omega)$. Then it holds that*

$$||u||_r \leq C_1^{\frac{2\theta}{r+m-1}}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^{1-\theta}\ ||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{H^1}^{\frac{2\theta}{r+m-1}} \tag{2.22}$$

with

$$\theta = \frac{3\ N(r+m-1)}{(3N+2)r+4N(m-1)} \ \in (0,1). \tag{2.23}$$

Démonstration. For $r \geq 4$, we can see that

$$||u||_r = \left(\int_\Omega (u^{\frac{r+m-1}{2}})^{\frac{2r}{r+m-1}} \ dx \right)^{\frac{1}{r}} = ||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{\frac{2r}{r+m-1}}^{\frac{2}{r+m-1}},$$

and

$$\frac{r}{2(r+m-1)} < 1 < \frac{2r}{r+m-1} < 2 < \frac{2N}{N-2}.$$

By Lemma 2.3.5,

$$||u||_r = ||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{\frac{2r}{r+m-1}}^{\frac{2}{r+m-1}} \leq \left(C_1^\theta \ ||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{H^1(\Omega)}^\theta \ ||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{\frac{r}{2(r+m-1)}}^{1-\theta} \right)^{\frac{2}{r+m-1}}$$

and

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2N \ (\frac{2r}{r+m-1} - \frac{r}{2 \ (r+m-1)})}{\frac{2r}{r+m-1} \ \left(2N(1 - \frac{r}{2(r+m-1)}) + (N+2) \ \frac{r}{2 \ (r+m-1)} \right)} \\ &= \frac{3N \ (r+m-1)}{(3N+2) \ r + 4N \ (m-1)} \in (0,1). \end{aligned}$$

In addition, we have

$$||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{\frac{r}{2(r+m-1)}} = \left(\int_\Omega |u|^{\frac{r+m-1}{2} \ \frac{r}{2(r+m-1)}} \ dx \right)^{\frac{2(r+m-1)}{r}} = ||u||_{\frac{r}{4}}^{\frac{r+m-1}{2}},$$

and we obtain (2.22). □

We are now in a position to prove the uniform $L^\infty(\Omega)$ bound for u_δ.

Lemma 2.3.9. *Let the same assumptions as that in Theorem 2.3.1 hold, and $(u_\delta, \varphi_\delta)$ be the nonnegative maximal solution of (2.7). For all $T > 0$, there is $C_\infty(T)$ such that*

$$||u_\delta(t)||_\infty \leq C_\infty(T), \text{ for all } t \in [0, T_{\max}^\delta) \cap [0, T],$$

where $C_\infty(T)$ is a positive constant independent on δ.

Démonstration. In this proof we omit the index δ, and we employ Moser's iteration technique developed in [1, 21] to show the uniform norm bound for u.
We multiply the first equation in (2.7) by u^{r-1}, where $r \geq 4$, and integrate it over Ω.

Then, we have

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{||u||_r^r}{r} &= -\int_\Omega (\nabla(u+\delta)^m - u\ \nabla\varphi)\cdot\nabla u^{r-1}\ \mathrm{d}x \\
&= -m(r-1)\int_\Omega (u+\delta)^{m-1}\ u^{r-2}\ |\nabla u|^2\ \mathrm{d}x + (r-1)\int_\Omega u^{r-1}\ \nabla\varphi\cdot\nabla u\ \mathrm{d}x \\
&\leq -m(r-1)\int_\Omega u^{m+r-3}\ |\nabla u|^2\ \mathrm{d}x + (r-1)\int_\Omega u^{r-1}\ \nabla\varphi\cdot\nabla u\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

By Young's inequality and Lemma 2.3.7,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_r^r &\leq \frac{-4m(r-1)}{(r+m-1)^2}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{r+m-1}{2}}|^2\ \mathrm{d}x + \frac{2(r-1)\ ||\nabla\varphi||_\infty}{(r+m-1)}\int_\Omega u^{\frac{r-m+1}{2}}\ |\nabla u^{\frac{r+m-1}{2}}|\ \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{-2m(r-1)}{(r+m-1)^2}||\nabla u^{\frac{r+m-1}{2}}||_2^2 + \frac{r-1}{2m}||\nabla\varphi||_\infty^2\int_\Omega u^{r-m+1}\ \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{-2m(r-1)}{(r+m-1)^2}||\nabla u^{\frac{r+m-1}{2}}||_2^2 + C(T)\ r\ \int_\Omega u^{r-m+1}\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Using Hölder and Young inequalities and Lemma 2.3.3 we obtain

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_r^r &\leq \frac{-2m\ (r-1)}{(r+m-1)^2}||\nabla u^{\frac{r+m-1}{2}}||_2^2 + r\ C(T)\ ||u||_1^{\frac{m-1}{r-1}}\ ||u||_r^{\frac{r(r-m)}{r-1}} \\
&\leq \frac{-2m\ (r-1)}{(r+m-1)^2}||\nabla u^{\frac{r+m-1}{2}}||_2^2 + C^r + r^2||u||_r^r, \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

where we have used that $r^{\frac{r-1}{r-m}} \leq r^2$ for $r \geq 4$.
By Lemma 2.3.8, we have for $r \geq 4$

$$
||u||_r^r \leq C_1^{\frac{2\ r\ \theta}{r+m-1}}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^{r(1-\theta)}\ ||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{H^1}^{\frac{2\ r\ \theta}{r+m-1}}, \qquad (2.25)
$$

where

$$
\theta = \frac{3\ N(r+m-1)}{(3N+2)r+4N(m-1)} < 1.
$$

Therefore, Young inequality and (2.25) yield that

$$
\begin{aligned}
2\ r^2\ ||u||_r^r &\leq 2\ r^2\ C_1^{\frac{2\ r\ \theta}{r+m-1}}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^{r(1-\theta)}||\ u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{H^1}^{\frac{2\ r\ \theta}{r+m-1}} \\
&\leq \frac{\theta\ r}{r+m-1}\ \frac{m\ (r-1)}{(r+m-1)^2}\ \frac{r+m-1}{\theta\ r\ C_2(1)}\ ||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{H^1}^2 \\
&+ \frac{r+m-1-\theta r}{r+m-1}\left(C_2(1)\ \frac{\theta(r+m-1)r}{m(r-1)}\right)^{\frac{\theta r}{r(1-\theta)+m-1}} \\
&\times\ (2\ r^2)^{\frac{(r+m-1)}{r(1-\theta)+m-1}}\ C_1^{\frac{2\ \theta r}{r(1-\theta)+m-1}}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^{(1-\theta)r\frac{(r+m-1)}{r(1-\theta)+m-1}},
\end{aligned}
$$

where $C_2(1)$ is the Poincaré constant defined in Lemma 2.3.6 Then we obtain

$$\begin{aligned} 2\ r^2\ ||u||_r^r &\leq \frac{m\ (r-1)}{C_2(1)\ (r+m-1)^2}||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{H^1}^2 \\ &+ C_1^{\frac{\theta\ r}{r(1-\theta)+m-1}}\ 2^{\frac{(r+m-1)}{r(1-\theta)+m-1}}\ r^{\frac{2(r+m-1)+\theta r}{r(1-\theta)+m-1}}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^{\frac{(1-\theta)r(r+m-1)}{r(1-\theta)+m-1}}. \end{aligned}$$

Now, since $N>2$, which gives $4N \geq 3N+2$, we find the following upper bound for θ

$$\theta \leq \frac{3N}{3N+2} \tag{2.26}$$

In addition,

$$\frac{\theta\ r}{r(1-\theta)+m-1} \leq \frac{\theta}{1-\theta} = -1 + \frac{1}{1-\theta} \leq \frac{3N}{2}, \tag{2.27}$$

$$\frac{r+m-1}{r(1-\theta)+m-1} \leq \frac{r+m-1}{(1-\theta)(r+m-1)} \leq \frac{1}{1-\theta} \leq \frac{3N+2}{2}, \tag{2.28}$$

and

$$\frac{2(r+m-1)+\theta r}{r(1-\theta)+m-1} \leq \frac{2+\theta}{1-\theta} \leq 9N+4. \tag{2.29}$$

As $C_1 \geq 1$ and $r \geq 1$, we get

$$2\ r^2\ ||u||_r^r \leq \frac{m\ (r-1)}{C_2(1)\ (r+m-1)^2}||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{H^1}^2 + C\ r^{9N+4}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^{\frac{(1-\theta)r(r+m-1)}{r(1-\theta)+m-1}}. \tag{2.30}$$

Using Lemma 2.3.6 we have

$$||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_{H^1}^2 \leq C_2(1)\ \left(||\nabla u^{\frac{r+m-1}{2}}||_2^2 + ||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_1^2\right). \tag{2.31}$$

Using Hölder inequality, Young inequality and Lemma 2.3.3, we get

$$||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_1^2 = ||u||_{\frac{r+m-1}{2}}^{r+m-1} \leq ||u||_r^{r\ \frac{r+m-3}{r-1}}\ ||u||_1^{\frac{r-m+1}{r-1}} \leq ||u||_r^{r\ \frac{r+m-3}{r-1}}\ ||u_0||_1^{\frac{r-m+1}{r-1}},$$

then,

$$\begin{aligned} \frac{m\ (r-1)}{(r+m-1)^2}||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_1^2 &\leq (r-1)^{\frac{r-1}{r+m-3}}\ \frac{r+m-3}{r-1}\ ||u||_r^r \\ &+ \frac{2-m}{r-1}\left(\frac{m}{(r+m-1)^2}||u_0||_1^{\frac{r+m-1}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{2-m}} \\ &\leq r^2||u||_r^r + \left(\frac{m}{(r+m-1)^2}\ ||u_0||_1^{\frac{r+m-1}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{2-m}} \\ &\leq r^2||u||_r^r + C_4^r. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Now substituting (2.32) and (2.31) into (2.30) we get

$$\begin{aligned} 2\ r^2\ ||u||_r^r &\leq \frac{m\ (r-1)}{(r+m-1)^2}\ \left(||\nabla u^{\frac{r+m-1}{2}}||_2^2 + ||u^{\frac{r+m-1}{2}}||_1^2\right) + C\ r^{9N+4}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^{\frac{(1-\theta)r(r+m-1)}{r(1-\theta)+m-1}} \\ &\leq \frac{m\ (r-1)}{(r+m-1)^2}\ ||\nabla u^{\frac{r+m-1}{2}}||_2^2 + r^2||u||_r^r + C_4^r + C\ r^{9N+4}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^{\frac{(1-\theta)r(r+m-1)}{r(1-\theta)+m-1}}, \end{aligned}$$

hence

$$r^2\ ||u||_r^r \leq \frac{m\ (r-1)}{(r+m-1)^2}\ ||\nabla u^{\frac{r+m-1}{2}}||_2^2 + C_4^r + C\ r^{9N+4}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^{\frac{r\ (1-\theta)(r+m-1)}{r(1-\theta)+m-1}}.$$

We apply Young inequality again to the last term of the above inequality. It is easy to see that

$$\frac{2}{3N+2} \leq 1-\theta \leq \frac{(1-\theta)\ (r+m-1)}{r(1-\theta)+m-1} = \frac{(1-\theta)r + (1-\theta)(m-1)}{r(1-\theta)+m-1} < 1,$$

so that

$$r^2||u||_r^r \leq \frac{m\ (r-1)}{(r+m-1)^2}||\nabla u^{\frac{r+m-1}{2}}||_2^2 + C_4^r + 1 + \left(C\ r^{9N+4}\right)^{3N+1}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^r, \tag{2.33}$$

for any $r \in [4, \infty)$.

Substituting (2.33) into (2.24) we end up with

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}||u||_r^r \leq r\ C_4^r + r + r\ \left(C\ r^{9N+4}\right)^{3N+1}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^r \leq C_5^r + Cr^{\alpha}\ ||u||_{\frac{r}{4}}^r, \tag{2.34}$$

for any $r \in [4, \infty)$, where $\alpha = (9N+4)(3N+1)+1$. After integrating (2.34) from 0 to t, we obtain the L^r estimate for u as follows :

$$\sup_{0<t<T} ||u(t)||_r^r \leq ||u_0||_r^r + T\ C_5^r + C\ r^{\alpha}\ T\ \sup_{0<t<T} ||u(t)||_{\frac{r}{4}}^r. \tag{2.35}$$

Since

$$||u_0||_r \leq ||u_0||_{\infty}^{\frac{r-1}{r}}\ ||u_0||_1^{\frac{1}{r}} \leq C_6,$$

then

$$\sup_{0<t<T} ||u(t)||_r^r \leq C_7(T)\ r^{\alpha} \max\left\{C_6,\ \sup_{0<t<T}\ ||u(t)||_{\frac{r}{4}}\right\}^r, \tag{2.36}$$

and we obtain for $r \geq 4$

$$\sup_{0<t<T} ||u(t)||_r \leq C_7(T)^{\frac{1}{r}}\ r^{\frac{\alpha}{r}} \max\left\{C_6,\ \sup_{0<t<T}\ ||u(t)||_{\frac{r}{4}}\right\}. \tag{2.37}$$

We are now in a position to derive the claimed L^∞ estimate. To this end, we set

$$\alpha_p := \max\left\{C_6, \sup_{0<t<T} ||u(t)||_{4^p}\right\}$$

for $p \geq 0$. Then we take $r = 4^p$ with $p \geq 0$ in (2.37) which reads

$$\begin{aligned} \alpha_p &\leq 4^{\frac{\alpha}{4^p}p}\ C_7(T)^{\frac{1}{4^p}}\ \max\left\{C_6, \sup_{0<t<T} ||u(t)||_{4^{p-1}}\right\}, \\ &\leq 4^{\frac{\alpha}{2^p}}\ C_7(T)^{\frac{1}{4^p}}\ \alpha_{p-1} \end{aligned}$$

since $p \leq 2^p$ for $p \geq 1$. Arguing by induction we conclude that

$$\alpha_p \leq 4^{\alpha\sum_{k=1}^p 2^{-k}}\ C_7(T)^{\sum_{k=1}^p 4^{-k}}\ \alpha_0.$$

Then by using Lemma 2.3.3 we get

$$\sup_{0<t<T} ||u(t)||_{4^p} \leq 4^\alpha\ C_7(T)\ \alpha_0 \leq C_8(T).$$

Consequently, by letting p tend to ∞, we see that $u \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$ and

$$\sup_{0<t<T} ||u(t)||_\infty \leq C_8(T). \tag{2.38}$$

Since the right hand side is independent of δ, we have proved the lemma. □

Lemma 2.3.10. *Let the same assumptions as that in Theorem 2.3.1 hold, and $(u_\delta, \varphi_\delta)$ be the solution to (2.7). Then for all $T > 0$ there is $C_9(T)$ such that the solution u_δ satisfies the following derivation estimate*

$$\int_0^T ||\partial_t u_\delta^m||_{(W^{1,N+1})'}\ dt \leq C_9(T).$$

Démonstration. Consider $\psi \in W^{1,N+1}(\Omega)$ and $t \in (0,T)$, we have

$$\begin{aligned}
& \left| \int_\Omega m\ u_\delta^{m-1}(t)\ \partial_t u_\delta(t)\ \psi\ dx \right| \\
= & \ m \left| \int_\Omega \nabla(u_\delta^{m-1}\ \psi) \cdot (\nabla u_\delta^m - u_\delta\ \nabla\varphi_\delta)\ dx \right| \\
= & \ m \left| \int_\Omega (u_\delta^{m-1}\ \nabla\psi + \psi\ \nabla u_\delta^{m-1}) \cdot (\nabla u_\delta^m - u_\delta\ \nabla\varphi_\delta)\ dx \right| \\
\leq & \ m \int_\Omega \Big[u_\delta^{m-1}\ |\nabla u_\delta^m|\ |\nabla\psi| + u_\delta^m\ |\nabla\psi|\ |\nabla\varphi_\delta| \\
& + |\psi|\ m(m-1)\ u_\delta^{2m-3}\ |\nabla u_\delta|^2 + |\psi|(m-1)u_\delta^{m-1}\ |\nabla u_\delta|\ |\nabla\varphi_\delta| \Big]\ dx \\
\leq & \ m \Big[||u_\delta||_\infty^{m-1}\ ||\nabla u_\delta^m||_2\ ||\nabla\psi||_2 + ||\nabla\psi||_2\ ||u_\delta||_\infty^m ||\nabla\varphi_\delta||_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\
& + ||\psi||_\infty \frac{4m(m-1)}{(2m-1)^2} ||\nabla u_\delta^{m-\frac{1}{2}}||_2^2 + ||\psi||_2 \frac{m-1}{m} ||\nabla u_\delta^m||_2\ ||\nabla\varphi_\delta||_\infty \Big].
\end{aligned}$$

Using Lemma 2.3.8, Lemma 2.3.9, and the embedding of $W^{1,N+1}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$, we end up with

$$|< \partial_t u_\delta^m(t), \psi >| \leq C(T) \left(||\nabla u_\delta(t)^m||_2 + ||\nabla u_\delta^{m-\frac{1}{2}}(t)||_2^2 + 1 \right)\ ||\psi||_{W^{1,N+1}},$$

and a duality argument gives

$$||\partial_t u_\delta^m(t)||_{(W^{1,N+1})'} \leq C(T) \left(||\nabla u_\delta^m(t)||_2 + ||\nabla u_\delta^{m-\frac{1}{2}}(t)||_2^2 + 1 \right).$$

Integrating the above inequality over $(0,T)$ and using Lemma 2.3.4 with $p = 2$ and $p = m$ give Lemma 2.3.10. □

2.4 Proof of Theorem 2.2.2

2.4.1 Existence

In this section, we assume that u_0 is a nonnegative function in $L^\infty(\Omega)$ satisfying (2.5). For $\delta \in (0,1)$, $(u_\delta, \varphi_\delta)$ denotes the solution to $(KS)_\delta$ constructed in Section 3. To prove existence of a weak solution, we use a compactness method. For that purpose, we first study the compactness properties of $(u_\delta, \varphi_\delta)_\delta$.

Lemma 2.4.1. *There are functions u and φ and a sequence $(\delta_n)_{n\geq 1}$, $\delta_n \to 0$, such that, for all $T > 0$ and $p \in (1,\infty)$,*

$$u_{\delta_n} \longrightarrow u, \ \text{in } L^p((0,T)\times\Omega) \text{ as } \delta_n \to 0, \tag{2.39}$$

$$\varphi_{\delta_n} \longrightarrow \varphi, \text{ in } L^p((0,T);W^{2,p}(\Omega)) \text{ as } \delta_n \to 0. \tag{2.40}$$

In addition, $u \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$ *for all* $T>0$ *and is nonnegative.*

Démonstration. Thanks to Lemma 2.3.4 and Lemma 2.3.9, $(u_\delta^m)_\delta$ is bounded in $L^2((0,T);H^1(\Omega))$ while $(\partial_t u_\delta^m)_\delta$ is bounded in $L^1((0,T);(W^{1,N+1})'(\Omega))$ by Lemma 2.3.10.
Since $H^1(\Omega)$ is compactly embedded in $L^2(\Omega)$ and $L^2(\Omega)$ is continuously embedded in $(W^{1,N+1})'(\Omega)$, it follows from [19, corollary 4] that (u_δ^m) is compact in $L^2((0,T)\times\Omega)$ for all $T>0$. Since $r \longmapsto r^{\frac{1}{m}}$ is $\frac{1}{m}$-Hölder continuous, it is easy to check that the previous compactness property implies that (u_δ) is compact in $L^{2m}((0,T)\times\Omega)$ for all $T>0$. There are thus a function $u \in L^{2m}((0,T)\times\Omega)$ for all $T>0$ and a sequence $(\delta_n)_{n\geq 1}$ such that

$$u_{\delta_n} \longrightarrow u \text{ in } L^{2m}((0,T)\times\Omega) \text{ as } \delta_n \to 0, \tag{2.41}$$

for all $T>0$, owing to Lemma 2.3.9, we may also assume that

$$u_{\delta_n} \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } L^\infty((0,T)\times\Omega) \text{ as } \delta_n \to 0. \tag{2.42}$$

for all $T>0$. It readily follows from (2.41) and (2.42), and Hölder inequality that (2.39) holds true. Since elliptic regularity ensure that

$$||\varphi_{\delta_k} - \varphi_{\delta_n}||_{W^{2,p}} \leq C(p)\ ||u_{\delta_k} - u_{\delta_n}||_p,$$

for all $k\geq 1$, $n\geq 1$, and $p\in(1,\infty)$, a straightforward consequence of (2.39) is that $(\varphi_{\delta_n})_{n\geq 1}$ is a Cauchy sequence in $L^p((0,T);W^{2,p}(\Omega))$ and thus converges to some function φ in that space. Finally, the nonnegativity of u follows easily from that of u_{δ_n} by (2.39). □

Proof of Theorem 2.2.2 (existence). It remains to identify the equations solved by the limit (u,φ) of $(u_{\delta_n},\varphi_{\delta_n})_{n\geq 1}$ constructed in Lemma 2.4.1. To this end we first note that , owing to (2.39) and the boundedness of $(u_{\delta_n})_n$ and u in $L^\infty((0,T)\times\Omega)$, we have

$$u_{\delta_n}^m \longrightarrow u^m \text{ in } L^p((0,T)\times\Omega) \text{ as } \delta_n \to 0, \tag{2.43}$$

for all $T>0$. Since $(\nabla(u_{\delta_n}+\delta_n)^{\frac{m+1}{2}})_{n\geq 1}$ and $(\nabla u_{\delta_n}^m)_{n\geq 1}$ are bounded in $L^2((0,T)\times\Omega)$ for all $T>0$ by Lemma 2.3.4 with $p=2$ and $p=m+1$, we may extract a further subsequence (not relabeled) such that

$$\nabla(u_{\delta_n}+\delta_n)^{\frac{m+1}{2}} \rightharpoonup \nabla u^{\frac{m+1}{2}} \text{ in } L^2((0,T)\times\Omega), \tag{2.44}$$

$$\nabla u_{\delta_n}^m \rightharpoonup \nabla u^m \text{ in } L^2((0,T)\times\Omega), \tag{2.45}$$

for all $T > 0$. Then if $\psi \in L^4((0,T) \times \Omega; \mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \int_\Omega \psi \cdot [\nabla(u_{\delta_n} + \delta_n)^m - \nabla u^m] \ dxds \right| \\
&= \frac{2}{m+1} \left| \int_0^T \int_\Omega \psi \cdot \left[(u_{\delta_n} + \delta_n)^{\frac{m-1}{2}} \nabla (u_{\delta_n} + \delta_n)^{\frac{m+1}{2}} - u^{\frac{m-1}{2}} \nabla u^{\frac{m+1}{2}} \right] \ dxds \right| \\
&\leq \frac{2}{m+1} \left| \int_0^T \int_\Omega \psi \cdot \nabla (u_{\delta_n} + \delta_n)^{\frac{m+1}{2}} ((u_{\delta_n} + \delta_n)^{\frac{m-1}{2}} - u^{\frac{m-1}{2}}) \ dxds \right| \\
&+ \frac{2}{m+1} \left| \int_0^T \int_\Omega u^{\frac{m-1}{2}} \ \psi \cdot \left(\nabla (u_{\delta_n} + \delta_n)^{\frac{m+1}{2}} - \nabla u^{\frac{m+1}{2}} \right) \ dxds \right| \\
&\leq \frac{2}{m+1} \int_0^T ||\psi||_4 \ ||\nabla (u_{\delta_n} + \delta_n)^{\frac{m+1}{2}}||_2 \ ||(u_{\delta_n} + \delta_n)^{\frac{m-1}{2}} - u^{\frac{m-1}{2}}||_4 \ ds \\
&+ \frac{2}{m+1} \left| \int_0^T \int_\Omega u^{\frac{m-1}{2}} \ \psi \cdot \left(\nabla (u_{\delta_n} + \delta_n)^{\frac{m+1}{2}} - \nabla u^{\frac{m+1}{2}} \right) \ dxds \right|.
\end{aligned}$$

Since $u^{\frac{m-1}{2}} \ \psi \in L^2((0,T) \times \Omega)$, we deduce from (2.39) and (2.44) that the right-hand side of the above inequality converges to zero as $n \longrightarrow \infty$. In other words,

$$\nabla(u_{\delta_n} + \delta_n)^m \rightharpoonup \nabla u^m \ \text{ in } L^{\frac{4}{3}}((0,T) \times \Omega), \tag{2.46}$$

for all $T > 0$.

Now, we are going to show that (u, φ) in Lemma 2.4.1 is the desired weak solution in Theorem 2.2.2. Let $T > 0$ and $\psi \in C^1([0,T] \times \overline{\Omega})$ with $\psi(T) = 0$. The solution of (2.7) satisfies

$$\int_0^T \int_\Omega [\nabla(u_{\delta_n} + \delta_n)^m \cdot \nabla \psi - u_{\delta_n} \ \nabla \varphi_{\delta_n} \cdot \nabla \psi - u_{\delta_n} \ \partial_t \psi] \ \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega u_0 \ \psi(0,x) \ \mathrm{d}x, \tag{2.47}$$

and,

$$\int_0^T \int_\Omega [\nabla \varphi_{\delta_n} \cdot \nabla \psi + M \ \psi - u_{\delta_n} \ \psi] \ \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{2.48}$$

From (2.46) we see that

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla (u_{\delta_n} + \delta_n)^m \cdot \nabla \psi \ \mathrm{d}x\mathrm{d}t \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \nabla u^m \cdot \nabla \psi \ \mathrm{d}x\mathrm{d}t \text{ as } \delta_n \to 0.$$

From (2.39) we get

$$\int_0^T \int_\Omega u_{\delta_n} \ \partial_t \psi \ \mathrm{d}x\mathrm{d}t \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega u \ \partial_t \psi \ \mathrm{d}x\mathrm{d}t \text{ as } \delta_n \to 0.$$

From (2.39) and (2.40) we get

$$\int_0^T \int_\Omega u_{\delta_n} \nabla\varphi_{\delta_n} \cdot \nabla\psi \, dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega u \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dxdt \text{ as } \delta_n \to 0.$$

Thus we conclude that u satisfies

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla u^m \cdot \nabla\psi - u\nabla\varphi \cdot \nabla\psi - u \cdot \partial_t\psi) \, dxdt = \int_\Omega u_0(x) \cdot \psi(0,x) \, dx.$$

Similarly, from (2.40) we see that

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla\varphi_{\delta_n} \cdot \nabla\psi \, dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dxdt \text{ as } \delta_n \to 0,$$

and from (2.39) we see that

$$\int_0^T \int_\Omega u_{\delta_n} \psi \, dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega u \, \psi \, dxdt \text{ as } \delta_n \to 0.$$

Thus, we have constructed a weak solution (u, φ) of (KS). □

2.4.2 Uniqueness

In this section, we prove the uniqueness statement of Theorem 2.2.2 under the additionnal assumption (2.6) on φ. The proof relies on a classical duality technique, and on the method presented in [2]

Démonstration. The proof estimates the difference of weak solutions in dual space $H^1(\Omega)'$ of $H^1(\Omega)$, motivated by the fact that the nonlinear diffusion is monotone in this norm.

Assume that we have two different weak solutions (u_1, φ_1) and (u_2, φ_2) to equations (2.1) corresponding to the same initial conditions, and fix $T > 0$. We put

$$(u, \varphi) = (u_1 - u_2, \varphi_1 - \varphi_2) \text{ in } [0,T] \times \Omega.$$

Then φ is the strong solution of

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= u \quad \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu\varphi &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \\ <\varphi> &= 0. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Since $\partial_t u \in L^2((0,T); H^1(\Omega)')$, we have

$$-\Delta\partial_t\varphi = \partial_t u_1 - \partial_t u_2 = \partial_t u \ \text{ in } H^1(\Omega)',$$

and

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla\varphi||_2^2 &= \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\partial_t\varphi \; dx \\ &= -<\Delta\partial_t\varphi,\varphi>_{(H^1)',H^1} = <\partial_t u,\varphi>_{(H^1)',H^1} .\end{aligned} \tag{2.50}$$

Now it follows from (2.1) that u satisfies the equation

$$\left\{\begin{array}{lll}\partial_t u &=& \operatorname{div}(\nabla(u_1^m - u_2^m)) - \operatorname{div}(u_1\nabla\varphi + u\nabla\varphi_2)\\ \partial_\nu u &=& 0\\ u(0,x) &=& 0.\end{array}\right. \tag{2.51}$$

Substituting (2.51) in (2.50), we obtain

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla\varphi||_2^2 = \int_\Omega (u_1^m - u_2^m)\ \Delta\varphi \ \mathrm{d}x + \int_\Omega u_1\ |\nabla\varphi|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega u\ \nabla\varphi_2\cdot\nabla\varphi \ \mathrm{d}x. \tag{2.52}$$

The first integral on the right-hand side of (2.52) is nonnegative due to the fact that $z \mapsto z^m$ is an increasing function. The second integral on the right-hand side of (2.52) can be estimated by

$$\left|\int_\Omega u_1\ |\nabla\varphi|^2 \ \mathrm{d}x\right| \le ||u_1||_\infty \ \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \ \mathrm{d}x.$$

For the last integral, using an integration by parts we obtain

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\ \nabla\varphi_2\cdot\nabla\varphi \ \mathrm{d}x &= -\int_\Omega \Delta\varphi\ \nabla\varphi_2\cdot\nabla\varphi \ dx \\ &= \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla(\nabla\varphi_2\cdot\nabla\varphi) \ dx \\ &= \sum_{i,j}\int_\Omega \partial_i\varphi\ \partial_{ij}^2\varphi_2\ \partial_j\varphi \ \mathrm{d}x + \sum_{i,j}\int_\Omega \partial_i\varphi\ \partial_j\varphi_2\ \partial_{ij}^2\varphi \ \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.53}$$

integrating by parts the second integral on the right-hand side of (2.53),

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\int_\Omega \partial_i\varphi\ \partial_j\varphi_2\ \partial_{ij}^2\varphi \ \mathrm{d}x &= \sum_{i,j}\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_j\varphi_2\ \partial_j|\partial_i\varphi|^2 \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\varphi_2\cdot\nabla(|\nabla\varphi|^2) \ \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta\varphi_2\ |\nabla\varphi|^2 \ \mathrm{d}x \\ &\le C(T)\ ||\nabla\varphi||_2^2,\end{aligned}$$

since $-\Delta\varphi_2 = u_2 - < u_2 > \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$. Together with (2.53) the previous inequality implies

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u\ \nabla\varphi_2\cdot\nabla\varphi\ \mathrm{d}x\right| &\leq C(T)\int_\Omega (|D^2\varphi_2|+1)\ |\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x.\\ &\leq C(T)\ (||\varphi_2||_{L^\infty((0,T);W^{2,\infty}(\Omega))}+1)\ \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\ dx,\end{aligned}$$

provided that the $L^\infty((0,T);W^{2,\infty}(\Omega))$ norm of the function φ_2 is bounded. Thus, substituting the above estimates in (2.52), one finally obtains

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\ dx \leq C(T)\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\ dx. \tag{2.54}$$

Notice that $||\nabla\varphi(0)||_2 = 0$ which follows from (2.49) and the property $u(0) = 0$. Thus, inequality (3.5.4) implies

$$||\nabla\varphi(t)||_2^2 \leq e^{C(T)\ t}\ ||\nabla\varphi(0)||_2^2 = 0.$$

Consequently, $\nabla\varphi(t) = 0$ for all $t \in [0,T]$ and, since $< \varphi(t) >= 0$, we have $\varphi(t) = 0$ for all $t \in [0,T]$. Using (2.49), we conclude that $u(t) = 0$ for all $t \in [0,T]$. Consequently $(u_1,\varphi_1) = (u_2,\varphi_2)$. $\square$

ACKNOWLEDGMENT

I thank professors Philippe Laurençot and Marjolaine Puel for their helpful advices and comments during this work.

Bibliographie

[1] N. D. Alikakos. L^p bounds of solutions of reaction-diffusion equations. *Communication in Partial Differential Equations 4(1979), no. 8, 827-868.*

[2] J. Bedrossian, N. Rodriguez and A. Bertozzi. Local global well-possedness for aggregation equations and Patlak-Keller-Segel models with degenerate diffusion, *Nonlinearity 24 (2011)1683-1714.*

[3] J. Bedrossian, I. C. Kim. Global Existence and Finite Time Blow-Up for Critical Patlak-Keller-Segel Models with Inhomogeneous Diffusion, preprint arXiv :1108.5301.

[4] A. Blanchet. On the parabolic-elliptic Patlak-Keller-Segel system in dimension 2 and higher. *To appear in Sémin. Équ. Dériv. Partielles.*

[5] A. Blanchet. J. A. Carrillo. Ph. Laurençot. Critical mass for a Patlak-Keller-Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions. *Calc. Var. Partial Differential Equations 35 (2009), no. 2,133-168.*

[6] V. Calvez, J. A. Carrillo. Volume effect in the Keller-Segel model : energy estimates preventing blow-up. *J. Math. Pures. Appl. 86 (2006)155-175.*

[7] T. Cieślak, Ph. Laurençot. Finite time blow-up for radially symmetric solutions to a critical quasilinear Smoluchowski-Poisson system.*C.R. Acad. Sci. Paris, ser. I 347(2009) 237-242.*

[8] T. Cieślak, M. Winkler. Finite-time blow-up in a quasilinear system of chemotaxis. *Nonlinearity 21 (2008) 1057-1076.*

[9] J. Dolbeault, B. Perthame. Optimal critical mass in the two-dimensional Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339 (2004), no. 9, 611616.*

[10] D. Horstmann. From 1970 until present : the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences. I. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 105(3) :103-165, 2003.*

[11] D. Horstmann. Lyapunov functions and L^p-estimates for a class of reaction-diffusion systems. *Colloq. math. 87 (2001) no. 1, 113-127.*

[12] W. Jäger, S. Luckhaus, On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis. *Trans. Amer. Math. Soc. 329(2)(1992) 819-824.*

[13] E. F. Keller and L. A. Segel. Initiation of slide mold aggregation viewed as an instability. *J. Theor. Biol.*, 26 :399–415, 1970.

[14] R. Kowalczyk. Preventing blow-up in a chemotaxis model. *J. Math. Anal. Appl. 305 (205)566-588.*

[15] T. Nagai. Blow-up of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modelling chemotaxis in two-dimensional domains. *J. Inequal. Appl. 6 (2001) 37-55.*

[16] T. Nagai. Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system, *Advances in Mathematical Sciences and Applications 5 (1995), no. 2, 581-601.*

[17] C.S. Patlak, Random walk with persistence and external bias, *Bull. Math. Biophys. 15 (1953) 311-338.*

[18] B. Perthame, PDE models for chemotactic movements. Parabolic, hyperbolic and kinetic, *Appl. Math. 49 (6) (2005) 539-564.*

[19] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *1987, Annali di Mathematica Pura ed Applicata (IV), vol. CXLVI, 65-96.*

[20] Y. Sugiyama. Global existence in sub-critical cases and finite time blow-up in super-critical cases to degenerate Keller-Segel systems. *Differential and Integral Equations 19 (2006), no. 8, 841-876.*

[21] Y. Sugiyama. Time global existence and asymptotic behavior for solutions to degenerate quasi-linear parabolic systems of chemotaxis. *Differential and Integral Equations 20 (2007), no. 2, 133-180.*

Chapitre 3

Well-posedness for a model of individual clustering

Ce chapitre est la version préliminaire de [58]. Il est indépendant de deux Chapitres précédants. Il est rédigé sous forme article qui est accepté dans "Discrete and continuous dynamical systems-Serie-B".

Well-posedness for a model of individual clustering

Elissar Nasreddine

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse, F–31062 Toulouse cedex 9, France

e-mail : elissar.nasreddine@math.univ-toulouse.fr

28 juin 2013

Abstract. We study the well-posedness of a model of individual clustering. Given $p > N \geq 1$ and an initial condition in $W^{1,p}(\Omega)$, the local existence and uniqueness of a strong solution is proved. We next consider two specific reproduction rates and show global existence if $N = 1$, as well as, the convergence to steady states for one of these rates.

Keywords : Elliptic system, local existence, global existence, steady state, compactness method.

3.1 Introduction

In [5], a model for the dispersal of individuals with an additional aggregation mechanism is proposed. More precisely, classical models for the spatial dispersion of biological populations read

$$\partial_t u = \Delta(\Phi(u)) + f(u, t, x). \tag{3.1}$$

where $u(t, x)$ denotes the population density at location x and time t, and $f(u, t, x)$ represents the population supply, due to births and deaths. The dispersal of individuals is either due to random motion with $\Phi(u) = u$ or rests on the assumption that individuals disperse to avoid crowding and Φ satisfies

$$\Phi(0) = 0, \quad \text{and } \Phi'(u) > 0, \quad \text{for } u > 0. \tag{3.2}$$

No aggregation mechanism is present in this model though, as discussed in [5], the onset of clustering of individuals in a low density region might balance the death and birth rates and guarantee the survival of the colony. To account for such a phenomenon, a modification of the population balance (3.1) is proposed in [5] and reads

$$\partial_t u = -\nabla \cdot (u \ \boldsymbol{V}(u,t,x)) + u \ E(u,t,x). \tag{3.3}$$

where $\boldsymbol{V}$ is the average velocity of individuals, and E is the net rate of reproduction per individual at location x and time t. To complete the model, we must specify how $\boldsymbol{V}$ is related to u and E. Following [5], we assume that each individual disperses randomly with probability $\delta \in (0,1)$ and disperses deterministically with an average velocity $\boldsymbol{\omega}$ so as to increase his expected rate of reproduction with probability $1-\delta$. The former is accounted for by a usual Fickian diffusion $\frac{\nabla u}{u}$ while the latter should be in the direction of increasing $E(u,t,x)$, say, of the form $\lambda \ \nabla E(u,t,x)$ with $\lambda > 0$. A slightly different choice is made in [5] and results in the following system

$$\begin{array}{rcl} \partial_t u & = & \delta \ \Delta u - (1-\delta) \ \nabla \cdot (u \ \boldsymbol{\omega}) + u \ E(u,t,x) \\ -\varepsilon \ \Delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} & = & \lambda \nabla E(u,t,x). \end{array} \tag{3.4}$$

After a suitable rescaling, and assuming that the environment is homogeneous, (3.4) becomes

$$\begin{array}{rcl} \partial_t u & = & \delta \ \Delta u - \nabla \cdot (u \ \boldsymbol{\omega}) + r \ u \ E(u) \\ -\varepsilon \ \Delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} & = & E'(u) \ \nabla u, \end{array} \tag{3.5}$$

for $x \in \Omega$ and $t \geq 0$, where Ω is an open bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $1 \leq N \leq 3$. We supplement (3.5) with no-flux boundary conditions

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla u = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0, \tag{3.6}$$

as suggested in [5]. However, the previous boundary conditions (3.6) are not sufficient for the well-posedness of the elliptic system verified by $\boldsymbol{\omega}$ in several space dimensions and we must impose the following additional condition given in [3, 4, 8] :

$$\partial_n \boldsymbol{\omega} \times n = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0. \tag{3.7}$$

As usual, $v \times \omega$ is the number $v_1 \ \omega_2 - v_2 \ \omega_1$ if $N = 2$ and the vector field $(v_2 \ \omega_3 - v_3 \ \omega_2, -v_1 \ \omega_3 + v_3 \ \omega_1, v_1 \ \omega_2 - v_2 \ \omega_1)$ if $N = 3$. We note that the boundary condition (3.7) is useless if $N = 1$.

Summarizing, given a sufficiently smooth function E, parameters $\delta > 0$, $\varepsilon \geq 0$ and $r \geq 0$, our aim in this paper is to look for $(u, \boldsymbol{\omega})$ solving the problem

$$\begin{cases} \partial_t u &= \delta\ \Delta u - \nabla \cdot (u\ \boldsymbol{\omega}) + r\ u\ E(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ -\varepsilon\ \Delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} &= \nabla E(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_n u = 0 & , \quad \boldsymbol{\omega} \cdot n = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \partial_n \boldsymbol{\omega} \times n &= 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0,x) &= u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

In the first part of this paper, we show that, for $p > N$, the system (3.8) has a maximal solution u in the sense of Definition 3.2.1 where $u \in C\left([0, T_{\max}), W^{1,p}(\Omega)\right) \cap C\left((0, T_{\max}), W^{2,p}(\Omega)\right)$, see Theorem 3.2.2.

In the second part, we turn to the global existence issue and focus on space dimension 1, and two specific forms of E suggested in [5] : the “bistable case" where $E(u) = (1 - u)(u - a)$ for some $a \in (0,1)$, see Theorem 3.2.3, and the “monostable case" $E(u) = 1 - u$. In both cases, we prove the global existence of solution. In addition, in the monostable case, i.e $E(u) = 1 - u$, thanks to the Liapunov functional

$$L(u) = \int_{-1}^{1} (u\ \log u - u + 1)\ dx,$$

we can study the asymptotic behaviour of solutions for t large, and show that the solution u converges, when t goes to ∞, to a steady state in $L^2(-1,1)$, see Theorem 3.2.4.

In the third part, we investigate the limiting behaviour as $\varepsilon \to 0$. Heuristically, when ε goes to zero, the velocity $\boldsymbol{\omega}$ becomes sensitive to extremely local fluctuations in $E(u)$, and the system (3.8) reduces to the single equation

$$\partial_t u = \nabla \cdot \left((\delta - u\ E'(u))\ \nabla u\right) + r\ u\ E(u). \tag{3.9}$$

Clearly (3.9) is parabolic only if $\delta - u\ E'(u) \geq 0$ for all $u > 0$. This is in particular the case when $E(u) = 1 - u$, see Theorem 3.2.6. But this limit is not well-posed in general. As a result the population distribution may become discontinuous when neighbouring individuals decide to disperse in opposite direction, that is in particular the case when $E(u) = (1 - u)(u - a)$.

3.2 Main results

Throughout this paper and unless otherwise stated, we assume that

$$E \in C^2(\mathbb{R}),\ \delta > 0,\ \varepsilon > 0,\ r \geq 0.$$

We first define the notion of solution to (3.8) to be used in this paper.

Definition 3.2.1. *Let $T > 0$, $p > N$, and an initial condition $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. A strong solution to (3.8) on $[0,T)$ is a function*

$$u \in C\left([0,T), W^{1,p}(\Omega)\right) \cap C\left((0,T), W^{2,p}(\Omega)\right),$$

such that

$$\begin{cases} \partial_t u &= \delta\ \Delta u - \nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}_u) + r\ u\ E(u), & \text{a.e. in } [0,T)\times\Omega \\ u(0,x) &= u_0(x), & \text{a.e. in } \Omega \\ \partial_n u &= 0, & \text{a.e. on } [0,T)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

where, for all $t \in [0,T)$, $\boldsymbol{\omega}_u(t)$ is the unique solution in $W^{2,p}(\Omega)$ of

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta\boldsymbol{\omega}_u(t) + \boldsymbol{\omega}_u(t) &= \nabla E(u(t)) & \text{a.e. in } \Omega \\ \boldsymbol{\omega}_u(t)\cdot n = \partial_n\boldsymbol{\omega}_u(t)\times n &= 0 & \text{a.e. on } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.11}$$

Our first result gives the existence and uniqueness of a maximal solution of (3.8) in the sense of Definition 3.2.1.

Theorem 3.2.2. *Let $p > N$ and a nonnegative function $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Then there is a unique maximal solution $u \in C\left([0,T_{\max}), W^{1,p}(\Omega)\right) \cap C\left((0,T_{\max}), W^{2,p}(\Omega)\right)$ to (3.8) in the sense of Definition 3.2.1, for some $T_{\max} \in (0,\infty]$. In addition, u is nonnegative. Moreover, if for each $T > 0$, there is $C(T)$ such that*

$$||u(t)||_{W^{1,p}} \leq C(T), \quad \text{for all } t \in [0,T]\cap[0,T_{\max}),$$

then $T_{\max} = \infty$.

The proof of the previous theorem relies on a contraction mapping argument. It is contained in Section 3.4

We now turn to the global existence issue and focus on the one dimensional case, where $E(u)$ has the structure suggested in [5].
In the following theorem we give the global existence of solution to (3.8) in the bistable case, that is when $E(u) = (1-u)(u-a)$, for some $a \in (0,1)$.

Theorem 3.2.3. *Assume that u_0 is a nonnegative function in $W^{1,2}(-1,1)$, and $E(u) = (1-u)(u-a)$ for some $a \in (0,1)$. Then (3.8) has a global nonnegative solution u in the sense of Definition 3.2.1.*

The proof relies on a suitable cancellation of the coupling terms in the two equations which gives an estimate for u in $L^\infty(L^2)$ and for $\boldsymbol{\omega}$ in $L^2\left(W^{1,2}\right)$. It is developped in Section 3.5

Next, we can prove the global existence of a solution to (3.8) in the monostable case, that is, when $E(u) = 1-u$, and we show that the solution converges as $t \to \infty$ to a steady state. More precisely, we have the following theorem

Theorem 3.2.4. *Assume that u_0 is a nonnegative function in $W^{1,2}(-1,1)$, and $E(u) = 1-u$. There exists a global nonnegative solution u of (3.8) in the sense of Definition 3.2.1 which belongs to $L^\infty\left([0,\infty); W^{1,2}(-1,1)\right)$.*
In addition, if $r = 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \left|\left| u(t) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u_0 \, dx \right|\right|_2 = 0,$$

and if $r > 0$ the solution $u(t)$ converges either to 0 or to 1 in $L^2(-1,1)$ as $t \to \infty$.

In contrast to the bistable case, it does not seem to be possible to begin the global existence proof with a $L^\infty(L^2)$ estimate on u. Nevertheless, there is still a cancellation between the two equations which actually gives us an $L^\infty(L\log L)$ bound on u and a L^2 bound on $\partial_x\sqrt{u}$. The proof of Theorem 3.2.4 is contained in Section 3.5.

Remark 3.2.5. *We note that when $N = 1$, there is a relation between our model when $E(u) = 1-u$ and $r = 0$, and the following chemorepulsion model studied in [2]*

$$\left\{\begin{array}{lcll} \partial_t u & = & \delta\, \partial_{xx}^2 u + \partial_x(u\, \partial_x \psi), & \text{in } (0,\infty)\times(-1,1) \\ -\varepsilon\, \partial_{xx}^2\psi + \psi & = & u, & \text{in } (0,\infty)\times(-1,1) \\ \partial_x u(t,\pm 1) & = & \partial_x\psi(t,\pm 1) = 0 & \text{on } (0,\infty). \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Indeed, define $\varphi = -\partial_x\psi$, and substitute it into (3.12). Then differentiating the second equation in (3.12) we find

$$\left\{\begin{array}{lcll} \partial_t u & = & \delta\, \partial_{xx}^2 u - \partial_x(u\, \varphi), & \text{in } (0,\infty)\times(-1,1) \\ -\varepsilon\, \partial_{xx}^2\varphi + \varphi & = & -\partial_x u = \partial_x E(u), & \text{in } (0,\infty)\times(-1,1) \\ \partial_x u(t,\pm 1) & = & \varphi(t,\pm 1) = 0 & \text{on } (0,\infty). \end{array}\right. \tag{3.13}$$

So that u is a solution to our model.

When $E(u) = 1 - u$, the limit $\varepsilon \to 0$ is formally justified and (3.8) takes the qualitative form of (3.1) with $\Phi(u) = \delta u + \frac{1}{2}\, u^2$. In the limit $\varepsilon \to 0$, (3.8) thus reduces to a diffusion equation in which dispersion prevents overcrowding and this is clearly a consequence of the property $E' < 0$. It is thus unlikely that (3.8) could produce aggregation of individuals. This observation is actually consistent with Remark 3.2.5.

Theorem 3.2.6. *Assume that u_0 is a nonnegative function in $W^{1,2}(-1,1)$, and that $E(u) = 1 - u$. For $\varepsilon > 0$ let u_ε be the global solution to (3.8) given by Theorem 3.2.4. Then, for all $T > 0$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T ||u_\varepsilon(t) - u(t)||_2^2 \; dt = 0, \tag{3.14}$$

where u is the unique solution to

$$\begin{cases} \partial_t u &= \partial_{xx}^2(\delta\; u + \frac{1}{2}\; u^2) + r\; u\; (1-u), & x \in (-1,1), t > 0, \\ u(0,x) &= u_0(x), & x \in (-1,1), \\ \partial_x u(t, \pm 1) &= 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Since $\delta + u > 0$ for $u \geq 0$, the previous equation (3.15) is uniformly parabolic and has a unique solution u, see [6] for instance.
The proof of Theorem 3.2.6 is performed by a compactness method, and it is contained in Section 3.6.

3.3 Preliminaries

We first recall some properties of the following system,

$$\begin{cases} -\varepsilon\; \Delta\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} &= f, & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{\omega} \cdot n &= 0, & \text{on } \partial\Omega, \\ \partial_n \boldsymbol{\omega} \times n &= 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.16}$$

where $f \in (L^p(\Omega))^N$ and Ω is a bounded open subset of $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$. Let us first consider weak solutions of (3.16). For that purpose, we define

$$W_1 = \{\mathbf{v} \in (H^2(\Omega))^N ; \mathbf{v} \cdot n = 0, \text{ and } \partial_n \mathbf{v} \times n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

and take W as the closure of W_1 in $(H^1(\Omega))^N$.
If $f \in (L^2(\Omega))^N$, the weak formulation for (3.16) is

$$\begin{cases} \varepsilon \displaystyle\int_\Omega \nabla\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} + \int_\Omega \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = \int_\Omega f \cdot \mathbf{v}, \quad \text{for all } \mathbf{v} \in W \\ \boldsymbol{\omega} \in W \end{cases} \tag{3.17}$$

where $\nabla\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{v} = \sum_i \nabla\omega_i \cdot \nabla v_i$ and $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = \sum_i \omega_i\, v_i$.

We recall some results about the existence, regularity and uniqueness of solution for (3.17), see [3, 4].

Theorem 3.3.1. *If $f \in (L^2(\Omega))^N$, (3.17) has a unique solution in W and there is $C = C(\Omega, N)$ such that*

$$||\boldsymbol{\omega}||_W \leq C\ ||f||_2.$$

We next consider strong solutions of (3.16), that is, solutions solving (3.16) a.e. in Ω. In this direction the existence and uniqueness of the strong solution to (3.16) is proved in [8] :

Theorem 3.3.2. *If $f \in (L^p(\Omega))^N$ with $1 < p < \infty$, (3.16) has a unique solution in $(W^{2,p}(\Omega))^N$ and*

$$||\boldsymbol{\omega}||_{W^{2,p}} \leq \frac{K(p)}{\varepsilon}\ ||f||_p, \tag{3.18}$$

where $K(p) = K(p, \Omega, N)$.

In other words, the strong solution has the same regularity as elliptic equations with classical boundary conditions.

We finally recall some functional inequalities : in several places we shall need the following version of Poincaré's inequality

$$||u||_{W^{1,p}} \leq C\ \left(||\nabla u||_p + ||u||_q\right), \quad u \in W^{1,p}(\Omega) \tag{3.19}$$

with arbitrary $p \geq 1$ and $q \in [1, p]$. Also, we will frequently use the Gagliardo-Nirenberg inequality

$$||u||_p \leq C\ ||u||^{\theta}_{W^{1,2}}\ ||u||^{1-\theta}_q, \quad \text{with } \theta = \frac{\frac{N}{q} - \frac{N}{p}}{1 - \frac{N}{2} + \frac{N}{q}},\ u \in W^{1,2}(\Omega) \tag{3.20}$$

which holds for all $p \geq 1$ satisfying $p\ (N-2) < 2\ N$ and $q \in [1, p)$.

3.4 Local well-posedness

Throughout this section, we assume that

$$E \in C^2(\mathbb{R}), \text{ and set } \tilde{E}(z) = z\ E(z) \text{ for } z \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Proof of Theorem 3.2.2. We fix $p > N$, $R > 0$, and define for $T \in (0,1)$ the set

$$X_R(T) := \left\{ u \in C\left([0,T]; W^{1,p}(\Omega)\right),\ \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_{W^{1,p}} \le R \right\},$$

which is a complete metric space for the distance

$$d_X(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} ||u(t) - v(t)||_{W^{1,p}}, \quad (u,v) \in X_R(T) \times X_R(T).$$

For $u \in X_R(T)$, and $t \in [0,T]$, the embedding of $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$ ensures that $\nabla E(u(t)) \in L^p(\Omega)$ so that (3.16) with $f = \nabla E(u)$ has a unique solution $\boldsymbol{\omega}_u \in \left(W^{2,p}(\Omega)\right)^N$. We then define $\Lambda(u)$ by

$$\Lambda u(t,x) = (e^{t\ (\delta\ \Delta)}\ u_0)(x) + \int_0^t e^{(t-s)\ (\delta\ \Delta)} \left[-\nabla \cdot (u\ \boldsymbol{\omega}_u) + r\ \tilde{E}(u) \right](s,x)\ ds, \tag{3.22}$$

for $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$, where $\left(e^{t\ (\delta\ \Delta)}\right)$ denotes the semigroup generated in $L^p(\Omega)$ by $\delta\ \Delta$ with homogeneous Neumann boundary conditions. We now aim at showing that Λ maps $X_R(T)$ into itself, and is a strict contraction for T small enough. In the following, $(C_i)_{i\ge1}$ and C denote positive constants depending only on Ω, δ, r, ε, E, p and R.

– Step 1. Λ maps $X_R(T)$ into itself.

We first recall that there is $C_1 > 0$ such that

$$||v||_\infty \le C_1 ||v||_{W^{1,p}}, \tag{3.23}$$

and

$$||e^{t(\delta\ \Delta)}\ v||_{W^{1,p}} \le C_1\ ||v||_{W^{1,p}}, \text{ and } ||\nabla e^{t\ (\delta\ \Delta)}\ v||_p \le C_1\ \delta^{-\frac{1}{2}}\ t^{-\frac{1}{2}}\ ||v||_p, \tag{3.24}$$

for all $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Indeed, (3.23) follows from the continuous embedding of $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$ due to $p > N$ while (3.24) is a consequence of the regularity properties of the heat semigroup.

Consider $u \in X_R(T)$, and $t \in [0,T]$. It follows from (3.24) that

$$\begin{aligned}
||\Lambda u(t)||_p &\leq C_1\ ||u_0||_p + \int_0^t ||\nabla e^{(t-s)(\delta\ \Delta)}\ (u\ \boldsymbol{\omega}_u)(s)\ ||_p\ ds \\
&+ r \int_0^t ||e^{(t-s)(\delta\ \Delta)}\ \tilde{E}(u)(s)||_p\ ds \\
&\leq C_1\ ||u_0||_p + C_1\ \delta^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ ||u\ \boldsymbol{\omega}_u(s)||_p\ ds \\
&+ C_1\ r \int_0^t ||\tilde{E}(u)(s)||_p\ ds.
\end{aligned}$$

Thanks to (3.23), we have

$$||u(t)||_\infty \leq C_1\ ||u(t)||_{W^{1,p}} \leq R\ C_1 \leq C_2. \tag{3.25}$$

Therefore, using elliptic regularity (see Theorem 3.3.2) and (3.25), we obtain

$$||\boldsymbol{\omega}_u(t)||_{W^{2,p}} \leq \frac{K(p)}{\varepsilon}\ ||\nabla E(u(t))||_p \leq C\ ||E'||_{L^\infty(-C_2,C_2)}\ R \leq C. \tag{3.26}$$

Using again (3.25) along with (3.26) we find

$$\begin{aligned}
||\Lambda u(t)||_p &\leq C_1\ ||u_0||_p + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ||u(s)||_\infty\ ||\boldsymbol{\omega}_u(s)||_p\ ds \\
&+ r \int_0^t ||u(s)||_p\ ||E(u(s))||_\infty\ ds \\
&\leq C_1\ ||u_0||_p + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ ds + r\ T\ R\ ||E||_{L^\infty(-C_2,C_2)} \\
&\leq C_1\ ||u_0||_p + C\ t^{\frac{1}{2}} + C\ T \\
&\leq C_1\ ||u_0||_p + C_3\ T^{\frac{1}{2}} \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

(recall that $T \leq 1$). On another hand, by (3.24) we have

$$\begin{aligned}
||\nabla\Lambda u(t)||_p &\leq C_1\ ||\nabla u_0||_p + \int_0^t ||\nabla e^{(t-s)\ (\delta\ \Delta)}\ \nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}_u)(s)||_p\ ds \\
&+ r \int_0^t ||e^{(t-s)(\delta\ \Delta)}\ \nabla(u\ E(u))(s)||_p\ ds \\
&\leq C_1\ ||\nabla u_0||_p + \delta^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ ||(\nabla u\cdot\boldsymbol{\omega}_u + u\ \nabla\cdot\boldsymbol{\omega}_u)(s)||_p\ ds \\
&+ r \int_0^t ||\nabla(\tilde{E}(u))(s)||_p\ ds.
\end{aligned}$$

Since $u \in X_R(T)$, using (3.25) we can see that

$$r\ ||\nabla(\tilde{E}(u))||_p \leq r\ ||\tilde{E}'(u)\ \nabla u||_p \leq r\ ||\tilde{E}'||_{L^\infty(-C_2,C_2)}\ ||\nabla u||_p \leq C_4,$$

which gives that

$$\begin{aligned}||\nabla \Lambda u(t)||_p &\leq C_1\ ||\nabla u_0||_p + \delta^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ||\boldsymbol{\omega}_u||_\infty\ ||\nabla u||_p\ ds \\ &+ \delta^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (||\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_u||_p\ ||u||_\infty)\ ds + C_4\ T.\end{aligned}$$

Since

$$||\boldsymbol{\omega}_u||_\infty \leq C_1\ ||\boldsymbol{\omega}_u||_{W^{1,p}} \leq C_5, \tag{3.28}$$

by (3.26) and (3.23), we use once more (3.25) and obtain that

$$\begin{aligned}||\nabla \Lambda u(t)||_p &\leq C_1\ ||\nabla u_0||_p + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ ds + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ ds + C_4\ T \\ &\leq C_1\ ||\nabla u_0||_p + C_6\ T^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Combining (3.27) and (3.29) we get

$$\sup_{t\in[0,T]} ||\Lambda u(t)||_{W^{1,p}} \leq C_1\ ||u_0||_{W^{1,p}} + C_7\ T^{\frac{1}{2}}.$$

Choosing $R = 2\ C_1\ ||u_0||_{W^{1,p}}$ and $T \in (0,1)$ such that

$$C_1\ ||u_0||_{W^{1,p}} + C_7\ T^{\frac{1}{2}} \leq R,$$

we obtain that

$$\sup_{t\in[0,T]} ||\Lambda u(t)||_{W^{1,p}} \leq R.$$

It follows that Λ maps $X_R(T)$ into itself.

– Step 2. We next show that Λ is a strict contraction for T small enough.

Let u and v be two functions in $X_R(T)$. Using (3.24) we have

$$\begin{aligned}||\Lambda u(t) - \Lambda v(t)||_p &\leq \int_0^t \left|\left|\nabla e^{(t-s)\ (\delta\ \Delta)}\ [-u\ \boldsymbol{\omega}_u + v\ \boldsymbol{\omega}_v]\right|\right|_p\ ds \\ &+ r \int_0^t \left|\left| e^{(t-s)(\delta\ \Delta)}\ [\tilde{E}(u) - \tilde{E}(v)]\right|\right|_p\ ds \\ &\leq C_1\ \delta^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ ||-u\ \boldsymbol{\omega}_u + v\ \boldsymbol{\omega}_v||_p\ ds \\ &+ r\ C_1 \int_0^t \left|\left|\tilde{E}(u) - \tilde{E}(v)\right|\right|_p\ ds.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Note that, by (3.25) and (3.28), we have

$$\begin{aligned} \|u\ \boldsymbol{\omega}_u - v\ \boldsymbol{\omega}_v\|_p &\leq \|u\ \boldsymbol{\omega}_u - u\ \boldsymbol{\omega}_v - v\ \boldsymbol{\omega}_v + u\ \boldsymbol{\omega}_v\|_p \\ &\leq \|u\|_\infty\ \|\boldsymbol{\omega}_u - \boldsymbol{\omega}_v\|_p + \|\boldsymbol{\omega}_v\|_\infty\ \|u-v\|_p \\ &\leq C\ \|\boldsymbol{\omega}_u - \boldsymbol{\omega}_v\|_p + C\ \|u-v\|_p, \end{aligned} \tag{3.31}$$

and it follows from Theorem 3.3.2 and (3.25) that

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega}_u - \boldsymbol{\omega}_v\|_{W^{2,p}} &\leq C\ \|\nabla E(u) - \nabla E(v)\|_p \\ &\leq C\ \|E'(u)\ \nabla u - E'(u)\ \nabla v - E'(v)\ \nabla v + E'(u)\ \nabla v\|_p \\ &\leq C\ \|E'\|_{L^\infty(-C_2,C_2)}\ \|\nabla u - \nabla v\|_p \\ &+ C\|E'(v) - E'(u)\|_\infty\ \|\nabla v\|_p \\ &\leq C\ \|\nabla v - \nabla u\|_p + C\ \|E''\|_{L^\infty(-C_2,C_2)}\ d_X(u,v). \\ &\leq C_8\ d_X(u,v). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Combining (3.32) and (3.31) we obtain

$$\begin{aligned} &\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ \|-u\ \boldsymbol{\omega}_u + v\ \boldsymbol{\omega}_v\|_p\ ds \\ \leq\ & C\ T^{\frac{1}{2}}\ C_8\ d_X(u,v) + T^{\frac{1}{2}}\ C_9\ d_X(u,v) \\ \leq\ & T^{\frac{1}{2}}\ C_{10}\ d_X(u,v). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Since u and v are bounded by (3.25), we have

$$r\ \|\tilde{E}(u) - \tilde{E}(v)\|_p \ \leq\ C\ \|u-v\|_p.$$

Then, we get

$$\int_0^t r\ \|\tilde{E}(u) - \tilde{E}(v)\|_p(s)\ ds \ \leq\ C_{11}\ T\ d_X(u,v)$$

Substituting (3.33) and the above inequality in (3.30) we conclude that

$$\|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_p \leq C_{12}\ T^{\frac{1}{2}}\ d_X(u,v).$$

Using again (3.24), we have

$$\begin{aligned}
||\nabla\Lambda u(t)-\nabla\Lambda v(t)||_p &\leq \int_0^t \left|\left|\nabla e^{(t-s)\ (\delta\ \Delta)}\ [-\nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}_u)+\nabla\cdot(v\ \boldsymbol{\omega}_v)]\right|\right|_p\ ds \\
&+\ r\int_0^t \left|\left|\nabla e^{(t-s)\ (\delta\ \Delta)}\ (\tilde{E}(u)-\tilde{E}(v))\right|\right|_p\ ds \\
&\leq\ \delta^{-\frac{1}{2}}\ C_1\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ ||-\nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}_u)+\nabla\cdot(v\ \boldsymbol{\omega}_v)||_p\ ds \\
&+\ r\ C_1\int_0^t \left|\left|\nabla\left(\tilde{E}(u)-\tilde{E}(v)\right)\right|\right|_p(s)\ ds. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Since the mapping

$$\begin{array}{ccc}
W^{1,p}(\Omega)\times W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1,p}(\Omega) \\
u,v & \longmapsto & u\ v
\end{array}$$

is bilinear and continuous due to $p>N$, we deduce from (3.26) and (3.32) that

$$\begin{aligned}
\delta^{-\frac{1}{2}}\ C_1\ ||-\nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}_u)+\nabla\cdot(v\ \boldsymbol{\omega}_v)||_p &\leq\ ||u\ \boldsymbol{\omega}_u-v\ \boldsymbol{\omega}_v||_{W^{1,p}} \\
&\leq\ C\ ||u||_{W^{1,p}}\ ||\boldsymbol{\omega}_u-\boldsymbol{\omega}_v||_{W^{1,p}} \\
&+\ C\ ||\boldsymbol{\omega}_v||_{W^{1,p}}\ ||u-v||_{W^{1,p}} \\
&\leq\ C\ d_X(u,v)+C\ ||u-v||_{W^{1,p}} \\
&\leq\ C_{13}\ d_X(u,v)
\end{aligned}$$

Thus,

$$\delta^{-\frac{1}{2}}\ C_1\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ ||-\nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}_u)+\nabla\cdot(v\ \boldsymbol{\omega}_v)||_p\ ds\leq T^{\frac{1}{2}}\ C_{13}\ d_X(u,v).$$

On the other hand, due to (3.25) and the embedding of $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}
||\nabla(\tilde{E}(u)-\tilde{E}(v))||_p &=\ ||\tilde{E}'(u)\ \nabla u-\tilde{E}'(v)\ \nabla v||_p \\
&\leq\ C\ ||\tilde{E}'(u)||_\infty\ ||\nabla u-\nabla v||_p+C\ ||\tilde{E}'(u)-\tilde{E}'(v)||_\infty\ ||\nabla v||_p, \\
&\leq\ C\ ||\tilde{E}'||_{L^\infty(-C_2,C_2)}\ ||\nabla u-\nabla v||_p+C\ ||\tilde{E}''||_{L^\infty(-C_2,C_2)}\ ||u-v||_\infty \\
&\leq\ C\ ||u-v||_{W^{1,p}}.
\end{aligned}$$

Then

$$r\ C_1\ ||\nabla(\tilde{E}(u)-\tilde{E}(v))||_p\leq C_{14}\ ||u-v||_{W^{1,p}}.$$

Therefore,

$$||\nabla\Lambda u(t)-\nabla\Lambda v(t)||_p\leq T^{\frac{1}{2}}\ C_{13}\ d_X(u,v)+T\ C_{14}\ d_X(u,v)\leq T^{\frac{1}{2}}\ C_{15}\ d_X(u,v).$$

Finally we get

$$d_X(\Lambda u(t) - \Lambda v(t)) \leq T^{\frac{1}{2}}\ C_{16}\ d_X(u,v).$$

Choosing $T \in (0,1)$ such that $T^{\frac{1}{2}}\ C_{16} < 1$ we obtain that Λ is indeed a strict contraction in $X_R(T)$ and thus has a unique fixed point u.

Furthermore, since $u \in C\left([0,T], W^{1,p}(\Omega)\right)$ and $p > N$, we have $\nabla E(u) \in C\left([0,T], L^p(\Omega)\right)$ and we infer from Theorem 3.3.2 that $\boldsymbol{\omega}_u \in C\left([0,T], W^{2,p}(\Omega)\right)$. Combining this property with the fact that $W^{1,p}(\Omega)$ is an algebra, we realize that both $\nabla \cdot (u\ \boldsymbol{\omega}_u)$ and $u\ E(u)$ belong to $C\left([0,T], L^p(\Omega)\right)$. Classical regularity properties of the heat equation then guarantee that $u \in C\left((0,T], W^{2,p}(\Omega)\right)$ and is a strong solution to (3.10).

- Step 3. Thanks to the analysis performed in Steps 1 and 2, the existence and uniqueness of a maximal solution follows by classical argument, see [1] for instance.
- Step 4. Since 0 clearly solves (3.10), and $u_0 \geq 0$, the positivity of u follows from the comparison principle.

□

3.5 Global existence

From now on we choose $N = 1$, $\Omega = (-1,1)$, $p = 2$ and we set $\varphi = \boldsymbol{\omega}_u$ to simplify the notation.

3.5.1 The bistable case : $E(u) = (1-u)(u-a)$.

In this case, the system (3.8) now reads

$$\begin{cases} \partial_t u &= \delta\ \partial^2_{xx} u - \partial_x(u\ \varphi) + r\ u\ (u-a)(1-u), & x \in (-1,1), t > 0 \\ -\varepsilon\ \partial^2_{xx}\varphi + \varphi &= (-2u + (a+1))\ \partial_x u, & x \in (-1,1), t > 0 \\ \partial_x u(t,\pm 1) &= \varphi(t,\pm 1) = 0, & t > 0, \\ u(0,x) &= u_0(x), & x \in (-1,1), \end{cases} \tag{3.35}$$

for a some $a \in (0,1)$.

Since $E \in C^2(\mathbb{R})$, Theorem 3.2.2 ensures that there is a maximal solution u of (3.35) in $C\left([0,T_{\max}), W^{1,p}((-1,1))\right) \cap C\left((0,T_{\max}), W^{2,p}(-1,1)\right)$.

To prove Theorem 3.2.3 we show that, for all $T > 0$ and $t \in [0,T] \cap [0,T_{\max})$, $u(t)$ is bounded in $W^{1,2}(-1,1)$.
We begin the proof by the following lemmas which give some estimates on u and φ.

Lemma 3.5.1. *Let the same assumptions as that of Theorem 3.2.3 hold, and u be the nonnegative maximal solution of (3.35). Then for all $T > 0$ there exists $C_1(T)$, such that u and φ satisfy the following estimates*

$$||u(t)||_2 \leq C_1(T), \quad \text{for all } t \in [0,T] \cap [0,T_{\max}), \tag{3.36}$$

$$\int_0^t ||\partial_x u||_2^2 \; ds \leq C_1(T) \quad \text{for all } t \in [0,T] \cap [0,T_{\max}), \tag{3.37}$$

and

$$\int_0^t ||\varphi(t)||_{W^{1,2}}^2 \; ds \leq C_1(T) \quad \text{for all } t \in [0,T] \cap [0,T_{\max}). \tag{3.38}$$

Démonstration. Multiplying the first equation in (3.35) by $u(t)$ and integrating it over $(-1,1)$, we obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{-1}^1 |u|^2 \; dx = -2 \; \delta \int_{-1}^1 |\partial_x u|^2 \; dx + 2 \int_{-1}^1 u \; \varphi \; \partial_x u \; dx + 2 \; r \int_{-1}^1 u^2 \; E(u) \; dx. \tag{3.39}$$

Multiplying now the second equation in (3.35) by φ and integrating it over $(-1,1)$ we obtain

$$\varepsilon \int_{-1}^1 |\partial_x \; \varphi|^2 \; dx + \int_{-1}^1 |\varphi|^2 \; dx = -2 \int_{-1}^1 u \; \varphi \; \partial_x u \; dx + (a+1) \int_{-1}^1 \partial_x u \; \varphi \; dx. \tag{3.40}$$

At this point we notice that the cubic terms on the right hand side of (3.39) and (3.40) cancel one with the other, and summing (3.40) and (3.39) we obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}||u||_2^2 + \varepsilon \; ||\partial_x \varphi||_2^2 + ||\varphi||_2^2 + 2 \; \delta \; ||\partial_x u||_2^2 = 2 \; r \int_{-1}^1 u^2 \; E(u) \; dx + (a+1) \int_{-1}^1 \partial_x u \; \varphi \; dx. \tag{3.41}$$

We integrate by parts and use Cauchy-Schwarz inequality to obtain

$$(a+1) \int_{-1}^1 \partial_x u \; \varphi \; dx = -(a+1) \int_{-1}^1 u \; \partial_x \varphi \; dx \leq \frac{(a+1)^2}{2 \; \varepsilon} \; ||u||_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \; ||\partial_x \varphi||_2^2.$$

On the other hand, $u^2 \; E(u) \leq 0$ if $u \notin (a,1)$ so that

$$\int_{-1}^1 u^2 \; E(u) \; dx \leq 2 \; (1-a)$$

The previous inequalities give that

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\ ||\partial_x\varphi||_2^2 + ||\varphi||_2^2 + 2\ \delta\ ||\partial_x u||_2^2 \leq \frac{(a+1)^2}{2\ \varepsilon}\ ||u||_2^2 + 4\ r\ (1-a).$$

Therefore, for all $T > 0$ there exists $C_1(T)$ such that (3.36), (3.37) and (3.38) hold. □

Lemma 3.5.2. *Let the same assumptions as that of Theorem 3.2.3 hold, and u be the nonnegative maximal strong solution of (3.35). For all $T > 0$, there is $C_\infty(T)$ such that*

$$||u(t)||_\infty \leq C_\infty(T), \quad \text{for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}). \tag{3.42}$$

Démonstration. The estimates (3.36) and (3.37) and the Gagliardo-Nirenberg inequality (3.20) yield that there exists $C_2(T)$ such that

$$\int_0^t ||u\ \partial_x u||_2\ ds \leq C\ \int_0^t ||u||_2^{\frac{1}{2}}\ ||\partial_x u||_2^{\frac{3}{2}}\ ds \leq C_2(T)\ \text{ for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}).$$

The second equation in (3.35) and classical elliptic regularity theory ensure that there exists $C(T)$ such that

$$\int_0^t ||\varphi||_{W^{2,2}}\ ds \leq C(T)\ \text{ for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}),$$

which gives in particular, since $W^{2,2}(-1,1)$ is embedded in $W^{1,\infty}(-1,1)$,

$$\int_0^t ||\partial_x\varphi||_\infty\ ds \leq C_3(T)\ \text{ for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}). \tag{3.43}$$

Now, we multiply the first equation in (3.35) by $q\ u^{q-1}$ where $q > 1$ and integrate it over $(-1,1)$ to obtain

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^1 |u|^q\ dx &= -4\frac{\delta\ (q-1)}{q}\int_{-1}^1 |\partial_x u^{\frac{q}{2}}|^2\ dx + (q-1)\ \int_{-1}^1 \varphi\ \partial_x u^q\ dx \\
&+ r\ q\ \int_{-1}^1 u^q\ (u-a)\ (1-u)\ dx \\
&\leq -(q-1)\ \int_{-1}^1 \partial_x\varphi\ u^q\ dx + r\ q\ 2\ (1-a)
\end{aligned}$$

Using Hölder's inequality , we obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_q^q \leq (q-1)\ ||\partial_x\varphi||_\infty\ ||u||_q^q + 2\ q\ r. \tag{3.44}$$

Introducing

$$\phi(t) = \int_0^t ||\partial_x \varphi(s)||_\infty \ ds \leq C_3(T) \text{ for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}),$$

the bound being a sequence of (3.43), we integrate (3.44) and find

$$\begin{aligned}
||u(t)||_q^q &\leq ||u_0||_q^q \ e^{(q-1) \ \phi(t)} + 2 \ q \ r \int_0^t e^{(q-1) \ (-\phi(s)+\phi(t))} \ ds \\
&\leq (||u_0||_q^q + 2 \ q \ r) \ T \ e^{q \ C(T)}, \\
||u(t)||_q &\leq \left((||u_0||_q^q + 2 \ q \ r) \ T\right)^{\frac{1}{q}} \ e^{C(T)} \ \text{ for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}).
\end{aligned}$$

Consequently, by letting q tend to ∞, we see that there exists $C_\infty(T)$ such that

$$||u(t)||_\infty \leq C_\infty(T), \ \text{ for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}).$$

□

Lemma 3.5.3. *Let the same assumptions as that of Theorem 3.2.3 hold, and u be the nonnegative maximal strong solution of (3.35). For all $T > 0$, there is $C_4(T)$ such that*

$$||\partial_x u(t)||_2 \leq C_4(T) \ \text{ for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}). \tag{3.45}$$

Démonstration. We multiply the first equation in (3.35) by $(-\partial_{xx}^2 u)$ and integrate it over $(-1,1)$ to obtain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-1}^1 |\partial_x u|^2 \ dx &= -\delta \int_{-1}^1 |\partial_{xx}^2 u|^2 \ dx + \int_{-1}^1 \partial_x (u \ \varphi) \ \partial_{xx}^2 u \ dx \\
&+ \ r \int_{-1}^1 u \ (1-u) \ (u-a) \ (-\partial_{xx}^2 u) \ dx \\
&= -\delta \int_{-1}^1 |\partial_{xx}^2 u|^2 \ dx + \int_{-1}^1 (u \ \partial_x \varphi + \partial_x u \ \varphi) \ \partial_{xx}^2 u \ dx \\
&+ \ r \int_{-1}^1 u \ (-u^3 + (a+1)u^2 - a) \ \partial_{xx}^2 u \ dx.
\end{aligned}$$

Using Cauchy-Schwarz inequality and Lemma 3.5.2 we obtain,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^{1}|\partial_x u|^2\,dx &\leq -\delta\int_{-1}^{1}|\partial_{xx}^2 u|^2\,dx+\frac{\delta}{3}\int_{-1}^{1}|\partial_{xx}^2 u|^2\,dx+C\,||u||_\infty^2\int_{-1}^{1}|\partial_x\varphi|^2\,dx\\
&+\frac{\delta}{3}\int_{-1}^{1}|\partial_{xx}^2 u|^2\,dx+C\,||\varphi||_\infty^2\int_{-1}^{1}|\partial_x u|^2\,dx\\
&+\frac{\delta}{3}\int_{-1}^{1}|\partial_{xx}^2 u|^2\,dx+C\,||(u\,(-u^3+(a+1)u^2-a))||_\infty^2\\
&\leq C(T)\int_{-1}^{1}|\partial_x\varphi|^2\,dx+C\,||\varphi(t)||_\infty^2\int_{-1}^{1}|\partial_x u|^2\,dx+C(T). \quad (3.46)
\end{aligned}$$

Using (3.38) and Sobolev embedding theorem we obtain the following estimate

$$\int_0^t ||\varphi||_\infty^2\,ds\leq C(T)\quad\text{for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}). \tag{3.47}$$

Since (3.38) and (3.47) hold, then it follows from (3.46) after integration that

$$||\partial_x u(t)||_2^2\leq C_4(T),\ \text{ for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}).$$

□

It remains to prove Theorem 3.2.3.

Proof of Theorem 3.2.3. For all $T>0$, Lemma 3.5.3 and the estimate (3.36) ensure that

$$||u(t)||_{W^{1,2}}\leq C(T),\quad\text{for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}),$$

which guarantees that u cannot explode in $W^{1,2}(-1,1)$ in finite time and thus that $T_{\max}=\infty$. □

3.5.2 The monostable case : $E(u)=1-u$

For this choice of E, system (3.8) now reads

$$\begin{cases}
\partial_t u = \delta\,\partial_{xx}^2 u-\partial_x(u\,\varphi)+r\,u\,(1-u) & x\in(-1,1),\ t>0\\
-\varepsilon\,\partial_{xx}^2\varphi+\varphi = -\,\partial_x u, & x\in(-1,1),\ t>0\\
\partial_x u(t,\pm1)=\varphi(t,\pm1) = 0 & t>0,\\
u(0,x) = u_0(x) & x\in(-1,1),
\end{cases} \tag{3.48}$$

Since $E\in C^2(\mathbb{R})$, Theorem 3.2.2 ensures that there is a maximal solution u of (3.48) in

$C\left([0,T_{\max}),W^{1,p}(-1,1)\right)\cap C\left((0,T_{\max}),W^{2,p}(-1,1)\right)$.

In contrast to the previous case, it does not seem to be possible to begin the global existence proof with an $L^\infty(L^2)$ estimate on u. Nevertheless, there is still a cancellation between the two equations which actually gives us an $L^\infty(L\log L)$ bound on u and a L^2 bound on $\partial_x\sqrt{u}$. Integrating (3.48) over $(0,t)\times(-1,1)$ and using the nonnegativity of u, we first observe that,

$$||u(t)||_1 \leq ||u_0||_1 + 2\ r\ t, \quad \text{for all } t\in[0,T_{\max}). \tag{3.49}$$

To prove Theorem 3.2.4 we need to prove the following lemmas :

Lemma 3.5.4. *Let the same assumptions as that of Theorem 3.2.4 hold, and let u be the maximal solution of (3.48). Then for all $T>0$, there exists a constant $C_1(T)$ such that*

$$\int_0^t ||\partial_x\sqrt{u}||_2^2\ ds \leq C_1(T), \quad \text{for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}), \tag{3.50}$$

and

$$\int_0^t ||\varphi||_{W^{1,2}}^2\ ds \leq C_1(T), \quad \text{for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}). \tag{3.51}$$

Démonstration. The proof goes as follows. On the one hand, we multiply the first equation in (3.48) by $(\log u+1)$ and integrate it over $(-1,1)$. Since $u\ (1-u)\ \log u\leq 0$ and $u\ (1-u)\leq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^1 u\ \log u\ dx &= -\int_{-1}^1 (\delta\ \partial_x u - u\ \varphi)\ (\frac{1}{u}\ \partial_x u)\ dx + r\int_{-1}^1 u\ (1-u)\ (\log u+1)\ dx \\ &\leq -\int_{-1}^1 \frac{\delta}{u}\ (\partial_x u)^2\ dx + \int_{-1}^1 \varphi\ \partial_x u\ dx + 2\ r. \end{aligned} \tag{3.52}$$

On the other hand, we multiply the second equation in (3.48) by φ and integrate it over $(-1,1)$ to obtain

$$\varepsilon\int_{-1}^1 |\partial_x\varphi|^2\ dx + \int_{-1}^1 |\varphi|^2\ dx = -\int_{-1}^1 \partial_x u\ \varphi\ dx. \tag{3.53}$$

Adding (3.53) and (3.52) yields

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^1 u\ \log u\ dx + \varepsilon\ ||\partial_x\varphi||_2^2 + ||\varphi||_2^2 \leq -4\ \delta\int_{-1}^1 |\partial_x\sqrt{u}|^2\ dx + 2\ r. \tag{3.54}$$

Finally, (3.50) and (3.51) are obtained by a time integration of (3.54). □

Lemma 3.5.5. *Let the same assumptions as that of Theorem 3.2.4 hold, and let u be the maximal solution of (3.48). Then for all $T > 0$, there exists a constant $C_2(T)$ such that*

$$||u(t)||_2 \leq C_2(T), \quad \text{for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}), \tag{3.55}$$

and

$$\int_0^t ||\partial_x u||_2^2 \, ds \leq C_2(T), \quad \text{for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}). \tag{3.56}$$

Démonstration. A simple computation shows that, since $u^2\ (1-u) \leq 1$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{-1}^1 u^2 \, dx \quad \leq \quad -2\ \delta \int_{-1}^1 |\partial_x u|^2 \, dx + 2 \int_{-1}^1 u\ \varphi\ \partial_x u \, dx + 4\ r. \tag{3.57}$$

Using Cauchy-Schwarz inequality, Gagliardo-Nirenberg inequality (3.20), Young inequality and (3.49) we obtain that for all $T > 0$,

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 u\ \varphi\ \partial_x u \, dx \quad &= \quad - \int_{-1}^1 u^2\ \partial_x \varphi \, dx \leq ||u||_4^2\ ||\partial_x \varphi||_2 \\ &\leq \quad C \left(||u||_{W^{1,2}}^{\frac{1}{2}}\ ||u||_1^{\frac{1}{2}} \right)^2\ ||\partial_x \varphi||_2 \leq C(T)\ ||\partial_x \varphi||_2\ ||u||_{W^{1,2}} \\ &\leq \quad \delta\ ||u||_{W^{1,2}}^2 +\ C(T)\ ||\partial_x \varphi||_2^2 \end{aligned}$$

We substitute the previous inequality in (3.57) to obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} ||u||_2^2 \leq -2\ \delta\ ||\partial_x u||_2^2 + \delta\ ||u||_{W^{1,2}}^2 +\ C(T)\ ||\partial_x \varphi||_2^2 + 4\ r. \tag{3.58}$$

Integrating (3.58) in time, and using (3.51) yield that there exists $C_3(T)$ such that (3.55) and (3.56) hold. □

Now we are in a position to show the global existence of solution to (3.48).

Proof of Theorem 3.2.4 (global existence).

By elliptic regularity, and the continuous embedding of $W^{2,2}(-1,1)$ in $W^{1,\infty}(-1,1)$, we have

$$||\partial_x \varphi(t)||_\infty \leq C\ ||\varphi(t)||_{W^{2,2}} \leq C\ ||E'(u)\ \partial_x u||_2 \leq C\ ||\partial_x u||_2,$$

which together with (3.56), implies that

$$\int_0^t ||\partial_x \varphi(s)||_\infty^2 \, ds \leq C \int_0^t ||\partial_x u(s)||_2^2 \, ds \leq C(T), \quad \text{for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}).$$

Thanks to this estimate, we now argue as in the proof of Lemma 3.5.2 and Lemma 3.5.3 to get that

$$||u(t)||_\infty + ||\partial_x u(t)||_2 \le C(T), \quad \text{for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}).$$

Thus, the maximal solution u of (3.48) cannot explode in finite time. $\square$

To complete the proof of Theorem 3.2.4, it remains to prove the asymptotic behaviour of u when $t \to \infty$. We note that we have the following lemma which controls the $L^1(-1,1)$ norm of u. For $f \in L^1(-1,1)$, we set

$$< f >= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\ dx$$

Lemma 3.5.6. *Let the same assumptions as that of Theorem 3.2.4 hold, and let u be the nonnegative global solution of (3.48). For $r > 0$, there exists a constant $C_0 > 0$ such that*

$$0 \le < u(t) > \le C_0, \quad t \in (0,\infty), \tag{3.59}$$

and if $r = 0$

$$< u(t) >=< u_0 >= \frac{1}{2} ||u_0||_1, \quad t \in (0,\infty). \tag{3.60}$$

Démonstration. We note that if $r = 0$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} < u >= 0$, so that

$$< u(t) >= \frac{1}{2}\ ||u(t)||_1 = \frac{1}{2}\ ||u_0||_1.$$

If $r > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} < u(t) > &= r\ < u(t) > -r\ < u^2(t) > \\ &\le r\ < u(t) > -r\ < u(t) >^2, \end{aligned}$$

whence $< u(t) > \le \max\{1, < u_0 >\}$. $\square$

Next we turn to the existence of a Liapunov functional for (3.48) which is the cornerstone of our analysis.

Lemma 3.5.7. *Let the same assumptions as of that Theorem 3.2.4 hold, and let u be the nonnegative global solution of (3.48). There exists a constant C_1 such that*

$$r \int_0^\infty \int_{-1}^{1} u\ (u-1)\ \log u\ dx\ dt + \int_0^\infty \left(\ ||\partial_x \sqrt{u}||_2^2 + \varepsilon\ ||\partial_x \varphi||_2^2 + ||\varphi||_2^2\ \right)\ dt \le C_1, \tag{3.61}$$

and

$$\int_0^\infty ||\varphi||_\infty^2 \; ds \le C_1. \tag{3.62}$$

Démonstration. Let us define the following functional L

$$L(u) = \int_{-1}^{1} (u \; \log u - u + 1) \; dx \ge 0,$$

and show that it is a Liapunov functional. Indeed

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(u) = -\delta \int_{-1}^{1} \frac{|\partial_x u|^2}{u} \; dx + \int_{-1}^{1} \varphi \; \partial_x u \; dx + r \int_{-1}^{1} u \; \log u \; (1-u) \; dx. \tag{3.63}$$

Combining (3.63) and (3.53) we obtain that

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(u) &= -4\,\delta \int_{-1}^{1} |\partial_x \sqrt{u}|^2 \; dx - \varepsilon \int_{-1}^{1} |\partial_x \varphi|^2 \; dx - \int_{-1}^{1} |\varphi|^2 \; dx + r \int_{-1}^{1} u \; \log u \; (1-u) \; dx. \\ &= -D(u,\varphi) \le 0, \end{aligned} \tag{3.64}$$

since $u \; \log u \; (1-u) \le 0$. Then for all $t \ge 0$

$$L(u(t)) + \int_0^t D(u(s), \varphi(s)) \; ds \le L(u_0).$$

Since u_0 and u are nonnegative , we have

$$L(u_0) \;\; \le \;\; \int_{-1}^{1} \left(u_0^2 + 1\right) \; dx \le ||u_0||_2^2 + 2,$$

and

$$L(u(t)) \ge -\frac{2}{e} - \int_{-1}^{1} u_0 \; dx,$$

so that

$$\int_0^t D(u(s), \varphi(s)) \; ds \le 1 + ||u_0||_2^2 + \frac{2}{e} + 2 \;\; < u_0 >, \quad t \ge 0. \tag{3.65}$$

Therefore, (3.65) yields there exists $C_1 > 0$ such that

$$\int_0^\infty D(u, \varphi) \; dt \le C_1. \tag{3.66}$$

From (3.66), we see that (3.61) holds true. In addition, inequality (3.61) together with Sobolev's embedding theorem give (3.62). □

In the following lemma we show that $\{u(t) : \; t \ge 0\}$ is bounded in $W^{1,2}(-1,1)$.

Lemma 3.5.8. *Let the same assumptions as that of Theorem 3.2.4 hold, and let u be the nonnegative global solution of (3.48). Then u belongs to $L^\infty\left((0,\infty); W^{1,2}(-1,1)\right)$.*

Démonstration. First,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ ||u- <u>||_2^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ ||u||_2^2 - \int_{-1}^{1} \partial_t u\ dx\ \int_{-1}^{1} u\ dx \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ ||u||_2^2 - 4\ r\ \ <u>^2 + 4\ r\ \ <u><u^2> \\ &\leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ ||u||_2^2 + 2\ r\ C_0\ ||u||_2^2. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Multiplying the first equation in (3.48) by $2\ u$, integrating it over $(-1,1)$, and using the Cauchy-Schwarz inequality and the fact that $u \geq 0$ we obtain

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ ||u||_2^2 &\leq -2\ \delta \int_{-1}^{1} |\partial_x u|^2\ dx - \int_{-1}^{1} u^2\ \partial_x\varphi\ dx + 2\ r \int_{-1}^{1} u^2\ (1-u)\ dx \\ &\leq -2\ \delta\ ||\partial_x u||_2^2 + ||u||_4^2\ ||\partial_x\varphi||_2 + 2\ r. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Gagliardo-Nirenberg inequality (3.20) together with the Poincaré inequality (3.19) and (3.59) give

$$\begin{aligned}||u||_4^2 \leq C\ ||u||_{W^{1,2}}\ ||u||_1 &\leq C\ \left(\ ||\partial_x u||_2 + ||u||_1\ \right) \\ &\leq C\left(||\partial_x u||_2 + 1\right). \end{aligned} \tag{3.69}$$

Thus

$$||u||_4^2\ ||\partial_x\varphi||_2 \leq C\ \left(||\partial_x u||_2 + 1\right)\ ||\partial_x\varphi||_2. \tag{3.70}$$

Substituting (3.70), (3.69) and (3.68) into (3.67), and using Young and Hölder inequalities to obtain

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ ||u- <u>||_2^2 &\leq -2\ \delta\ ||\partial_x u||_2^2 + C\ \left(||\partial_x u||_2 + 1\right)\ ||\partial_x\varphi||_2 + 2r \\ &+\ 2r\ C_0\ ||u||_1^{\frac{2}{3}}\ ||u||_4^{\frac{4}{3}} \\ &\leq -2\ \delta\ ||\partial_x u||_2^2 + C\ ||\partial_x\varphi||_2^2 + \delta\ ||\partial_x u||_2^2 + C. \end{aligned}$$

Using Poincaré's inequality we get

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ ||u(t)- <u(t)>||_2^2 + \alpha\ ||u(t)- <u(t)>||_2^2 \ \leq\ C\ ||\partial_x\varphi(t)||_2^2 + C,$$

for some $\alpha > 0$ independent of t. Integrating this differential inequality gives

$$\begin{aligned} e^{\alpha\ t}\ ||u(t)- <u(t)>||_2^2 &\leq ||u_0- <u_0>||_2^2 + \int_0^t e^{\alpha\ s}\left(C\ ||\partial_x\varphi(s)||_2^2 + C\right)\ ds \\ ||u(t)- <u(t)>||_2^2 &\leq C\ e^{-\alpha\ t} + C\ \int_0^t e^{\alpha\ (s-t)}\ \left(||\partial_x\varphi(s)||_2^2 + 1\right)\ ds \end{aligned}$$

Since $e^{-\alpha\ t} \leq 1$, and $e^{\alpha\ (s-t)} \leq 1$ as $s \leq t$ we obtain

$$||u(t)- < u(t) > ||_2^2 \quad \leq \quad C + C \int_0^t ||\partial_x \varphi(s)||_2^2\ ds + \frac{1}{\alpha},$$

Using (3.61) we end up with

$$||u(t)- < u(t) > ||_2^2 \leq C, \tag{3.71}$$

where C is independent of t. Therefore, u belongs to $L^\infty((0,\infty); L^2(-1,1))$.

It remains to show that $\partial_x u$ is in $L^\infty((0,\infty); L^2(-1,1))$. We multiply the first equation in (3.48) by $-\partial_{xx}^2 u$ and integrate it over $(-1,1)$. Since $u \geq 0$ we use Cauchy-Schwarz and Young inequalities and (3.71) to obtain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||\partial_x u||_2^2 \ &\leq \ -\delta\ ||\partial_{xx}^2 u||_2^2 + \int_{-1}^1\ \partial_{xx}^2 u\ (\partial_x u\ \varphi + \partial_x \varphi\ u) - r \int_{-1}^1 u\ (1-u)\ \partial_{xx}^2 u\ dx \\
&\leq \ -\delta\ ||\partial_{xx}^2 u||_2^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^1\ \partial_x \varphi\ |\partial_x u|^2\ dx + \frac{\delta}{8}\ ||\partial_{xx}^2 u||_2^2 \\
&+ \ C \int_{-1}^1 |u|^2\ |\partial_x \varphi|^2\ dx - r \int_{-1}^1 u\ \partial_{xx}^2 u\ dx - 2\ r\ \int_{-1}^1 u\ |\partial_x u|^2\ dx \\
&\leq \ -\delta\ ||\partial_{xx}^2 u||_2^2 + \frac{1}{2}\ ||\partial_x \varphi||_2\ ||\partial_x u||_4^2 + \frac{\delta}{8}\ ||\partial_{xx}^2 u||_2^2 \\
&+ \ C\ ||u||_\infty^2\ ||\partial_x \varphi||_2^2 + C + \frac{\delta}{8}\ ||\partial_{xx}^2 u||_2^2.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Since $\partial_x u \in W_0^{1,2}(-1,1)$, using the Gagliardo-Nirenberg inequality (3.20) and the classical Poincaré inequality (3.19), we obtain

$$||\partial_x u||_4 \leq C\ ||\partial_{xx}^2 u||_2^{\frac{1}{2}}\ ||\partial_x u||_1^{\frac{1}{2}}. \tag{3.73}$$

Then, we substitute (3.73) into (3.72), and by Young inequality, the Sobolev embedding, (3.59) and (3.71), we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||\partial_x u||_2^2 \ &\leq \ -\frac{3\ \delta}{4}\ ||\partial_{xx}^2 u||_2^2 + C\ ||\partial_x \varphi||_2\ ||\partial_{xx}^2 u||_2\ ||\partial_x u||_1 + C\ ||u||_\infty^2\ ||\partial_x \varphi||_2^2 + C \\
&\leq \ -\frac{\delta}{2}\ ||\partial_{xx}^2 u||_2^2 + C\ ||\partial_x \varphi||_2^2\ ||\partial_x u||_1^2 + C\ ||u||_{W^{1,2}}^2\ ||\partial_x \varphi||_2^2 + C \\
&\leq \ -\frac{\delta}{2}\ ||\partial_{xx}^2 u||_2^2 + C\ ||\partial_x u||_2^2\ ||\partial_x \varphi||_2^2 + C\ (||\partial_x \varphi||_2^2 + 1).
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Since $\partial_x u \in W_0^{1,2}(-1,1)$, we use once more the classical Poincaré inequality to obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||\partial_x u||_2^2 + \beta||\partial_x u||_2^2 \leq C\ ||\partial_x u||_2^2\ ||\partial_x \varphi||_2^2 + C\ (||\partial_x \varphi||_2^2 + 1),$$

for some $\beta > 0$ independent of t.

Define
$$\phi(t) = \int_0^t ||\partial_x \varphi(s)||^2 \, ds, \quad t \geq 0,$$
and notice that , since $||\partial_x \varphi||_2^2$ belongs to $L^1(0,\infty)$ by (3.61),
$$0 \leq \phi(t) \leq \phi_\infty = \int_0^\infty ||\partial_x \varphi(s)||_2^2 \, ds.$$
Integrating the previous differential inequality we find
$$\begin{aligned}
||\partial_x u(t)||_2^2 &\leq ||\partial_x u_0||_2^2 \, e^{C\phi(t)-\beta \, t} \\
&+ C \int_0^t (1+\phi'(s)) \, e^{\beta(s-t)+C\phi(t)-C\phi(s)} \, ds \\
&\leq ||\partial_x u_0||_2^2 \, e^{C \, \phi_\infty} + C \, e^{C \, \phi_\infty} \int_0^t [e^{\beta(s-t)} + \phi'(s)] \, ds \\
&\leq ||\partial_x u_0||_2^2 \, e^{C \, \phi_\infty} + C \, e^{C \, \phi_\infty} \left(\frac{1}{\beta} + \phi_\infty \right).
\end{aligned}$$
Therefore, $\partial_x u$ belongs to $L^\infty\big((0,\infty), L^2(-1,1)\big)$, and Lemma 3.5.8 is proved. □

Lemma 3.5.9. *Let the same assumptions as that of Theorem 3.2.4 hold, and let u be the nonnegative global solution of (3.48). There is C_2 such that*
$$\int_0^\infty ||\partial_t u||_2^2 \, dt \leq C_2. \tag{3.75}$$

Démonstration. We multiply the first equation in (3.48) by $\partial_t u$ and integrate it over $(-1,1)$ to obtain
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (\partial_t u)^2 \, dx &= \delta \int_{-1}^1 \partial_{xx}^2 u \, \partial_t u \, dx - \int_{-1}^1 \partial_x (u \, \varphi) \, \partial_t u \, dx + r \int_{-1}^1 u \, (1-u) \, \partial_t u \, dx \\
&= -\frac{\delta}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} ||\partial_x u||_2^2 - \int_{-1}^1 (\partial_x u \, \varphi + u \, \partial_x \varphi) \, \partial_t u \, dx + r \int_{-1}^1 (u - u^2) \, \partial_t u \, dx.
\end{aligned}$$
Using Young and Cauchy-Schwarz inequalities we obtain
$$\begin{aligned}
||\partial_t u||_2^2 &\leq -\frac{\delta}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} ||\partial_x u||_2^2 + \int_{-1}^1 |\partial_x u|^2 \, |\varphi|^2 \, dx + \frac{1}{4} ||\partial_t u||_2^2 + \int_{-1}^1 |u|^2 \, |\partial_x \varphi|^2 \, dx + \frac{1}{4} ||\partial_t u||_2^2 \\
&+ r \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-1}^1 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \, dx,
\end{aligned}$$

which gives

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta}{2}\,||\partial_x u||_2^2+\int_{-1}^{1}F(u)\,dx\right)+\frac{1}{2}||\partial_t u||_2^2\leq ||\partial_x u||_2^2\,||\varphi||_\infty^2+||u||_\infty^2\,||\partial_x\varphi||_2^2,$$

where $F(u)=r\left(-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}\right)\geq -\frac{r}{6}$.
Next we integrate the above inequality in time, and use (3.62), (3.61) and Lemma 3.5.8 to obtain

$$-\frac{r}{3}+\frac{1}{2}\int_0^t ||\partial_t u||_2^2\,ds\leq C+C\int_0^t\left(||\varphi||_\infty^2+||\partial_x\varphi||_2^2\right)\,ds\leq C$$

for $t\geq 0$ where C is independent of t. We have thus proved (3.75). □

To end the proof of Theorem 3.2.4, our aim now is to look at the large time behaviour of the solution.

Proof of Theorem 3.2.4, (large time behaviour). In this proof, we follow [7].

By Lemma 3.5.8, the family $\{u(t),\ t\geq 0\}$ is bounded in $W^{1,2}(-1,1)$. Since the embedding of $W^{1,2}(-1,1)$ in $L^2(-1,1)$ is compact then, there are a sequence of positive time (t_n), such that $t_n\to\infty$, and $z\in L^2(-1,1)$ such that

$$z=\lim_{n\to\infty}u(t_n)\ \text{in}\ L^2(-1,1)\ \text{and a.e. in}\ (-1,1).$$

Consider

$$U_n(s,x)=u(t_n+s,x),\quad x\in(-1,1),\ -1<s<1,\ n>0,$$

and

$$\Phi_n(s,x)=\varphi(t_n+s,x),\quad -1<s<1.$$

We first prove that

$$U_n\longrightarrow z\ \text{ as } n\to\infty,\quad \text{in } C\left([-1,1];L^2(-1,1)\right). \tag{3.76}$$

Indeed for each $s\in(-1,1)$

$$\int_{-1}^{1}|u(t_n+s,x)-u(t_n,x)|^2\,dx\leq\int_{-1}^{1}\int_{t_n-1}^{t_n+1}|\partial_t u|^2\,dt\,dx.$$

Hence

$$\sup_{s\in[-1,1]}||U_n(s)-u(t_n)||_2\leq\left[2\int_{-1}^{1}\int_{t_n-1}^{\infty}|\partial_t u|^2\,dt\,dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

The right hand side goes to zero as $n \to \infty$ by Lemma 3.5.9. Letting $n \to \infty$ in the above inequality gives (3.76).

Next, using the definition of $D(u,\varphi)$ which is given in (3.64) we obtain that

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \Big(r \; ||U_n \; \log U_n \; (U_n - 1)||_1 + ||\partial_x \sqrt{U_n}||_2^2 + ||\Phi_n||_2^2 + \varepsilon \; ||\partial_x \Phi_n||_2^2 \Big) \; ds \\
&\leq \int_{t_n-1}^{t_n+1} \Big(r \; ||u(s) \; \log u(s) \; (u(s) - 1)||_1 + ||\partial_x \sqrt{u(s)}||_2^2 + ||\varphi(s)||_2^2 + \varepsilon \; ||\partial_x \varphi(s)||_2^2 \Big) \; ds \\
&\leq 2 \int_{t_n-1}^{\infty} D(u,\varphi) \; ds. \qquad (3.77)
\end{aligned}$$

The right-hand side of (3.77) goes to zero as $n \to \infty$ by (3.66), so that

$$\Phi_n \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \to \infty, \quad \text{in } L^2\left((-1,1); W^{1,2}(-1,1)\right).$$

In addition, using Cauchy-Schwarz inequality, (3.59) and (3.77) we obtain

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} ||\partial_x U_n(s)||_1^2 \; ds &= 4 \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{U_n(s)} \; |\partial_x \sqrt{U_n(s)}| \; dx \right)^2 \; ds \\
&\leq 4 \int_{-1}^{1} ||U_n(s)||_1 \; ||\partial_x \sqrt{U_n(s)}||_2^2 \; ds \\
&\leq C \int_{t_n-1}^{\infty} D(u,\varphi) \; ds.
\end{aligned}$$

Since the right-hand side goes to zero as $n \to \infty$ by (3.66), then we have

$$\partial_x U_n \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \to \infty, \quad \text{in } L^2\left((-1,1); L^1(-1,1)\right). \qquad (3.78)$$

Since the limit in the sense of distribution is unique, (3.76) and (3.78) yield that

$$\partial_x z = 0. \qquad (3.79)$$

If $r = 0$, (3.79) together with (3.60) and (3.76) give that $z =< u_0 >$. We have thus shown that $< u_0 >$ is the only cluster point of $\{u(t), \; t \geq 0\}$. Since $\{u(t), \; t \geq 0\}$ is relatively compact in $L^2(-1,1)$ thanks to its boundedness in $W^{1,2}(-1,1)$ (see Lemma 3.5.8), we conclude that $u(t)$ converges to $< u_0 >$ in $L^2(-1,1)$ as $t \longrightarrow \infty$.

If $r > 0$, by (3.77) we have

$$\int_{-1}^{1} ||U_n \; \log U_n \; (U_n - 1)||_1 \; ds \longrightarrow 0, \quad \text{as } n \to \infty, \qquad (3.80)$$

Since (U_n) is bounded in $L^\infty\left((-1,1)\times(-1,1)\right)$ thanks to the boundness of $\{u(t),\ t\geq 0\}$ in $W^{1,2}(-1,1)$ and the embedding of $W^{1,2}(-1,1)$ in $L^\infty(-1,1)$, we infer from (3.76), (3.79), (3.80) that $z\ \log z\ (z-1)=0$, that is $z=0$ or $z=1$. Therefore 0 and 1 are the only two cluster points of $\{u(t),\ t\geq 0\}$ as $t\to\infty$. Since the ω-limit set of u is a compact connected subset of $L^2(-1,1)$, see [1, Theorem 9.1.8] for instance, we conclude that $u(t)$ converges either to 0 or to 1 in $L^2(-1,1)$ as $t\longrightarrow\infty$.

□

3.6 Limiting behaviour as $\varepsilon\to 0$

When $E(u)=1-u$, letting $\varepsilon\to 0$ in (3.48) formally leads to (3.9) which is well-posed since $E'<0$ and $\delta>0$. The purpose of this section is to justify rigorously this fact and prove Theorem 3.2.6. Let $T>0$, $\delta>0$, $r\geq 0$, $\varepsilon>0$ and a nonnegative initial condition $u_0\in W^{1,2}(-1,1)$. We discuss the limit as $\varepsilon\to 0$ of the unique solution u_ε of

$$\left\{\begin{array}{lcll}\partial_t u_\varepsilon & = & \delta\ \partial^2_{xx}u_\varepsilon-\partial_x(u_\varepsilon\ \varphi_\varepsilon)+r\ u_\varepsilon\ (1-u_\varepsilon) & \text{in } (0,T)\times(-1,1),\\ u_\varepsilon(0,x) & = & u_0(x) & \text{in } (-1,1),\\ \partial_x u_\varepsilon(t,\pm 1) & = & 0 & \text{on } (0,T),\end{array}\right. \tag{3.81}$$

given by Theorem 3.2.4, where φ_ε is the unique solution of

$$\left\{\begin{array}{lcll}-\varepsilon\ \partial^2_{xx}\varphi_\varepsilon+\varphi_\varepsilon & = & -\partial_x u_\varepsilon & \text{in } (0,T)\times(-1,1),\\ \varphi_\varepsilon(t,\pm 1) & = & 0 & \text{on } (0,T).\end{array}\right.$$

3.6.1 Estimates

Lemma 3.6.1. *There is $C_1(T)$ independent of ε such that*

$$\int_0^T\left(\delta\ ||\partial_x\sqrt{u_\varepsilon}||_2^2+\varepsilon\ ||\partial_x\varphi_\varepsilon||_2^2+||\varphi_\varepsilon||_2^2\right)\ dt\leq C_1(T), \tag{3.82}$$

Démonstration. By (3.54) see (the proof of Lemma 3.5.4), we have

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{-1}^1 u_\varepsilon\ \log u_\varepsilon\ dx+\varepsilon\ ||\partial_x\varphi_\varepsilon||_2^2+||\varphi_\varepsilon||_2^2\leq -4\ \delta\int_{-1}^1|\partial_x\sqrt{u_\varepsilon}|^2\ dx+2\ r,$$

from which (3.82) follows by a time integration. □

Using Gagliardo-Nirenberg inequality (3.20) we obtain the following estimate :

Lemma 3.6.2. *For $2 \leq p \leq 6$, there exists $C_2(T,p)$ independent of ε such that*

$$\int_0^T ||u_\varepsilon||_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \, dt \leq C_2(T,p). \tag{3.83}$$

Démonstration. For $t \in (0,T)$, thanks to (3.82), we can use Gagliardo-Nirenberg inequality (3.20) on $\sqrt{u_\varepsilon}$ and we obtain for all $p \in [2,\infty)$

$$||\sqrt{u_\varepsilon(t)}||_p \leq C \, ||\sqrt{u_\varepsilon(t)}||_{W^{1,2}}^{\theta} \, ||\sqrt{u_\varepsilon(t)}||_2^{1-\theta}, \tag{3.84}$$

where

$$\theta = \frac{p-2}{2\,p}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} ||\sqrt{u_\varepsilon(t)}||_p^p &\leq C \, ||\sqrt{u_\varepsilon(t)}||_{W^{1,2}}^{\frac{p-2}{2}} \, ||\sqrt{u_\varepsilon(t)}||_2^{\frac{p+2}{2}} \\ ||u_\varepsilon(t)||_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} &\leq C \, ||\sqrt{u_\varepsilon(t)}||_{W^{1,2}}^{\frac{p-2}{2}} \, ||u_\varepsilon(t)||_1^{\frac{p+2}{4}}. \end{aligned}$$

Since

$$||u_\varepsilon(t)||_1 \leq ||u_0||_1 + 2\,r\,T,$$

and $\frac{p-2}{2} \leq 2$ for $2 \leq p \leq 6$, the estimate (3.83) follows from (3.82) and the previous inequalities. □

Lemma 3.6.3. *There is $C_3(T)$ independent of ε such that*

$$\int_0^T ||\partial_x u_\varepsilon||_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \, dt \leq C_3(T). \tag{3.85}$$

Démonstration. Hölder and Young inequalities together with (3.82) and (3.83) with $p = 6$ yield

$$\begin{aligned} \int_0^T ||\partial_x u_\varepsilon||_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \, dt &\leq 2^{\frac{3}{2}} \int_0^T ||\sqrt{u_\varepsilon} \, \partial_x \sqrt{u_\varepsilon}||_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \, dt \\ &\leq 2^{\frac{3}{2}} \int_0^T ||u_\varepsilon||_3^{\frac{3}{4}} \, ||\partial_x \sqrt{u_\varepsilon}||_2^{\frac{3}{2}} \, dt \\ &\leq C \int_0^T \left(||u_\varepsilon||_3^3 + ||\partial_x \sqrt{u_\varepsilon}||_2^2 \right) \, dt \leq C_3(T), \end{aligned}$$

which gives the result. □

Lemma 3.6.4. *There is $C_4(T)$ independent of ε such that*

$$\int_0^T ||\partial_t u_\varepsilon||_{(W^{2,\frac{3}{2}})'} \, dt \leq C_4(T).$$

Démonstration. Consider $\psi \in W^{2,\frac{3}{2}}(-1,1)$ and $t \in (0,T)$, we have

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-1}^{1} \partial_t u_\varepsilon \ \psi \ dx \right| \\
= & \left| \int_{-1}^{1} \left[\partial_x \left(\delta \ \partial_x u_\varepsilon - u_\varepsilon \ \varphi_\varepsilon \right) + r \ u_\varepsilon \ E(u_\varepsilon) \right] \ \psi \ dx \right| \\
= & \left| \int_{-1}^{1} \left(-\delta \ \partial_x u_\varepsilon \ \partial_x \psi + u_\varepsilon \ \varphi_\varepsilon \ \partial_x \psi + r \ u_\varepsilon \ (1-u_\varepsilon) \ \psi \right) \ dx \right| \\
\leq & \ \delta \ ||\partial_x \psi||_\infty \ ||\partial_x u_\varepsilon||_1 + ||\partial_x \psi||_\infty \ \ ||u_\varepsilon||_2 \ ||\varphi_\varepsilon||_2 + r \ ||u_\varepsilon(1-u_\varepsilon)||_1 \ ||\psi||_\infty.
\end{aligned}$$

Using the embedding of $W^{2,\frac{3}{2}}(-1,1)$ in $W^{1,\infty}(-1,1)$, and Young's inequality, we end up with

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-1}^{1} \partial_t u_\varepsilon \ \psi \ dx \right| & \leq \ \left(\delta \ ||\partial_x u_\varepsilon||_1 + ||u_\varepsilon||_2 \ ||\varphi_\varepsilon||_2 + r \ ||u_\varepsilon||_1 + r \ ||u_\varepsilon||_2^2 \right) \ ||\psi||_{W^{2,\frac{3}{2}}} \\
& \leq \ C \ \left(||\partial_x u_\varepsilon||_{\frac{3}{2}} + ||u_\varepsilon||_2^2 + ||\varphi_\varepsilon||_2^2 + 1 \right) \ ||\psi||_{W^{2,\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

and a duality argument gives

$$||\partial_t u_\varepsilon(t)||_{(W^{2,\frac{3}{2}})'} \leq C \ \left(||\partial_x u_\varepsilon||_{\frac{3}{2}} + ||u_\varepsilon||_2^2 + ||\varphi_\varepsilon||_2^2 + 1 \right).$$

Integrating the above inequality over $(0,T)$ and using Young's inequality we obtain

$$\int_0^T ||\partial_t u_\varepsilon(t)||_{(W^{2,\frac{3}{2}})'} \ dt \leq C(T) \ \int_0^T \left(||\partial_x u_\varepsilon||_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} + ||u_\varepsilon||_2^2 + ||\varphi_\varepsilon||_2^2 + 1 \right) \ dt.$$

By Lemma 3.6.1, Lemma 3.6.3 and Lemma 3.6.2 with $p = 4$ the right-hand side of the above inequality is bounded independently of ε and the proof of Lemma 3.6.4 is complete. □

3.6.2 Convergence

In this section we discuss the limit of u_ε as $\varepsilon \to 0$. For that purpose, we study the compactness properties of $(u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$.

Proof of Theorem 3.2.6. Thanks to Lemma 3.6.2 and Lemma 3.6.3, $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ is bounded in $L^{\frac{3}{2}}((0,T); W^{1,\frac{3}{2}}(-1,1))$ while $(\partial_t u_\varepsilon)_\varepsilon$ is bounded in $L^1((0,T); (W^{2,\frac{3}{2}})'(-1,1))$ by Lemma 3.6.4. Since $W^{1,\frac{3}{2}}(-1,1)$ is compactly embedded in $C([-1,1])$ and $C([-1,1])$ is continuously embedded in $(W^{2,\frac{3}{2}})'(-1,1)$, it follows from [9, Corollary 4] that $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ is relatively compact in $L^{\frac{3}{2}}((0,T); C([-1,1]))$. Therefore, there are a sequence (ε_j) of positive real numbers, $\varepsilon_j \to 0$, and $u \in L^{\frac{3}{2}}\left((0,T);W^{1,\frac{3}{2}}\right)$ such that

$$u_{\varepsilon_j} \rightharpoonup u \ \text{ in } L^{\frac{3}{2}}\left((0,T);W^{1,\frac{3}{2}}(-1,1)\right), \tag{3.86}$$

and

$$u_{\varepsilon_j} \to u \text{ in } L^{\frac{3}{2}}\left((0,T);C[-1,1]\right) \text{ and a.e. in } (0,T)\times(-1,1). \tag{3.87}$$

Since $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ is bounded in $L^\infty\left((0,T);L^1(-1,1)\right)$ by (3.59), it follows from (3.87)

$$\int_0^T ||u_{\varepsilon_j}-u||_2^3\, dt \leq \int_0^T ||u_{\varepsilon_j}-u||_1^{\frac{3}{2}}\, ||u_{\varepsilon_j}-u||_\infty^{\frac{3}{2}}\, dt \leq \int_0^T ||u_{\varepsilon_j}-u||_\infty^{\frac{3}{2}}\, dt \to 0,$$

when $\varepsilon_j \to 0$. In particular, we have

$$u_{\varepsilon_j} \longrightarrow u, \ \text{ in } L^2\left((0,T)\times(-1,1)\right). \tag{3.88}$$

Observe that the nonnegativity of u follows easily from that of (u_{ε_j}) by (3.88).

Owing to Lemma 3.6.1, we may also assume that

$$\varphi_{\varepsilon_j} \rightharpoonup \varphi \text{ in } L^2((0,T)\times(-1,1)) \ \text{ as } \varepsilon_j \to 0, \tag{3.89}$$

$$\varepsilon_j\, \partial_x\varphi_{\varepsilon_j} \to 0 \text{ in } L^2((0,T)\times(-1,1)) \ \text{ as } \varepsilon_j \to 0. \tag{3.90}$$

Indeed, observe that Lemma 3.6.1 ensure that $(\sqrt{\varepsilon_j}\ \partial_x\varphi_{\varepsilon_j})$ is bounded in $L^2((0,T)\times(-1,1))$ and thus (3.90).
It remains to identify the equations solved by the limit u of (u_{ε_j}). Let $\psi \in C^2([0,T]\times[-1,1])$ with $\psi(T)=0$. Since

$$\int_0^T\int_{-1}^1 \partial_t u_{\varepsilon_j}\ \psi\ dxdt = \int_0^T\int_{-1}^1 \left((-\delta\ \partial_x u_{\varepsilon_j} + u_{\varepsilon_j}\ \varphi_{\varepsilon_j})\ \partial_x\psi + r\ u_{\varepsilon_j}\ E(u_{\varepsilon_j})\ \psi\right)\ dxdt \tag{3.91}$$

and

$$\varepsilon_j\int_0^T\int_{-1}^1 \partial_x\varphi_{\varepsilon_j}\ \partial_x\psi\ dxdt + \int_0^T\int_{-1}^1 \varphi_{\varepsilon_j}\ \psi\ \ dxdt = -\int_0^T\int_{-1}^1 \partial_x u_{\varepsilon_j}\ \psi\ dxdt. \tag{3.92}$$

Owing to (3.86), (3.89) and (3.90), it is straightforward to pass to the limit as $\varepsilon_j \to 0$ in (3.92) and find

$$\int_0^T\int_{-1}^1 \varphi\ \psi\ dxdt = -\int_0^T\int_{-1}^1 \partial_x u\ \psi\ dxdt,$$

which gives that

$$\varphi = -\partial_x u. \tag{3.93}$$

Next, by (3.87) and (3.86) we see that

$$\int_0^T \int_{-1}^1 \partial_t u_{\varepsilon_j}\ \psi\ dxdt \longrightarrow -\int_0^T \int_{-1}^1 u\ \partial_t\psi\ dxdt - \int_{-1}^1 u_0(x)\ \psi(0,x)\ dx, \quad \text{as } \varepsilon_j \to 0,$$

and

$$\int_0^T \int_{-1}^1 \partial_x u_{\varepsilon_j}\ \partial_x\psi\ dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_{-1}^1 \partial_x u\ \partial_x\psi\ dxdt \quad \text{as } \varepsilon_j \to 0.$$

From (3.88), (3.89) and (3.93) we see that

$$\int_0^T \int_{-1}^1 u_{\varepsilon_j}\ \varphi_{\varepsilon_j}\ \partial_x\psi\ dxdt \longrightarrow -\int_0^T \int_{-1}^1 u\ \partial_x u\ \partial_x\psi\ dxdt, \quad \text{as } \varepsilon_j \to 0.$$

From (3.88) we get

$$r\int_0^T \int_{-1}^1 u_{\varepsilon_j}\ E(u_{\varepsilon_j})\ \psi\ dxdt \longrightarrow r\int_0^T \int_{-1}^1 u\ E(u)\ \psi\ dxdt, \quad \text{as } \varepsilon_j \to 0.$$

Thus we conclude that u satisfies

$$\int_0^T \langle \partial_t u, \psi\rangle\ dt = \int_0^T \int_{-1}^1 \left((-\delta\ \partial_x u - u\ \partial_x u)\ \partial_x\psi + r\ u\ E(u)\ \psi\right)\ dx\ dt,$$

for all test functions ψ. Therefore, u is a weak solution of (3.15), and classical regularity results ensure that u is actually a classical solution of (3.15). Since it is unique and the only possible cluster point of $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ in $L^2((0,T)\times(-1,1))$, we conclude that the whole family $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converges to u in $L^2((0,T)\times(-1,1))$ as $\varepsilon \to 0$. $\square$

Acknowledgment

I thank Philippe Laurençot for his helpful advices and comments during this work.

Bibliographie

[1] T. Cazenave. A. Haraux. An Introduction to semilinear evolution equations. *Oxford lecture series in mathematics and it applications, (2006).*

[2] T. Cieślak, Ph. Laurençot, C. Morales-Rodrigo. Global existence and convergence to steady states in a chemorepulsion system. Parabolic and Navier-Stokes equations. *Part 1, 105-117, Banach Center Publ., 81, Part 1, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2008.*

[3] J. P. Dias. A simplified variational model for the bidimensional coupled evolution equations of a nematic liquid crystal. *J. Math. Anal. Appl. 67 (1979), no. 2, 525-541.*

[4] J. P. Dias. Un problème aux limites pour un système d'équations non linéaires tridimensionnel. *Bolletino, U. M.I. (5) 16-B (1979), 22-31.*

[5] P. Grindrod. Models of individual aggregation or clustering in single and multi-species communities. *J. Math. Biol. (1988) 26 :651-660.*

[6] O. A. Ladyzenskaja. V . A. Solonnikov. N. N. Uraltseva. Linear and quasi-linear equations of parabolic type. *Providence (R.I.) , American Mathematical Society, (1988).*

[7] M. Langlais, D. Phillips. Stabilization of solutions of nonlinear and degenerate evolution equations. *Nonlinear Anal. 9 (1985), no. 4, 321-333.*

[8] M. Schoenauer. Quelques résultats de régularité pour un système elliptique avec conditions aux limites couplées. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 5e série, tome 2, no. 2(1980), 125-135.*

[9] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Annali di Mathematica Pura ed Applicata (IV), vol. CXLVI, (1987), 65-69.*

Chapitre 4

Two-dimensional individual clustering model

Ce chapitre se situe dans la continuité du Chapitre 3. Nous cherchons à démontrer l'existence globale de la solution mais cette fois dans le cas de la dimension 2. Ce chapitre est rédigé en anglais et est la version préliminaire de [59], cet article est accepté dans DCDS-S.

Two-dimensional individual clustering model

Elissar Nasreddine

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse, F–31062 Toulouse cedex 9, France

e-mail : elissar.nasreddine@math.univ-toulouse.fr

28 juin 2013

Abstract : This paper is devoted to study a model of individual clustering with two specific reproduction rates in two space dimensions. Given $q > 2$ and an initial condition in $W^{1,q}(\Omega)$, the local existence and uniqueness of solution have been shown in [6]. In this paper we give a detailed proof of existence of global solution.

4.1 Introduction

In the present work, we deal with a model of individual dispersing of individual with an additional aggregation mechanism introduced in [5]. Given a sufficiently smooth function E, parameters $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \geq 0$ and $r \geq 0$, the equations take the form

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \delta\ \Delta u - \nabla \cdot (u\ \boldsymbol{\omega}) + r\ u\ E(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ -\varepsilon\ \Delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} & = & \nabla E(u), & x \in \Omega, t > 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

in an open bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, where $u(t,x) > 0$, $\boldsymbol{\omega}(t,x) \in \mathbb{R}^2$ and E denote the population density, the average velocity of dispersing individuals, and the individual net reproduction rate, respectively. In this model, the individuals are assumed to disperse randomly in space $(\delta\ \Delta u)$ with a bias $-\nabla \cdot (u\ \boldsymbol{\omega})$ in the direction of increasing reproduction rate, the term $\varepsilon\ \Delta \boldsymbol{\omega}$ acting as a mollifier to smooth out any sharp local variation in $\nabla E(u)$.

In [5], we supplement (4.1) with no-flux boundary conditions

$$\partial_{\boldsymbol{n}} u = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ t \geq 0, \tag{4.2}$$

where $\boldsymbol{n}$ is the outward unit normal of $\partial\Omega$ and $\partial_{\boldsymbol{n}} u = \boldsymbol{n} \cdot \nabla u$. However, to guarantee the well-posedness of the elliptic system for $\boldsymbol{\omega}$ in two space dimensions, we should append the following condition given in [3, 4, 7]

$$\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n} = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \tag{4.3}$$

where $\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega} = (\partial_{\boldsymbol{n}}\omega_1, \partial_{\boldsymbol{n}}\omega_2) = (\boldsymbol{n}\cdot\nabla\omega_1, \boldsymbol{n}\cdot\nabla\omega_2)$ for the vector field $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$. in other words, (4.3) means that $\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}$ is parallel to $\boldsymbol{n}$, where $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = v_1\ u_2 - u_1\ v_2$.

Given $q > 2$, and an initial condition $u_0 \in W^{1,q}(\Omega)$, the existence and uniqueness of a nonnegative and maximal solution of (4.1), (4.2) and (4.3) have been shown in [6], and the purpose of this paper is to prove the global existence of solution when $E(u)$ has the two specific forms suggested in [5], namely

$$E(u) = (1-u)\ (u-a) \tag{4.4}$$

for some $a \in (0,1)$, or

$$E(u) = 1-u. \tag{4.5}$$

For these choices of reproduction rates, global existence has been shown in [6] in one space dimension and the purpose of this work is to prove that the solutions are global as well in two space dimensions. As in the one-dimensional case, the starting point of the analysis is an $L^\infty(L^2)$ estimate on u and an L^2 estimate on $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}$. Combining the latter with Gagliardo-Nirenberg inequality gives $L^\infty(L^p)$ estimates on u for any $p > 2$. This then allows us to obtain an $L^\infty(L^2)$ bound on ∇u which in turn gives an L^∞ bound on $\boldsymbol{\omega}$ by elliptic regularity.

The paper is organized as follows. In section 2, we state the global existence results, and focus on the two specific forms of E : The "bistable case" (4.4) see Theorem 4.2.2, and the "monostable case" (4.5), see Theorem 4.2.3. In section 3, we recall the local existence result obtained in [6] and we give some properties of the elliptic system for $\boldsymbol{\omega}$. In section 4, we turn to the global existence issue in the bistable case. The proof starts from the $L^\infty(L^2)$ estimate for u, an L^2 estimate for $\boldsymbol{\omega}$ and an L^2 estimate on $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}$ obtained from a suitable cancellation between the coupling terms in the u and $\boldsymbol{\omega}$ equations, then, for $p > 2$, we derive an $L^\infty(L^p)$ estimate for u. Then we use Lemma A.1 of [8] to derive an L^∞ estimate of u and we end the proof by an $L^\infty(L^q)$ estimate on ∇u. This ensures global existence. In section 5, we prove the global existence in the monostable case. The proof is quite similar to that of the previous case, except for the first estimate.

4.2 Main result

We first define the notion of solution to (4.1)-(4.3) to be used in this paper.

Definition 4.2.1. *Let $T > 0$, $q > 2$, and an initial condition $u_0 \in W^{1,q}(\Omega)$. A strong solution of (4.1)-(4.3) on $[0, T)$ is a function*

$$u \in C\left([0,T), W^{1,q}(\Omega)\right) \cap C\left((0,T), W^{2,q}(\Omega)\right),$$

such that

$$\begin{cases} \partial_t u &= \delta\, \Delta u - \nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}) + r\ u\ E(u), & \text{a.e. in } [0,T)\times\Omega \\ u(0,x) &= u_0(x), & \text{a.e. in } \Omega \\ \partial_{\boldsymbol{n}} u &= 0, & \text{a.e. on } [0,T)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

where, for all $t \in [0, T)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ is the unique solution in $W^{2,q}(\Omega)$ of

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta\boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) &= \nabla E(u(t)) & \text{a.e. in } \Omega \\ \boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{n} = \partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{n} &= 0 & \text{a.e. on } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.7}$$

In the following theorem we give the global existence of solution to (4.1)-(4.3) in the bistable case, that is when $E(u) = (1-u)(u-a)$, for some $a \in (0,1)$.

Theorem 4.2.2. *Let $q > 2$, and assume that u_0 is a nonnegative function in $W^{1,q}(\Omega)$, and $E(u) = (1-u)(u-a)$ for some $a \in (0,1)$. Then (4.1)-(4.3) has a global nonnegative solution u in the sense of Definition 4.2.1.*

The proof starts with a suitable cancellation of the coupling terms in the two equations which gives an estimate for u in $L^\infty(L^2)$ and for $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}$ in L^2. Using the Gagliardo-Nirenberg inequality (4.13) we derive, for $p > 2$ an $L^\infty(L^p)$ estimate for u. Then by the regularity properties of the second equation in (4.1) we obtain an L^∞ bound of $\boldsymbol{\omega}$. Combining these estimates and Lemma A.1 of [8] provide us with an L^∞ estimate for u which is used to show an $L^\infty(L^q)$ estimate for ∇u. This proves that the solution cannot explode in finite time.

Next, we turn to the global existence issue in the monostable case, that is when $E(u) = 1-u$.

Theorem 4.2.3. *Let $q > 2$, and assume that u_0 is a nonnegative function in $W^{1,q}(\Omega)$, and $E(u) = (1-u)$. Then (4.1)-(4.3) has a global nonnegative solution u in the sense of Definition 4.2.1.*

The proof of the previous theorem follows the same lines as that of Theorem 4.2.2. As in the bistable case, there is a cancellation between the two equations which provide us an $L^\infty(L\log L)$ bound on u and an L^2 bound for $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}$ as a starting point.

4.3 Well-posedness

Throughout this paper and unless otherwise stated, we assume that

$$\delta\in(0,1),\ \varepsilon>0,\ r\geq 0.$$

We first recall some properties of the strong solution of the following system,

$$\begin{cases} -\varepsilon\,\Delta\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega} &= f, \quad \text{in } \Omega,\\ \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n} &= 0, \quad \text{on } \partial\Omega,\\ \partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n} &= 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.8}$$

where $f\in(L^p(\Omega))^2$ and $p>1$. The strong solutions of (4.8) solve (4.8) a.e. in Ω. In this direction the existence and uniqueness of the strong solution to (4.8) are proved in [7] :

Theorem 4.3.1. *For $f\in(L^p(\Omega))^2$ with $1<p<\infty$, (4.8) has a unique solution in $(W^{2,p}(\Omega))^2$ such that*

$$||\boldsymbol{\omega}||_{W^{2,p}}\leq\frac{K(p)}{\varepsilon}\,||f||_p, \tag{4.9}$$

where $K(p)=K(p,\Omega)$.

In other words, the strong solution has the same regularity as elliptic equations with classical boundary conditions.

Thanks to [6] we recall the existence and uniqueness result of the maximal solution of (4.1)-(4.3).

Theorem 4.3.2. *We assume that $E\in C^2(\mathbb{R})$, let $p>2$ and a nonnegative function $u_0\in W^{1,p}(\Omega)$. Then, for some $T_{\max}\in(0,\infty]$, there is a unique nonnegative maximal solution*

$$u\in C\left([0,T_{\max}),W^{1,p}(\Omega)\right)\cap C\left((0,T_{\max}),W^{2,p}(\Omega)\right) \tag{4.10}$$

to (4.1)-(4.3) in the sense of Definition 4.2.1. Moreover, if for each $T>0$, there is $C(T)$ such that

$$||u(t)||_{W^{1,p}}\leq C(T),\quad \text{for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}),$$

then $T_{\max} = \infty$. *In addition,* u *satisfies*

$$u(t,x) = \left(e^{t(\delta\ \Delta)}\ u_0(x)\right) + \int_0^t e^{(t-s)(\delta\ \Delta)}\ \left[-\nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}) + r\ u\ E(u)\right](s,x)\ ds, \qquad (4.11)$$

for $(t,x) \in [0, T_{\max}] \times \Omega$, *where* $\left(e^{t\ (\delta\ \Delta)}\right)$ *denotes the semigroup generated in* $L^p(\Omega)$ *by* $\delta\ \Delta$ *with homogeneous Neumann boundary conditions.*

We recall that there is $C > 0$ such that

$$||e^{t\ (\delta\ \Delta)}v||_{W^{1,p}} \leq C\ ||v||_{W^{1,p}},\ \text{and}\ ||\nabla e^{t\ (\delta\ \Delta)}v||_p \leq C\ \delta^{-\frac{1}{2}}\ t^{-\frac{1}{2}}\ ||v||_p. \qquad (4.12)$$

Also in several places we shall need the following Gagliardo-Nirenberg inequality

$$||u||_p \leq C\ ||u||_{W^{1,2}}^{\theta}\ ||u||_q^{1-\theta},\quad \text{with}\ \theta = \frac{p-q}{p},\ u \in W^{1,2}(\Omega) \qquad (4.13)$$

which holds for all $p \geq 1$ and $q \in [1, p]$. Also we use the following singular Gronwall lemma (see [1, Theorem 3.3.1]).

Lemma 4.3.3. *Given* $\alpha, \beta \in [0, 1)$ *, there exists a positive constant* $c := c(\alpha, \beta)$ *such that the following is true :*

If $f :\ (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfies*

$$\left[t \mapsto t^{\beta}\ f(t)\right] \in L^{\infty}_{\text{loc}}((0,T), \mathbb{R}), \qquad (4.14)$$

and

$$f(t) \leq A\ t^{-\beta} + B\ \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\alpha}}\ f(s)\ ds,\quad a.a.t \in (0,T), \qquad (4.15)$$

where A *and* B *are positive constants, then* $f(t) \leq C(T)$, *for all* $t \in (0, T)$, *where* C *depends only on* T, α, β, *and* γ.

4.4 Global existence

4.4.1 The bistable case : $E(u) = (1-u)(u-a)$

We recall the system

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \delta\ \Delta u - \nabla\cdot(u\ \boldsymbol{\omega}) + r\ u\ (1-u)\ (u-a), & x \in \Omega, t > 0 \\ -\varepsilon\ \Delta\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} & = & [-2\ u + (a+1)]\ \nabla u, & x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_{\boldsymbol{n}} u = 0 & , & \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n} = \partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \qquad (4.16)$$

for a some $a \in (0,1)$, and $u_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ for some $q > 2$.

Since $E \in C^2(\mathbb{R})$, Theorem 4.3.2 ensures that there is a maximal solution of (4.16) in $C\left([0,T_{\max}), W^{1,q}(\Omega)\right) \cap C\left((0,T_{\max}), W^{2,q}(\Omega)\right)$ for $q > 2$.

We begin the proof by the following lemmas which gives some estimates on u and $\boldsymbol{\omega}$.

Lemma 4.4.1. *Let the same assumptions as that of Theorem 4.2.2 hold, and u be the nonnegative maximal solution of (4.16). Then for all $T > 0$ there exists $C_1(T) > 0$, such that u and $\boldsymbol{\omega}$ satisfy the following estimates*

$$||u(t)||_2^2 + \int_0^t ||\nabla u(s)||_2^2 \, ds \leq C_1(T), \quad \text{for all } t \in [0,T] \cap [0,T_{\max}), \tag{4.17}$$

and

$$\int_0^t \left(||\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}(s)||_2^2 + ||\boldsymbol{\omega}(s)||_2^2\right) \, ds \leq C_1(T) \quad \text{for all } t \in [0,T] \cap [0,T_{\max}). \tag{4.18}$$

Démonstration. We multiply the first equation in (4.16) by $2\,u$ and integrate it over Ω, to obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega |u|^2 \, dx = -2\,\delta \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + 2 \int_\Omega u \, \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla u \, dx + 2\,r \int_\Omega u^2 \, E(u) \, dx. \tag{4.19}$$

We multiply now the second equation in (4.16) by $\boldsymbol{\omega}$ and integrate it over Ω. We note that the boundary conditions for $\boldsymbol{\omega}$ guarantee that $\boldsymbol{\omega}$ is tangent to $\partial\Omega$ while $\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}$ is normal to $\partial\Omega$. Consequently, $\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ on $\partial\Omega$ and it follows from an integration by parts that

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_\Omega \Delta\boldsymbol{\omega} \ \cdot \boldsymbol{\omega} \, dx &= \varepsilon \int_\Omega |\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}|^2 \, dx - \varepsilon \int_{\partial\Omega} [\ (\nabla\omega_1 \cdot \boldsymbol{n})\ \omega_1 + (\nabla\omega_2 \cdot \boldsymbol{n})\ \omega_2\ ] \ d\sigma \\ &= \varepsilon \int_\Omega |\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}|^2 \, dx. \end{aligned}$$

We thus obtain

$$\varepsilon \int_\Omega |\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}|^2 \, dx + \int_\Omega |\boldsymbol{\omega}|^2 \, dx = -2 \int_\Omega u \, \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla u \, dx + (a+1) \int_\Omega \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla u \, dx. \tag{4.20}$$

At this point we notice that the cubic terms on the right hand side of (4.19) and (4.20) cancel one with the other, and summing (4.20) and (4.19) we obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_2^2 + \varepsilon\ ||\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}||_2^2 + ||\boldsymbol{\omega}||_2^2 + 2\ \delta\ ||\nabla u||_2^2 = 2\ r \int_\Omega u^2 \ E(u) \ dx + (a+1) \int_\Omega \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla u \ dx.$$

We integrate by parts and use Cauchy-Schwarz inequality to obtain

$$(a+1)\int_\Omega \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla u\ dx = -(a+1)\int_\Omega u\ \nabla\cdot\boldsymbol{\omega}\ dx \leq \frac{(a+1)^2}{2\ \varepsilon}\ ||u||_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\ ||\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}||_2^2.$$

On the other hand, $u^2\ E(u) \leq 0$ if $u \notin (a,1)$ so that

$$\int_\Omega u^2\ E(u)\ dx \leq |\Omega|\ (1-a).$$

The previous inequalities give

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\ ||\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}||_2^2 + ||\boldsymbol{\omega}||_2^2 + 2\ \delta\ ||\nabla u||_2^2 \leq \frac{(a+1)^2}{2\ \varepsilon}\ ||u||_2^2 + 2\ |\Omega|\ r\ (1-a).$$

Therefore, for all $T>0$ there exists $C_1(T)$ such that (4.17) and (4.18) hold. □

Lemma 4.4.2. *Let the same assumptions as that of Theorem 4.2.2 hold, and u be the nonnegative maximal solution of* (4.16)*. Then for all* $T>0$ *there exists* $C_2(T,p)>0$*, such that for* $p\geq 2$

$$||u(t)||_p \leq C_2(T,p) \quad \text{for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}), \tag{4.21}$$

$$\int_0^t ||\nabla u^{\frac{p}{2}}(s)||_2^2\ ds \leq C_2(T,p) \quad \text{for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}). \tag{4.22}$$

Démonstration. We multiply the first equation in (4.16) by $p\ u^{p-1}$, integrate with respect to x, and integrate by parts. The boundary terms vanish and we obtain

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_p^p \ &\leq\ \frac{-4\ \delta\ (p-1)}{p}\ ||\nabla u^{\frac{p}{2}}||_2^2 - (p-1)\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{\omega}\ u^p\ dx\\ &+\ r\ p\int_\Omega u^{p-1}\ E(u)\ dx.\end{aligned}$$

By Cauchy-Schwarz inequality we obtain

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_p^p \ &\leq\ \frac{-4\ \delta\ (p-1)}{p}\ ||\nabla u^{\frac{p}{2}}||_2^2 + (p-1)\ ||\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}||_2\ ||u^{\frac{p}{2}}||_4^2\\ &+\ r\ p\ (1-a)\ |\Omega|.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Using the Gagliardo-Nirenberg inequality (4.13) we have

$$||u^{\frac{p}{2}}||_4 \leq C\ ||u^{\frac{p}{2}}||_{W^{1,2}}^{\frac{1}{2}}\ ||u^{\frac{p}{2}}||_2^{\frac{1}{2}}. \tag{4.24}$$

Substituting (4.24) in (4.23), and by Young inequality we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_p^p &\leq \frac{-4\,\delta\,(p-1)}{p}\,||\nabla u^{\frac{p}{2}}||_2^2 + C\,(p-1)\,||\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}||_2\,||u^{\frac{p}{2}}||_{W^{1,2}}\,||u^{\frac{p}{2}}||_2 \\
&+ r\,p\,(1-a)\,|\Omega| \\
&\leq \frac{-4\,\delta\,(p-1)}{p}\,||\nabla u^{\frac{p}{2}}||_2^2 + \frac{2\,\delta\,(p-1)}{p}\,||u^{\frac{p}{2}}||_{W^{1,2}}^2 \\
&+ C(p)\,||\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}||_2^2\,\,||u^{\frac{p}{2}}||_2^2 + C(p) \\
&\leq \frac{-2\,\delta\,(p-1)}{p}\,||\nabla u^{\frac{p}{2}}||_2^2 + C(p)\,||u||_p^p + C(p)\,||\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}||_2^2\,\,||u||_p^p + C(p).
\end{aligned}$$

Next, integrating the above inequality in time, and using (4.18) yield that there exists $C_2(T,p)$ such that (4.21) and (4.22) hold. □

Lemma 4.4.3. *Let the same assumptions as that of Theorem 4.2.2 hold, and u be the nonnegative maximal solution of (4.16). Then for all $T>0$ there exists $C_3(T)>0$, such that*

$$||\nabla u(t)||_2 \leq C_3(T) \quad \text{for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}). \tag{4.25}$$

Démonstration. We multiply the first equation in (4.16) by $-\Delta u$, integrate over Ω, and use Cauchy-Schwarz, and Young inequalities and (4.21) to obtain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||\nabla u||_2^2 &= -\delta\,||\Delta u||_2^2 + \int_\Omega (\nabla u\cdot\boldsymbol{\omega} + \nabla\cdot\boldsymbol{\omega}\,\,u)\,\,\Delta u\,dx - r\int_\Omega u\,(1-u)\,(u-a)\,\Delta u\,dx \\
&\leq -\delta\,||\Delta u||_2^2 + \frac{\delta}{2}\,||\Delta u||_2^2 + C\int_\Omega |\nabla u|^2\,|\boldsymbol{\omega}|^2\,dx \\
&+ C\int_\Omega |\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}|^2\,|u|^2\,dx + C\,r\,||u\,(1-u)\,(u-a)||_2^2 + \frac{\delta}{4}||\Delta u||_2^2 \\
&\leq -\frac{\delta}{4}\,||\Delta u||_2^2 + C\int_\Omega |\nabla u|^2\,|\boldsymbol{\omega}|^2\,dx + C\int_\Omega |\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}|^2\,|u|^2\,dx + C(T). \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

To go further requires to improve the estimate on $\boldsymbol{\omega}$ and $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}$. For that purpose, we use Lemma 4.4.1 and Lemma 4.4.2 for $p=4$ to obtain for all $T>0$

$$\int_0^t ||\nabla E(u)(s)||_2^2\,ds \leq (a+1)^2\int_0^t ||\nabla u(s)||_2^2\,ds + 4\int_0^t ||u\,\nabla u(s)||_2^2\,ds \leq C_2(T), \tag{4.27}$$

for all $t\in[0,T]\cap[0,T_{\max})$. Consequently, $\nabla E(u)$ is bounded in $L^2((0,t)\times\Omega)$. By Theorem 4.3.1 and the continuous embedding of $W^{2,2}(\Omega)$ in $W^{1,4}(\Omega)$, and $W^{1,4}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$, we have

$$||\boldsymbol{\omega}||_\infty + ||\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}||_4 \leq C\,||\boldsymbol{\omega}||_{W^{1,4}} \leq C\,||\boldsymbol{\omega}(s)||_{W^{2,2}} \leq C\,||\nabla E(u)||_2,$$

which together with (4.27) implies that

$$\int_0^t \left(||\boldsymbol{\omega}(s)||_\infty^2 + ||\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}(s)||_4^2\right)\ ds \leq C\ \int_0^t ||\nabla E(u)(s)||_2^2\ ds \leq C_2(T), \tag{4.28}$$

for all $t\in[0,T]\cap[0,T_{\max})$. Using Hölder Inequality, (4.26) becomes

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||\nabla u||_2^2 \leq -\frac{\delta}{4}\ ||\Delta u||_2^2 + C\ ||\boldsymbol{\omega}||_\infty^2 \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx + C\ ||\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}||_4^2\ ||u||_4^2 + C(T).$$

Next we integrate the above inequality in time, and use (4.21) for $p=4$, and (4.28) to obtain

$$||\nabla u(t)||_2^2 \leq ||\nabla u_0||_2^2 + C\ \int_0^t ||\boldsymbol{\omega}(s)||_\infty^2\ ||\nabla u(s)||_2^2\ ds + C(T),$$

using (4.28) again. We have thus proved (4.25). □

Lemma 4.4.4. *Let the same assumptions as that of Theorem 4.2.2 hold, and u be the nonnegative maximal solution of (4.16). Then for all $T>0$ there exists $C_4(T)>0$, such that*

$$||\boldsymbol{\omega}(t)||_\infty \leq C_4(T),\ \text{ for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}). \tag{4.29}$$

Démonstration. It follows from (4.21), (4.25) and Hölder inequality, that there exists $C(T)>0$ such that

$$||(-2u+a+1)\ \nabla u||_{\frac{3}{2}} \leq C(T)\ ||-2\ u+a+1||_6\ ||\nabla u||_2 \leq C(T).$$

Consequently, Theorem 4.3.1 ensures that

$$||\boldsymbol{\omega}||_{W^{2,\frac{3}{2}}} \leq C\ \ ||[-2\ u+a+1]\ \nabla u||_{\frac{3}{2}} \leq C(T),\ \text{ for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}).$$

Using the continuous embedding of $W^{2,\frac{3}{2}}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$ we have thus proved (4.29). □

Next, thanks to lemma A.1 in [8] we can derive a uniform bound for u.

Lemma 4.4.5. *Let the same assumptions as that of Theorem 4.2.2 hold, and u be the nonnegative maximal solution of (4.16). Then for all $T>0$ there exists $C_5(T)>0$, such that*

$$||u(t)||_\infty \leq C_5(T),\ \text{ for all } t\in[0,T]\cap[0,T_{\max}). \tag{4.30}$$

Démonstration. We can see that the function u solves

$$\left\{\begin{array}{lcll} \partial_t u & = & \nabla\cdot(\delta\ \nabla u)+\nabla\cdot f+g, & \text{a.e. in } [0,T_{\max})\times\Omega \\ u(0,x) & = & u_0(x), & \text{a.e. in } \Omega \\ \partial_n u & = & 0, & \text{a.e. on } [0,T_{\max})\times\partial\Omega, \end{array}\right. \tag{4.31}$$

where $f = -u\ \boldsymbol{\omega}$ and $g = r\ u\ E(u)$.

By the regularity (4.10) of u, and by the continuous embeddings of $W^{1,p}(\Omega)$ in $C(\bar{\Omega})$ and of $W^{2,p}(\Omega)$ in $C(\bar{\Omega})$ for $p > 2$ we obtain that $f = -u\ \boldsymbol{\omega} \in C\left((0, T_{\max}); C(\bar{\Omega})\right)$ and $\nabla f \in C\left((0, T_{\max}); C(\bar{\Omega})\right)$. Using (4.10) and the continuous embeddings of $W^{1,p}(\Omega)$ in $C(\bar{\Omega})$ for $p > 2$ again, we see that $g = r\ u\ E(u) \in C\left((0, T_{\max}) \times \bar{\Omega}\right)$. On the other hand, $f \cdot n = -u\ \boldsymbol{\omega} \cdot n = 0$ on $\partial\Omega \times (0, T_{\max})$.

Thanks to (4.21), we have

$$||u(t)||_{p_0} \leq C(T), \ \text{ for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max})$$

where $p_0 = 9$, while (4.21) and (4.29) yield

$$||f(t)||_{q_1} \leq C(T) \text{ and } \ ||g||_{q_2} \leq C(T), \ \text{ for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max})$$

where $q_1 > 4$ and $q_2 = 3 > 2$. Since $p_0 > 1 - \frac{3q_1 - 4}{q_1 - 3}$ and $p_0 = 9 > 0$, we can apply lemma A.1 in [8], and the estimate (4.30) holds. □

Lemma 4.4.6. *Let the same assumptions as that of Theorem 4.2.2 hold, and u be the nonnegative maximal solution of (4.16). Then for all $T > 0$ there exists $C_6(T) > 0$, such that*

$$||\nabla u(t)||_q \leq C_6(T), \ \text{ for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}). \tag{4.32}$$

Démonstration. Using (4.11), (4.12), (4.30) and (4.29) we have for $q > 2$

$$\begin{aligned}
||\nabla u(t)||_q \ &\leq \ C\ ||u_0||_{W^{1,q}} + C_1 \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ ||\nabla \cdot (u\ \boldsymbol{\omega})(s)||_q\ ds \\
&+ \ r\ C_1 \int_0^t \ ||\nabla (u\ E(u))(s)||_q\ ds \\
&\leq \ C\ ||u_0||_{W^{1,q}} + C_1 \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ ||u(s)||_\infty\ ||\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}(s)||_q\ ds \\
&+ \ C_1 \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ||\boldsymbol{\omega}(s)||_\infty\ ||\nabla u(s)||_q\ ds \\
&+ \ r\ C_1 \int_0^t ||(-3\ u^2 + 2\ (a+1)\ u - a)(s)||_\infty\ ||\nabla u(s)||_q\ ds. \\
&\leq \ C(T)\ \left(1 + \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (||\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}(s)||_q + ||\nabla u(s)||_q)\ ds + \int_0^t ||\nabla u(s)||_q\ ds\right).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

By Theorem 4.3.1 we have

$$||\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}(s)||_q \leq ||\boldsymbol{\omega}(s)||_{W^{2,q}} \leq K(q)\ ||(-2u + a + 1)(s)||_\infty\ ||\nabla u(s)||_q. \tag{4.34}$$

Substituting (4.34) into (4.33) and using (4.30) we obtain

$$||\nabla u(t)||_q \leq C(T) \left(1 + \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \, ||\nabla u(s)||_q \, ds + \int_0^t ||\nabla u(s)||_q \, ds\right).$$

Now, we obtain (4.32) by applying Lemma 4.3.3 with $\beta = 0$, and $\alpha = \frac{1}{2}$. □

Thanks to these lemmas we can now prove the main Theorem 4.2.2

Proof of Theorem 4.2.2. For all $T > 0$, Lemma 4.4.2 and Lemma 4.4.5 ensure that for $q > 2$

$$||u(t)||_{W^{1,q}} \leq C(T), \text{ for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max})$$

which guarantees that u cannot explode in $W^{1,q}(\Omega)$ in finite time and thus that $T_{\max} = \infty$. □

4.4.2 The monostable case

For this choice of E, system (4.1)-(4.3) now reads

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \delta \, \Delta u - \nabla \cdot (u \, \boldsymbol{\omega}) + r \, u \, (1-u), & x \in \Omega, t > 0 \\ -\varepsilon \, \Delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} & = & - \, \nabla u, & x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_{\boldsymbol{n}} u = 0 & , & \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} = \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.35}$$

when $u_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ for some $q > 2$. Since $E \in C^2(\mathbb{R})$, Theorem 4.3.2 ensures that there is a maximal solution of (4.35) in $C\left([0, T_{\max}), W^{1,q}(\Omega)\right) \cap C\left((0, T_{\max}), W^{2,q}(\Omega)\right)$ for $q > 2$.

To prove Theorem 4.2.3 we need to prove the following lemma

Lemma 4.4.7. *Let the same assumptions as that of Theorem 4.2.3 hold, and let u be the maximal solution of (4.35). Then for all $T > 0$, there exists $C_7(T) > 0$ such that*

$$\int_0^t \left(||\boldsymbol{\omega}(s)||_2^2 + ||\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}(s)||_2^2\right) \, ds \leq C_7(T), \quad \text{for all } t \in [0,T] \cap [0, T_{\max}). \tag{4.36}$$

Démonstration. The proof goes as follows. On the one hand, we multiply the first equation in (4.35) by $(\log u + 1)$ and integrate it over Ω, the boundary terms vanish. Since

$u\ (1-u)\ \log u \leq 0$ and $u\ (1-u) \leq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u\ \log u\ dx &= -\int_\Omega (\delta\ \nabla u - u\ \boldsymbol{\omega})\cdot(\frac{1}{u}\ \nabla u)\ dx + r\ \int_\Omega u\ (1-u)\ (\log u + 1)\ dx \\ &\leq -\int_\Omega \frac{\delta}{u}\ |\nabla u|^2\ dx + \int_\Omega \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla u\ dx + |\Omega|\ r. \end{aligned} \tag{4.37}$$

On the other hand, we multiply the second equation in (4.35) by $\boldsymbol{\omega}$, integrate it over Ω. Noting that the boundary conditions for $\boldsymbol{\omega}$ guarantee that $\boldsymbol{\omega}$ is tangent to $\partial\Omega$ while $\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}$ is normal to $\partial\Omega$. Consequently, $\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0$ on $\partial\Omega$ and it follows from an integration by parts that

$$\varepsilon\int_\Omega |\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}|^2\ dx + \int_\Omega |\boldsymbol{\omega}|^2\ dx = -\int_\Omega \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla u\ \ dx. \tag{4.38}$$

Adding (4.38) and (4.37) yields

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u\ \log u\ dx + \varepsilon\ ||\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}||_2^2 + ||\boldsymbol{\omega}||_2^2 \leq -4\ \delta\int_\Omega |\nabla\sqrt{u}|^2\ dx + |\Omega|\ r. \tag{4.39}$$

Finally, (4.36) is obtained by a time integration of (4.39). □

Proof of Theorem 4.2.3. Thanks to (4.36), we now argue as in the proof of Lemma 4.4.2, Lemma 4.4.3, Lemma 4.4.4, Lemma 4.4.5 and Lemma 4.4.6 to get that for $q > 2$

$$||u(t)||_\infty + ||\nabla u(t)||_q \leq C(T), \quad \text{for all } t \in [0,T]\cap[0,T_{\max}).$$

Thus, the maximal solution u of (4.35) cannot explode in finite time. □

Acknowledgment

I thank Philippe Laurençot for fruitful discussion.

Bibliographie

[1] H. Amann. Linear and quasilinear parabolic problems . *Volume I . Abstract linear theory , (1995)*

[2] T. Cazenave. A. Haraux. An Introduction to semilinear evolution equations. *Oxford lecture series in mathematics and its applications, (2006).*

[3] J. P. Dias. A simplified variational model for the bidimensional coupled evolution equations of a nematic liquid crystal. *J. Math. Anal. Appl. 67 (1979), no. 2, 525-541.*

[4] J. P. Dias. Un problème aux limites pour un système d'équations non linéaires tridimensionnel. *Bolletino, U. M.I. (5) 16-B (1979), 22-31.*

[5] P. Grindrod. Models of individual aggregation or clustering in single and multi-species communities. *J. Math. Biol. (26) (1988) 651-660.*

[6] E. Nasreddine. Well-posedness for a model of individual clustering. *ArXiv :1211.2969v1 [math.AP] (2012).*

[7] M. Schoenauer. Quelques résultats de régularité pour un système elliptique avec conditions aux limites couplées. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 5e série, tome 2, n2(1980), 125-135.*

[8] Y. Tao, M. Winkler. Boundedness in a quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system with subcritical sensitivity. *J. Differential Equations 252 (2012), no. 1, 692-715.*

Chapitre 5

A model of individual clustering with vanishing diffusion

Ce chapitre est la version préliminaire de [60]. Il est rédigé en anglais comme un article, et il est soumis à la revue : Asymptotic analysis.

A model of individual clustering with vanishing diffusion

Elissar Nasreddine

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse,
F–31062 Toulouse cedex 9, France

e-mail : elissar.nasreddine@math.univ-toulouse.fr

28 juin 2013

Abstract. We consider a model of individual clustering with two specific reproduction rates and small diffusion parameter in one space dimension. It consists of a drift-diffusion equation for the population density coupled to an elliptic equation for the velocity of individuals. We prove the convergence (in suitable topologies) of the solution of the problem to the unique solution of the limit transport problem, as the diffusion coefficient tends to zero.

5.1 Introduction

In [6], a model for the dispersal of individuals with an additional aggregation mechanism is proposed. More precisely, the population density $u(t,x)$ at location $x \in \Omega$ where Ω is an open bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $1 \leq N \leq 3$, and time $t > 0$ solves the convection-diffusion equation

$$\partial_t u = \delta\ \Delta u - \nabla \cdot (u\ \boldsymbol{\omega}) + r\ u\ E(u), \tag{5.1}$$

where $\delta > 0$, $r \geq 0$ and E is the net rate reproduction per individual . This equation is coupled to an elliptic equation for the velocity $\boldsymbol{\omega}$ which is assumed to be in the direction of increasing $E(u)$, say, of the form $\lambda \nabla E(u)$ with $\lambda > 0$. The evolution of the velocity $\boldsymbol{\omega}$ is described by

$$-\,\varepsilon\ \Delta\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} = \lambda\ \nabla E(u), \tag{5.2}$$

where $\varepsilon > 0$ and $\varepsilon\ \Delta\boldsymbol{\omega}$ is simply to smooth out any sharp local variation in $\nabla E(u)$ so that $\boldsymbol{\omega}$ represents a local average of the velocity $\lambda\ \nabla E(u)$.
We supplement (5.1) and (5.2) with no-flux boundary conditions

$$n \cdot \nabla u = n \cdot \boldsymbol{\omega} = 0,\ \ x \in \partial\Omega, t \geq 0, \tag{5.3}$$

as suggested in [6] where n is the outward normal of $\partial\Omega$. In addition, in dimension 2 or 3, we impose the following additional condition given in [3, 4, 12] to guarantee the well-posedness of the elliptic system (5.2)

$$\partial_n \boldsymbol{\omega} \times n = 0, \;\; x \in \partial\Omega, t \geq 0. \tag{5.4}$$

As usual, $v \times \omega$ is the number $v_1\ \omega_2 - v_2\ \omega_1$ if $N = 2$ and the vector field $(v_2\ \omega_3 - v_3\ \omega_2, -v_1\ \omega_3 + v_3\ \omega_1, v_1\ \omega_2 - v_2\ \omega_1)$ if $N = 3$.

We are interested here in the case where the aggregation mechanism is dominant, that is, the diffusivity δ is small. For biological models, this can change dramatically the dynamical behaviour of the solutions, and might generate finite time blow-up such as for the Keller-Segel system, see [11] for instance. Nevertheless, there are situation for which the small diffusivity limit is somehow "stable", including some models from semiconductor physics, see Markowich and Szmolyan [8], and for the Keller-Segel system with volume-filling effect, see [5, 10]. There, the authors prove the convergence, in the small diffusivity limit, of the solutions of the parabolic systems to weak entropy solutions of the corresponding hyperbolic systems. A related field of research which is currently very active is the analysis of the so-called aggregation equation $\partial_t u + \mathrm{div}(K(u)) = 0$ where K is a nonlocal linear operator, see [1, 7], and the references therein.
Taking the case of small diffusivity as a motivation, we will study the system (5.1), (5.2), (5.3) and (5.4), in the limit of vanishing diffusivity δ. More precisely, given a sufficiently smooth function E, parameters $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ and $r \geq 0$, our aim in this paper is to investigate the limit $\delta \to 0$ of the following one dimensional system

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \partial_t u_\delta & = & \delta\ \partial_x^2 u_\delta - \partial_x(u_\delta\ \varphi_\delta) + r\ u_\delta\ E(u_\delta), & x \in (-1,1), t > 0 \\ -\varepsilon\ \partial_x^2 \varphi_\delta + \varphi_\delta & = & \partial_x E(u_\delta), & x \in (-1,1), t > 0 \\ \partial_x u_\delta(t, \pm 1) & = & \varphi_\delta(t, \pm 1) = 0, & t > 0 \\ u_\delta(0,x) & = & u_0(x), & x \in (-1,1). \end{array} \right. \tag{5.5}$$

where E has two specific forms suggested in [6], namely

$$E(u) = 1 - u \tag{5.6}$$

or

$$E(u) = (1-u)(u-a), \quad \text{for some } a \in (0,1). \tag{5.7}$$

Given $u_0 \in W^{1,2}(-1,1)$, the existence and uniqueness of a global solution of (5.5) have been shown in [9], and the purpose of this paper is to prove that $(u_\delta, \varphi_\delta)$ converges to a solution of the nonlocal transport problem

$$\begin{cases} \partial_t u &= -\partial_x (u\ \varphi) + r\ u\ E(u), & x \in (-1,1), t>0, \\ -\varepsilon\ \partial_x^2 \varphi + \varphi &= \partial_x E(u), & x \in (-1,1), t>0, \\ \varphi(t,\pm 1) &= 0, & t>0, \\ u(0,x) &= u_0(x), & x \in (-1,1), \end{cases} \tag{5.8}$$

as the diffusion coefficient δ approaches zero. This leads, in a natural way, to the existence of a smooth solution of (5.8), the uniqueness being established in Proposition 5.4.2.

Our paper is organized as follows. In Section 2, we state the main results and focus on the two specific forms of E suggested in [6] : the “bistable case" (5.7), see Theorem 5.2.1, and the “monostable case" (5.6), see Theorem 5.2.2. In Section 3, we recall some results of existence and uniqueness of a global solution of (5.5) obtained in [9]. Section 4 is devoted to the uniqueness issue of smooth solutions of the transport problem (5.8). In Section 5, we focus on the bistable case (5.7). We derive a priori estimates on $(u_\delta, \varphi_\delta)$, which are uniformly valid in δ, and particularly we derive a lower bound for $\partial_x \varphi_\delta$ and an $L^\infty(W^{1,1})$ estimate on u_δ which leads to an $L^\infty(W^{2,2})$ bound on u_δ. these estimates imply, by a compactness argument, the existence of accumulation points of any sequence $(u_\delta, \varphi_\delta)_\delta$. Thanks to Section 3, we conclude that the limit of $(u_\delta, \varphi_\delta)_\delta$ is unique, and the whole family $(u_\delta, \varphi_\delta)$ converges to the unique solution of (5.8) with $E(u) = (1-u)(u-a)$. In Section 6, we analyse the limit $\delta \to 0$ of (5.5) in the monostable case (5.6). This analysis is quite similar to that of the previous case, except for the first estimate.

5.2 Main results

Throughout this paper, and unless otherwise stated, we assume that

$$\delta \in (0,1),\ \ \varepsilon > 0,\ \ r \geq 0.$$

In [9], the global existence and uniqueness of smooth solution of (5.5) are shown when $E(u)$ has the structure (5.6) or (5.7). Our first result gives the limit $\delta \to 0$ in (5.5) in the bistable case, that is when $E(u) = (1-u)(u-a)$ for some $a \in (0,1)$.

Theorem 5.2.1. *Assume that u_0 is a nonnegative function in $W^{1,2}(-1,1)$ and $E(u) = (1-u)(u-a)$ for some $a \in (0,1)$. For $\delta > 0$, let u_δ be the global nonnegative solution to (5.5) given by Theorem 5.3.2 below. Then, for all $T > 0$*

$$\lim_{\delta \to 0} ||u_\delta(t) - u(t)||_C = 0 \ \text{ for all } t \in (0,T),$$

where $u \in C\left([0,T]; L^2(-1,1)\right) \cap L^\infty\left((0,T); W^{1,2}(-1,1)\right)$ *is the unique smooth solution of the corresponding transport system*

$$\partial_t u = -\partial_x (u\ \varphi) + r\ u\ (1-u)(u-a), \quad x \in (-1,1), t > 0, \tag{5.9}$$

$$-\varepsilon\ \partial_x^2 \varphi + \varphi = (-2\ u + a + 1)\ \partial_x u, \quad x \in (-1,1), t > 0 \tag{5.10}$$

with boundary and initial conditions

$$\varphi(t, \pm 1) = 0, \text{ for all } t > 0, \text{ and } u(0,x) = u_0(x),\ x \in (-1,1). \tag{5.11}$$

As a consequence of (5.11) no boundary conditions for u are needed.
The proof of the previous theorem is performed by deriving estimates which are uniformly valid for $0 < \delta < 1$. This proof starts with the suitable cancellation of the coupling terms in two equations which gives an estimate for u_δ in $L^\infty(L^2)$ and for φ_δ in $L^2(W^{1,2})$. Then we derive a lower bound for $\partial_x \varphi_\delta$ and an $L^\infty(W^{1,1})$ bound on u_δ which leads to an $L^\infty(W^{1,2})$ bound on u_δ. We will, by a compactness argument, show the convergence of u_δ to the smooth solution of the transport system (5.9), (5.10) and (5.11).

Next, we turn to the monostable case, that is when $E(u) = 1-u$, and we study the limit $\delta \to 0$.

Theorem 5.2.2. *Assume that u_0 is a nonnegative function in $W^{1,2}(-1,1)$ and $E(u) = (1-u)$. For $\delta > 0$ let u_δ be the global nonnegative solution of (5.5) given by Theorem 5.3.2 below. Then, for all $T > 0$*

$$\lim_{\delta \to 0} ||u_\delta(t) - u(t)||_C = 0 \text{ for all } t \in (0,T),$$

where $u \in C\left([0,T]; L^2(-1,1)\right) \cap L^\infty\left((0,T); W^{1,2}(-1,1)\right)$ *is the unique smooth solution of the following transport system,*

$$\partial_t u = -\partial_x (u\ \varphi) + r\ u\ (1-u), \quad x \in (-1,1), t > 0, \tag{5.12}$$

$$-\varepsilon\ \partial_x^2 \varphi + \varphi = -\partial_x u, \quad x \in (-1,1), t > 0, \tag{5.13}$$

with boundary and initial conditions

$$\varphi(t, \pm 1) = 0, \text{ for all } t > 0, \text{ and } u(0,x) = u_0(x),\ x \in (-1,1). \tag{5.14}$$

The proof of Theorem 5.2.2 follows the same lines as that of Theorem 5.2.1. As in the bistable case, there is a cancellation between the two equations but it only gives an $L^\infty(L \log L)$ bound on u_δ and an $L^2(W^{1,2})$ bound on φ_δ.

5.3 Well-Posedness of (5.5)

We first recall the notion of solution to (5.5) to be used in this paper.

Definition 5.3.1. *Let $T > 0$, $E \in C^2(\mathbb{R})$, and an initial condition $u_0 \in W^{1,2}(-1,1)$. For $0 < \delta < 1$, a strong solution to (5.5) on $[0,T)$ is a function*

$$u_\delta \in C\left([0,T), W^{1,2}(-1,1)\right) \cap C\left((0,T), W^{2,2}(-1,1)\right),$$

such that

$$\begin{cases} \partial_t u_\delta &=& \delta\ \partial_x^2 u_\delta - \partial_x(u_\delta\ \varphi_\delta) + r\ u_\delta\ E(u_\delta), & \text{a.e. in } [0,T) \times (-1,1) \\ u_\delta(0,x) &=& u_0(x), & \text{a.e. in } (-1,1) \\ \partial_x u_\delta(t,\pm 1) &=& 0, & \text{a.e. on } [0,T), \end{cases}$$

where, for all $t \in [0,T)$, $\varphi_\delta(t)$ is the unique solution in $W^{2,2}(-1,1)$ of

$$\begin{cases} -\varepsilon\partial_x^2\varphi_\delta(t) + \varphi_\delta(t) &=& \partial_x E(u_\delta(t)) \quad \text{a.e. in } (-1,1) \\ \varphi_\delta(t,\pm 1) &=& 0 \end{cases}$$

We now recall the global existence theorem which is proved in [9], where $E(u)$ is given by (5.6) or (5.7).

Theorem 5.3.2. *Assume that u_0 is a nonnegative function in $W^{1,2}(-1,1)$, and $E(u) = (1-u)(u-a)$ for some $a \in (0,1)$ or $E(u) = 1-u$. Then (5.5) has a unique global nonnegative solution u in the sense of Definition 5.3.1.*

5.4 Uniqueness

In this section we prove the uniqueness of the solution of (5.8). Let us first give the definition of the strong solution of (5.8).

Definition 5.4.1. *Let $T > 0$, $E \in C^2(\mathbb{R})$, and an initial condition $u_0 \in W^{1,2}(-1,1)$. A strong solution on $[0,T)$ to the transport system (5.8) is a function*

$$u \in C\left([0,T), L^2(-1,1)\right) \cap C\left((0,T), W^{1,2}(-1,1)\right),$$

such that

$$\begin{cases} \partial_t u &=& -\partial_x(u\ \varphi) + r\ u\ E(u), & \text{a.e. in } [0,T) \times (-1,1) \\ u(0,x) &=& u_0(x), & \text{a.e. in } (-1,1), \end{cases}$$

where, for all $t \in [0,T)$, $\varphi(t)$ is the unique solution in $W^{2,2}(-1,1)$ of

$$\begin{cases} -\varepsilon\partial_x^2\varphi(t)+\varphi(t) & = & \partial_x E(u(t)) & \text{a.e. in } (-1,1) \\ \varphi(t,\pm 1) & = & 0 & . \end{cases}$$

The main result is contained in

Proposition 5.4.2. *Assume that u_0 is a nonnegative function in $W^{1,2}(-1,1)$ and $E \in C^2(\mathbb{R})$. Then for all $T>0$, there exists at most one solution u of (5.8) in the sense of Definition 5.4.1, such that*

$$u \in L^\infty\left((0,T), W^{1,1}(-1,1)\right), \quad \text{and} \quad \varphi \in L^\infty\left((0,T); W^{1,\infty}(-1,1)\right). \tag{5.15}$$

Démonstration. Let us assume that there exist two different solutions u_1 and u_2 to (5.8) corresponding to the same initial conditions, and fix $T>0$. We put

$$(u,\varphi) = (u_1-u_2, \varphi_1-\varphi_2), \text{ in } [0,T]\times(-1,1).$$

Then (u,φ) satisfies

$$\begin{cases} \partial_t u & = & -\partial_x(u\ \varphi_1) - \partial_x(u_2\ \varphi) + r\ u_1\ E(u_1) - r\ u_2\ E(u_2), & \text{in } (0,T)\times(-1,1) \\ -\varepsilon\partial_x^2\varphi+\varphi & = & E'(u_1)\ \partial_x u_1 - E'(u_2)\ \partial_x u_2, & \text{in } (0,T)\times(-1,1) \\ \varphi(t,\pm1) & = & 0 & \text{on } (0,T) \\ u(0,x) & = & 0, & \text{in } (-1,1). \end{cases} \tag{5.16}$$

We multiply the first equation in (5.16) by $\mathrm{sign}(u)$, and integrate it by parts over $(-1,1)$ to obtain

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_1 &= -\int_{-1}^1 \varphi_1\ \partial_x|u|\ dx - \int_{-1}^1 \partial_x\varphi_1\ |u|\ dx \\ &- \int_{-1}^1 \mathrm{sign(u)}\ \partial_x\varphi\ u_2\ dx - \int_{-1}^1 \varphi\ \partial_x u_2\ \mathrm{sign(u)}\ dx \\ &+ r\int_{-1}^1 (u_1\ E(u_1) - u_2\ E(u_2)))\ \mathrm{sign(u)}\ dx \\ &\le ||\partial_x\varphi||_1\ ||u_2||_\infty + ||\partial_x u_2||_1\ ||\varphi||_\infty + r\ ||u_1\ E(u_1) - u_2\ E(u_2)||_1, \end{aligned} \tag{5.17}$$

since the first line in the right-hand side vanishes. Using the fact that u_1 and u_2 are bounded by (5.15) and the embedding of $W^{1,1}(-1,1)$ in $L^\infty(-1,1)$ we estimate

$$||u_1\ E(u_1) - u_2\ E(u_2)||_1 \le C\ ||u||_1. \tag{5.18}$$

Using (5.15), (5.18), and the continuous embedding of $W^{1,1}(-1,1)$ in $L^\infty(-1,1)$, (5.17) becomes

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_1 \leq C\ ||\partial_x\varphi||_1 + C\ ||\varphi||_\infty + C\ ||u||_1. \tag{5.19}$$

To complete the proof of Proposition 5.4.2, it remains to estimate $||\partial_x\varphi||_1$ and $||\varphi||_\infty$.

For $x, y \in (-1,1)$, we integrate the second equation in (5.16) to obtain

$$\begin{aligned} -\,\varepsilon \int_y^x \partial_x^2\varphi(z)\ dz + \int_y^x \varphi(z)\ dz &= \int_y^x (\partial_x E(u_1) - \partial_x E(u_2))\ dz \\ -\varepsilon\ (\partial_x\varphi(x) - \partial_x\varphi(y)) + \int_y^x \varphi(z)\ dz &= [E(u_1(x)) - E(u_2(x)) - E(u_1(y)) + E(u_2(y))]. \end{aligned}$$

Next we integrate the above equality with respect to y over $(-1,1)$ to obtain

$$\partial_x\varphi(x) = \frac{1}{2\ \varepsilon}\int_{-1}^1\int_y^x \varphi(z)\,dzdy - \frac{1}{\varepsilon}\ E(u_1(x)) + \frac{1}{\varepsilon}E(u_2(x)) + \frac{1}{2\ \varepsilon}\int_{-1}^1 (E(u_1(y)) - E(u_2(y)))\ dy.$$

This gives

$$|\partial_x\varphi(x)| \leq \frac{||\varphi||_1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\ |E(u_1(x)) - E(u_2(x))| + \frac{1}{2\ \varepsilon}\ ||E(u_1) - E(u_2)||_1.$$

Therefore

$$||\partial_x\varphi||_1 \leq 2\ \frac{||\varphi||_1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\ ||E(u_1) - E(u_2)||_1 + \frac{1}{\varepsilon}\ ||E(u_1) - E(u_2)||_1.$$

Since u_1 and u_2 are bounded and $E \in C^2(\mathbb{R})$ we obtain

$$||\partial_x\varphi||_1 \leq 2\ \frac{||\varphi||_1}{\varepsilon} + C\ \frac{2}{\varepsilon}\ ||u||_1. \tag{5.20}$$

It remains to prove an L^1 estimate to φ. For that purpose, we define, for $i = 1, 2$, the function $\psi_i \in L^\infty((0,T), W^{2,\infty}(-1,1))$ solution of

$$\begin{cases} -\partial_x^2\psi_i(t,x) &= \varphi_i(t,x),\ \text{in } (-1,1) \\ \psi_i(t,\pm 1) &= 0. \end{cases} \tag{5.21}$$

We multiply the second equation in (5.16) by $\psi = \psi_1 - \psi_2$ and integrate it over $(-1,1)$ to obtain

$$\begin{aligned} ||\varphi||_2^2 + ||\partial_x\psi||_2^2 &= \int_{-1}^1 \partial_x\left(E(u_1) - E(u_2)\right)\ \psi\ dx \\ &\leq ||E(u_1) - E(u_2)||_1\ ||\partial_x\psi||_\infty \leq C\ ||u||_1\ ||\partial_x\psi||_\infty. \end{aligned}$$

By the continuous embedding of $W^{1,2}(-1,1)$ in $L^{\infty}(-1,1)$ and by (5.21), the previous inequality reads

$$||\partial_x \psi||_{W^{1,2}} \leq C\ ||u||_1$$

and

$$||\varphi||_1 \leq C\ ||\varphi||_2 = C\ ||\partial_x^2 \psi||_2 \leq C(||\partial_x \psi||_2 + ||\partial_x^2 \psi||_2) \leq C\ ||u||_1. \tag{5.22}$$

Substituting (5.22) into (5.20), and by the continuous embedding of $W^{1,1}(-1,1)$ in $L^{\infty}(-1,1)$ we obtain

$$||\varphi||_{\infty} \leq C\ ||\partial_x \varphi||_1 \leq C\ ||u||_1. \tag{5.23}$$

Finally, we substitute (5.23) into (5.19) we obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||_1 \leq C\ ||u||_1 + r\ C\ ||u||_1. \tag{5.24}$$

Gronwall's inequality applied to inequality (5.24) implies that the two solutions are identical, which proves Proposition 5.4.2. □

5.5 The bistable case : $E(u) = (1-u)(u-a)$

Let $T > 0$, the system (5.5) now reads

$$\begin{cases} \partial_t u_\delta & = & \delta\ \partial_x^2 u_\delta - \partial_x(u_\delta\ \varphi_\delta) + r\ u_\delta\ (u_\delta - a)(1-u_\delta), & \text{in } (0,T)\times(-1,1) \\ -\varepsilon\ \partial_x^2 \varphi_\delta + \varphi_\delta & = & (-2u_\delta + (a+1))\ \partial_x u_\delta, & \text{in } (0,T)\times(-1,1) \\ \partial_x u_\delta(t,\pm 1) & = & \varphi_\delta(t,\pm 1) = 0, & \text{on } (0,T), \\ u_\delta(0,x) & = & u_0(x), & \text{in } (-1,1), \end{cases} \tag{5.25}$$

for some $a \in (0,1)$.

Thanks to Theorem 5.3.2, (5.25) has a unique global nonnegative solution in the sense of the Definition 5.3.1.

Integrating (5.25) over $(0,T)\times(-1,1)$ and using the nonnegativity of u_δ, we first observe that

$$||u_\delta(t)||_1 \leq ||u_0||_1 + 2\ r\ (1-a)\ T, \quad \text{for all } t \in [0,T]. \tag{5.26}$$

5.5.1 Estimates

Lemma 5.5.1. *There is $C_1(T) > 0$ independent of δ such that*

$$\int_0^T \left(\frac{\varepsilon}{2}\ ||\partial_x \varphi_\delta||_2^2 + ||\varphi_\delta||_2^2 + 2\ \delta\ ||\partial_x u_\delta||_2^2\right)\ dt \leq C_1(T), \quad \text{for all } t \in [0,T] \tag{5.27}$$

$$||u_\delta(t)||_2 \leq C_1(T), \quad \text{for all } t \in [0,T], \tag{5.28}$$

and

$$\int_0^T ||\varphi_\delta||_\infty^2 \; dt \leq C_1(T) \;\; \text{for all } t \in [0,T]. \tag{5.29}$$

Démonstration. Multiplying the first equation in (5.25) by $2\ u_\delta$ and integrating it over $(-1,1)$, we obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^{1} |u_\delta|^2 \; dx = -2\ \delta \int_{-1}^{1} |\partial_x u_\delta|^2 \; dx + 2 \int_{-1}^{1} u_\delta\ \varphi_\delta\ \partial_x u_\delta \; dx + 2\ r \int_{-1}^{1} u_\delta^2\ E(u_\delta) \; dx. \tag{5.30}$$

Multiplying now the second equation in (5.25) by φ_δ and integrating it over $(-1,1)$ we obtain

$$\varepsilon \int_{-1}^{1} |\partial_x\ \varphi_\delta|^2 \; dx + \int_{-1}^{1} |\varphi_\delta|^2 \; dx = -2 \int_{-1}^{1} u_\delta\ \varphi_\delta\ \partial_x u_\delta \; dx + (a+1) \int_{-1}^{1} \partial_x u_\delta\ \varphi_\delta \; dx. \tag{5.31}$$

At this point we notice that the cubic terms on the right hand side of (5.30) and (5.31) cancel one with the other, and summing (5.31) and (5.30) we obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u_\delta||_2^2 + \varepsilon\ ||\partial_x\varphi_\delta||_2^2 + ||\varphi_\delta||_2^2 + 2\ \delta\ ||\partial_x u_\delta||_2^2 = 2\ r \int_{-1}^{1} u_\delta^2\ E(u_\delta) \; dx + (a+1) \int_{-1}^{1} \partial_x u_\delta\ \varphi_\delta \; dx. \tag{5.32}$$

We integrate by parts and use Cauchy-Schwarz inequality to obtain

$$(a+1) \int_{-1}^{1} \partial_x u_\delta\ \varphi_\delta \; dx = -(a+1) \int_{-1}^{1} u_\delta\ \partial_x \varphi_\delta \; dx \leq \frac{(a+1)^2}{2\ \varepsilon}\ ||u_\delta||_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\ ||\partial_x\varphi_\delta||_2^2.$$

On the other hand, $u_\delta^2\ E(u_\delta) \leq 0$ if $u_\delta \notin (a,1)$ so that

$$\int_{-1}^{1} u_\delta^2\ E(u_\delta) \; dx \leq 2\ (1-a)$$

The previous inequalities give that

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u_\delta||_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\ ||\partial_x\varphi_\delta||_2^2 + ||\varphi_\delta||_2^2 + 2\ \delta\ ||\partial_x u_\delta||_2^2 \leq \frac{(a+1)^2}{2\ \varepsilon}\ ||u_\delta||_2^2 + 4\ r\ (1-a).$$

Therefore, by a time integration, there exists $C_1(T)$ such that (5.27) and (5.28) hold. By the continuous embedding of $W^{1,2}(-1,1)$ in $L^\infty(-1,1)$ we obtain (5.29). □

Lemma 5.5.2. *There is $C_2(T) > 0$ independent of δ such that*

$$||\varphi_\delta(t)||_2 \leq C_2(T), \;\; \text{for all } t \in [0,T]. \tag{5.33}$$

Démonstration. We define the function $\psi \in L^2\left(0,T;W^{2,2}(-1,1)\right)$ solution of

$$\begin{cases} -\partial_x^2 \psi_\delta &= \varphi_\delta \quad \text{in } (-1,1) \\ \psi_\delta(t,\pm 1) &= 0, \quad \text{in } [0,T). \end{cases} \tag{5.34}$$

Multiplying the second equation in (5.25) by ψ_δ and integrating it over $(-1,1)$ we obtain

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_{-1}^{1} \varphi_\delta\ \partial_x^2\psi_\delta\ dx - \int_{-1}^{1} \partial_x^2\psi_\delta\ \psi_\delta\ dx &= -\int_{-1}^{1} E(u_\delta)\ \partial_x\psi_\delta\ dx \\ \varepsilon\ \|\partial_x^2\psi_\delta\|_2^2 + \|\partial_x\psi_\delta\|_2^2 &\leq \|E(u_\delta)\|_1\ \|\partial_x\psi_\delta\|_\infty. \end{aligned}$$

Using the embedding of $W^{1,2}(-1,1)$ in $L^\infty(-1,1)$ and the specific form (5.7) of E we obtain

$$\|\partial_x\psi_\delta\|_{W^{1,2}} \leq C\ \|E(u_\delta)\|_1 \leq C\ (1+\|u_\delta\|_2^2). \tag{5.35}$$

Using (5.34) and (5.28) the above inequation becomes

$$\|\varphi_\delta\|_2 = \|\partial_x^2\psi_\delta\|_2 \leq \|\partial_x\psi_\delta\|_{W^{1,2}} \leq C. \tag{5.36}$$

□

Lemma 5.5.3. *For $0<\delta<1$, there exists $C(T)>0$ independent of δ such that*

$$\partial_x\varphi_\delta(x) \geq -4\ \|\varphi_\delta\|_\infty - \frac{(a+1)^2}{4\ \varepsilon} - C(T). \tag{5.37}$$

Démonstration. For $x,y\in(-1,1)$, we integrate the second equation in (5.25) to obtain

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_y^x \partial_x^2\varphi_\delta(z)\ dz + \int_y^x \varphi_\delta(z)\ dz &= \int_y^x (-2u_\delta + a + 1)\ \partial_x u_\delta\ dz \\ -\varepsilon\ (\partial_x\varphi_\delta(x) - \partial_x\varphi_\delta(y)) + \int_y^x \varphi_\delta(z)\ dz &= -[u_\delta^2(x) - u_\delta^2(y)] + (a+1)\ (u_\delta(x) - u_\delta(y)). \end{aligned}$$

Next we integrate the above equality with respect to y over $(-1,1)$ to obtain

$$-2\ \varepsilon\ \partial_x\varphi_\delta(x) = -\int_{-1}^{1}\int_y^x \varphi_\delta(z)\ dzdy - 2\ u_\delta^2(x) + 2\ (a+1)\ u_\delta(x) + \|u_\delta\|_2^2 - (a+1)\ \|u_\delta\|_1.$$

Since $\frac{1}{\varepsilon}\ u_\delta^2 - \frac{(a+1)}{\varepsilon}u_\delta \geq -\frac{(a+1)^2}{4\ \varepsilon}$, and

$$\int_{-1}^{1}\int_y^x \varphi_\delta(z)\ dzdy \geq -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \|\varphi_\delta\|_\infty\ dzdy \geq -4\ \|\varphi_\delta\|_\infty,$$

it follows from (5.28) that

$$\begin{aligned}
\partial_x \varphi_\delta(x) &= \frac{1}{2\ \varepsilon} \int_{-1}^{1} \int_{y}^{x} \varphi_\delta(z)\ dzdy + \frac{1}{\varepsilon}\ u_\delta^2(x) - \frac{a+1}{\varepsilon}\ u_\delta(x) - \frac{1}{2\ \varepsilon} \|u_\delta\|_2^2 + \frac{a+1}{2\ \varepsilon}\ \|u_\delta\|_1 \\
&\geq -\frac{2}{\varepsilon}\ \|\varphi_\delta\|_\infty - \frac{(a+1)^2}{4\ \varepsilon} - C(T).
\end{aligned}$$

□

We continue with estimates for the derivatives of u_δ.

Lemma 5.5.4. *There is $C_3(T) > 0$ independent of δ such that*

$$\|\partial_x u_\delta(t)\|_1 \leq C_3(T) \quad \text{for all } t \in [0, T]. \tag{5.38}$$

Démonstration. We set $g_\delta = \partial_x u_\delta$ to simplify the notation, and differentiate the first equation in (5.25) with respect to x. This yields

$$\partial_t g_\delta + \partial_x^2 (u_\delta\ \varphi_\delta) - r\ \partial_x\left(u_\delta\ (1-u_\delta)\ (u_\delta - a)\right) = \delta\ \partial_x^2 g_\delta. \tag{5.39}$$

We define an approximation of the sign function by $\sigma_\gamma(z) = \sigma(\frac{z}{\gamma})$, $0 < \gamma \ll 1$, with σ smooth and increasing, $\sigma(0) = 0$, and $\sigma(z) = \text{sign } z$ for $|z| > 1$. Then, with $\text{abs}_\gamma(z) = \int_0^z \sigma_\gamma(\xi)\ d\xi$, the convergence of $\text{abs}_\gamma(z)$ to $|z|$ as $\gamma \to 0$ is uniform in $z \in \mathbb{R}$.
Multiplying (5.39) by $\sigma_\gamma(g_\delta)$ and integrating with respect to x yields

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ \partial_t g_\delta\ dx &+ \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ [\partial_x(g_\delta\ \varphi_\delta) + g_\delta\ \partial_x \varphi_\delta + u_\delta\ \partial_x^2 \varphi_\delta]\ dx \\
&- r \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ (-3\ u_\delta^2 + 2\ (a+1)\ u_\delta - a)\ g_\delta\ dx \\
&= \delta \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ \partial_x^2 g_\delta\ dx.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Since

$$\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ \partial_x(g_\delta\ \varphi_\delta)\ dx = -\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma'(g_\delta)\ \partial_x g_\delta\ g_\delta\ \varphi_\delta\ dx,$$

and

$$\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ \partial_x^2 g_\delta\ dx = -\int_{-1}^{1} (\partial_x g_\delta)^2\ \sigma_\gamma'(g_\delta)\ dx,$$

we obtain

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^{1} \mathrm{abs}_\gamma(g_\delta)\ dx \quad & - \int_{-1}^{1} \sigma'_\gamma(g_\delta)\ \partial_x g_\delta\ g_\delta\ \varphi_\delta\ dx \\
& + \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ g_\delta\ \partial_x\varphi_\delta\ dx + \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ u_\delta\ \partial_x^2\varphi_\delta\ dx \\
& - r\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ (-3\ u_\delta^2 + 2\ (a+1)\ u_\delta - a)\ g_\delta\ dx \\
& = -\delta\ \int_{-1}^{1} (\partial_x g_\delta)^2\ \sigma'_\gamma(g_\delta)\ dx \le 0. \qquad (5.41)
\end{aligned}
$$

The function $f_\gamma(z) = \sigma_\gamma(z)\ z - \mathrm{abs}_\gamma(z)$ satisfies $f'_\gamma(z) = \sigma'_\gamma(z)\ z$ and converges to 0 uniformly in $z \in \mathbb{R}$. We integrate the second term in (5.41) by parts and we use the second equation in (5.25) in the fourth one to obtain

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^{1} \mathrm{abs}_\gamma(g_\delta)\ dx \quad & + \int_{-1}^{1} f_\gamma(g_\delta)\ \partial_x\varphi_\delta\ dx + \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ g_\delta\ \partial_x\varphi_\delta\ dx \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ u_\delta\ \ (2u_\delta - a - 1)\ \ g_\delta\ dx \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ u_\delta\ \varphi_\delta\ dx \\
& \le r\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ (-3\ u_\delta^2 + 2\ (a+1)\ u_\delta - a)\ g_\delta\ dx. \qquad (5.42)
\end{aligned}
$$

Now, $|g_\delta| \ge \sigma_\gamma(g_\delta)\ g_\delta \ge 0$ and $(2u_\delta - a - 1) \ge 0$ if $u_\delta \ge \frac{a+1}{2}$, so that

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ u_\delta\ \ (2u_\delta - a - 1)\ \ g_\delta\ dx \quad & = \int_{u_\delta \ge \frac{a+1}{2}} \sigma_\gamma(g_\delta)\ u_\delta\ \ (2u_\delta - a - 1)\ \ g_\delta\ dx \\
& + 2\int_{0 < u_\delta \le \frac{a+1}{2}} u_\delta^2\ \sigma_\gamma(g_\delta)\ g_\delta\ dx \\
& - (a+1)\int_{0 < u_\delta \le \frac{a+1}{2}} \sigma_\gamma(g_\delta)\ g_\delta\ (u_\delta)\ dx \\
& \ge -\frac{(a+1)^2}{2}\int_{0 < u_\delta \le \frac{a+1}{2}} |g_\delta| dx
\end{aligned}
$$

and thus

$$
\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ u_\delta\ \ (2u_\delta - a - 1)\ \ g_\delta\ dx \ge -\frac{(a+1)^2}{2}\int_{-1}^{1} |g_\delta|\ dx. \qquad (5.43)
$$

Also, since $-3\ u_\delta^2 + 2\ (a+1)\ u_\delta - a \le \frac{(a+1)^2}{2}$ and $|g_\delta| \ge \sigma_\gamma(g_\delta)\ g_\delta \ge 0$,

$$
r\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ (-3\ u_\delta^2 + 2\ (a+1)\ u_\delta - a)\ g_\delta\ dx \le \frac{r\ (a+1)^2}{2}\int_{-1}^{1} |g_\delta|\ dx. \qquad (5.44)
$$

Passing to the limit $\gamma \to 0$ in (5.42) the first term on the right-hand side vanishes. And it follows from Lemma 5.5.3, (5.43), (5.44) and (5.26) that

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{-1}^{1} |g_\delta| \, dx \quad &- \quad \left(\frac{2}{\varepsilon} \, ||\varphi_\delta||_\infty + \frac{(a+1)^2}{4 \, \varepsilon} + C_2(T) \right) \int_{-1}^{1} |g_\delta| \, dx - \frac{(a+1)^2}{2 \, \varepsilon} \int_{-1}^{1} \, |g_\delta| \, dx \\
&\leq \quad \frac{||u_\delta||_1}{\varepsilon} \, ||\varphi_\delta||_\infty + \frac{r \, (a+1)^2}{2} \int_{-1}^{1} |g_\delta| \, dx \\
&\leq \quad \frac{C(T)}{\varepsilon} \, ||\varphi_\delta||_\infty + \frac{r \, (a+1)^2}{2} \int_{-1}^{1} |g_\delta| \, dx. \qquad (5.45)
\end{aligned}$$

Integrating (5.45) in time, and using (5.29) yield that there exists $C_3(T)$ such that (5.38) holds. $\square$

Lemma 5.5.5. *There is $C_4(T) > 0$ independent of δ such that*

$$||u_\delta(t)||_\infty \leq C_4(T) \quad \text{for all } t \in [0, T], \qquad (5.46)$$

and

$$||\partial_x \varphi_\delta(t)||_\infty \leq C_4(T) \quad \text{for all } t \in [0, T]. \qquad (5.47)$$

Démonstration. For all $T > 0$, (5.26) and Lemma 5.5.4 guarantee that

$$||u_\delta(t)||_{W^{1,1}} \leq C(T) \quad \text{for all } t \in [0, T]. \qquad (5.48)$$

Therefore, the continuous embedding of $W^{1,1}(-1, 1)$ in $L^\infty(-1, 1)$ implies that (5.46) holds. On the other hand, Lemma 5.5.4, Lemma 5.5.2, (5.46) and the second equation in (5.25) ensure that $\partial_x \varphi_\delta(t)$ is bounded in $W^{1,1}(-1, 1)$ and by the continuous embedding of $W^{1,1}(-1, 1)$ in $L^\infty(-1, 1)$ we get (5.47). $\square$

Lemma 5.5.6. *There is $C_5(T) > 0$ independent of δ such that*

$$||\partial_x u_\delta(t)||_2 \leq C_5(T) \quad \text{for all } t \in [0, T]. \qquad (5.49)$$

Démonstration. Coming back to (5.39) , $g_\delta = \partial_x u_\delta$ satisfies

$$\partial_t g_\delta = -\partial_x g_\delta \; \varphi_\delta - 2 \; g_\delta \; \partial_x \varphi_\delta - u_\delta \; \partial_x^2 \varphi_\delta + r \; \partial_x \left(u_\delta \; (1 - u_\delta) \; (u_\delta - a) \right) + \delta \; \partial_x^2 g_\delta. \quad (5.50)$$

We multiply (5.50) by g_δ and integrate it over $(-1, 1)$ to obtain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} ||g_\delta||_2^2 \quad &= \quad - \int_{-1}^{1} \partial_x g_\delta \; \varphi_\delta \; g_\delta \; dx - 2 \int_{-1}^{1} |g_\delta|^2 \; \partial_x \varphi_\delta \; dx - \int_{-1}^{1} u_\delta \; \partial_x^2 \varphi_\delta \; g_\delta \; dx \\
&+ \quad r \int_{-1}^{1} \partial_x \left(u_\delta \; (1 - u_\delta) \; (u_\delta - a) \right) \; g_\delta \; dx + \delta \int_{-1}^{1} \partial_x^2 g_\delta \; g_\delta \; dx.
\end{aligned}$$

We integrate by parts the last term of the right-hand side, and use the second equation in (5.25) to obtain

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||g_\delta||_2^2 &= -\int_{-1}^{1} \partial_x(\frac{|g_\delta|^2}{2})\ \varphi_\delta\ dx - 2\int_{-1}^{1} |g_\delta|^2\ \partial_x\varphi_\delta\ dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} u_\delta\ (-\varphi_\delta + E'(u_\delta)\ g_\delta)\ g_\delta\ dx \\ &+ r\int_{-1}^{1} \left(-3\ u_\delta^2 + 2(a+1)u_\delta - a\right)\ |g_\delta|^2\ dx - \delta\int_{-1}^{1} |\partial_x g_\delta|^2\ dx.\end{aligned}$$

We integrate the first term in the right-hand side by parts and use Hölder inequality to obtain

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||g_\delta||_2^2 &= \int_{-1}^{1} \frac{|g_\delta|^2}{2}\ \partial_x\varphi_\delta\ dx - 2\int_{-1}^{1} |g_\delta|^2\ \partial_x\varphi_\delta\ dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} u_\delta\ \varphi_\delta\ g_\delta\ dx \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} u_\delta\ (-2u_\delta + a + 1)\ |g_\delta|^2\ dx + r\int_{-1}^{1} \left(-3\ u_\delta^2 + 2(a+1)u_\delta - a\right)\ |g_\delta|^2\ dx \\ &\leq \frac{3}{2}\ ||g_\delta||_2^2\ ||\partial_x\varphi_\delta||_\infty + \frac{1}{\varepsilon}\ ||u_\delta||_\infty\ ||\varphi_\delta||_2\ ||g_\delta||_2 \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\ ||u_\delta\ (-2u_\delta + a + 1)||_\infty\ ||g_\delta||_2^2 + r\ ||-3\ u_\delta^2 + 2(a+1)u_\delta - a||_\infty\ ||g_\delta||_2^2.\end{aligned}$$

Using (5.46), (5.47) and Young inequality we obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||g_\delta||_2^2 \leq C\ ||g_\delta||_2^2 + C\ ||\varphi_\delta||_2^2, \tag{5.51}$$

it follows from (5.27) after integration that (5.49) holds. □

Lemma 5.5.7. *There is $C_6(T) > 0$ independent of δ such that*

$$||\partial_t u_\delta(t)||_{(W^{1,2})'}^2 \leq C_6(T) \quad \text{for all } t \in [0,T], \tag{5.52}$$

where $(W^{1,2})'$ denotes the dual space of $W^{1,2}$.

Démonstration. Consider $\psi \in W^{1,2}(-1,1)$ and $t \in (0,T)$. We have by the first equation in (5.25)

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-1}^{1} \partial_t u_\delta\ \psi\ dx\right| \\ =&\ \left|\int_{-1}^{1} [\partial_x\,(\delta\ \partial_x u_\delta - u_\delta\ \varphi_\delta) + r\ u_\delta\ E(u_\delta)]\ \psi\ dx\right| \\ =&\ \left|\int_{-1}^{1} (-\delta\ \partial_x u_\delta\ \partial_x\psi + u_\delta\ \varphi_\delta\ \partial_x\psi + r\ u_\delta\ (1-u_\delta)\ (u_\delta - a)\ \psi)\ dx\right| \\ \leq&\ \delta\ ||\partial_x\psi||_2\ ||\partial_x u_\delta||_2 + ||\partial_x\psi||_2\ \ ||u_\delta||_\infty\ ||\varphi_\delta||_2 + r\ ||u_\delta\ (1-u_\delta)(u_\delta - a)||_2\ ||\psi||_2.\end{aligned}$$

Using (5.49), (5.46) and Lemma 5.5.2 we end up with

$$\left|\int_{-1}^{1} \partial_t u_\delta \ \psi \ dx\right| \leq (\delta+1+r) \ C(T) \ ||\psi||_{W^{1,2}} \leq C(T) \ ||\psi||_{W^{1,2}}$$

since $0<\delta<1$. A duality argument gives

$$||\partial_t u_\delta(t)||_{(W^{1,2})'} \leq C_6(T), \quad t\in[0,T]$$

and the proof of Lemma 5.5.7 is complete. □

5.5.2 Convergence

In this section we discuss the limit of $(u_\delta,\varphi_\delta)$ as $\delta\to 0$. For that purpose, we study the compactness properties of $(u_\delta,\varphi_\delta)$.

Proof of Theorem 5.2.1. Thanks to Lemma 5.5.6 and (5.27), $(u_\delta)_\delta$ is bounded in $L^\infty\left((0,T);W^{1,2}(-1,1)\right)$ while $(\partial_t u_\delta)_\delta$ is bounded in $L^\infty\left((0,T);(W^{1,2})'(-1,1)\right)$ by Lemma 5.5.7. Since $W^{1,2}(-1,1)$ is compactly embedded in $C[-1,1]$ and $C[-1,1]$ is continuously embedded in $(W^{1,2})'(-1,1)$, it follows from [13, Corollary 4] that $(u_\delta)_\delta$ is relatively compact in $C\left([0,T]\times[-1,1]\right)$. Therefore, there are a sequence (δ_j) of positive real numbers, $\delta_j\to 0$, and $u\in L^\infty\left((0,T);W^{1,2}(-1,1)\right)$ such that

$$u_{\delta_j} \rightharpoonup u \ \text{ in } L^2\left((0,T);W^{1,2}(-1,1)\right), \tag{5.53}$$

and

$$u_{\delta_j} \longrightarrow u \ \text{ in } C\left([0,T]\times[-1,1]\right). \tag{5.54}$$

Owing to Lemma 5.5.1 and Lemma 5.5.6, we may also assume that

$$\varphi_{\delta_j} \rightharpoonup \varphi \text{ in } L^2\left((0,T);W^{1,2}(-1,1)\right) \ \text{ as } \delta_j\to 0, \tag{5.55}$$

and

$$\delta_j \ \partial_x u_{\delta_j} \longrightarrow 0 \text{ in } L^2\left((0,T)\times(-1,1)\right) \ \text{ as } \delta_j\to 0. \tag{5.56}$$

It remains to identify the equations solved by the limit (u,φ) of $(u_{\delta_j},\varphi_{\delta_j})$. Let $\psi\in C^2([0,T]\times(-1,1))$ with $\psi(T)=0$. Recall that, for $j\geq 1$,

$$\int_0^T\int_{-1}^{1} \partial_t u_{\delta_j} \ \psi \ dxdt = \int_0^T\int_{-1}^{1} \left((-\delta_j \ \partial_x u_{\delta_j} + u_{\delta_j} \ \varphi_{\delta_j}) \ \partial_x\psi + r \ u_{\delta_j} \ E(u_{\delta_j}) \ \psi\right) \ dxdt \tag{5.57}$$

and

$$\varepsilon \int_0^T \int_{-1}^1 \partial_x \varphi_{\delta_j}\ \partial_x \psi\ dxdt + \int_0^T \int_{-1}^1 \varphi_{\delta_j}\ \psi\ \ dxdt = \int_0^T \int_{-1}^1 (-2u_{\delta_j} + a + 1)\ \partial_x u_{\delta_j} \psi\ dxdt. \tag{5.58}$$

Owing to (5.55), the limit of the left-hand side of (5.58) as $\delta_j \to 0$ is given by

$$\varepsilon \int_0^T \int_{-1}^1 \partial_x \varphi\ \partial_x \psi\ dxdt + \int_0^T \int_{-1}^1 \varphi\ \psi\ dxdt.$$

From (5.53) and (5.54) we have

$$\int_0^T \int_{-1}^1 (-2u_{\delta_j} + a + 1)\ \partial_x u_{\delta_j} \psi\ dxdt \to \int_0^T \int_{-1}^1 (-2u + a + 1)\ \partial_x u\ \psi\ dxdt \quad \text{as } \delta_j \to 0.$$

Next, by (5.54) we see that

$$\int_0^T \int_{-1}^1 \partial_t u_{\delta_j}\ \psi\ dxdt \longrightarrow -\int_0^T \int_{-1}^1 u\ \partial_t \psi\ dxdt + \int_{-1}^1 u_0(x)\ \psi(0,x)\ dx, \quad \text{as } \delta_j \to 0,$$

and by (5.56)

$$-\delta_j \int_0^T \int_{-1}^1 \partial_x u_{\delta_j}\ \partial_x \psi\ dxdt \longrightarrow 0 \quad \text{as } \delta_j \to 0.$$

From (5.54) and (5.55) we see that

$$\int_0^T \int_{-1}^1 u_{\delta_j}\ \varphi_{\delta_j}\ \partial_x \psi\ dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_{-1}^1 u\ \varphi\ \partial_x \psi\ dxdt, \quad \text{as } \delta_j \to 0.$$

From (5.54) we get

$$r \int_0^T \int_{-1}^1 u_{\delta_j}\ E(u_{\delta_j})\ \psi\ dxdt \longrightarrow r \int_0^T \int_{-1}^1 u\ E(u)\ \psi\ dxdt, \quad \text{as } \delta_j \to 0.$$

Thus we conclude that (u, φ) satisfies

$$\int_0^T \langle \partial_t u, \psi \rangle\ dt = \int_0^T \int_{-1}^1 (u\ \varphi\ \partial_x \psi + r\ u\ (1-u)(u-a)\ \psi)\ dx\ dt, \tag{5.59}$$

and

$$\varepsilon \int_0^T \int_{-1}^1 \partial_x \varphi\ \partial_x \psi\ dxdt + \int_0^T \int_{-1}^1 \varphi\ \psi\ dxdt = \int_0^T \int_{-1}^1 (-2\ u + a + 1)\ \partial_x u\ \psi\ dxdt. \tag{5.60}$$

for all test functions ψ. Since (u, φ) satisfies (5.59) and (5.60), then (u, φ) is a weak solution of (5.9), (5.10) and (5.11). Recalling that $u \in L^\infty\left((0,T); W^{1,2}(-1,1)\right)$ and $\varphi \in L^\infty\left((0,T); W^{1,2}(-1,1)\right)$ by Lemma 5.5.5 and Lemma 5.5.6, we deduce from (5.59) that $\partial_t u \in L^2\left((0,T) \times (-1,1)\right)$ and from (5.60) that $\varphi \in L^\infty\left((0,T); W^{2,2}(-1,1)\right)$, so that u solves (5.9) and (5.11) in the sense of Definition 5.4.1 with the regularity (5.15). By Proposition 5.4.2, such a solution is unique so that u is the only possible cluster point of $(u_\delta)_\delta$ in $C([0,T]\times[-1,1])$. Therefore, the whole family $(u_\delta)_\delta$ converges to u in $C([0,T]\times[-1,1])$ as $\delta \longrightarrow 0$. □

5.6 The monostable case, $E(u) = 1 - u$

Let $T > 0$, system (5.5) now reads

$$\begin{cases} \partial_t u_\delta & = & \delta\ \partial_x^2 u_\delta - \partial_x(u_\delta\ \varphi_\delta) + r\ u_\delta\ (1-u_\delta) & x\in(-1,1),\ t>0 \\ -\varepsilon\ \partial_x^2\varphi_\delta + \varphi_\delta & = & -\ \partial_x u_\delta, & x\in(-1,1),\ t>0 \\ \partial_x u_\delta(t,\pm 1) = \varphi_\delta(t,\pm 1) & = & 0 & t>0, \\ u_\delta(0,x) & = & u_0(x) & x\in(-1,1), \end{cases} \tag{5.61}$$

Thanks to Theorem 5.3.2, system (5.61) has a unique global nonnegative solution in the sense of Definition 5.3.1.

Unlike the previous case, it does not seem to be possible to begin the proof with an $L^\infty(L^2)$ estimate on u_δ. Nevertheless, there is still a cancellation between the two equations which actually gives an $L^\infty(L\log L)$ bound on u_δ and a L^2 bound on $\partial_x\sqrt{u}_\delta$ as we shall see below. Integrating (5.61) over $[0,T]\times(-1,1)$ and using the nonnegativity of u_δ, we first observe that,

$$||u_\delta(t)||_1 \leq ||u_0||_1 + 2\ r\ t, \quad \text{for all } t\in[0,T]. \tag{5.62}$$

5.6.1 Estimates

Lemma 5.6.1. *There is $C_7(T) > 0$ independent of δ such that*

$$\int_0^T \left(\varepsilon\ ||\partial_x\varphi_\delta||_2^2 + ||\varphi_\delta||_2^2 + 4\ \delta\ ||\partial_x\sqrt{u_\delta}||_2^2\right)\ dt \leq C_7(T), \quad \text{for all } t\in[0,T], \tag{5.63}$$

$$\int_0^T ||\varphi_\delta||_\infty^2\ dt \leq C_7(T), \quad \text{for all } t\in[0,T]. \tag{5.64}$$

Démonstration. The proof goes as follows. On the one hand, we multiply the first equation in (5.61) by $(\log u_\delta + 1)$ and integrate it over $(-1,1)$. Since $u_\delta\ (1-u_\delta)\ \log u_\delta \leq 0$

and $u_\delta\ (1-u_\delta) \le 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{-1}^{1} u_\delta\ \log u_\delta\ dx &= -\int_{-1}^{1} (\delta\ \partial_x u_\delta - u_\delta\ \varphi_\delta)\ (\frac{1}{u_\delta}\ \partial_x u_\delta)\ dx \\ &+\ r \int_{-1}^{1} u_\delta\ (1-u_\delta)\ (\log u_\delta + 1)\ dx \\ &\le -\int_{-1}^{1} \frac{\delta}{u_\delta}\ (\partial_x u_\delta)^2\ dx + \int_{-1}^{1} \varphi_\delta\ \partial_x u_\delta\ dx + 2\ r. \end{aligned} \tag{5.65}$$

On the other hand, we multiply the second equation in (5.61) by φ_δ and integrate it over $(-1,1)$ to obtain

$$\varepsilon \int_{-1}^{1} |\partial_x \varphi_\delta|^2\ dx + \int_{-1}^{1} |\varphi_\delta|^2\ dx = -\int_{-1}^{1} \partial_x u_\delta\ \varphi_\delta\ dx. \tag{5.66}$$

Adding (5.65) and (5.66) yields

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{-1}^{1} u_\delta\ \log u_\delta\ dx + \varepsilon\ ||\partial_x \varphi_\delta||_2^2 + ||\varphi_\delta||_2^2 \le -4\ \delta \int_{-1}^{1} |\partial_x \sqrt{u_\delta}|^2\ dx + 2\ r. \tag{5.67}$$

Then, (5.63) is obtained by a time integration of (5.67). Finally, by the continuous embedding of $W^{1,2}(-1,1)$ in $L^\infty(-1,1)$ we obtain (5.64). $\square$

Lemma 5.6.2. *For $0<\delta<1$, there exists $C_8(T)>0$ independent of δ such that*

$$\partial_x \varphi_\delta(x) \ge -4\ ||\varphi_\delta||_\infty - C_8(T) \quad \text{for all } t \in [0,T]. \tag{5.68}$$

Démonstration. For $x, y \in (-1,1)$, we integrate the second equation in (5.61) to obtain

$$\begin{aligned} -\ \varepsilon \int_y^x \partial_x^2 \varphi_\delta(z)\ dz + \int_y^x \varphi_\delta(z)\ dz &= -\int_y^x \partial_x u_\delta\ dz \\ -\varepsilon\ (\partial_x \varphi_\delta(x) - \partial_x \varphi_\delta(y)) + \int_y^x \varphi_\delta(z)\ dz &= -[u_\delta(x) - u_\delta(y)]. \end{aligned}$$

Next we integrate the above equality with respect to y over $(-1,1)$ to obtain

$$-2\ \varepsilon\ \partial_x \varphi_\delta(x) = -\int_{-1}^{1} \int_y^x \varphi_\delta(z)\ dzdy - 2\ u_\delta(x) + ||u_\delta||_1.$$

Since

$$\int_{-1}^{1} \int_y^x \varphi_\delta(z)\ dzdy \ \ \ge\ \ -4\ ||\varphi_\delta||_\infty,$$

and $u_\delta \geq 0$, it follows from (5.62) that

$$\begin{aligned}\partial_x \varphi_\delta(x) &= \frac{1}{2\ \varepsilon} \int_{-1}^{1} \int_{y}^{x} \varphi_\delta(z)\ dzdy + \frac{1}{\varepsilon}\ u_\delta(x) - \frac{1}{2\ \varepsilon}\ \|u_\delta\|_1 \\ &\geq -\frac{2}{\varepsilon}\ \|\varphi_\delta\|_\infty - C_8(T).\end{aligned}$$

□

Lemma 5.6.3. *There is $C_9(T) > 0$ independent of δ such that*

$$\|\varphi_\delta(t)\|_2 \leq C_9(T), \quad \text{for all } t \in [0,T]. \tag{5.69}$$

Démonstration. The proof is similar to that of Lemma 5.5.2. □

Now, we continue with estimates for the derivatives of u_δ.

Lemma 5.6.4. *There is $C_{10}(T) > 0$ independent of δ such that*

$$\|\partial_x u_\delta(t)\|_1 \leq C_{10}(T) \quad \text{for all } t \in [0,T]. \tag{5.70}$$

Démonstration. Differentiating the first equation in (5.61) with respect to x and setting $g_\delta = \partial_x u_\delta$ yield

$$\partial_t(g_\delta) + \partial_x^2(u_\delta\ \varphi_\delta) - r\ \partial_x\left(u_\delta\ (1 - u_\delta)\right) = \delta\ \partial_x^2 g_\delta. \tag{5.71}$$

We define as in the bistable case an approximation of the sign function by $\sigma_\gamma(z) = \sigma(\frac{z}{\gamma})$, $0 < \gamma \ll 1$, with σ smooth and increasing, $\sigma(0) = 0$, and $\sigma(z) = \text{sign } z$ for $|z| > 1$. Then, with $\text{abs}_\gamma(z) = \int_0^z \sigma_\gamma(\xi)\ d\xi$, the convergence of $\text{abs}_\gamma(z)$ to $|z|$ as $\gamma \to 0$ is uniform in $z \in \mathbb{R}$.
Multiplying (5.71) by $\sigma_\gamma(g_\delta)$ and integrating with respect to x yields

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ \partial_t(g_\delta)\ dx &+ \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ [\partial_x(g_\delta\ \varphi_\delta) + g_\delta\ \partial_x\varphi_\delta + u_\delta\ \partial_x^2\varphi_\delta]\ dx \\ &- r \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ (1 - 2\ u_\delta)\ g_\delta\ dx \\ &= \delta \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ \partial_x^2 g_\delta\ dx.\end{aligned} \tag{5.72}$$

Since

$$\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ \partial_x(g_\delta\ \varphi_\delta)\ dx = -\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma'(g_\delta)\ \partial_x g_\delta\ g_\delta\ \varphi_\delta\ dx$$

and

$$\delta \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ \partial_x^2 g_\delta\ dx = -\delta \int_{-1}^{1} (\partial_x g_\delta)^2\ \sigma_\gamma'(g_\delta)\ dx$$

we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^{1} \mathrm{abs}_\gamma(g_\delta)\ dx \quad &- \quad \int_{-1}^{1} \sigma'_\gamma(g_\delta)\ \partial_x g_\delta\ g_\delta\ \varphi_\delta\ dx \\
&+ \quad \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ g_\delta\ \partial_x \varphi_\delta\ dx + \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ u_\delta\ \partial_x^2 \varphi_\delta\ dx \\
&- \quad r \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ (1 - 2\ u_\delta)\ g_\delta\ dx \\
&= \quad -\delta \int_{-1}^{1} (\partial_x g_\delta)^2\ \sigma'_\gamma(g_\delta)\ dx \le 0. \qquad (5.73)
\end{aligned}$$

The function $f_\gamma(z) = \sigma_\gamma(z)\ z - \mathrm{abs}_\gamma(z)$ satisfies $f'_\gamma(z) = \sigma'_\gamma(z)\ z$ and converges to 0 uniformly in $z \in \mathbb{R}$. We integrate the second term in (5.73) by parts and we use the second equation in (5.61) in the fourth one to obtain

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^{1} \mathrm{abs}_\gamma(g_\delta)\ dx \quad &+ \quad \int_{-1}^{1} f_\gamma(g_\delta)\ \partial_x \varphi_\delta\ dx + \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ g_\delta\ \partial_x \varphi_\delta\ dx \\
&\le \quad -\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ u_\delta\ g_\delta\ dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ u_\delta\ \varphi_\delta\ dx \\
&+ \quad r \int_{-1}^{1} \sigma_\gamma(g_\delta)\ (1 - 2\ u_\delta)\ g_\delta\ dx. \\
&\le \quad \frac{1}{\varepsilon}\ ||u_\delta||_1\ ||\varphi_\delta||_\infty + r \int_{-1}^{1} |g_\delta|\ dx,
\end{aligned}$$

since $u_\delta \ge 0$, $1 - 2u_\delta \le 1$ and $0 \le \sigma_\gamma(g_\delta)\ g_\delta \le |g_\delta|$. Passing to the limit $\gamma \to 0$ in the above inequality, the second term on the left-hand side vanishes. It follows from Lemma 5.6.2 and (5.62) that

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^{1} |g_\delta|\ dx \quad &- \quad \left(\frac{2}{\varepsilon}\ ||\varphi_\delta||_\infty + C_8(T)\right) \int_{-1}^{1} |g_\delta|\ dx \\
&\le \quad \frac{C(T)}{\varepsilon}\ ||\varphi_\delta||_\infty + r \int_{-1}^{1} |g_\delta|\ dx. \qquad (5.74)
\end{aligned}$$

Integrating (5.74) in time, and using (5.64) yield that there exists $C_{10}(T)$ such that (5.70) holds. $\square$

As in the previous section, we have the following consequence of Lemma 5.6.3 and Lemma 5.6.4.

Lemma 5.6.5. *There is $C_{11}(T) > 0$ independent of δ such that*

$$||\partial_x \varphi_\delta(t)||_\infty + ||u_\delta(t)||_\infty \le C_{11}(T) \quad \text{for all } t \in [0, T]. \qquad (5.75)$$

Lemma 5.6.6. *There is $C_{12}(T) > 0$ independent of δ such that*

$$||\partial_x u_\delta(t)||_2 \leq C_{12}(T) \quad \text{for all } t \in [0,T]. \tag{5.76}$$

Démonstration. Since (5.75) holds, we argue as in the proof of Lemma 5.5.6 to obtain (5.76). □

Lemma 5.6.7. *There is $C_{13}(T) > 0$ independent of δ such that*

$$||\partial_t u_\delta(t)||^2_{(W^{1,2})'} \leq C_{13}(T) \quad \text{for all } t \in [0,T]. \tag{5.77}$$

Démonstration. Consider $\psi \in W^{1,2}(-1,1)$ and $t \in (0,T)$. We have by the first equation in (5.61)

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-1}^{1} \partial_t u_\delta \ \psi \ dx \right| \\
= & \left| \int_{-1}^{1} \left(-\delta \ \partial_x u_\delta \ \partial_x \psi + u_\delta \ \varphi_\delta \ \partial_x \psi + r \ u_\delta \ (1-u_\delta) \ \psi \right) \ dx \right| \\
\leq & \ \ \delta \ ||\partial_x \psi||_2 \ ||\partial_x u_\delta||_2 + ||\partial_x \psi||_2 \ \ ||u_\delta||_\infty \ ||\varphi_\delta||_2 + r \ ||u_\delta \ (1-u_\delta)||_2 \ ||\psi||_2.
\end{aligned}$$

Using Lemma 5.6.3, Lemma 5.6.5 and Lemma 5.6.6, we end up with

$$\left| \int_{-1}^{1} \partial_t u_\delta \ \psi \ dx \right| \ \ \leq \ \ C(T) \ ||\psi||_{W^{1,2}},$$

and a duality argument gives

$$||\partial_t u_\delta(t)||_{(W^{1,2})'} \leq C(T), \quad t \in [0,T]$$

and the proof of Lemma 5.6.7 is complete. □

5.6.2 Convergence

Proof of Theorem 5.2.2. Thanks to Lemma 5.6.5 and Lemma 5.6.6, $(u_\delta)_\delta$ is bounded in $L^\infty\left((0,T); W^{1,2}(-1,1)\right)$ while $(\partial_t u_\delta)_\delta$ is bounded in $L^\infty\left((0,T); (W^{1,2})'(-1,1)\right)$ by Lemma 5.6.5. Since $W^{1,2}(-1,1)$ is compactly embedded in $C[-1,1]$ and $C[-1,1]$ is continuously embedded in $(W^{1,2})'(-1,1)$, it follows from [13, Corollary 4] that $(u_\delta)_\delta$ is relatively compact in $C\left([0,T] \times [-1,1]\right)$. Therefore, there are a sequence (δ_j) of positive real numbers, $\delta_j \to 0$, and $u \in L^\infty\left((0,T); W^{1,2}(-1,1)\right)$ such that

$$u_{\delta_j} \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2\left((0,T); W^{1,2}(-1,1)\right), \tag{5.78}$$

and

$$u_{\delta_j} \longrightarrow u \quad \text{in } C\left([0,T] \times (-1,1)\right). \tag{5.79}$$

Owing to Lemma 5.6.1 and Lemma 5.6.6 we may also assume that

$$\varphi_{\delta_j} \rightharpoonup \varphi \text{ in } L^2\left((0,T); W^{1,2}(-1,1)\right) \text{ as } \delta_j \to 0, \tag{5.80}$$

and

$$\delta_j\ \partial_x u_{\delta_j} \longrightarrow 0 \text{ in } L^2\left((0,T) \times (-1,1)\right) \text{ as } \delta_j \to 0. \tag{5.81}$$

It remains to identify the equations solved by the limit u of (u_{δ_j}). Let $\psi \in C^2([0,T] \times [-1,1])$ with $\psi(T) = 0$. Since

$$\int_0^T \int_{-1}^1 \partial_t u_{\delta_j}\ \psi\ dxdt = \int_0^T \int_{-1}^1 \left((-\delta_j\ \partial_x u_{\delta_j} + u_{\delta_j}\ \varphi_{\delta_j})\ \partial_x \psi + r\ u_{\delta_j}\ E(u_{\delta_j})\ \psi\right)\ dxdt \tag{5.82}$$

and

$$\varepsilon \int_0^T \int_{-1}^1 \partial_x \varphi_{\delta_j}\ \partial_x \psi\ dxdt + \int_0^T \int_{-1}^1 \varphi_{\delta_j}\ \psi\ \ dxdt = \int_0^T \int_{-1}^1 (-\partial_x u_{\delta_j})\ \psi\ dxdt. \tag{5.83}$$

Owing to (5.80) and (5.78), it is straightforward to pass to the limit as $\delta_j \to 0$ in (5.83) and find

$$\varepsilon \int_0^T \int_{-1}^1 \partial_x \varphi\ \partial_x \psi\ dxdt + \int_0^T \int_{-1}^1 \varphi\ \psi\ dxdt = \int_0^T \int_{-1}^1 (-\partial_x u)\ \psi\ dxdt.$$

Next, by (5.79) we see that

$$\int_0^T \int_{-1}^1 \partial_t u_{\delta_j}\ \psi\ dxdt \longrightarrow -\int_0^T \int_{-1}^1 u\ \partial_t \psi\ dxdt + \int_{-1}^1 u_0(x)\ \psi(0,x)\ dx, \quad \text{as } \delta_j \to 0.$$

By (5.81) and (5.78)

$$-\delta_j \int_0^T \int_{-1}^1 \partial_x u_{\delta_j}\ \partial_x \psi\ dxdt \longrightarrow 0 \quad \text{as } \delta_j \to 0.$$

From (5.79) and (5.80) we see that

$$\int_0^T \int_{-1}^1 u_{\delta_j}\ \varphi_{\delta_j}\ \partial_x \psi\ dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_{-1}^1 u\ \varphi\ \partial_x \psi\ dxdt, \quad \text{as } \delta_j \to 0.$$

From (5.79) we get

$$r \int_0^T \int_{-1}^1 u_{\delta_j}\ (1 - u_{\delta_j})\ \psi\ dxdt \longrightarrow r \int_0^T \int_{-1}^1 u\ (1-u)\ \psi\ dxdt, \quad \text{as } \delta_j \to 0.$$

Thus we conclude that (u, φ) satisfies

$$\int_0^T \langle \partial_t u, \psi \rangle \ dt = \int_0^T \int_{-1}^1 \left(u \ \varphi \ \partial_x \psi + r \ u \ (1-u) \ \psi \right) \ dx \ dt, \tag{5.84}$$

and

$$\varepsilon \int_0^T \int_{-1}^1 \partial_x \varphi \ \partial_x \psi \ dx dt + \int_0^T \int_{-1}^1 \varphi \ \psi \ dx dt = -\int_0^T \int_{-1}^1 \partial_x u \ \psi \ dx dt, \tag{5.85}$$

for all test functions ψ. Since (u, φ) satisfies (5.84) and (5.85), then (u, φ) is a weak solution to (5.12), (5.13) and (5.14). Since $u \in L^\infty \left(0, T; W^{1,2}(-1,1)\right)$ and $\varphi \in L^\infty \left(0, T; W^{1,2}(-1,1)\right)$, we deduce from (5.84) that $\partial_t u \in L^2 \left((0,T) \times (-1,1)\right)$ and from (5.85) that $\varphi \in L^\infty \left(0, T; W^{2,2}(-1,1)\right)$. Consequently, u solves (5.12) and (5.14) in the sense of Definition 5.4.1 and has the regularity (5.15). According to the Proposition 5.4.2, such a solution is unique and $(u_\delta)_\delta$ has only one possible cluster point in $C\left([0,T] \times [-1,1]\right)$. We conclude that the whole family $(u_\delta)_\delta$ converges to u in $C\left([0,T] \times [-1,1]\right)$ as $\delta \to 0$. $\square$

Acknowledgment

I thank Philippe Laurençot for valuable and fruitful discussions.

Bibliographie

[1] J.A. Carrillo, M. DiFrancesco, A. Figalli, T. Laurent, D. Slepčev. Global-in-time weak measure solutions and finite-time aggregation for nonlocal interaction equations. *Duke Math. J. 156 (2011), no. 2, 229-271.*

[2] T. Cazenave, A. Haraux. An Introduction to semilinear evolution equations. *Oxford lecture series in mathematics and its applications, (2006).*

[3] J. P. Dias. A simplified variational model for the bidimensional coupled evolution equations of a nematic liquid crystal. *J. Math. Anal. Appl. 67 (1979), no. 2, 525-541.*

[4] J. P. Dias. Un problème aux limites pour un système d'équations non linéaires tridimensionnel. *Bolletino, U. M.I. (5) 16-B (1979), 22-31.*

[5] Y. Dolak, C. Schmeiser. The Keller-Segel model with logistic sensitivity function and small diffusivity. *SIAM J. Appl. Math. 66 (2005), no. 1, 286-308*

[6] P. Grindrod. Models of individual aggregation or clustering in single and multi-species communities. *J. Math. Biol. (1988) 26 :651-660.*

[7] T. Laurent. Local and global existence for an aggregation equation. *Comm. Partial Differential Equations 32 (2007), no. 10-12, 1941-1964.*

[8] P. Markowhich, P. Szmolyan. A system of convection-diffusion equations with small diffusion coefficient arising in semiconductor physics. *J. Diff. Eq. 81, (1989) 234-254.*

[9] E. Nasreddine. Well-posedness for a model of individual clustering. *ArXiv :1211.2969v1 [math.AP] (2012).*

[10] B. Perthame, A.L Dalibard. Existence of solutions of the hyperbolic Keller-Segel model. *Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 5, 2319-2335.*

[11] M. Rascle, C. Ziti. Finite time blow-up in some models of chemotaxis. *J. Math. Biol. 33 (1995), no. 4, 388-414.*

[12] M. Schoenauer. Quelques résultats de régularité pour un système elliptique avec conditions aux limites couplées. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 5e série, tome 2, no. 2(1980), 125-135.*

[13] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Annali di Mathematica Pura ed Applicata (IV), vol. CXLVI, (1987), 65-69.*

Abstract

Diffusion approximation for Fokker-Planck equation with heavy tail equilibria.
Aggregation models in population dynamics.

Abstracts : This thesis includes two parts. In the first part, we concentrate on the diffusion limit of the kinetic equation of Fokker-Planck in the special case where the equilibria decay towards zero at infinity like a negative power function. If the decay rate is strong enough, we prove that the limit equation is an equation of diffusion. This study uses the method of moments and weighted Sobolev spaces. The second part is devoted to the study of two models which comes from aggregation modelling in biology. We first study the chemotaxis model of Keller-Segel, and focus on the parabolic-elliptic version with nonlinear diffusion. Making use Liapunov functional, we prove the existence of an explicit mass below which the solution exists globally in time. We next study the model of individual clustering introduced by Grindrod in 1988 : we are interested in the existence of the global solution in dimension 1 and 2, for two different choices of the rate of reproduction. We specify the long time behaviour of the solution. Finally, we study the behaviour of the solution in the case of vanishing diffusion.

Keywords : Diffusion limit, Fokker-Planck equation, equilibrium with polynomial decay, moment method, Hilbert expansion, Anomalous diffusion, mathematical models in biology, chemotaxis, elliptic system, parabolic equation, uniqueness, individual clustering, rate of reproduction, Keller-Segel system, global existence, Liapunov functional, compactness method, long-time behaviour, vanishing diffusion.

Résumé

Limite de diffusion de l'équation de Fokker-Planck avec un équilibre à décroissance lente. Modèles d'agrégation en dynamique de populations.

Résumé : Ce mémoire se compose de deux parties. Dans la première partie, nous étudions la limite de diffusion de l'équation cinétique de type Fokker-Planck dans le cas particulier où les équilibres décroissent polynômialement en vitesse. Si le taux de décroissance est assez fort, nous démontrons que l'équation limite est une équation de diffusion. Cette étude utilise la méthode des moments dans des éspace de Sobolev à poids. La seconde partie est consacrée à l'étude de deux modèles issus de la modélisation de l'agrégation en biologie. Tout d'abord, nous étudions le modèle de chimiotactisme de Keller-Segel. Nous considérons la version parabolique-elliptique du système de Keller-Segel avec une diffusion non linéaire critique et dégénérée. En utilisant la fonctionnelle de Liapunov, nous montrons l'existence d'une masse explicite en deça de laquelle la solution existe globalement en temps. Ensuite, nous passons à l'étude du modèle de regroupement des individus introduit par Grindrod en 1988 : nous nous intéréssons à l'existence globale de la solution en dimension 1 et 2, en considérant deux choix différents du taux de reproduction. Nous précisons le comportement asymptotique de la solution. Ensuite nous étudions le comportement de la solution dans le cas où le mécanisme d'advection domine celui de diffusion, et plus particulièrement, dans le cas de diffusion évanescente.

Mots clés : Limite de diffusion, équation de Fokker-Planck, équilibre à décroissance polynômiale, méthode des moments, développement de Hilbert, diffusion anormale, modèles mathématiques en biologie, chimiotactisme, système elliptique, équation parabolique, unicité de la solution, regroupement des individus, taux de reproduction, système de Keller-Segel, existence globale en temps, fonctionnelle de Liapunov, méthode de compacité, comportement asymptotique, diffusion évanescente.