

Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Cotutelle internationale avec :

Présentée et soutenue par :

Alain FONTAINE

Le vendredi 7 octobre 2011

Titre :

Interaction entre une onde acoustique et un fluide : Application à la thermoacoustique et à la séparation des constituants d'un mélange binaire par onde ultrasonore

ED MEGEP : Énergétique et transferts

Unité de recherche :

Laboratoire PHASE, UT3 Paul Sabatier - UFR PCA

Directeur(s) de Thèse :

Marie Catherine CHARRIER-MOJTABI, professeur de l'Université Toulouse III

Rapporteurs :

BEN HADID Hamda, professeur de l'Université de Lyon I

CALTAGIRONE Jean-Paul, professeur ENSCPB, Bordeaux

Autre(s) membre(s) du jury :

AZAIES Mejdî, professeur ENSCPB, Bordeaux

MOJTABI Abdelkader, professeur de l'Université de Toulouse III

AIRIAU Christophe, professeur IMFT, Toulouse

JACOB Xavier, maître de conférences de l'Université de Toulouse III



THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité :

Mécanique des Fluides et Energétique

Présentée et soutenue par :

Alain FONTAINE

Le vendredi 7 Octobre 2011

Interaction entre une onde acoustique et un fluide : Application à la thermoacoustique et à la séparation des constituants d'un mélange binaire par onde ultrasonore

JURY

BEN HADID Hamda, professeur de l'Université de Lyon I

CALTAGIRONE Jean-Paul, professeur ENSCPB, Bordeaux

AZAIES Mejdî, professeur ENSCPB, Bordeaux

MOJTABI Abdelkader, professeur de l'Université de Toulouse III

AIRIAU Christophe, professeur IMFT, Toulouse

JACOB Xavier, maître de conférences de l'Université de Toulouse III

Ecole doctorale :

Mécanique, Energétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)

Unité de recherche :

Laboratoire PHASE, UT3 Paul Sabatier – UFR PCA

Directeur(s) de Thèse :

Marie Catherine CHARRIER-MOJTABI, professeur de l'Université Toulouse III

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à ma directrice de thèse, le professeur Marie Catherine Charrier-Mojtabi. Je lui suis reconnaissant pour avoir assuré la direction de mes travaux et pour son soutien. Je la remercie aussi pour m'avoir partagé son expérience de la recherche et donné un aperçu très large de l'enseignement à l'université.

Je remercie également le professeur Abdelkader Mojtabi, pour avoir suivi de près ces travaux et pour ses précieux conseils.

Merci également aux professeurs Françoise Monchoux et Jean Louis Breton pour leur conseils.

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire PHASE de l'université Paul Sabatier Toulouse. Je remercie sincèrement tout le personnel du Laboratoire pour m'avoir si bien accueilli. Je remercie le professeur Vincent Gibiat, directeur du laboratoire, pour avoir suivi mes premiers pas dans le milieu de la recherche et puis m'avoir aiguillé vers ce sujet de thèse.

Un très grand merci à mes collègues doctorants, Gary et Christine avec qui j'ai partagé le bureau dans la bonne humeur, ainsi qu'à Perrine, Marie-Fraise et Didier, pour m'avoir encouragé tout au long de ma thèse.

Un grand merci à Sandra Spagnol, maitre de conférences, pour sa bonne humeur, ainsi que pour ses conseils sur la recherche et l'enseignement.

Merci également à Xavier Jacob, maitre de conférences, pour sa disponibilité et son expertise dans le domaine de l'acoustique.

Un très grand merci à Pierre Tella et Pierre De Guibert, pour leurs interventions techniques de qualité. Merci à Laëtitia et Myriam pour leur soutien administratif et logistique.

Merci à Pascal Lenormand avec qui j'ai partagé de nombreuses heures d'enseignements dans de très bonnes conditions. Merci également à Carlos Sanchez, pour sa disponibilité.

Des remerciements très spéciaux à mes chers amis qui ont toujours été là pour me soutenir. Merci pour tous les très bons moments passés et à passer avec vous !

J'exprime enfin mes vifs remerciements à mes frères Nicolas et Matthieu, pour m'avoir soutenu, ainsi qu'à Paul et Sabine, mes parents, qui m'ont permis de quitter La Réunion afin de poursuivre mes études qui aboutissent avec ces travaux. Merci beaucoup.

Résumé

Ce travail de thèse comporte deux parties : la première partie concerne l'action entre un fluide compressible et une onde acoustique stationnaire et la seconde partie est consacrée à l'interaction entre une onde progressive ultrasonore et un fluide incompressible.

Dans la première partie, on présente l'étude d'un réfrigérateur thermoacoustique et on s'intéresse plus particulièrement à l'influence de la loi d'état du gaz sur l'effet thermoacoustique. Dans un tel dispositif, l'interaction entre l'onde acoustique et un milieu poreux, appelé stack, se traduit par l'apparition d'une différence de température entre les extrémités du stack. En plaçant des échangeurs de chaleur froid et chaud de part et d'autre du stack, on tire profit de ce processus, afin de refroidir une source froide. L'efficacité de ce processus reste faible, et une meilleure compréhension des mécanismes physiques mis en jeu et des paramètres possibles de fonctionnement est nécessaire. Un modèle de calcul numérique d'écoulement compressible, utilisant le logiciel industriel COMSOL®, a été développé. Une fois validé sur des configurations classiques, le code est utilisé afin de comparer les résultats numériques obtenus à l'aide du modèle de gaz parfait et de gaz Van Der Waals, pour des conditions de fonctionnement correspondant à des pressions élevées .

Dans la deuxième partie, on présente une étude analytique et numérique de l'influence d'un écoulement généré par des ondes ultrasons (Eckart streaming) sur la séparation des espèces d'un mélange binaire en microgravité. Le fluide est contenu dans une cavité très allongée dont une partie de l'un de ses petits cotés est soumise à une onde progressive ultrasonore alors que le côté opposé est parfaitement absorbant. Un gradient de température est appliqué entre les deux autres côtés de la cellule. Dans certaines conditions, un écoulement monocellulaire s'établit et il est alors possible de séparer les espèces du mélange de part et d'autre de la cavité. Une étude analytique permet d'étudier la séparation en fonction des paramètres du faisceau acoustique, du nombre de Lewis et du nombre de Prandtl. Puis les résultats analytiques sont corroborés par des simulations numériques directes réalisées avec le logiciel COMSOL. Une étude de stabilité linéaire de l'écoulement monocellulaire est ensuite effectuée afin de comparer les paramètres acoustiques, conduisant à un optimum de séparation, à ceux entraînant la perte de stabilité de cet écoulement.

Abstract

In the present work, we study the interaction between an acoustic wave and a compressible and incompressible fluid. This wave can be either stationary or travelling.

In the first part, we present the study of a thermoacoustic refrigerator and more particularly the influence of the gas state equation on the thermoacoustic effect. Thermoacoustic heat pumping is a complex phenomenon which leads to a hydrodynamic heat flux in the thermal boundary layer near a porous medium, or a stack of plates, due to acoustic waves. In thermoacoustic refrigerator, heat exchangers are added at the edges of the stack and heat is pumped from a cold reservoir linked to the cold heat exchanger. The main drawback of these devices is their low efficiency. Thus better knowledge of the physical mechanisms is needed. A numerical tool for compressible flow is build with the industrial finite element solver COMSOL®. Literatures configurations are computed to compare numerical data with analytical theory. Then numerical investigations are done to study difference between the ideal gas law and Van Der Waals gas law on thermoacoustic heat pumping.

The second part deals with the influence of acoustic streaming on species separation of a binary mixture in a shallow cavity cell subjected to temperature gradient and under microgravity. The unicellular flow inducted by the Eckart streaming may lead to significant species separation. A rectangular cell filled with binary fluid is submitted along of a part of its small sides to an ultrasonic propagating wave while the opposite wall is perfectly absorbing. A temperature gradient is applied between the two other walls. In a first part, the hypothesis of parallel flow is used to determine the analytical solution which describes the unicellular flow and the separation is calculated analytically based on the acoustic parameter, the acoustic beam width, the Lewis number and the Prandtl number. Theses analytical results are corroborated by direct numerical simulations. In a second part, a linear stability analysis of the unicellular flow is performed in order to compare the value of the acoustic parameter leading to optimum species separation to the one which characterized the lost of stability of this flow.

Tables des matières

Introduction générale :	15
Chapitre I: L'effet thermoacoustique	21
1. Les machines thermoacoustiques	21
1.1 Historique	21
1.2 Principe d'un réfrigérateur thermoacoustique	22
1.3 Machines thermoacoustiques	27
1.4 Avantages, inconvénients et applications	29
2. Modélisation de l'effet thermoacoustique	30
2.1 Théorie linéaire	30
2.2 Simulation numérique de l'effet thermoacoustique	32
3. Exemple de réalisation expérimentale	33
3.1 Un prototype de réfrigérateur thermoacoustique	33
3.1.2. Description du prototype	33
3.1.3. Quelques résultats expérimentaux	34
3.2 Objectifs de cette thèse	38
Chapitre II: Formulation du problème	39
1. Le système étudié et domaine de calcul	39
1.2 Les équations de conservation	40
1.2.1. Pour le fluide	40
1.2.2. Pour le solide	41
1.3 Lois d'état et équation de l'énergie	41
1.3.1. Loi des gaz parfait	42
1.3.2. Gaz de Van Der Waals	42
2. Domaine de calcul	43
2.2 Conditions aux limites	43

2.3 Génération de l'onde acoustique	44
3. Equations adimensionnées	46
3.1 Grandeurs de référence	46
3.2 Equations de conservation adimensionnées	47
3.3 Lois d'état et équations de la température pour le fluide adimensionnées	48
3.3.1. Gaz parfait	48
3.3.2. Gaz de Van Der Waals	48
3.4 Conditions aux limites adimensionnées	49
Chapitre III: Mise en forme du modèle numérique	51
1. Maillage et coût de calcul	51
1.1 Coût de calcul	51
1.2 Domaine de calcul et Maillage	52
2. Outils numériques	53
2.1 Mise en forme des équations de conservation	53
2.1.2. Equations pour les grandeurs dynamiques	54
2.1.3. Equations pour la température	55
2.2 Conditions aux limites pour les vitesses	56
2.2.1. Condition d'adhérence à la paroi pour la vitesse	56
2.2.2. Conditions de symétrie pour la vitesse	56
2.3 Conditions aux limites pour la température	57
2.3.1. Conditions sur les flux thermiques	57
2.3.2. Continuité de température imposée	57
2.3.3. Continuité de la température et des flux thermiques :	57
2.4 Conditions aux limites sur les dérivées temporelles	57
3. Paramètres du logiciel	59
3.1 Méthode de discrétisation spatiale	59
3.2 Méthode d'intégration temporelle	59
3.3 Stabilisation numérique par diffusion artificielle	60
Chapitre IV: Validations du modèle numérique	63
1. Introduction	63
2. Onde acoustique stationnaire	64

2.1 Description du cas de validation	64
2.2 Condition aux limites d'entrée sur S_{onde}	65
2.3 Premier cas	66
2.4 Deuxième cas	68
3. Simulation d'un réfrigérateur thermoacoustique	70
3.1 Description	70
3.2 Etude des champs de vitesses	72
3.3 Champ de température	77
4. Conclusions	81
Chapitre V: Influence de la loi d'état du gaz sur l'effet thermoacoustique	83
1. Introduction	83
2. Comparaison analytique entre les lois d'états	84
2.2 Différence sur la pression	85
2.3 Evolutions isentropiques	89
2.4 Célérités des ondes sonores	90
3. Simulation d'onde stationnaire avec un gaz de Van Der Waals	92
3.2 Cas de l'air à 1 bar	93
3.3 Cas de l'air à 30 bars	94
4. Simulation numérique de l'effet thermoacoustique avec un gaz de Van Der Waals	96
4.1 Description du domaine de calcul	96
4.2 Simulations numériques avec de l'hélium à 1 bar	98
4.3 Influence de la pression moyenne sur la résolution numérique	99
5. Conclusion	101
Bibliographie	103

Chapitre VI: Influence of acoustic streaming on thermodiffusion in a binary mixture under microgravity.	111
Chapitre VII: Conclusion et perspectives	139
ANNEXE 143	
Annexe : Récapitulatif du modèle écrit sur COMSOL	145
1. Mode <i>I</i> : équation pour les grandeurs dynamique	145
2. Mode <i>II</i> : équations pour la température	146
3. Conditions aux limites	146

Introduction générale :

(Nota : cette introduction générale n'est pas une étude bibliographique)

Le travail présenté comporte deux parties concernant l'interaction entre un fluide compressible ou incompressible et une onde acoustique, soit stationnaire, soit progressive. Nous allons, dans cette introduction, présenter ces deux parties dans le but de bien situer le cheminement de notre travail ainsi que les motivations qui nous ont amenées à orienter nos recherches dans ces deux thématiques.

La première concerne l'étude d'un réfrigérateur thermoacoustique, dans lequel un flux thermique naît de l'interaction entre une onde acoustique, et un milieu poreux. Ces machines se composent d'un résonateur acoustique, dans lequel un champ acoustique est entretenu par une source acoustique et d'une structure poreuse appelée « stack ». Des échangeurs de chaleur placés de part et d'autre du stack permettent de récupérer les flux chaleur. En effet, au passage de l'onde dans le stack, il se produit un flux hydrodynamique de chaleur dans la couche limite thermique qui se développe aux niveaux des parois du stack. Il en résulte une différence de température entre ses deux extrémités. Ce phénomène d'interaction entre fluide et paroi solide est appelé effet thermoacoustique et met en jeu des processus complexes, dont la modélisation a fait l'objet de nombreux travaux au cours des vingt dernières années.

Au laboratoire PHASE (EA 3028, Université Paul Sabatier Toulouse), un réfrigérateur annulaire de petites dimensions a été développé (figure i.1), grâce auquel plusieurs expérimentations ont été faites afin d'analyser l'influence de la nature du stack sur l'effet thermoacoustique.

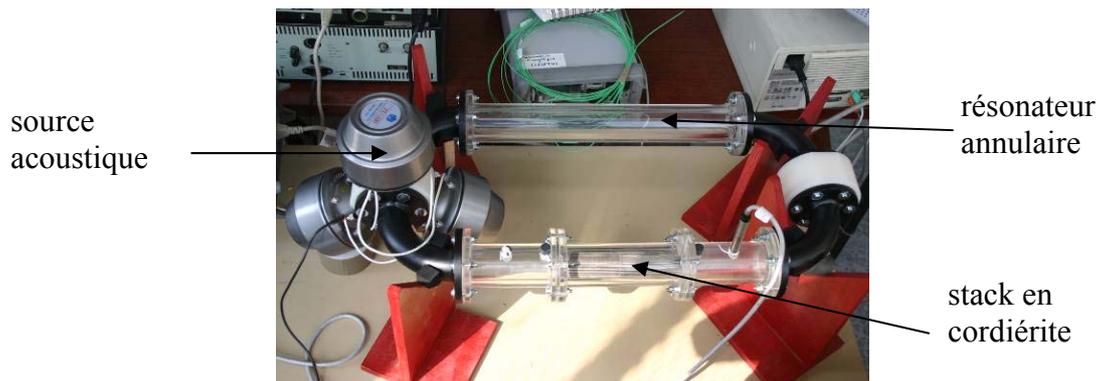


figure.i.1 : Réfrigérateur expérimentale du laboratoire PHASE

Les premières manipulations ont été effectuées avec un stack en cordiérite, qui est une structure en céramique percée de canaux rectangulaires (figure i.2). Ce matériau a une conductivité 2.5 W/m/K et une porosité de l'ordre de 85%. Il s'agissait d'abord d'étudier la réponse en fréquence du système, puis d'étudier l'influence de la fréquence de résonance sur la différence de température.



figure.i.2 : Stacks utilisés dans le réfrigérateur du laboratoire PHASE, cordiérite à droite et aérogel de silice à gauche.

Les études suivantes, qui ont été un point de départ pour ce sujet de thèse, avaient pour idée de remplacer les stacks classiquement utilisés (céramiques, empilement de plaques de verres...), par des matériaux super isolant. L'aérogel de silice, dont les propriétés thermiques ont été l'objet de la thèse de Sandra Spagnol [48] réalisée au laboratoire PHASE, a été choisi. Sa conductivité thermique est de l'ordre de 0.2 W/m/K et sa porosité est voisine de 90%. Ainsi, un stack constitué d'une enveloppe cylindrique en plastique, rempli d'aérogel sous forme de bille sphérique a été élaboré. Chaque extrémité a été fermée par un tissu poreux, afin de maintenir l'aérogel dans son enveloppe et de permettre le passage de l'onde acoustique. Les expériences effectuées ont montré que l'effet thermoacoustique est bien plus important avec de l'aérogel de silice, à mode et puissance acoustique équivalent (tableau.i.1). Cependant, la fragilité mécanique des billes d'aérogel rend difficile l'étude à des puissances plus élevées, sans entraîner la pulvérisation des grains et ainsi la destruction du stack.

matériaux	f_2 (Hz)	ΔT
cordiérite	408.2	7
aérogel	406.3	14

tableau.i.1 –Différence de température entre les extrémités d'un stack de 6cm pour la seconde fréquence de résonance

Les travaux ce sont par la suite orienté vers une thématique, non encore abordé par les différents auteurs travaillant sur ce sujet : la modélisation thermodynamique du gaz dans le réfrigérateur par une loi d'état de gaz de Van Der Waals plutôt qu'un modèle de gaz parfait pour étudier le comportement d'un réfrigérateur thermoacoustique fonctionnant à haute pression et basse température, qui sont souvent l'objet d'étude expérimentale et utilisées dans les nombreuses expériences aussi bien au niveau national qu'international. Nous citerons quelques laboratoires français où des équipes travaillent sur l'effet thermoacoustique : le LIMSI et l'IPN, Orsay, le LMFA, Ecole centrale de Lyon, le LAUM du Mans, et le LEA, ENSMA de Poitiers. Ces équipes font partie du GDR Thermoacoustique 3058 créé en 2007 sous l'impulsion du professeur M.X. François et du LIMSI.

Un modèle d'écoulement de fluide compressible 2D a été développé à l'aide du logiciel COMSOL Multiphysics ®. Après avoir été validé avec les résultats obtenus par David Marx [31], des simulations numériques ont été faites avec de l'air et de hélium, pour une pression P_0 de 1 et 30 bar, une température T_0 de 293K et pour des nombre de mach Ma variant de 0,1% à 5 %, en utilisant successivement un modèle de gaz parfait, puis un modèle de gaz de Van Der Waals comme loi d'état.

Dans la deuxième partie, on étudie l'influence d'ondes ultrasons (Eckart streaming) sur la séparation des espèces d'un mélange binaire fluide, en microgravité. On considère une cavité très allongée, dont une partie de l'un de ses petits cotés est soumise à une onde progressive ultrasonore alors que le coté opposé est parfaitement absorbant. Un gradient de température est appliqué entre les deux autres cotés de la cellule. L'écoulement unicellulaire induit par l'acoustic streaming peut conduire à une séparation des espèces significative. L'étude est faite en microgravité afin de bien déterminer l'influence du paramètre acoustique en s'affranchissant de l'influence du nombre de Rayleigh

Dans certaines conditions, les ondes ultrasonores génèrent un écoulement moyen stationnaire à grande échelle dû à l'« acoustic streaming », dans notre étude « Eckart streaming », ce qui peut

induire un écoulement monocellulaire au sein de la cellule. On est alors dans une configuration où la séparation des espèces du mélange entre les extrémités de la cavité est possible.

Une étude analytique de l'écoulement monocellulaire dans une cavité très allongée, utilisant le modèle « parallel flow », est d'abord présentée. La séparation est déterminée analytiquement en fonction du paramètre acoustique A et de l'épaisseur relative du faisceau acoustique ε du nombre de Lewis, Le et du nombre de Prandtl, Pr . Les résultats analytiques sont corroborés par des simulations numériques directes réalisées avec le logiciel COMSOL.

Une étude de stabilité linéaire de l'écoulement monocellulaire est ensuite effectuée afin de comparer, entre autre, les valeurs du paramètre acoustique A , conduisant à un optimum de séparation, aux valeurs critiques A_c correspondant à la perte de stabilité de l'écoulement monocellulaire conduisant à la séparation.

On présente ci-dessous une visualisation effectuée au LMFA, ECL de Lyon, où le transducteur de 7cm est placé au milieu de la paroi gauche de la cellule. La fréquence de l'onde ultrasonore est de 800 kHz. Le fluide utilisé est du glycérol. La visualisation est effectuée à l'aide de particules d'iriodine (paillettes réfléchissantes). A l'état stationnaire, il se forme deux cellules compte tenu de la position du transducteur.



figure.i.3 : Ecoulement engendré par Eckart streaming dans une cavité, $f=800$ kHz, visualisation effectuée par V. Botton et C. Cachard au LMFA, ECL Lyon.

Première partie :

Etude d'un réfrigérateur thermoacoustique, Influence de la loi d'état du gaz sur l'effet thermoacoustique : comparaison en un modèle de gaz parfait et de gaz de Van Der Waals

Chapitre I: L'effet thermoacoustique

1. Les machines thermoacoustiques

1.1 Historique

Par définition, la thermoacoustique est l'étude des phénomènes résultant de l'interaction en un champ thermique et un champ acoustique. Ces phénomènes sont connus depuis longtemps. En effet, la production de son par un tube chauffé à une de ses extrémités a été observée pour la première fois il y a plusieurs siècles par des souffleurs de verre. Ils ont été les premiers témoins de l'effet thermoacoustique. Ce n'est qu'en 1850 que ce phénomène est décrit par Sondhauss [21], grâce à l'étude du son qu'émet un tube lorsqu'il est chauffé à l'une de son extrémité fermée. Ces observations sont par la suite expliquées qualitativement par Lord Rayleigh en 1894 [44]. En 1859, Rijke obtient un phénomène similaire à l'aide d'un tube ouvert, contenant une grille métallique, quand on le place au dessus d'une flamme. Ainsi, ces deux expériences mettent en évidence l'existence de couplage entre des ondes acoustiques et des sources de chaleurs. Mais elles sont aussi à l'origine de deux domaines de recherche distincts. Le premier, dont on n'en parlera pas d'avantage dans cette thèse, concerne les problèmes de couplages entre ondes acoustiques, écoulements et flammes dans le domaine de la combustion. Le second se consacre à l'étude des machines thermoacoustiques.

Entre 1969 et 1980, un premier modèle théorique linéaire est proposé par Rott [45], suite à l'observation d'oscillations spontanées de fluides soumis à des gradients de température. Il s'agit de la base des premiers prototypes de moteurs thermoacoustiques, développés par Swift *et al* [51], et Atchley *et al* [2], qui exploite le travail de l'onde acoustique stationnaire induit par un flux de chaleur. Par la suite, Yakazi *et al* [61], Backhaus *et al* [3] et Job [27], ont développé des moteurs thermoacoustiques à onde progressive, utilisant des résonateurs annulaires, qui permettent d'avoir de meilleur rendement que leur homologue à onde stationnaire.

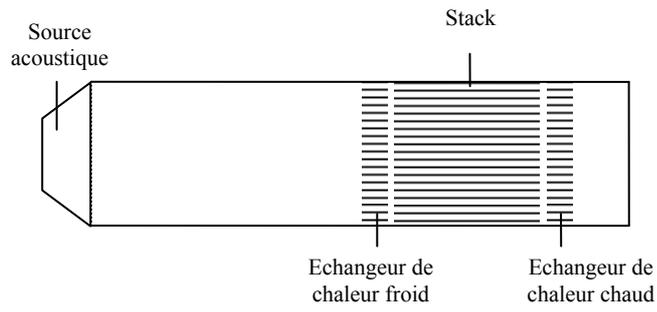
Le phénomène inverse, c'est-à-dire l'établissement d'un flux thermique dans un milieu à l'aide d'une onde acoustique, n'a été observé que plus tardivement. Les premières observations d'une réfrigération induite par une oscillation basse fréquence de pression dans un tube, ont été faites par Giffort et Longworth [23], en 1966. Ce qui conduit aux premières machines à gaz

pulsé dont les bases théoriques sont maintenant bien maîtrisées et qui sont largement utilisés dans le domaine cryogénique. Bien qu'ayant un principe de fonctionnement commun, les réfrigérateurs thermoacoustiques sont encore à un stade expérimental. Ils font l'objet d'une étude bien distincte notamment en raison de leur fréquence de fonctionnement plus élevée. Leur apparition suit l'observation d'un gradient de température sur un empilement de plaques parallèles, placés dans un résonateur, par Wheatley *et al* [58] en 1983. Notons que le mot *stack*, traduction anglaise pour un empilement de plaque, est souvent employé pour désigner n'importe quel type de milieu poreux utilisé comme support du gradient thermique dans un réfrigérateur thermoacoustique. La première explication théorique, au même moment que pour les moteurs, est aussi donnée par Rott [45]. En 1988, Swift synthétise cette théorie linéaire [50], qui est toujours utilisé de nos jours pour dimensionner les machines thermoacoustiques.

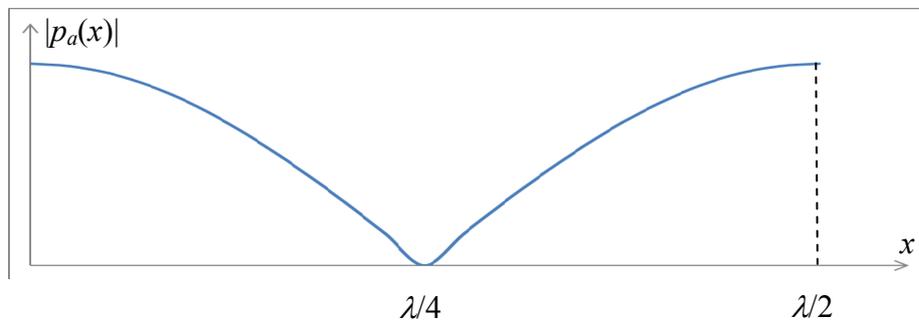
1.2 Principe d'un réfrigérateur thermoacoustique

De manière générale, une onde acoustique dans un fluide est décrite par des fluctuations de la pression et de vitesses autour de leurs valeurs moyennes respectives. La propagation des ondes sonores étant une évolution isentropique des grandeurs thermodynamiques du fluide, ces variations de pression entraînent aussi des fluctuations adiabatiques de la température. Mais le phénomène est suffisamment rapide pour que la chaleur n'ait pas le temps de diffuser. Ainsi, une perturbation de nature acoustique n'induit habituellement que de très faibles variations de la température. Par exemple, pour un niveau sonore de 120dB (seuil de la douleur), l'amplitude de la pression acoustique est de l'ordre de $5 Pa$, tandis que les oscillations de la température ne sont que de l'ordre de $0.02^{\circ}C$. Cependant, dans un réfrigérateur thermoacoustique la différence de température entre les extrémités du *stack* dépasse généralement la dizaine de degré. C'est donc l'interaction de l'onde acoustique avec des parois solides, qui est à l'origine d'un tel flux de chaleur.

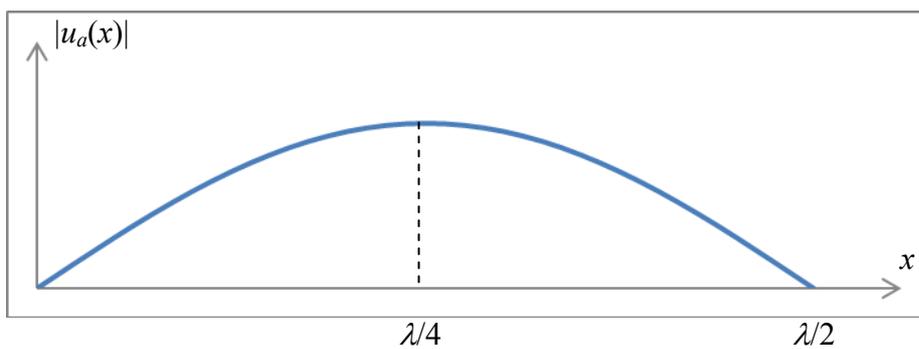
Considérons par exemple le réfrigérateur thermoacoustique illustré dans la figure (figure I.1). Ce type de réfrigérateur, a été étudié par S. Duffourd [17]. Il est constitué d'un tube fermé et d'un haut-parleur qui génère une onde acoustique de fort niveau et dont la fréquence coïncide avec la première fréquence de résonance du tube (résonateur en $\lambda/2$). Un empilement de plaques, qui va permettre le transport de chaleur d'une de ses extrémités à l'autre, y est placé. Et deux échangeurs de chaleur, situé de part et d'autre du *stack*, permettent d'exploiter les flux de chaleur induit par l'effet thermoacoustique.



(a)



(b)



(c)

figure I.1 (a) Schéma du réfrigérateur thermoacoustique ;
(b) évolution de la pression acoustique p_a dans le résonateur ;
(c) évolution de la vitesse acoustique u_a dans le résonateur.

Pour des raisons de simplification, considérons une plaque solide placée dans une onde acoustique stationnaire, entre un ventre de vitesse acoustique et un ventre de pression acoustique (figure I.2). La plaque est orientée parallèlement au sens des oscillations acoustiques subies par le fluide. Etant donné que les solides ont une capacité thermique généralement plus élevée que celle des gaz, on considère que la plaque peut échanger de la chaleur en gardant une température quasiment constante au cours d'un cycle acoustique. Pour une particule donnée, située au voisinage de la plaque, l'onde se traduit par une fluctuation sinusoïdale de sa position, sa pression et sa température autour de leurs valeurs moyennes respectives. Ainsi, au cours d'un cycle acoustique, la particule évolue autour de son état d'équilibre entre une position $-d_a$, où la dépression est de $-p_a$ et la variation de température $-T_a$ et une position $+d_a$, où la surpression est de $+p_a$ et la variation de température est $+T_a$. Ainsi, lorsque que la particule est transportée de sa position initiale à la position $+d_a$, elle subit une compression adiabatique, elle absorbe une quantité de travail dW et sa température augmente. La particule devenant plus chaude que la plaque, elle cède une quantité de chaleur dQ qui lui permet de retrouver la même température que la plaque. Ce refroidissement se déroule à pression constante, la particule absorbe une quantité de travail dW_1 et son volume diminue. Au cours de la seconde partie du cycle acoustique, elle va se déplacer vers la position $-d_a$, en subissant une détente adiabatique. Elle va alors céder une quantité de travail dW et sa température diminue. La particule devenant, maintenant, plus froide que la plaque, elle va absorber une quantité de chaleur dQ et leur température se retrouve égale. La aussi, cet échauffement se fait à pression constante. Le volume de la particule augmente et elle cède une quantité de travail dW_2 . Pour résumer, la particule fluide transporte une quantité élémentaire de chaleur, d'une position à une autre au cours d'un cycle acoustique. Etant donné que le déplacement acoustique est très faible, il y a en fait un très grand nombre de particules le long de la plaque et une quantité de chaleur libéré en un endroit va donc être prélevée (figure I.3), puis déposée plus loin par une particule voisine, au cours du demi-cycle acoustique suivant. Ainsi, grâce à l'accumulation de ces pompages de chaleur élémentaires, il est possible de transporter une quantité significative de chaleur. Ce qui est la cause de l'apparition d'une différence de température, pouvant excéder la dizaine de degrés, entre les extrémités de la plaque. On peut exploiter l'effet thermoacoustique, on plaçant des échangeurs de chaleur de part et d'autre de la plaque. L'échangeur, placé du côté où la chaleur est prélevé (vers le ventre de vitesse), permettra de refroidir l'objet ou l'enceinte auquel il sera relié. L'autre échangeur permet d'évacuer la chaleur libérée dans le milieu ambiant.

Bien que simplifiée, cette interprétation lagrangienne, formulée par Gifford et Longworth [23] et par Swift *et al* [51], fournit de façon qualitative les premiers éléments de compréhension du fonctionnement des machines thermoacoustiques. Elle donne aussi les premières grandeurs caractéristiques pour le dimensionnement du dispositif. La distance sur laquelle la chaleur peut être diffusé entre le fluide et une paroi solide est appelée δ_k , l'épaisseur de la couche limite thermique. Sa valeur dépend des propriétés thermophysiques du gaz, mais aussi de la fréquence de l'onde acoustique. En général, elle est de l'ordre du dixième de millimètre dans les machines thermoacoustique. C'est pourquoi, afin d'optimiser le flux de chaleur récupérable, le stack doit avoir une surface d'échange très importante et une porosité de l'ordre de deux à quatre fois l'épaisseur de la couche limite thermique. Cependant, il existe aussi une couche limite visqueuse, d'épaisseur δ_v , dans la zone d'échange de chaleur. Bien qu'elle soit plus réduite (son épaisseur varie avec la viscosité du fluide et la fréquence de l'onde acoustique), elle se traduit notamment par un freinage du fluide, jusqu'à son adhérence, quand on se rapproche de la paroi, ce qui réduit le rendement d'un réfrigérateur thermoacoustique.

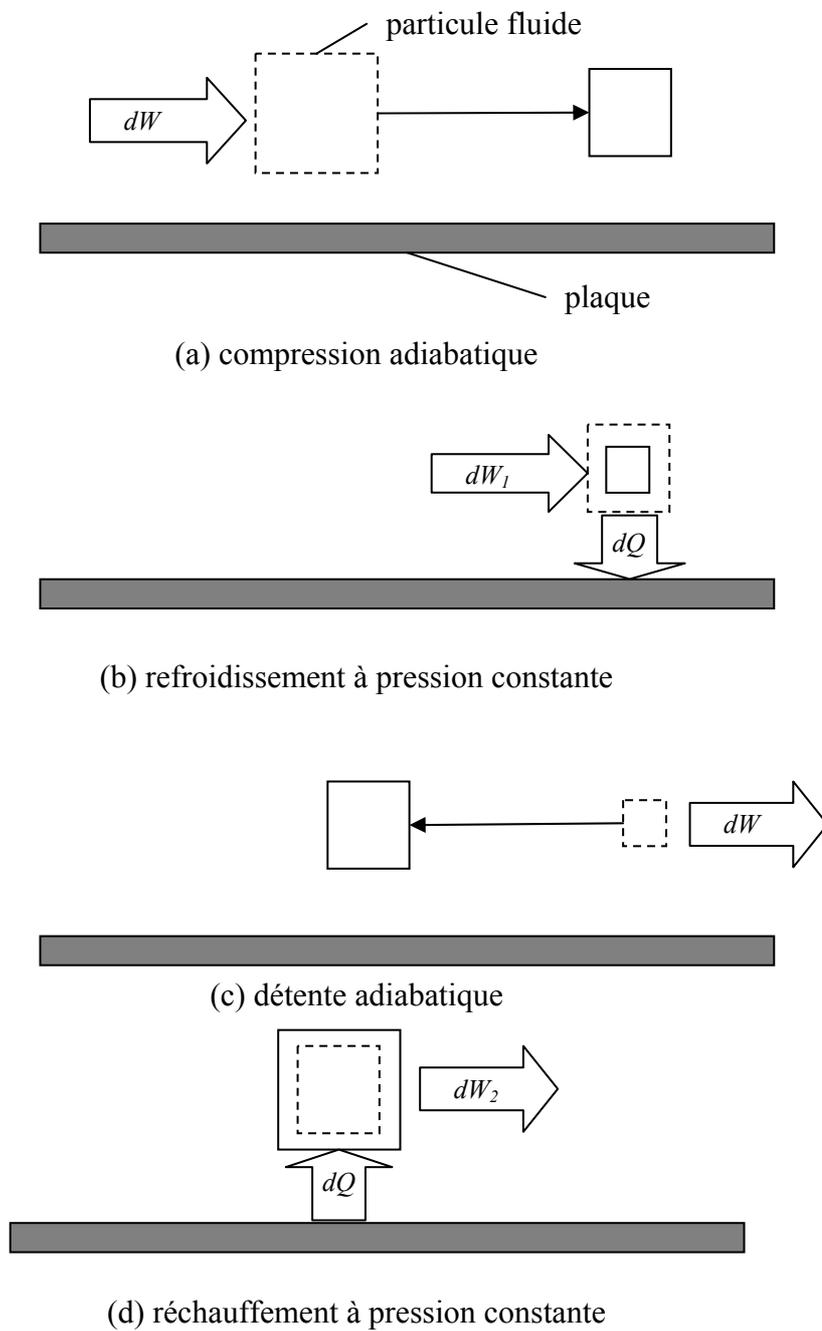


figure I.2 Illustration simplifiée du fonctionnement d'un réfrigérateur thermoacoustique. Pendant l'étape (a) du cycle, la particule fluide subit une compression adiabatique qui la rend plus chaude que la plaque. Cette chaleur est cédée en (b), par un échange irréversible à pression constante. A l'étape (c), une détente adiabatique rend la température de la particule, plus basse que celle de la plaque. Elle absorbe alors de la chaleur pendant l'étape (d).

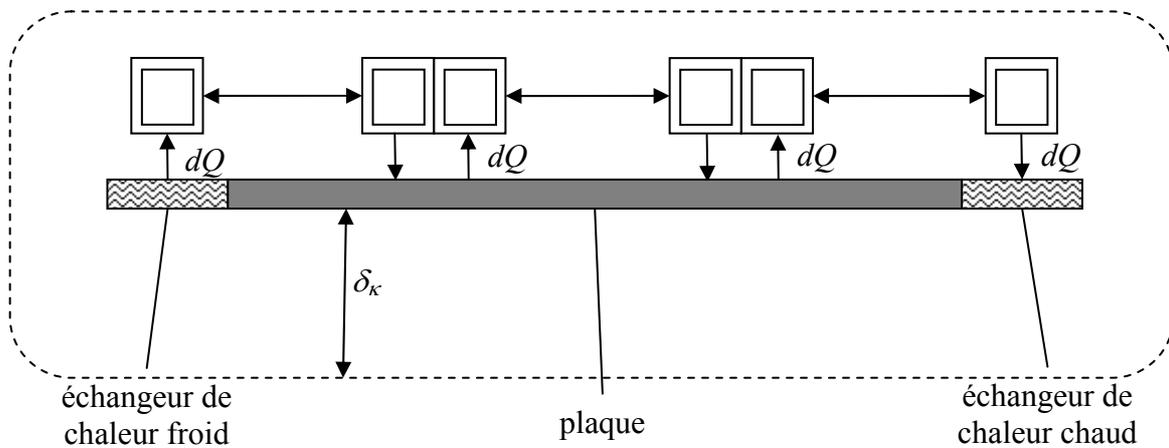


figure I.3 Illustration du transport de chaleur d'un bout à l'autre de la plaque par une série de particules.

1.3 Machines thermoacoustiques

Les machines thermoacoustiques sont des convertisseurs d'énergie thermique en énergie acoustique, ou inversement, sans pièce mécanique en mouvement. Il en existe deux catégories : les moteurs et les réfrigérateurs (figure I.4) qui sont composés des mêmes éléments : un résonateur excité par une source acoustique, un stack qui est le siège de l'effet thermoacoustique et deux échangeurs de chaleurs.

Comme nous l'avons vu précédemment, une machine de type réfrigérateur permet de pomper de la chaleur d'un point chaud à un point froid, lorsqu'une onde acoustique interagit avec le stack. Elle utilise donc une puissance acoustique W afin d'extraire la chaleur Q_c à la source froide et la rejeter dans la source chaude. Son coefficient de performance est défini par [50] : $\text{COP} = Q_c/W$.

Dans une machine de type moteur, la différence de température imposée de part et d'autre du stack permet de créer une onde acoustique dans le résonateur. Elle convertit alors une quantité de chaleur Q_h , prélevée à la source chaude, en puissance acoustique W , tout en rejetant de la chaleur dans la source froide. Le rendement du moteur est défini par [50] : $\eta = W/Q_h$.



figure I.4 Modes de fonctionnement d'une machine thermoacoustique : réfrigérateur et moteur.

En 2000, des systèmes dans lequel sont couplés moteurs et réfrigérateurs apparaissent. Il s'agit de placer dans un même résonateur deux stacks. Le premier fonctionne en moteur et permet de créer une onde acoustique, tandis que le second, utilise cette onde pour fonctionner en réfrigérateur (figure I.5). A l'aide d'une source de chaleur on impose une différence de chaleur sur le premier stack, qui va exciter acoustiquement le résonateur. Cette onde, en traversant le deuxième stack, va ainsi permettre de prélever de la chaleur à une source froide de température inférieure à celle du milieu ambiant. En s'affranchissant d'une source acoustique électrique, le système devient ainsi complètement passif et est capable de fournir une puissance de refroidissement à l'aide d'une source de chaleur. De nombreux prototypes utilisant la chaleur générée par des moteurs à combustion ou des turbines, ou encore la chaleur issue de concentrateur solaire, ont des déjà été construits.

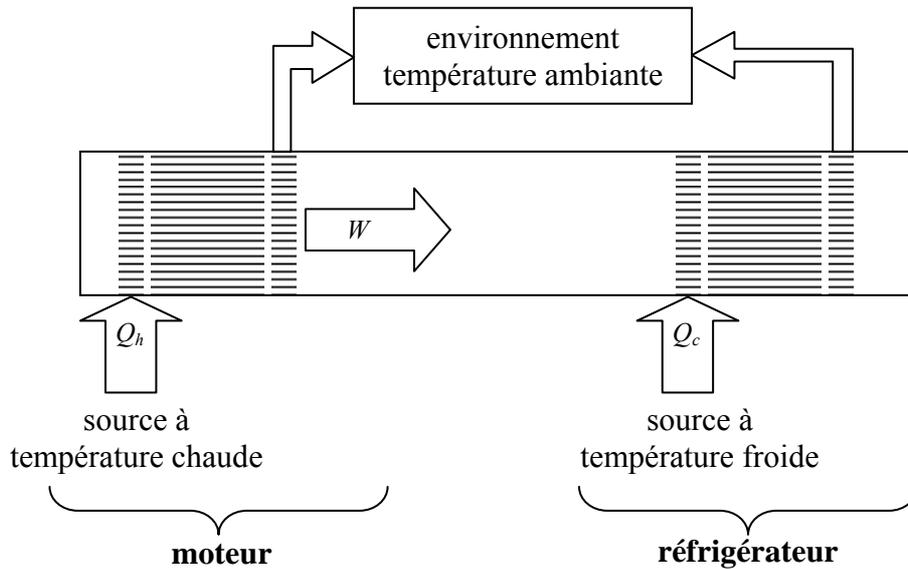


figure 1.5 Schéma d'un moteur et d'un réfrigérateur à onde stationnaire couplé.

1.4 Avantages, inconvénients et applications

Les machines thermoacoustiques constituent une technologie attrayante pour les raisons suivantes :

- Contrairement à leurs homologues classiques, elles ont très peu de pièces mécaniques en mouvement, et donc n'ont pas de problème de lubrification et sont plus facilement rendu étanche. Ce qui les rend très robustes et fiables.
- Elles n'utilisent des gaz neutre (air, hélium, argon...) qui ont un intérêt écologique évident. Elles n'utilisent pas de gaz de type CFC, qui sont des gaz détruisant la couche d'ozone.
- Elles n'ont pas de circuit de fluide réfrigérant, nécessitant des compresseurs et détendeurs, ce qui leur donne un rapport en puissance encombrement très intéressant.
- Un même système couplant moteur et réfrigérateur permet de récupérer les quantités de chaleur dissipées, ou fonctionner à l'énergie solaire.
- L'utilisation de résonateur compact et de source acoustique à haute fréquence donne des perspectives de miniaturisations des dispositifs thermoacoustiques.

Cependant, l'inconvénient majeur de ces dispositifs est que leur rendement reste très inférieur à celui des procédés classiques. De plus, l'utilisation de très fort niveau acoustique entraîne des phénomènes non-linéaires qui ne sont pas complètement maîtrisés, notamment le streaming acoustique, la dissipation visqueuse et la turbulence par exemple.

Parmi les machines thermoacoustiques déjà en fonctionnement ou en cours de réalisation, on peut citer :

- STAR, un réfrigérateur thermoacoustique embarqué sur la navette spatiale américaine Discovery en 1992.
- SETAC, un réfrigérateur utilisé dans un navire américain afin de refroidir les composants électroniques d'un radar.
- TACSOL, un projet de réfrigération thermoacoustique solaire, financé par une ANR [19]

2. Modélisation de l'effet thermoacoustique

2.1 Théorie linéaire

La théorie linéaire, issue du travail de Rott [45], est le seul outil analytique qui permet, sous certaines hypothèses, de prédire l'évolution des grandeurs acoustiques, les flux de chaleur et de travaux présents dans une machine thermoacoustique. L'effet thermoacoustique y est décrit dans un canal plan délimité par deux plaques d'un empilement, placé dans un résonateur.

Ces hypothèses sont :

- Les variables, g , du problème peuvent être décomposées en une partie moyenne g_0 (en terme de moyenne temporelle) et une partie fluctuante acoustique g_a , petite devant la partie moyenne.
- La moyenne temporelle de la vitesse du fluide est nulle
- Dans le stack, il existe un gradient moyen de température.
- L'écoulement suit les hypothèses de couche limite dans l'empilement.

Sous ces hypothèses, il s'agit alors de simplifier les équations de Navier-Stokes à l'aide d'une méthode de perturbation. Dans un premier temps, les équations sont linéarisées, afin d'exprimer les grandeurs acoustiques à l'ordre 1. Puis il s'agit d'exprimer les grandeurs thermoacoustiques à l'aide de ces grandeurs acoustiques. A l'aide d'un produit de variables d'ordre 1, on exprime alors un flux d'énergie moyen à l'ordre 2. On obtient les équations linéarisées suivantes :

$$\rho_a = -\rho_0 \beta T_a + \frac{\gamma}{c^2} p_a$$

$$i\omega \rho_a + \frac{\partial \rho_0 u_a}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v_a}{\partial y} = 0$$

$$i\omega \rho_0 u_a = -\frac{\partial p_a}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2}$$

$$\rho_0 C_p \left(i\omega \rho_0 T_a + u_a \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) - i\omega T_0 \beta p_0 = k \frac{\partial^2 T_a}{\partial y^2}$$

En notant les variables : ρ la densité, T la température, p la pression, u la vitesse dans la direction x et v la vitesse dans la direction y . Et les propriétés du fluides : k la conductivité thermique, μ la viscosité dynamique, β son coefficient de dilatation thermique, γ le coefficient isentropique et C_p sa capacité calorifique à pression constante.

L'évolution de la température dans le solide est donnée par l'équation :

$$i\omega T_{sa} = \frac{k_s}{\rho_s C_s} \frac{\partial^2 T_{sa}}{\partial x^2}$$

T_s étant la température de la plaque, k_s sa conductivité thermique, ρ_s sa densité et C_s sa capacité calorifique.

Plusieurs travaux d'approfondissement [51], [50], [57], permettent ainsi, non seulement la résolution des variables du problème, mais aussi d'obtenir une expression quantitative pour le flux de chaleur thermoacoustique et la différence de température entre les extrémités du stack. Les outils numériques DELTAE [56] et CRISTA [6] proposent ainsi l'intégration de ces équations. Le caractère unidimensionnel de ces équations permet une résolution numérique très peu couteuse. Il est alors possible de simuler entièrement une machine thermoacoustique complexe (changement de section, rugosité, stack, échangeur).

Cependant, aucun effet non-linéaire, pouvant apparaître dans les machines thermoacoustiques, ne sont bien évidemment pas prévus par la théorie linéaire. Non seulement, elle ne permet pas de simuler un écoulement moyen induit par acoustic streaming, mais le caractère 1D des équations interdit aussi la possibilité d'écoulement bidimensionnel, engendré par les changements de section par exemple (vorticité, détachement tourbillonnaires, turbulence...).

2.2 Simulation numérique de l'effet thermoacoustique

La complexité du phénomène thermoacoustique requiert un modèle numérique très complet. En effet, il s'agit de pouvoir prendre en compte des phénomènes visqueux dont le domaine d'influence est la couche limite, mais aussi l'onde acoustique dont l'échelle de longueur est la longueur d'onde. Les dispositifs thermoacoustiques font aussi intervenir une échelle de temps qui varie de la période acoustique, aux temps caractéristiques de diffusion de la chaleur. Enfin, le processus s'accompagne d'effets non linéaires importants, dont la prise en compte est nécessaire. L'approche permettant de déterminer l'évolution des variables (dépendantes de l'espace et du temps), de la façon la plus exacte possible, est la simulation numérique directe (DNS), dans laquelle les équations de Navier-Stokes complètes sont résolues numériquement. Les premières DNS datent du début des années 70 et se consacrent à la modélisation numérique de la turbulence isotrope dans un écoulement incompressible [11], [38]. Ce n'est qu'au début des années 90, que les premières DNS d'écoulements compressibles sont effectuées. En effet, ces méthodes requièrent une résolution élevée sur le maillage, ainsi qu'un ordre élevé des méthodes de discrétisation. C'est pourquoi elles sont très coûteuses en temps de calcul. Cependant, contrairement à la formulation incompressible, les équations de Navier-Stokes compressibles sont hyperboliques. Elles nécessitent un traitement particulier des frontières du domaine de calcul. En effet, à cause de la précision des méthodes DNS, les ondes propagées ne sont pas dissipées numériquement par le code. Il faut alors qu'elles soient éliminées par des conditions aux limites non réfléchissantes ou absorbantes, afin de garantir la stabilité des simulations numériques. En 1996, Cao *et al* [9] réalise la première simulation numérique d'un résonateur contenant une plaque isotherme 1D. Leur méthode numérique, permettant de résoudre les équations de Navier-Stokes 2D complètes, a permis de mettre en évidence les flux de chaleur présents aux extrémités de la plaque. Blanc Benon *et al* [7] et Marx [33], poursuivent cette étude : ils proposent la simulation numérique directe de l'effet thermoacoustique au-dessus d'une plaque 1D non isotherme avec échangeur, mais aussi d'une plaque 2D non isotherme. Leurs résultats sont en très bons accords avec les observations faites sur le réfrigérateur thermoacoustique expérimental, étudié par Duffourd [17].

En 1997, Worlikar [60], met en évidence la formation de tourbillons aux extrémités d'une plaque 2D, l'aide d'un modèle numérique à faible nombre de Mach. Il s'agit d'une simplification des équations de Navier-Stokes dans laquelle un développement asymptotique en nombre de Mach, permet de décomposer la pression en un terme de pression dynamique et un terme de pression thermodynamique. La pression dynamique n'intervenant uniquement que dans les équations de la quantité de mouvement, les équations ne sont plus hyperboliques et peuvent être

résolue numériquement à l'aide de conditions aux limites très proches de celle utilisées pour les écoulements incompressibles. Besnoin [5], Duthil *et al* [18], utilise aussi l'approximation faible Mach, pour la simulation numérique de dispositif thermoacoustique. Il s'agit également du modèle utilisé dans les codes de calculs industriels PHOENICS®, utilisé par Ishikawa [26] et FLUENT®, utilisé par Chen *et al* [12]. Martaj *et al* [30] utilise COMSOL afin de simuler numériquement un moteur Stirling.

3. Exemple de réalisation expérimentale

3.1 Un prototype de réfrigérateur thermoacoustique

Le laboratoire PHASE dispose d'un réfrigérateur thermoacoustique expérimental. Il a été conçu dans l'optique d'étudier l'influence de la nature du stack sur l'effet thermoacoustique.

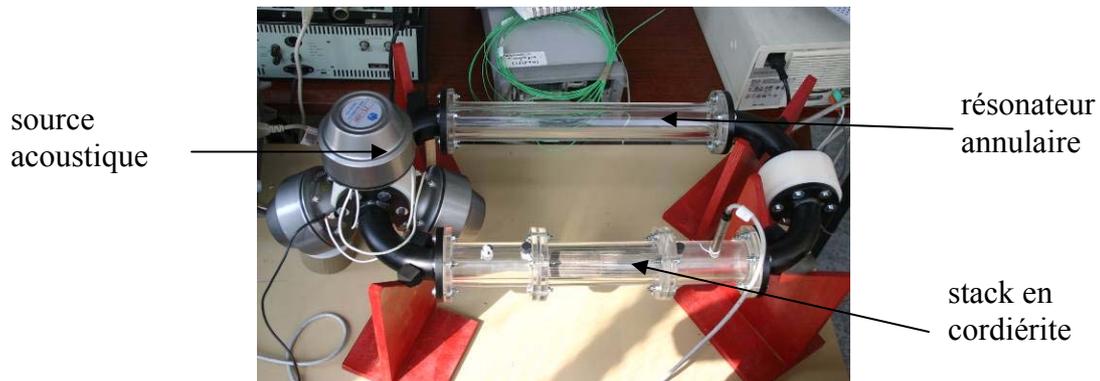


figure I.6 : Photographie du réfrigérateur thermoacoustique expérimental du laboratoire PHASE.

Dans la partie qui suit, nous présentons brièvement le dispositif expérimental ainsi que quelques résultats obtenus par Seguin [47].

3.1.2. Description du prototype

Le résonateur :

Le réfrigérateur expérimental est constitué d'un résonateur annulaire, d'une longueur de 1.5m. Il est constitué d'un support pour les sources acoustiques, quatre coudes en acier et de tubes droit en plexiglas. Un de ses tubes, contient le stack. Il possède quatre emplacements pour microphone (deux, de part et d'autre du stack), ainsi que des orifices permettant le passage de thermocouples. Le résonateur est rempli d'air à température et pression ambiante.

La source acoustique :

Trois chambres de compression, de 100W chacune, permettent d'exciter acoustiquement le résonateur. Elles sont contrôlées en fréquence à l'aide d'un générateur basse fréquence et en amplitude à l'aide d'un amplificateur hifi.

Les stacks :

Dans un premier temps, les études ont été réalisées avec un stack en cordièrite (matériau utilisé dans les pots catalytiques de voiture). Il s'agit d'un cylindre percé de canaux rectangulaire. Sa conductivité thermique est de 2.5 W/m/K et sa porosité de l'ordre de 85%.

Par la suite, cylindre contenant des billes d'aérogel de silice, a été utilisé. On a ainsi obtenu un stack dont la conductivité thermique de la phase solide est très faible (de l'ordre de 0.02 W/m/K [48] dans sa forme monolithe) et possédant une importante surface d'échange fluide/solide.

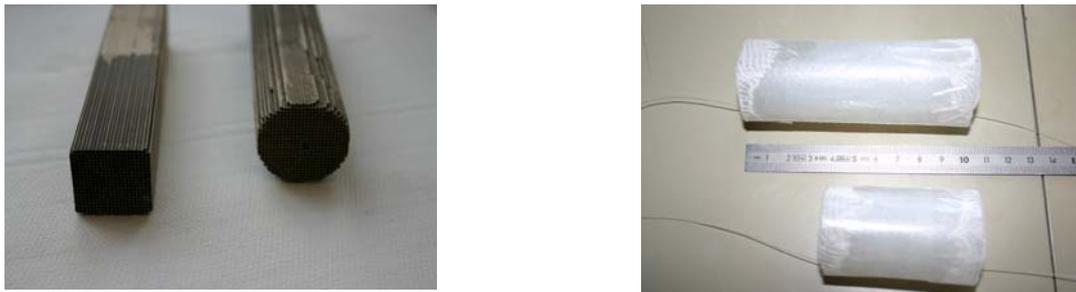


figure I.1 *Stacks utilisés dans le réfrigérateur du laboratoire PHASE, cordièrite à droite et aérogel de silice à gauche.*

3.1.3. Quelques résultats expérimentaux

Le but de ces manipulations expérimentales est d'étudier l'influence d'un stack en milieu poreux isolant sur l'effet thermoacoustique. Pour cela, après une caractérisation des fréquences de résonance du résonateur seul, puis avec le stack, on s'intéresse à la différence de température obtenue, lorsqu'on excite le résonateur à une fréquence de résonance.

Caractérisation du résonateur

Dans un premier temps on vérifie la réponse en fréquence du résonateur annulaire. On effectue un balayage en fréquence de 50 à 1000Hz et on détermine l'impédance du résonateur à l'aide de deux microphones [29]. Les maxima de l'impédance et l'annulation de sa phase nous donne alors les fréquences de résonance du système (figure I.2).

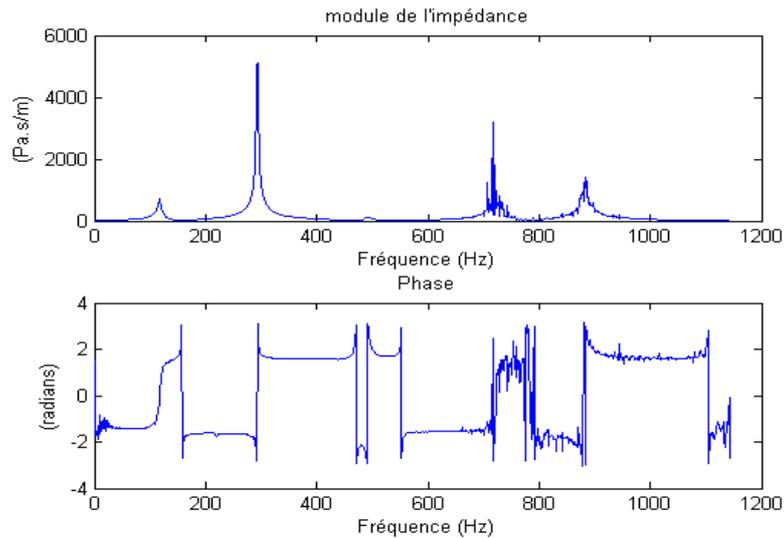


figure I.2 *Mesure des fréquences de résonance du résonateur vide*

La première fréquence est de 117Hz, ce qui est en bon accord avec la valeur de la fréquence fondamentale prévue par la théorie : $f_0 = c/\lambda = 115 \text{ Hz}$ (résonateur en $\lambda/2$), pour une température de 295K, c étant la célérité des ondes sonores.

Influence du stack sur l'onde acoustique

Par la suite on caractérise acoustiquement le résonateur avec le stack. Il s'agit de mesurer l'impact du stack sur les modes du résonateur. Le protocole expérimentale est le même que pour la caractérisation du résonateur vide et on détermine l'impédance à l'aide de la méthode proposée par Zao *et al* [22].

La figure I.3 correspond à la mesure effectuée avec un stack en cordiérite de 6 cm, placé à 34 cm des sources acoustiques. On observe que la fréquence fondamentale est maintenant de 134.5 Hz et que le pic d'impédance y est beaucoup plus élevé que sur le deuxième mode (452.8 Hz).

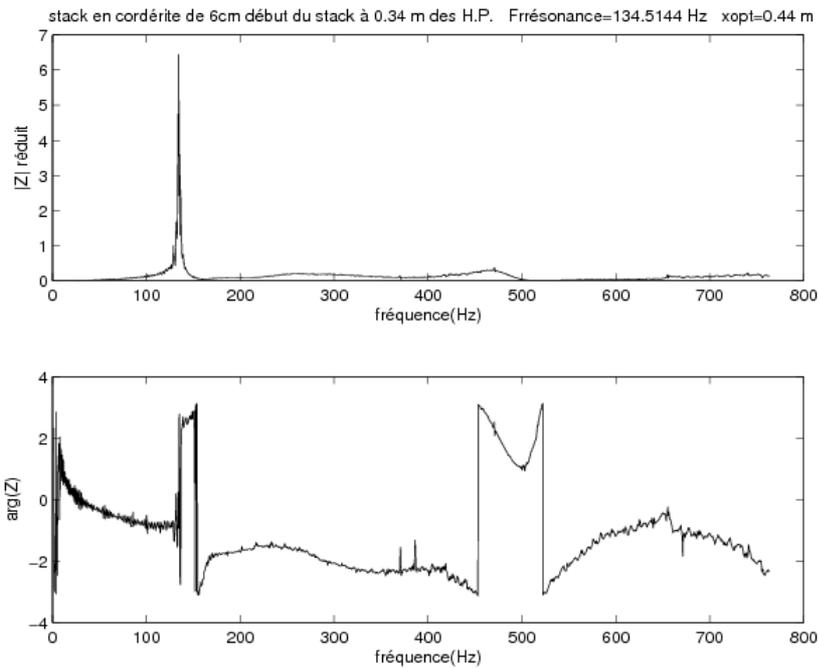


figure I.3 *Mesure des fréquences de résonance du résonateur contenant un stack en cordiérite de 6cm.*

La figure I.4 est issue de la mesure effectuée avec un stack en aérogel de silice de 6cm. On ne retrouve que le premier mode à une fréquence identique à celle du résonateur seul. Cependant, on observe que le deuxième (405.3 Hz) est bien plus élevé que le premier. On suppose alors que le premier mode est très atténué à cause de la tortuosité de l'aérogel de silice.

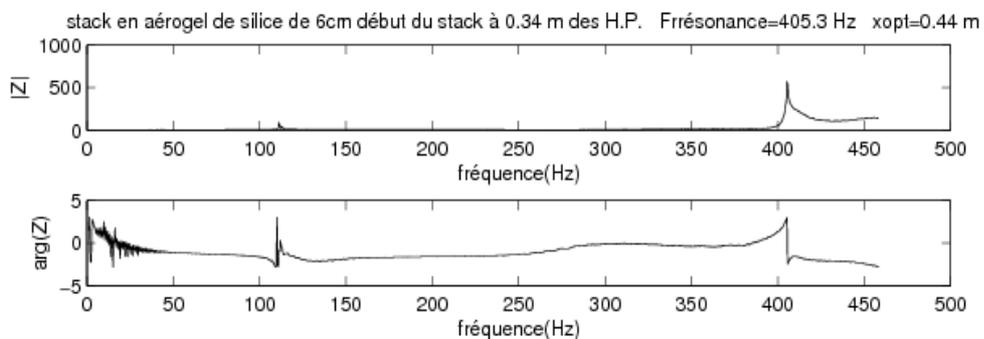


figure I.4 *Mesure des fréquences de résonance du résonateur contenant un stack en aérogel de silice de 6cm.*

Mesure de températures :

Les caractérisations acoustiques précédentes permettent d'estimer que l'impédance du stack en aérogel est supérieure d'un facteur 20 à celle de la cordiérite. Or, Ceperley [10] avait postulé qu'un stack de plus forte impédance est synonyme d'un meilleur rendement pour une machine thermoacoustique. Dans les manipulations qui suivirent, le but a alors été de comparer les différences de températures obtenues entre ces deux types de stack. Les mesures ont été effectuées avec la seconde fréquence de résonance des systèmes et une intensité électrique similaire au niveau des sources acoustiques (tableau I.1).

stack	f_2 (Hz)	ΔT
cordiérite	408.2	7
aérogel	405.3	14

tableau I.1 Différence de températures entre les extrémités d'un stack de 6cm pour la seconde fréquence de résonance

On observe effectivement que la différence de températures est deux fois plus élevée pour le stack en aérogel. Ce type de matériau serait alors un très bon choix pour les dispositifs thermoacoustiques. Cependant, la fragilité, de la forme d'aérogel utilisée, rend difficile des manipulations expérimentales. Il a alors fallu réaliser un empilement bien compact et fermé le stack avec de la soie, afin de limiter les collisions des billes d'aérogel, mais aussi de rendre le système imperméable aux éventuelles réduites (à cause des chocs), sans trop modifier la perméabilité acoustique.

Par la suite, l'étude des réfrigérateurs thermoacoustiques, au laboratoire, s'est orientée sur la modélisation numérique du dispositif.

3.2 Objectifs de cette thèse

Cette partie de la thèse se consacre à la résolution numérique d'une tranche de réfrigérateur. Dans un premier temps, nous avons mis en place un modèle numérique à l'aide du code commercial COMSOL®. La simulation directe des équations de Navier-Stokes complètes a été choisie et les domaines de calcul étudiés sont inspirés des travaux de Cao *et al* [9] et de Marx *et al* [32], [33] [34]. Les équations du modèle sont formulées dans le chapitre 2, puis mise en place sur COMSOL® dans le chapitre 3. Par la suite, on s'intéresse à des configurations dans lesquelles les pressions et les températures diffèrent des conditions normales. On étudie notamment une tranche de réfrigérateur thermoacoustique, dans laquelle la pression moyenne est plus élevée que la pression atmosphérique. Il s'agit alors de comparer les résultats de simulations numériques utilisant soit la loi d'état des Gaz Parfait, soit la loi d'état du Gaz de Van Der Waals, pour traduire le comportement thermodynamique du gaz. On souhaite ainsi mesurer l'impact du choix de la loi d'état sur les résultats des simulations numériques, lorsque l'on se trouve dans des configurations limites pour la loi des Gaz parfait.

Chapitre II: Formulation du problème

1. Le système étudié et domaine de calcul

La figure II.1 représente schématiquement un réfrigérateur thermoacoustique.

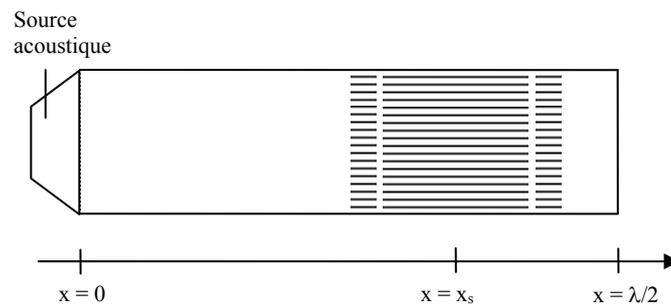


figure II.1 Schéma du réfrigérateur thermoacoustique.

Nous rappelons que ce type de réfrigérateur a fait l'objet de thèse expérimentale (S. Duffourd [17]), ainsi que numérique (D. Marx [31]). Le dispositif comprend un résonateur acoustique, une source, un échangeur de chaleur chaud, un stack et un échangeur de chaleur froid. La source permet de créer une onde stationnaire dans le résonateur. Le stack, qui est le siège de l'effet thermoacoustique, bien que de nombreuses géométries soient envisageables, sera constitué d'un empilement de plaques parallèles qui transporteront la chaleur d'une de ses extrémités à l'autre. De la même façon, les échangeurs de chaleurs qui permettent de récupérer le flux de chaleur thermoacoustique, seront considérés comme un stack plus court.

Il s'agit d'un problème 2D, dans lequel on souhaite simuler une onde acoustique dans le gaz ainsi que les transferts de chaleur entre le gaz et les éléments solides qui sont le stack et les échangeurs. De plus, l'effet thermoacoustique étant liés aux couches limites autour des parois, la prise en compte des phénomènes visqueux et conductif est nécessaire. C'est pourquoi, le problème sera résolu à l'aide d'une méthode de simulation directe (DNS), dans laquelle les équations de Navier-Stokes compressible permettront d'obtenir l'évolution des comportements du gaz dans le temps et l'espace et une équation de la chaleur donnera la température dans les

solides. Le fluide sera supposé newtonien et les flux de chaleur seront exprimés grâce à la loi de Fourier. Les équations correspondantes sont décrites dans le paragraphe suivant.

1.2 Les équations de conservation

Dans cette partie, la position est repérée en notation indicielle x_1 pour la direction x et x_2 pour la direction y . On note ρ , p , e et T , respectivement la densité, la pression, l'énergie totale volumique et la température du fluide. De même, ρ_s et T_s , sont respectivement la densité et la température du solide. La vitesse du fluide de composante u_1 suivant x et u_2 suivant y , est aussi notée en notation indicielle.

1.2.1. Pour le fluide

Les équations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour le fluide s'écrivent (en notation d'Einstein):

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + p) u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Dans ces équations, τ_{ij} est la composante (i, j) du tenseur de contraintes visqueuses τ . q_i est la composante i du flux de chaleur. Dans un fluide newtonien et avec la loi de Fourier, ils s'expriment, respectivement de la façon suivante :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

$$q_i = -K \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Avec μ la viscosité dynamique et K la conductivité thermique du fluide. Etant donné que les écarts de température sont faibles par rapport à la température moyenne, on négligera la variation des ces deux termes avec la température.

δ_{ij} est le symbole de Kronecker qui est égale à 1 si $i=j$ et 0 sinon.

Nous rappelons aussi que l'énergie totale volumique du fluide est la somme de son énergie cinétique volumique e_C et de son énergie interne volumique e_I :

$$(1.4) \quad e = e_c + e_I, \text{ avec } e_c = \frac{1}{2} u_i u_i$$

De plus, il est possible d'exprimer l'équation de l'énergie cinétique à l'aide des relations (1.1) et (1.2):

$$(1.5) \quad \frac{\partial \rho e_c}{\partial t} + \frac{\partial \rho e_c u_j}{\partial x_j} = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

De (1.3), (1.4) et (1.5), on en déduit alors l'équation de conservation de l'énergie interne du fluide :

$$(1.6) \quad \frac{\partial \rho e_I}{\partial t} + \frac{\partial \rho e_I u_j}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

Ainsi, avec une équation d'état pour le fluide et la relation (1.6), il sera possible d'exprimer l'équation de l'énergie à l'aide de la température (§1.3).

1.2.2. Pour le solide

Dans le solide, l'équation de l'énergie se ramène à l'équation de la température :

$$(1.7) \quad \rho_s C_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = -\frac{\partial q_{si}}{\partial x_i}$$

Où, q_{si} est la composante i du flux de chaleur dans le solide et C_s sa capacité thermique.

$$q_{si} = -K_s \frac{\partial T_s}{\partial x_i}$$

K_s est la conductivité thermique dans le solide. Pour la même raison que pour la conductivité thermique du gaz, la dépendance de ce terme avec la température est négligée.

1.3 Lois d'état et équation de l'énergie

La résolution des équations de conservation dans le fluide nécessite une loi d'état qui modélise son comportement thermodynamique. Comme nous l'avons dit en introduction, dans la majorité des études réalisées sur les machines thermoacoustiques, la loi des gaz parfait est choisie afin de relier la pression p , la densité ρ et la température T du gaz. Dans ce travail, on utilisera aussi la loi des gaz de Van Der Waals. Il s'agit d'une amélioration de la loi des gaz parfait, surtout dans des conditions où la pression est élevée.

1.3.1. Loi des gaz parfait

Dans un premier temps, les résolutions seront faites en considérant que le fluide est un gaz parfait. On peut ainsi écrire l'équation d'état suivante :

$$(1.8) \quad p = \rho r T$$

Ainsi que les relations sur C_p et C_v sont les capacités thermiques massiques du gaz à volume constant et à pression constante :

$$C_v = \frac{r}{\gamma - 1}, \quad C_p = \frac{r\gamma}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

Où, r est la constante du gaz considéré, γ son coefficient isentropique.

Enfin, l'énergie interne d'un gaz parfait, qui ne dépend que de la température, est déterminée à une constante près selon l'expression suivante :

$$(1.9) \quad e_l = C_v T$$

On obtient alors l'équation suivante à l'aide de (1.6) et (1.9) :

$$(1.10) \quad \rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

1.3.2. Gaz de Van Der Waals

Dans le cas d'un gaz de Van Der Waals, la relation entre la pression, la densité et la température s'écrit :

$$(1.11) \quad \left(P + \rho^2 \frac{a}{M^2} \right) = \frac{\rho r T}{(1 - \rho b/M)}$$

M étant la masse molaire du gaz considéré, a la pression de cohésion et b son covolume.

Etant donné que dans notre problème, les fluctuations de température et de pression sont faibles devant leurs valeurs moyennes, on suppose que les chaleurs massiques du gaz restent constantes. Cependant, l'énergie interne d'un gaz de Van Der Waals dépend aussi de la pression de la façon suivante :

$$(1.12) \quad de_l = C_v dT - (l - p) \frac{d\rho}{\rho^2}$$

Où l est le coefficient calorimétrique :

$$l = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho$$

$$l = \frac{\rho r T}{(1 - \rho b/M)} = p + \rho^2 \frac{a}{M^2}$$

On en déduit donc l'expression de l'énergie interne à une constante près :

$$(1.13) \quad e_i = C_v T - \frac{a}{M^2} \rho$$

Ainsi, de la même façon que pour un gaz parfait on retrouve l'équation de la température à l'aide des relations (1.1), (1.6) et (1.13):

$$(1.14) \quad \rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = - \left(p + \rho^2 \frac{a}{M^2} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

2. Domaine de calcul

Afin de réduire les temps de calcul, le domaine de calcul est réduit à une portion du résonateur et englobant une seule demie plaque du stack.

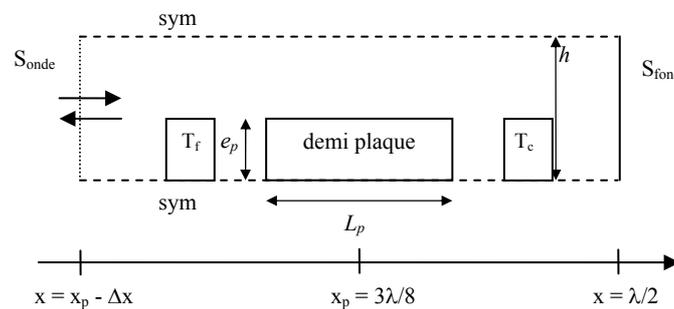


figure II.2 *Domaine de calcul*

Ce domaine prend en compte le fond du résonateur S_{fond} , mais pas la source acoustique. Cependant, une onde acoustique est dans le domaine par la surface S_{sonde} . L'onde injectée se propage dans le domaine, sera réfléchi sur le fond puis évacué par S_{sonde} . Ainsi, la superposition des ondes incidente et réfléchi génèrera l'onde stationnaire dans le domaine. La façon de traiter S_{sonde} sera explicité dans la sous-section suivante (§2.3).

2.2 Conditions aux limites

Sur S_{fond} on a adhérence du fluide à la parois et isolation thermique :

$$(1.15) \quad \begin{cases} u = v = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

n étant la normale locale à la paroi.

Sur les parois latérales notées sym, on impose des conditions de symétrie, afin de prendre en compte la périodicité du stack dans la direction y . Les composantes normales à la paroi, du champ de vitesses $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et du flux thermique sont alors nulles.

$$(1.16) \quad \begin{cases} n\vec{V} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Sur la paroi du stack, on a adhérence du fluide à la paroi, ainsi que la continuité des températures et des flux de chaleur entre le gaz et le solide :

$$(1.17) \quad \begin{cases} u = v = 0 \\ T = T_s \\ K \frac{\partial T}{\partial n} = K_s \frac{\partial T_s}{\partial n} \end{cases}$$

On a aussi adhérence à la paroi sur les échangeurs, mais uniquement continuité de la température à l'interface.

$$(1.18) \quad \begin{cases} u = v = 0 \\ T = T_f \end{cases}, \text{ sur l'échangeur froid}$$

$$(1.19) \quad \begin{cases} u = v = 0 \\ T = T_c \end{cases}, \text{ sur l'échangeur chaud}$$

2.3 Génération de l'onde acoustique

Comme on l'a dit précédemment, on doit, d'une part, générer une onde acoustique progressive, mais aussi permettre l'évacuation des ondes réfléchies dans le domaine de calcul, au niveau de la frontière S_{onde} . Pour cela, on utilise la méthode des caractéristiques. Cette formulation a été proposée pour la première fois par Thompson [54], puis a été reprise par Giles [24] et Poinso et Lele [43]. Elle a pour but de traduire la condition aux limites sous forme d'onde entrante et d'onde sortante, se propageant dans la direction normale à la limite. On imposera l'onde acoustique, se propageant dans la direction x^+ , à l'aide de la partie entrante de la

méthode des caractéristiques. Les ondes réfléchies dans le domaine (par exemple par le fond du résonateur), se propageant dans la direction x^- , seront, elles, évacuées par la partie sortante. Cette méthode consiste, dans un premier temps, à écrire les équations de conservation (1.1), (1.2) et (1.3) sur S_{onde} de la façon suivante:

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1 + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + u d_1 + \rho d_3 + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_{xj}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + v d_1 + \rho d_4 + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_{yj}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2}{2} d_1 + \frac{d_2}{\gamma - 1} + \rho u d_3 + \rho v d_4 + \frac{\partial(\rho e + p)v}{\partial y} &= \frac{\partial u_j \tau_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Avec \mathbf{d} le vecteur contenant les termes non visqueux ci-dessous, où c correspond à la célérité des ondes sonores dans le fluide.

$$(1.21) \quad \begin{aligned} d_1 &= \frac{\partial \rho u}{\partial x} \\ d_2 &= \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \\ d_3 &= u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ d_4 &= u \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

L'analyse caractéristique de Thompson [54] donne \mathbf{d} à l'aide des ondes caractéristiques :

$$(1.22) \quad \begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{c^2} \left[L_2 + \frac{1}{2} (L_4 + L_1) \right] \\ d_2 &= \frac{1}{2} (L_4 + L_1) \\ d_3 &= \frac{1}{2\rho c} (L_4 - L_1) \\ d_4 &= L_3 \end{aligned}$$

L_i traduit l'amplitude de l'onde caractéristique se déplaçant à la vitesse caractéristique λ_i :

- $\lambda_1 = u - c$, correspond à la vitesse des ondes acoustiques se propageant dans le sens x^- .
- $\lambda_2 = u$, correspond à la vitesse de convection, ou la vitesse de propagation des ondes entropiques.

- $\lambda_3 = u$, correspond à la vitesse d'advection de v dans la direction x , ou la vitesse des ondes de vorticité.

- $\lambda_4 = u + c$, correspond à la vitesse des ondes acoustiques se propageant dans le sens x^+ .

Les amplitudes sont données par les relations suivantes :

$$(1.23) \quad \begin{aligned} L_1 &= (u - c) \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ L_2 &= u \left(c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ L_3 &= u \frac{\partial v}{\partial x} \\ L_4 &= (u + c) \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

D'un point de vue numérique, il s'agit, d'une part, de déterminer les ondes sortantes à l'aide des variables du domaine. Puis, d'inclure la partie entrante en fonction de données extérieures. Sur une entrée subsonique, L_1 , L_2 et L_3 sont des ondes sortantes, tandis que L_4 est une onde entrante (figure II.3).

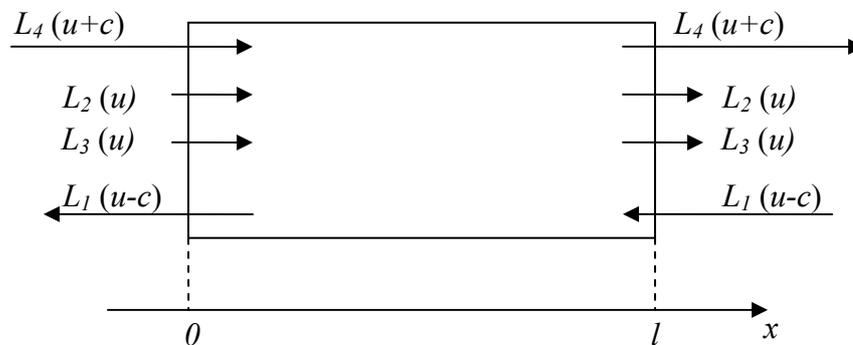


figure II.3 Ondes entrant et sortant du domaine de calcul à travers la frontière d'entrée ($x=0$) et la surface de sortie ($x=l$), dans le cas d'un écoulement subsonique.

3. Equations adimensionnées

3.1 Grandeurs de référence

Afin d'adimensionner les équations de conservation, on prendra pour référence la densité, la longueur et la vitesse suivantes :

$$\rho_{ref} = \rho_0$$

$$L_{ref} = \delta_v$$

$$u_{ref} = c_0$$

On rappelle que ρ_0 est la densité du fluide au repos, δ_v est l'épaisseur de la couche limite dynamique sur une plaque dans un écoulement oscillant et c_0 est la célérité des ondes sonores dans le fluide.

On peut en déduire un temps, et à l'aide de la loi des gaz parfait, une pression et une température de référence :

$$t_{ref} = \frac{L_{ref}}{u_{ref}} = \frac{\delta_v}{c_0}$$

$$p_{ref} = \rho_{ref} u_{ref}^2 = \rho_0 c_0^2 = \gamma p_0$$

$$T_{ref} = \frac{p_{ref}}{r \rho_{ref}} = \gamma T_0$$

Ces variables permettent finalement de définir les nombres adimensionnels suivant :

$$R_e = \frac{\rho_{ref} L_{ref} u_{ref}}{\mu} = \frac{\rho_0 L c_0}{\mu}$$

$$P_e = \frac{\rho_{ref} C_p L_{ref} u_{ref}}{K} = \frac{\rho_0 C_p L c_0}{K}$$

$$P_{eS} = \frac{\rho_S C_S L_{ref} u_{ref}}{K_S} = \frac{\rho_S C_S L c_0}{K_S}$$

Le nombre de Reynolds R_e traduit le rapport des effets convectifs sur les effets visqueux, tandis que le nombre de Peclet P_e et P_{eS} compare respectivement les échanges de chaleurs convectifs et conductifs dans le fluide, et convectif dans le fluide et conductifs dans le solide.

3.2 Equations de conservation adimensionnées

Les variables adimensionnées par leur grandeur de référence sont repéré par un « tilde » : pour toute grandeur G on note $\tilde{G} = G / G_{ref}$. La mise sous forme adimensionnelle des équations de conservation (1.1)-(1.3) et (1.7) donne les équations suivantes :

$$(1.24) \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0$$

$$(1.25) \quad \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial \tilde{x}_j}$$

$$(1.26) \quad \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{e}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{e} + \tilde{p}) \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{C_p}{r P_e} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$(1.27) \quad \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{P_{es}} \frac{\partial \tilde{q}_{Si}}{\partial \tilde{x}_i}$$

Avec les relations constitutives adimensionnées :

$$\tilde{\tau}_{ij} = \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_k} \right)$$

$$\tilde{q}_i = -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_i}$$

$$\tilde{q}_{Si} = -\frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial \tilde{x}_i}$$

3.3 Lois d'état et équations de la température pour le fluide adimensionnées

3.3.1. Gaz parfait

La loi des gaz parfait, mise sous forme adimensionnelle, est :

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} \tilde{T}$$

L'équation de l'énergie (1.26) devient :

$$(1.28) \quad \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} \right) = -(\gamma - 1) \tilde{p} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\gamma - 1}{R_e} \tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} - \frac{\gamma}{P_e} \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

3.3.2. Gaz de Van Der Waals

Afin de faciliter la mise sous forme adimensionnelle de la loi d'état d'un gaz de Van Der Waals, on suppose qu'à l'état de référence le gaz est parfait. C'est-à-dire que :

$$p_{ref} = \rho_{ref} r T_{ref}$$

On obtient alors la relation suivante :

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{T}}{(1-\tilde{\rho}B)} - \tilde{\rho}^2 A$$

$$\text{avec } A = \frac{\rho_0 a}{c_0^2 M^2} \text{ et } B = \rho_0 \frac{b}{M}$$

De même, on obtient l'équation de l'énergie adimensionnée à partir de (1.14):

$$(1.29) \quad \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} \right) = -\frac{r}{C_v} (\tilde{p} + \tilde{\rho}^2 A) \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{r}{C_v R_e} \tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} - \frac{C_p}{C_v P_e} \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

3.4 Conditions aux limites adimensionnées

Du coté des relations sur les frontières du domaine, on trouve rapidement les équations adimensionnées pour les conditions aux limites « classiques ».

Ainsi pour une paroi adiabatique on obtient :

$$(1.30) \quad \begin{cases} \tilde{u} = \tilde{v} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Pour les frontières symétriques :

$$(1.31) \quad \begin{cases} n \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Au niveau de la frontière entre le stack et le gaz :

$$(1.32) \quad \begin{cases} \tilde{u} = \tilde{v} = 0 \\ \tilde{T} = \tilde{T}_s \\ \frac{1}{P_e} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = \frac{1}{P_{e_s}} \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial n} \end{cases}$$

Et au niveau des échangeurs :

$$(1.33) \quad \begin{cases} \tilde{u} = \tilde{v} = 0 \\ \tilde{T} = \tilde{T}_{\text{échangeur}} \end{cases}$$

En ce qui concerne les conditions aux limites sur la frontière S_{onde} , une analyse dimensionnelle des relations (1.21) et (1.22), nous permet d'adimensionner les amplitudes, L_i ,

des ondes caractéristiques à l'aide de la grandeur $\frac{\rho_{ref} u_{ref}^3}{L_{ref}} = \frac{\rho_0 c_0^3}{\delta_v}$. On obtient alors les relations

caractéristiques adimensionnées suivantes :

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_1 &= (\tilde{u} - \tilde{c}) \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{\rho} \tilde{c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right) \\
 \tilde{L}_2 &= \tilde{u} \left(\tilde{c}^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right) \\
 \tilde{L}_3 &= \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \\
 \tilde{L}_4 &= (\tilde{u} + \tilde{c}) \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\rho} \tilde{c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.34}$$

Dans la suite de cette partie, nous écrivons les grandeurs adimensionnées sans le tilde.

Chapitre III: Mise en forme du modèle numérique

1. Maillage et coût de calcul

1.1 Coût de calcul

Afin de simuler numériquement le problème posé, on choisi de discrétiser les équations sur maillage cartésien. Celui-ci est composée de n_x points dans la direction x , n_y points dans la direction y et n_t itérations temporelles. Le coût de résolution numérique est proportionnel au produit $n_x n_y n_t$.

Cependant, l'étude d'un système thermoacoustique nécessite la prise en compte d'échelle de longueurs et de temps très différentes. La thèse de David Marx [31] illustre ce problème de la façon suivante.

Le problème est résolu sur le résonateur acoustique qui à une longueur $L_{res} = \lambda/2$, où λ est la longueur d'onde acoustique. Cependant, le maillage doit être assez fin pour avoir une bonne résolution de la couche limite visqueuse, dont l'épaisseur δ_v est donnée en fonction de c la célérité des ondes sonores et de la viscosité cinématique du fluide ν , par la relation :

$$\delta_v = \sqrt{\frac{\nu\lambda}{\pi c}}$$

Pour des raisons de précisions, Δx_0 et Δy_0 , les tailles des plus petites mailles dans les directions x et y , doivent autoriser un nombre suffisant de points de calcul dans cette couche limite visqueuse. Elles sont ainsi fixées par les relations :

$$\Delta y_0 = \frac{\delta_v}{n_y}$$

$$\Delta x_0 = \Delta y_0$$

Pour une résolution de la couche limite donnée par n_y , l'ordre de grandeur de n_x est :

$$n_x \approx n_y \frac{L_{res}}{\delta_v} \approx n_y \frac{\lambda}{\delta_v} \quad (3.1)$$

Du côté de la résolution temporelle, le pas de temps Δt est contraint par le critère de stabilité, donné par le nombre CFL (Courant-Friedrich-Lévy) :

$$\Delta t \leq CFL \frac{\Delta y_0}{c}$$

On en déduit alors le nombre d'itérations temporelles pour simuler une période acoustique τ :

$$n_t^\tau = \frac{\tau}{\Delta t} \approx n_y \frac{\lambda}{\delta_v} \quad (3.2)$$

Des relations (3.1) et (3.2), on obtient alors une estimation du coût de calcul d'une période acoustique par l'intermédiaire de la relation :

$$\Theta^\tau \approx n_y^3 \frac{\lambda^2}{\delta_v^2} \approx n_y^3 \frac{\lambda c}{\nu} \quad (3.3)$$

Ce coût dépend donc de la résolution, mais est proportionnel à la longueur d'onde acoustique (ou inversement proportionnel à la fréquence). C'est pourquoi on choisit de simuler des systèmes de petite taille, à haute fréquence afin de réduire les temps de simulation. Par exemple, toutes proportions géométriques maintenues, multiplier la fréquence par 100, permet de diviser le temps de calcul nécessaire par 100.

1.2 Domaine de calcul et Maillage

Le maillage utilisé sur le domaine de calcul, exposé dans le chapitre précédent (figure II.2) est représenté schématiquement à la figure III.1.

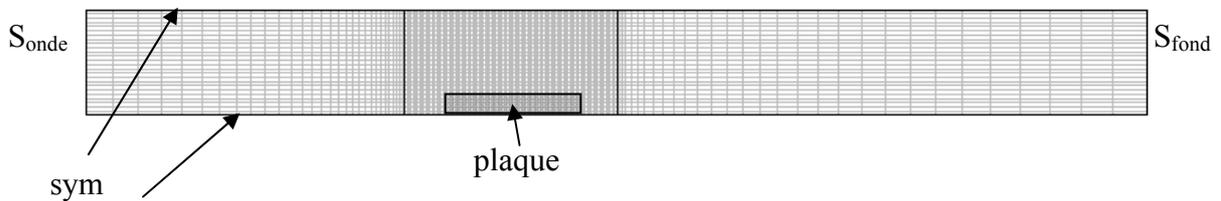


figure III.1 Représentation schématique du maillage utilisé

Il est constitué de trois zones. La zone centrale englobe le stack et les échangeurs. Il s'agit d'une zone où la taille des mailles est la plus petite et reste constante, $\Delta x = \Delta y = \Delta y_0$, afin d'avoir une bonne résolution des couches limites. En amont et en aval de cette zone, on a deux zones dans lesquelles le maillage est étiré suivant la direction x . En partant de la zone centrale, Δx suit

une géométrie de raison 1.05 jusqu'à éventuellement atteindre la valeur limite $\Delta x = 20\Delta x_0$. Dans ces deux zones on garde : $\Delta y = \Delta y_0$. Le nombre de mailles par épaisseur de couche limite sera précisé sur chaque cas de simulation.

2. Outils numériques

Afin de déterminer numériquement les grandeurs de l'écoulement, on choisi d'implémenter les équations de Navier-Stokes sur le logiciel de calcul COMSOL®. Il s'agit d'un code de calcul industriel qui utilise des méthodes d'éléments finis pour résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Il contient plusieurs modes d'application associés à un jeu d'équations modélisant un phénomène physique (mécanique, thermique...). Cependant, dans la version 3.3 du logiciel, aucun mode ne permettait de décrire les écoulements compressibles. Il a donc fallu construire ce modèle à l'aide d'une bibliothèque générale de résolution d'équations aux dérivées partielles.

2.1 Mise en forme des équations de conservation

Parmi les méthodes proposées par COMSOL, pour implémenter un système spécifique, on a utilisé le mode PDE General Form (Partial Differential Equation) [13] [14], qui se présente de la manière suivante :

$$e_a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \Gamma = F \quad \text{sur } \Omega \quad (3.4)$$

$$-n\Gamma = G + \left(\frac{\partial R}{\partial U} \right)^T \mu \quad \text{sur } d\Omega \quad (3.5)$$

$$R = 0 \quad \text{sur } d\Omega \quad (3.6)$$

L'équation (3.4) décrit l'évolution du vecteur d'inconnus U sur le domaine de calcul Ω . Dans notre cas $e_a = 0$, d_a est appelé matrice de masse, Γ est flux du vecteur U et F est un vecteur.

Les équations (3.5) et (3.6) permettent d'écrire les conditions aux limites sur les frontières $d\Omega$, du domaine de calcul. n est le vecteur normal extérieur à la frontière $d\Omega$, R contient les relations décrivant les conditions aux limites de type Dirichlet, tandis que G permet de traduire les conditions aux limites de type Neumann. μ est un multiplicateur de Lagrange utilisé dans le processus de résolution du logiciel.

Il s'agit alors d'identifier chaque coefficient pour construire un modèle numérique d'écoulement compressible. On a choisi de garder une écriture proche des modes utilisés pour décrire des écoulements incompressibles avec transferts thermique [15]. Ainsi, un premier système d'équations décrit l'évolution des grandeurs dynamiques pour le fluide (densité et vitesses), tandis qu'un autre système traduit l'évolution de la température pour le fluide et le solide. Dans la suite de ce chapitre, les coefficients sont marqués par l'indice I pour les grandeurs dynamiques et II pour la température. La figure III.1, ci-dessous, donne la répartition de ces modes sur le domaine de calcul.

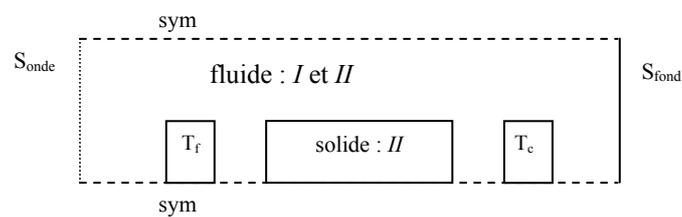


figure III.1 Répartition des modes sur le domaine de calcul

Les équations seront présentées en considérant que le fluide est un gaz parfait. Afin de résoudre le problème avec un gaz de Van Der Waals, il suffira de changer la loi d'état et le terme de pression dans l'équation de la température.

2.1.2. Equations pour les grandeurs dynamiques

Les inconnus sont ici ρ , ρu et ρv , respectivement la densité, la quantité de mouvement suivant x et la quantité de mouvement suivant y . On traduit alors l'équation de conservation de la masse et les équations de conservation de la quantité de mouvement de la façon suivante :

I	Fluide
U_I	$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}$
d_{aI}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

F_I	$- \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \\ u \frac{\partial \rho u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho u}{\partial y} + \rho u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \\ u \frac{\partial \rho v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \rho v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix}$
Γ_I	$- \frac{1}{R_e} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix}$

tableau III.1 Coefficients pour le mode I

De cette façon, les termes d'advection et de pression sont rassemblés dans le vecteur F , tandis que Γ ne regroupe que les termes de viscosité.

2.1.3. Equations pour la température

Contrairement aux grandeurs dynamiques, la température doit être déterminée aussi bien dans le fluide que dans le solide. Pour cela un seul système sera utilisé, dans lequel les coefficients reflètent la nature du milieu où l'on cherche à déterminer la température. Par exemple, pour un gaz parfait, on a :

II	Fluide	Solide
U_{II}	T	T
d_{aII}	ρ	1
F_{II}	$- \left(\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} + (\gamma - 1)p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \Phi$	0
Γ_{II}	$- \frac{\gamma}{P_e} (q_x \quad q_y)$	$- \frac{1}{P_{es}} (q_{sx} \quad q_{sy})$

tableau III.2 : Coefficients pour le mode II

De la même façon que dans les équations pour les grandeurs dynamiques, F rassemble les termes d'advection et de pression, mais aussi le terme de dissipation visqueuse Φ :

$$\Phi = - \frac{\gamma - 1}{R_e} \left(\tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Γ ne traduit alors que les termes de conduction de chaleurs. Notons que la formulation pour les équations de la température est identique à celle utilisé dans le mode *Heat Transfert – Convection and Conduction* du logiciel.

Afin de compléter le modèle, il s’agit maintenant de traduire les conditions aux limites, exposées dans le chapitre précédent. De la même façon que pour la construction des équations sur le domaine, l’écriture des conditions aux limites s’inspire du modèle d’écoulement incompressible existant. Dans un premier temps, nous exposons chaque type de conditions aux limites de façon générale, puis nous faisons une synthèse des relations implémentées sur les frontières du domaine de calcul.

2.2 Conditions aux limites pour les vitesses

2.2.1. Condition d’adhérence à la paroi pour la vitesse

COMSOL propose de gérer les conditions aux limites sur les vitesses sous forme de contrainte, plutôt qu’à l’aide de relation de Dirichlet. Dans l’onglet Weak du menu Conditions aux limites (Boundary Settings), on accède au vecteur *constr* qui sert à rassembler les contraintes voulues. Le logiciel impose la relation $constr = 0$, pour annuler les vitesses sur la frontière ($u = v = 0$), on écrit alors :

$$constr_I = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}$$

En laissant R et G égaux à 0, le logiciel ignorera l’influence des termes de Γ_I sur la frontière.

2.2.2. Conditions de symétrie pour la vitesse

De la même façon que pour une paroi adhérente, les vitesses sur les frontières symétriques sont traitées sous forme de contrainte. L’annulation de la composante normale à la paroi du champ de vitesse ($\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$) s’écrit :

$$constr_I = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho u n_x - \rho v n_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Où $n_x = 1$ et $n_y = 0$ si la paroi est dans la direction y , ou $n_x = 0$ et $n_y = 1$ si elle dans la direction x .

2.3 Conditions aux limites pour la température

2.3.1. Conditions sur les flux thermiques

Du côté de la température, la gestion des flux thermiques sur les frontières se fait à l'aide de conditions aux limites de type Neumann. La nomenclature du code impose alors $R_{II} = 0$ et en remplaçant Γ_{II} pour la température dans la relation (3.5) on trouve :

$$-n\Gamma_{II} = n \frac{\gamma}{P_e} (q_x \quad q_y) = -n \frac{\gamma}{P_e} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{P_e}{\gamma} G_{II}$$

Par identification, on satisfait alors la condition de flux thermique normal nul sur une paroi adiabatique ou une symétrique en imposant $G_{II} = 0$.

2.3.2. Continuité de température imposée

Il s'agit maintenant d'une relation de Dirichlet pour la température. La condition aux limites se traduit directement dans le coefficient R_{II} . Donc pour imposer une température T_{cl} donnée, il suffit d'écrire la relation suivante :

$$R_{II} = -T + T_{cl}$$

Etant donné que le logiciel impose que la relation contenue dans R_{II} est égale à 0, on obtient alors que $T = T_{cl}$.

2.3.3. Continuité de la température et des flux thermiques :

La température étant résolue aussi bien dans le fluide que dans la partie solide, COMSOL propose par défaut de traiter l'interface fluide et solide de façon continue. Il n'y a donc aucun coefficient à spécifier afin de maintenir l'égalité de la température et des flux thermiques sur ce type de frontière.

2.4 Conditions aux limites sur les dérivées temporelles

Le dernier type de frontière à implémenter est la condition aux limites caractéristiques qui permet d'une part de générer l'onde acoustique entrante dans le domaine, mais aussi d'évacuer les ondes qui auront été réfléchies dans le domaine. Il s'agit ici de faire intervenir les fluctuations des dérivées temporelles sur l'entrée du domaine, pour cela COMSOL propose d'utiliser le terme G pour incorporer l'influence de ces termes sur les frontières [14]. Le coefficient R restera nul ici.

Par exemple, si on considère une relation pour U de la forme suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + f(U) = 0$$

où f est une qui décrit l'évolution temporelle de la dérivée temporelle de U sur la frontière. En identifiant les coefficients de la relation (3.2), on peut écrire de façon générale :

$$G = -n\Gamma + \frac{\partial U}{\partial t} + f(U) \quad (3.6)$$

De façon plus précise, on a les conditions caractéristiques suivantes à imposer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_4 + L_1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_4 - L_1) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{2\rho}(\gamma - 1)(L_4 + L_1) = 0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Or par définition, on a aussi :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.9)$$

On déduit alors de (3.7), (3.8) et (3.9) une formulation des conditions caractéristiques en fonctions des inconnus de notre modèle numérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_4 + L_1) = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\rho}{2}(L_4 - L_1) + \frac{u}{2}(L_4 + L_1) = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{v}{2}(L_4 + L_1) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{2\rho}(\gamma - 1)(L_4 + L_1) = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

(3.6) et (3.10) nous donne donc le coefficient G_I pour les grandeurs dynamiques :

$$G_I = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_4 + L_1) \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\rho}{2}(L_4 - L_1) + \frac{u}{2}(L_4 + L_1) - \frac{1}{R_e} \tau_{xx} \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{v}{2}(L_4 + L_1) - \frac{1}{R_e} \tau_{xy} \end{array} \right)$$

Ainsi que G_{II} pour la température :

$$G_{II} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{2\rho}(\gamma - 1)(L_4 + L_1) - \frac{\gamma}{P_e} q_x$$

Il suffit maintenant de rentrer les relations pour L_1 et L_4 dans le menu de fonction sur frontière.

3. Paramètres du logiciel

Une fois les équations implémentées dans le logiciel, plusieurs paramètres, liés au processus de résolution du problème, doivent maintenant être choisis. Il s'agit notamment de fixer le type et l'ordre des éléments finis utilisés pour la discrétisation spatiale, mais aussi la méthode d'intégration temporelle. Les paramètres utilisés correspondent généralement à ceux utilisés dans les modèles non linéaire déjà implémentés sur COMSOL®, dont les modes pour écoulement incompressible avec transfert de chaleur par exemple [15].

3.1 Méthode de discrétisation spatiale

Dans le cas d'écoulement incompressible, COMSOL® propose par défaut d'utiliser des éléments finis de type Lagrange, d'ordre 2 pour les vitesses et d'ordre 1 pour la pression [15] [16]. Ainsi, sur un maillage 2D quadrangle, les vitesses seront déterminées sur les nœuds et le milieu des arêtes, tandis que la pression n'est calculée que sur les nœuds. Dans nos cas, on choisit d'utiliser des éléments de type Lagrange d'ordre 2 pour toutes les inconnues de notre problème. Il convient toutefois de noter qu'il est possible d'utiliser des ordres d'éléments allant jusqu'à 5.

3.2 Méthode d'intégration temporelle

Afin de résoudre numériquement les équations instationnaires de Navier-Stokes, le Guide de modélisation du logiciel [14], conseille l'utilisation du solveur *Generalized- α* . Il s'agit d'une méthode d'intégration temporelle implicite d'ordre 2 qui est toujours stable à condition que le problème numérique soit bien posé. On garde aussi les mêmes paramètres que ceux du modèle

de fluide incompressible. Le solveur linéaire utilisé est UMFPACK. Dans ces conditions, le pas de temps de calcul maximal est relié au pas de temps CFL par la relation :

$$(1.35) \quad dt_{\max} = c_{\alpha} dt_{cfl}$$

$$(1.36) \quad dt_{cfl} = \frac{\max|u + c|}{\Delta x_0}$$

Le coefficient c_{α} est généralement fixé à 5 pour le modèle d'écoulement incompressible instationnaire du logiciel. On choisi de limiter ce coefficient à 4, pour le modèle compressible implémenter.

3.3 Stabilisation numérique par diffusion artificielle

Le guide d'utilisation du logiciel nous met en garde sur la modélisation de transport, ce qui est le cas des équations de conservation pour le fluide. En effet, la discrétisation de problèmes dominés par l'advection sont susceptibles d'engendrer des oscillations numériques, qui en devenant suffisamment importantes peuvent altérer la solution, voir empêcher la convergence du calcul. Le logiciel devient instable lorsque le nombre de Peclet Pe_{cell} de maille de ces équations dépasse 2. Pour chaque équation, ce nombre peut être calculé à l'aide la taille de la maille h , l'amplitude de la vitesse d'advection β et la diffusivité c :

$$P_{\text{ecell}} = \frac{h|\beta|}{c}$$

Ces perturbations numériques sont très bien connues [38], sur les problèmes compressibles résolus avec des schémas d'ordre élevé. Les conditions aux limites, l'intégration numérique ou des géométries complexes peuvent en être la cause. De nombreuses méthodes ont été mises aux points afin de les supprimer, on peut notamment citer l'utilisation de schémas différences finies compact associés à une méthode d'intégration temporelle alternée (Forward-Backward) [38]. Ou encore l'utilisation de schémas DRP (Dispersion-Relation-Preserving) [53], [32] qui permettent de filtrer perturbations numériques. Enfin, une solution consiste à augmenter artificiellement les termes de diffusion afin de dissiper ces oscillations, au détriment de la précision de la solution.

Sur COMSOL, la solution proposée est l'utilisation de diffusion artificielle pour préserver la stabilité numérique [14]. Parmi les types de diffusion utilisé par les modèles existant sur le logiciel, on choisit d'utiliser une méthode de diffusion de type « streamline diffusion ». Cette méthode peut s'interpréter comme l'ajout d'un terme de diffusion artificiel anisotrope $c_{\text{art},ij}$ aux équations du fluide, dont l'écriture est :

$$c_{art,ij} = \delta \frac{h\beta_i\beta_j}{|\beta|}$$

ou δ est un paramètre de réglage contrôlant l'amplitude de ce terme. Ainsi, son ajout au terme de diffusivité de l'équation permet de faire en sorte que le Peclet de maille reste inférieur à 2.

En réalité, l'écriture de cette méthode de diffusion artificielle ne se résume pas au simple ajout d'un terme de diffusion supplémentaire directement dans les équations. COMSOL propose plutôt l'utilisation de contribution en formulation faible. Il s'agit, en effet, de tirer profit de la méthode d'éléments finis utilisé en ajoutant la diffusion artificielle directement en modifiant les fonctions test, utilisés pour intégrer spatialement la formulation faible des équations. Ainsi, on remplace la fonction test classique Ψ par :

$$\Psi = \Psi + \delta \frac{h}{|\beta|} \beta \nabla \Psi$$

Ce qui permet de ne pas modifier la forme finale des équations, mais aussi d'avoir des erreurs beaucoup moins importantes qu'avec l'ajout direct d'un terme de diffusion.

Chapitre IV: Validations du modèle numérique

1. Introduction

Il est très important de valider les caractéristiques du modèle numérique, avant son utilisation pour la simulation complexe. Le but est d'avoir un outil de modélisation capable de modéliser tous les phénomènes physiques mis en jeu dans un réfrigérateur thermoacoustique.

Dans un premier temps, on effectue validation de la formulation de la condition aux limites caractéristique, utilisée pour générer l'onde acoustique se propageant dans le résonateur. Cette frontière du domaine de calcul, sert à injecter une onde acoustique progressive se propageant en aval, mais aussi à laisser sortir l'onde réfléchi par le fond du résonateur (se propageant en amont). Ces cas test permettent alors de vérifier que la composante acoustique du réfrigérateur thermoacoustique, le résonateur, est bien résolue par le modèle numérique.

Le dernier point de validation s'appuie sur la simulation numérique d'un réfrigérateur thermoacoustique. Une configuration utilisée par Marx [1] est utilisée afin de comparer les résultats du modèle. Il s'agit d'une portion de réfrigérateur thermoacoustique qui contient une plaque solide bidimensionnelle, qui sert de stack. Le modèle numérique utilisé dans le cas de référence est basé sur un schéma spatial DRP (Dispersion Relation Preserving) et une méthode d'intégration temporelle Runge-Kutta d'ordre 4. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les mesures expérimentales faites par Duffourd [17].

Toutes les simulations numériques ont été effectuées avec de l'air, considéré comme un gaz parfait, sous des conditions normales de température et de pression. Ces paramètres sont rassemblés dans le tableau ci-dessous.

T_0 (K)	ρ_0 (kg/m ³)	γ	c_0 (m/s)	μ (Pa.s)	K (W/m/K)
293	1.19	1.4	343	$1.7 \cdot 10^{-5}$	0.025

tableau IV.1 paramètres thermodynamiques et propriétés thermophysiques de l'air

2. Onde acoustique stationnaire

2.1 Description du cas de validation

Le résonateur constitue un élément fondamental pour un réfrigérateur thermoacoustique. Il est le siège d'ondes acoustiques qui sont à l'origine des flux de chaleur sur le stack. Cette étape importante consiste ainsi à vérifier que le modèle permet bien de simuler une onde stationnaire dans le domaine de calcul. Pour être plus précis, nous rappelons que le domaine de calcul choisi ne prend pas en compte tout le résonateur, de plus la génération de l'onde acoustique se fait par l'intermédiaire de conditions aux limites caractéristiques imposées sur S_{onde} . Par conséquent, cette étape permet de valider l'utilisation de cette méthode pour obtenir numériquement une portion d'onde stationnaire.

Dans cette section, on s'intéresse au domaine de calcul ci-dessous (figure IV.1). Il s'agit d'une portion de résonateur. Il est délimité à gauche par la frontière S_{onde} , située à une distance x_e de la source acoustique, et à droite par un mur, S_{fond} , situé à la distance $\lambda/2$ de la source. La longueur, L_{DC} , du domaine de calcul correspond alors à une portion du résonateur, de longueur L_{res} . Les bordures latérales sont des frontières symétriques, on ne prend donc ici pas en compte les effets de bords présents sur les parois latérales du résonateur. La largeur h_{DC} est arbitrairement fixée.

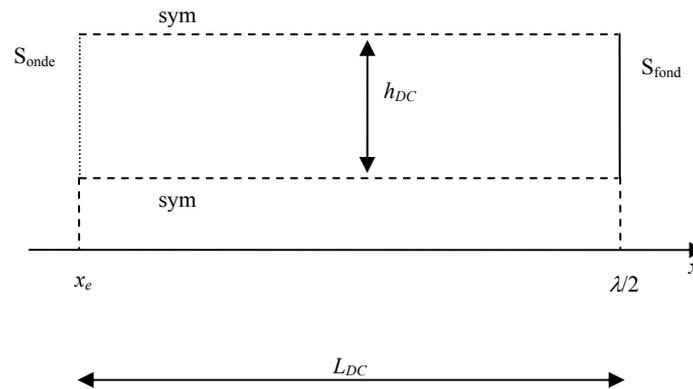


figure IV.1 Schéma du domaine de calcul utilisé

Les paramètres géométriques du résonateur sont les suivants :

L_{res} (m)	1.5
λ (m)	3

tableau IV.2 paramètres géométriques du résonateur

Le modèle numérique résout uniquement les équations de conservation pour le gaz, dont la mise en forme sur COMSOL est explicitée dans le chapitre III. La discrétisation spatiale utilise des éléments finis de Lagrange d'ordre 2 et la méthode d'intégration temporelle utilise un pas de temps égal, permettant de résoudre la période acoustique en 20 itérations temporelles. Notons que ces configurations simples, la stabilisation numérique par l'ajout de diffusion artificielle n'est pas nécessaire. Les résultats numériques sont comparés aux lois analytiques pour l'évolution des fluctuations acoustiques pour une onde acoustique stationnaire.

2.2 Condition aux limites d'entrée sur S_{sonde}

En amont du domaine de calcul, la source génère une onde acoustique progressive, de fréquence $f = 114.3$ Hz qui se propage vers les x croissants. On considère que l'écoulement est uniquement de type linéaire acoustique, dans cette portion. Par conséquent, il n'y a pas d'écoulement moyen ($u_0 = 0$) et la célérité des ondes acoustiques dans le fluides est constante ($c = c_0$). Ainsi, à l'amont du domaine de calcul, les fluctuations de vitesses u' et de pressions p' , d'origine acoustique, sont de la forme :

$$u'(x, t) = \frac{u_a}{2} \sin(\omega t - kx)$$

$$p'(x, t) = \frac{p_a}{2} \sin(\omega t - kx)$$

Où u_a est l'amplitude de la fluctuation de vitesse et p_a celle de pression, ω est la pulsation harmonique et k le nombre d'onde. Ces informations se propagent en amont et sont transmises par la frontière d'entrée S_{onde} , afin de générer l'onde acoustique dans le domaine. Il s'agit alors de traduire les fluctuations acoustiques ci-dessus par l'intermédiaire des ondes caractéristiques entrantes L_2 , L_3 et L_4 , tandis que l'onde sortante L_1 est calculé sur le domaine de calcul (Chapitre II:2.3). Dans le cas d'amplitudes acoustiques faibles, on peut simplifier les relations caractéristiques adimensionnées (1.34) de la façon suivante:

$$(1.37) \quad \begin{aligned} L_1 &= \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ L_2 &= 0 \\ L_3 &= 0 \\ L_4 &= \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

L'information entrante n'est finalement traduite que par L_4 . Elle est donc bien purement acoustique et se propage à la célérité c_0 , vers les x croissants. Il s'agit alors de calculer l'évolution au cours du temps de L_4 , en prenant en compte les fluctuations acoustiques u' et p' , en $x = x_e$.

$$L_4 = \left(\frac{\partial p'}{\partial x} + \rho_0 c_0 \frac{\partial u'}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_e} = \frac{k^*}{2} (p_a + \rho_0 c_0 u_a) \cos(\omega^* t - k^* x_e) = k^* Ma \cos(\omega^* t - k^* x_e)$$

Il s'agit d'une écriture adimensionnelle, dans laquelle $k^* = k.L_{ref}$, $\omega^* = \omega.t_{ref}$, la fluctuation acoustique de vitesses u_a adimensionnée correspond au nombre de mach Ma ($Ma = u_a/c_0$) et rappelons que dans le cadre de l'acoustique linéaire $p_a = \rho_0 c_0 u_a$ et que $\tilde{c}_0 = 1$.

Les ondes acoustiques réfléchies par S_{fond} sont évacuées sur S_{onde} , par l'intermédiaire de L_1 .

2.3 Premier cas

Les simulations numériques sont effectuées pour un nombre de $Ma = 0.5\%$ et l'abscisse d'entrée x_e est fixée à deux tiers de la longueur d'onde. Le maillage comprend 100 mailles dans la longueur L_{DC} et 10 mailles sur la hauteur h_{DC} .

λ (m)	L_{res} (m)	x_e (m)	L_{DC} (m)	h_{DC} (m)	Re	Pe	Pe
3	1.5	2	0.5	0.05	$1.2 \cdot 10^7$	$8.2 \cdot 10^6$	247

tableau IV.3 Paramètres de simulation du premier cas

La longueur de référence a été prise égale à L_{DC} . Notons que dans ces conditions, les effets visqueux et conductifs sont négligeables devant les autres termes des équations (1.25) et (1.28), car les nombres de Reynolds et de Peclet utilisés pour leur adimensionnement sont très grands. La portion d'onde stationnaire simulée peut être donc comparée à une solution analytique.

Re	$1.2 \cdot 10^7$
Pe	$8.2 \cdot 10^6$

tableau IV.4 Valeurs du nombre de Reynolds et du nombre de Peclet utilisé dans les équations adimensionnées.

On compare les vitesses et les pressions simulées aux valeurs retrouvées par la théorie analytique, sur huit sous-instants d'une période τ (figure IV.2 et figure IV.3). On observe un très bon accord entre les résultats numériques et les résultats analytiques, l'erreur étant inférieure à 1% alors que la simulation prend en compte les effets non linéaires contrairement à la solution analytique. Par ailleurs, la portion d'onde stationnaire s'établit rapidement dans le domaine de calcul. En effet, l'évolution de la vitesse en un point de la surface d'entrée (figure IV.4), correspond bien à l'évolution sinusoïdale d'une onde stationnaire, à partir de la deuxième période acoustique simulée.

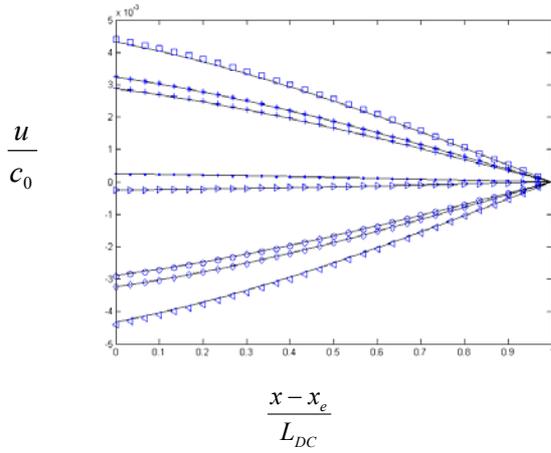


figure IV.2 Profils de vitesses obtenus à 8 sous instant d'une période acoustique, le long du domaine de calcul pour $Ma=0.5\%$. \triangleright $t=0$, $+$ $t=\tau/8$, \square $t=2\tau/8$, $*$ $t=3\tau/8$, $.$ $t=4\tau/8$, \circ $t=5\tau/8$, \triangleleft $t=6\tau/8$ et \diamond $7\tau/8$.
–solutions théoriques.

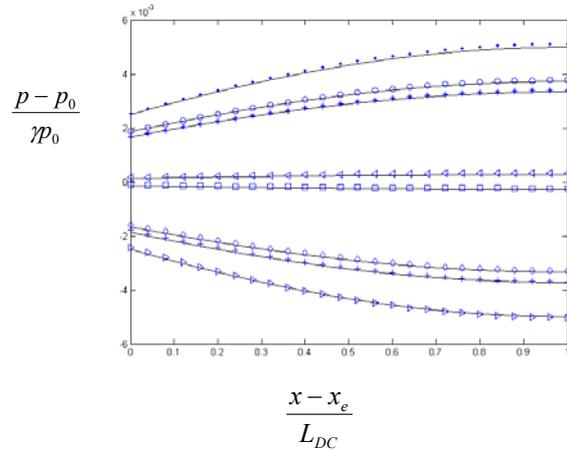


figure IV.3 Profils de pressions obtenus à 8 sous instant d'une période acoustique, le long du domaine de calcul pour $Ma=0.5\%$. \triangleright $t=0$, $+$ $t=\tau/8$, \square $t=2\tau/8$, $*$ $t=3\tau/8$, $.$ $t=4\tau/8$, \circ $t=5\tau/8$, \triangleleft $t=6\tau/8$ et \diamond $7\tau/8$.
–solutions théoriques.

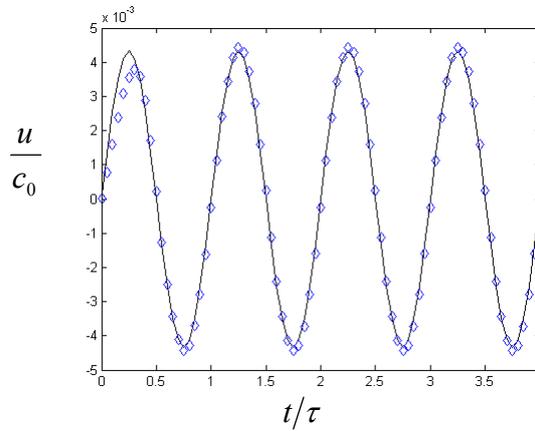


figure IV.4 évolution de la vitesse sur un point de la surface S_{onde} . \diamond solution numérique, –solution théorique.

2.4 Deuxième cas

La simulation suivante est réalisée sur une portion plus grande afin de vérifier qu'on a bien un nœud de pression à la moitié du résonateur. Afin de pouvoir comparer les résultats avec ceux du premier cas, on gardera les mêmes grandeurs de référence pour l'adimensionnement. L'abscisse d'entrée x_e est fixée à un tiers de la longueur d'onde. Le domaine étant juste deux fois plus long que le cas précédent, on réalise le maillage en prenant $n_x = 200$ mailles sur la longueur L_{DC} et $n_y = 10$ mailles sur la hauteur h_{DC} .

x_e (m)	1
L_{DC} (m)	1
h_{DC} (m)	0.05

tableau IV.5 paramètres géométriques du domaine de calcul du 2ème cas test

De la même façon que précédemment, les fluctuations de la vitesse u et de la pression sont comparées à la solution théorique (figure IV.5 et figure IV.6). L'accord reste excellent, l'erreur sur l'évolution la pression n'est plus que l'ordre de 0.3%. Cela est notamment dû à l'information supplémentaire obtenue sur la valeur moyenne de la pression dans le domaine, grâce à la prise en compte du nœud de pression acoustique. Dans le cas précédent, on avait comme unique information, la vitesse moyenne nulle dans le domaine, grâce à la présence du mur. Du côté de l'évolution temporelle des fluctuations acoustiques (figure IV.7), on observe aussi que l'onde stationnaire est établie à partir de la deuxième période acoustique. L'explication (valable aussi pour le cas précédent) est liée à la propagation des ondes caractéristiques dans le domaine. En effet, l'onde progressive introduite sur S_{onde} par L_1 , se propage à la célérité c_0 , elle est réfléchiée sur S_{fond} et parcourt cette fois-ci le domaine dans le sens inverse. Le temps total de la propagation d'une information, générée à l'entrée, est donc $2L_{DC}/c_0$. Or L_{DC} étant inférieur à la taille du résonateur complet, ce temps est inférieur à la période acoustique $\tau = 2L_{res}/c_0$.

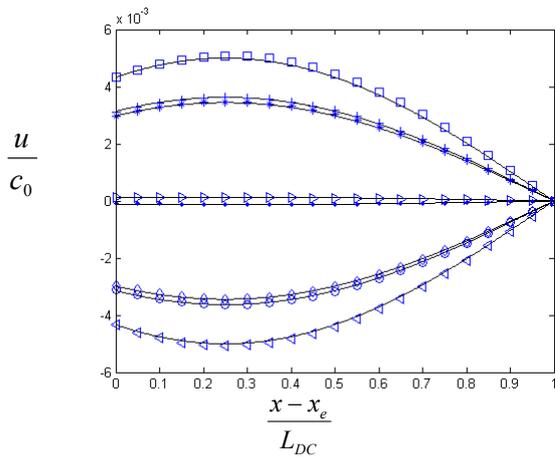


figure IV.5 Profils de vitesses obtenus à 8 sous instant d'une période acoustique, le long du domaine de calcul pour $Ma=0.5\%$. $\triangleright t=0$, $+ t=\tau/8$, $\square t=2\tau/8$, $* t=3\tau/8$, $. t=4\tau/8$, $\circ t=5\tau/8$, $\triangleleft t=6\tau/8$ et $\diamond 7\tau/8$.
-solutions théoriques.

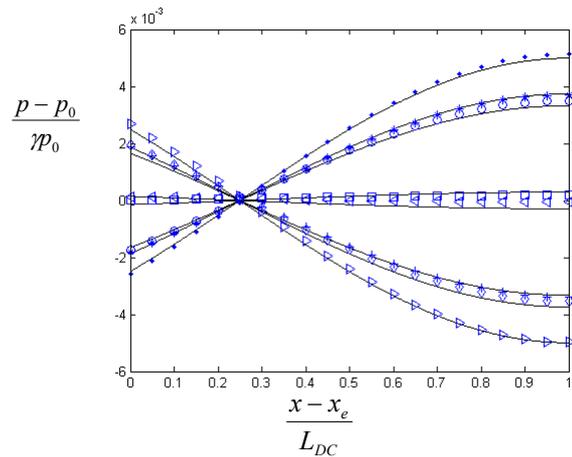


figure IV.6 Profils de pressions obtenus à 8 sous instant d'une période acoustique, le long du domaine de calcul pour $Ma=0.5\%$. $\triangleright t=0$, $+ t=\tau/8$, $\square t=2\tau/8$, $* t=3\tau/8$, $. t=4\tau/8$, $\circ t=5\tau/8$, $\triangleleft t=6\tau/8$ et $\diamond 7\tau/8$.
-solutions théoriques.

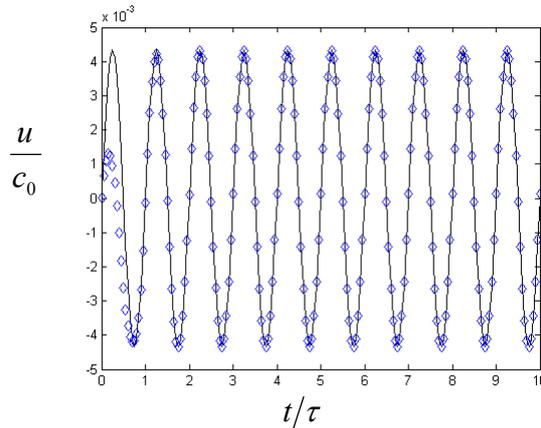


figure IV.7 évolution de la vitesse sur un point de la surface S_{onde} . \diamond solution numérique, $-$ solution théorique.

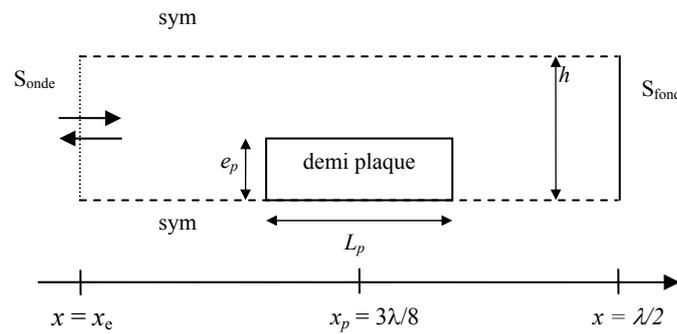
Pour conclure, cette étude simple nous permet de valider la génération de l'onde stationnaire dans le domaine de calcul. L'utilisation de la méthode des caractéristiques, pour simuler une portion de résonateur, permet un temps d'établissement de l'onde faible.

3. Simulation d'un réfrigérateur thermoacoustique

Le dernier cas de validation se consacre à la simulation de l'effet thermoacoustique sur une plaque 2D. Il s'agit de comparer les résultats obtenus à l'aide du modèle implémenté sur COMSOL® sur des configurations semblables à celles exposées dans la thèse D. Marx [31]. Son étude de l'effet thermoacoustique avec une plaque 2D a été comparée aux mesures PIV sur un dispositif expérimental exposé dans la thèse de S. Duffourd [17] pour une fréquence de fonctionnement de 200 Hz. Pour des simulations effectuées à la fréquence de 20 kHz, donc beaucoup moins coûteuses en temps de calcul, les résultats sont comparés à la théorie linéaire. Dans notre cas de figure, les simulations sont aussi effectuées à 20 kHz. Les vitesses et la différence de température obtenues numériquement sont comparées à l'aide de la théorie linéaire.

3.1 Description

Le domaine utilisé est représenté sur la figure IV.8. Il correspond à celui présenté dans le Chapitre II, mais ne contient pas d'échangeur de chaleur. Il s'agit d'une portion de résonateur, comprise entre x_e et $\lambda/2$ et de hauteur h . Il contient une demi plaque du stack, de longueur L_p et d'épaisseur e_p , centrée sur la position $x_s = 3\lambda/8$. La source acoustique qui se trouve hors du domaine de calcul, en $x=0$. L'onde acoustique est donc injectée en $x = x_e$, par la méthode des caractéristiques. Les paramètres géométriques de ce domaine sont donnés dans le tableau IV.6.

figure IV.8 *Domaine de calcul*

L_{DC} / λ	kx_p	L_p / δ_v	e_p / δ_v	h / δ_v	Ma
1/3	2.35	10	0.25	2.57	0.005

tableau IV.6 *Paramètres de simulation du troisième cas*

Comme les cas de validations précédents, les simulations sont effectuées avec de l'air à une température et pression standard. Les propriétés thermiques du stack correspondent à ceux de l'aluminium pour sa densité ρ_s , sa capacité thermique c_s et sa conductivité K_{sy} selon y . Sa conductivité K_{sx} selon x , correspond à peu près à celle du téflon (tableau IV.7). En augmentant artificiellement la conduction thermique du solide dans la direction y , on permet à la température de s'équilibrer rapidement dans l'épaisseur de la plaque, tout en gardant sa propriété conduction thermique selon x faible, pour ne pas pénaliser l'effet thermoacoustique le long de la plaque. De cette façon, on diminue grandement le temps d'établissement des phénomènes simulés.

K_{sx} (W/K/m)	K_{sy} (W/K/m)	ρ_s (kg/m ³)	c_s (J/K/kg)
0.237	237	900	2700

tableau IV.7 *Caractéristique du solide utilisé comme stack*

Le maillage est réalisée de la façon décrite au Chapitre III:1.2, en prenant comme pas d'espace minimal $\Delta x_0 = \Delta y_0 = \delta_v/10$, soit 10 mailles dans l'épaisseur de la couche limite visqueuse. Dans cette configuration δ_v vaut $1.51 \cdot 10^{-5}$ m environ.

Le modèle numérique prend en compte toutes les équations de conservation (pour le fluide et le solide), exposé dans le chapitre III. La discrétisation spatiale utilise des éléments finis de Lagrange d'ordre 2 et la méthode d'intégration temporelle utilise un pas de temps dont le maximum atteint 4 fois le pas de temps donné par la condition CFL (1.36). Cette fois ci, les simulations numériques convergent uniquement si on utilise une méthode de stabilisation numérique de type *streamline diffusion* (Chapitre III:3.3).

Les grandeurs aérodynamiques et thermiques, obtenus numériquement sont comparées à l'aide de la théorie linéaire. Les champs de vorticité et de température au voisinage de la plaque sont aussi comparés qualitativement avec la littérature.

3.2 Etude des champs de vitesses

Dans la section précédente, les champs de vitesses correspondaient aux fluctuations acoustiques d'une onde stationnaire. Maintenant, la présence de la plaque entraîne un rétrécissement de section et modifie en conséquence ces champs. On utilise alors une expression corrigée de l'amplitude vitesse u'_{ac} au niveau du stack afin de prendre en compte le changement de section et l'influence de la couche limite visqueuse au niveau du stack à l'aide d'un coefficient d'obstruction BR (Blockage Ratio) [31].

$$(1.38) \quad u_{ac}(x) = Ma.c_0 \cdot \sin(kx)$$

$$(1.39) \quad BR = \frac{h - e_p - \delta_v/2}{h}$$

$$(1.40) \quad u'_{ac}(x) = \frac{u_{ac}}{BR}$$

On compare dans un premier temps les vitesses obtenues sur la frontière symétrique supérieure du domaine à l'abscisse $x = x_s$ ($y = h$). L'amplitude de la vitesse u_{ac} non modifié vaut 1.21 m/s, la prise en compte de rétrécissement nous donne $u'_{ac} = 1.86$ m/s et celle obtenue numériquement au même point est de 2.04 m/s. On constate que le changement de section à un effet non négligeable sur la fluctuation de vitesse acoustique. De plus, malgré la prise en compte de rétrécissement dans la solution théorique, la différence reste significative. En effet, le coefficient d'obstruction BR donne une approximation grossière de l'influence de la couche limite visqueuse sur le champ de vitesse, qui plus est lorsque qu'on se trouve dans un cas ou cette épaisseur à une valeur

significative par rapport à l'espace entre les plaque du stack ($\delta_v/(h-e_p) = 0.27$). Cela étant l'évolution temporelle de la vitesse numérique est en bon accord avec la fluctuation d'une onde acoustique stationnaire.

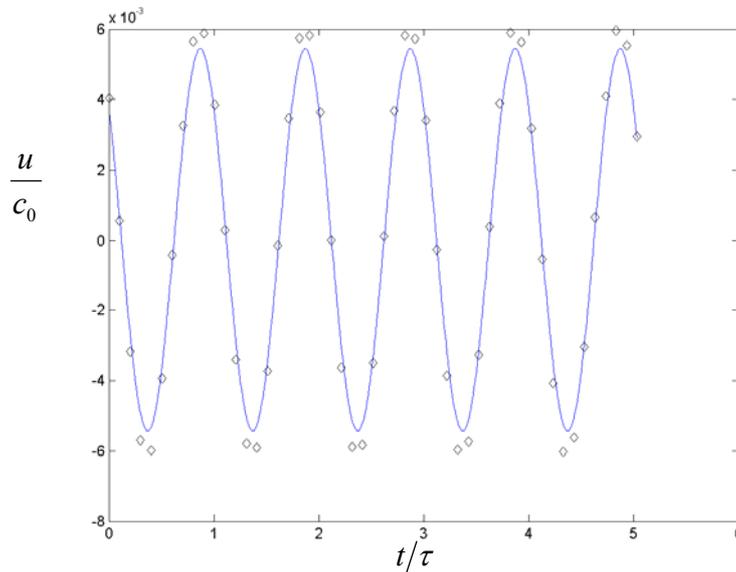


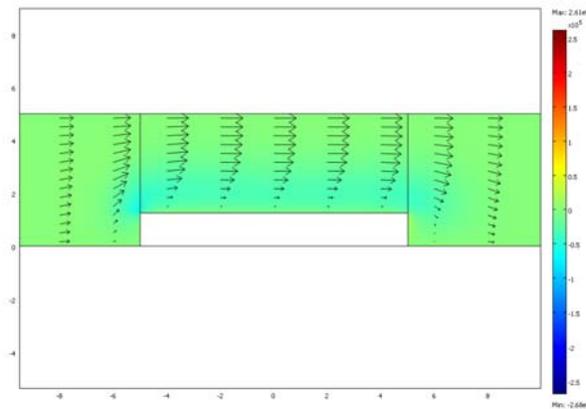
figure IV.9 évolution de la vitesse sur le $x=x_s$ et $y=h$, $Ma=0.5\%$. \diamond solution numérique, $-$ solution théorique corrigé.

On s'intéresse maintenant à l'évolution du champ de vitesses autour de la plaque. Pour cela, on représente les champs de vecteur et le champ de vorticité à 8 sous-instants d'une période acoustique. La vorticité est défini par :

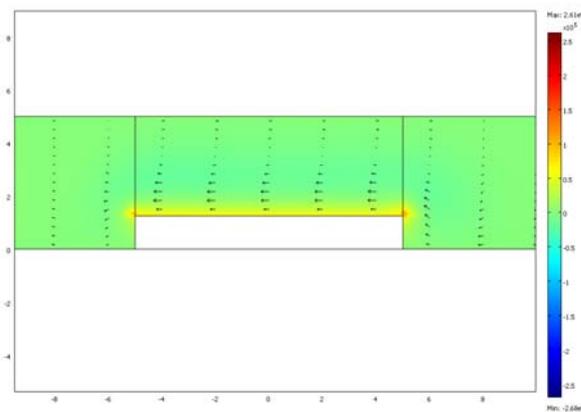
$$(1.41) \quad \Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

La séquence (figure IV.10, figure IV.11 et figure IV.12) débute à un instant t_a , le premier enregistrement s'effectue au temps $t = t_a + \tau/16$ et l'incrément entre chaque acquisition est de un huitième de période acoustique τ . La plaque est centrée en $x = 0$ et l'origine de l'axe des ordonnées correspond à la position de la frontière symétrique du bas. Les graduations des axes sont adimensionnées et doivent être multiplié par $1.51 \cdot 10^{-5}$ m (l'épaisseur de la couche limite visqueuse qui sert de longueur de référence) afin de retrouver les tailles réelles. Chaque acquisition est accompagnée de la valeur de la vitesse au point M de coordonnées (x_s, h) .

$$t = t_a + \tau/16, u(M) = 1.53 \text{ m/s}$$



$$t = t_a + 3\tau/16, u(M) = 0.17 \text{ m/s}$$



$$t = t_a + 5\tau/16, u(M) = -1.32 \text{ m/s}$$

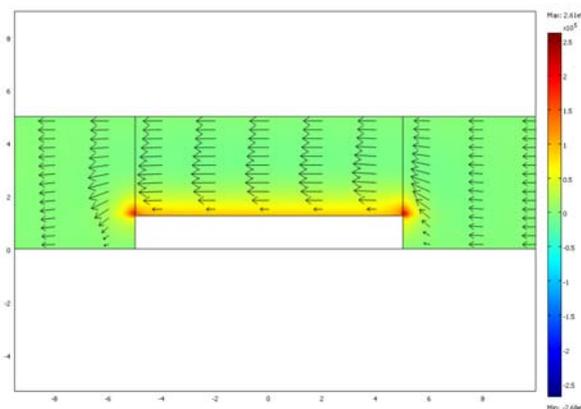
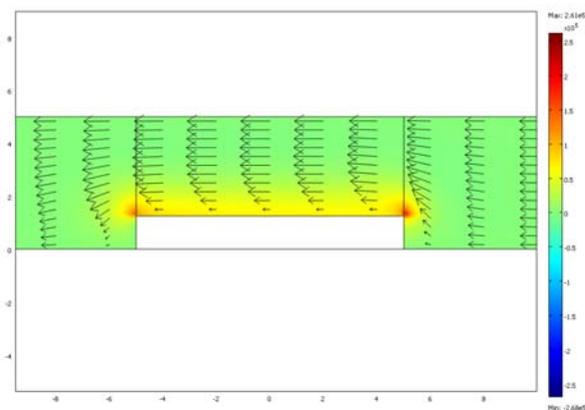
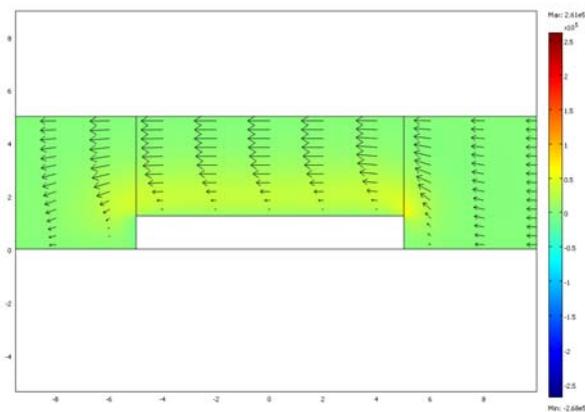


figure IV.10 Evolution des vitesses et de la vorticité entre l'instant $t+\tau/16$ et $t+5\tau/16$

$$t = t_a + 7\pi/16, u(M) = -2.01 \text{ m/s}$$



$$t = t_a + 9\pi/16, u(M) = -1.53 \text{ m/s}$$



$$t = t_a + 11\pi/16, u(M) = -0.17 \text{ m/s}$$

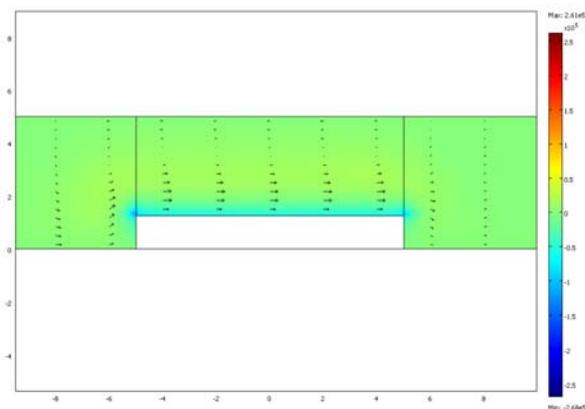
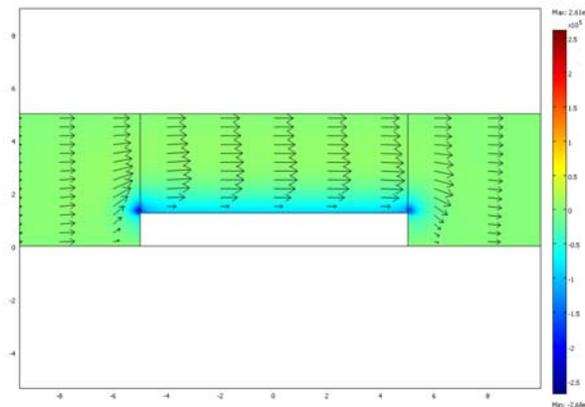


figure IV.11 Evolution des vitesses et de la vorticité entre l'instant $7t+t/16$ et $t+11t/16$

$$t = t_a + 13\pi/16, u(M) = 1.31 \text{ m/s}$$



$$t = t_a + 15\pi/16, u(M) = 1.98 \text{ m/s}$$

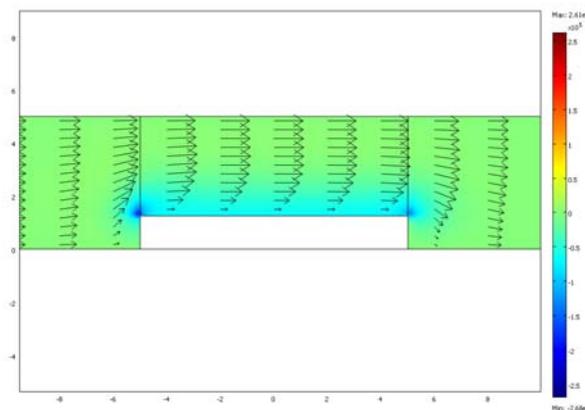


figure IV.12 Evolution des vitesses et de la vorticité aux instants $13t+t/16$ et $t+15t/16$

Le champ de vorticité permet de mettre en évidence les zones d'écoulements cisailés, ce qui est le cas de l'écoulement en couche limite qui est freiné à cause de la paroi solide. Les champs de vorticité évoluent qualitativement de façon similaire aux résultats obtenus par Marx [31]. Cependant, nos valeurs de vitesses au point M sont sous évaluées, alors que notre champ de vorticité semble surévalué. Ces différences proviennent notamment d'un manque de résolution pour les intégrations numériques dans notre modèle. En effet, on rappelle qu'on utilise une discrétisation à l'ordre 2 en espace en temps, alors que le code utilisé par Marx utilise une formulation DRP qui est a des similitude avec un schéma aux différences finies d'ordre 6 et une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour l'intégration temporelle. Le modèle écrit tel quel sur

COMSOL n'est clairement donc pas une résolution suffisamment fine pour résoudre rigoureusement la couche limite visqueuse autour de la plaque.

3.3 Champ de température

Du fait que le nombre de Mach choisi est faible ($Ma = 0.5\%$) et que notre stack est petit devant la longueur d'onde acoustique ($L_p/\lambda = 113$), notre configuration est dans le domaine de validité de la théorie linéaire pour la comparaison de la différence de température obtenue entre les extrémités du stack. L'expression théorique de cette différence est donnée par la relation [50] :

$$(1.42) \quad \Delta T = \frac{-\frac{Lp(h - e_p)}{4\rho_0 c_0} p_a^2 \sin(2kx) \left(1 + \frac{e_p}{h - e_p}\right) A_1}{(h - e_p)K - e_p K_s - \frac{(h - e_p)Cp \left(1 + \frac{e_p}{h - e_p}\right)^2}{4\omega\rho_0 c^2(1 - Pr)} p_a^2(1 - \cos(2kx)) A_2}$$

Les coefficients A_1 et A_2 dépendent de fonctions de forme liées à la géométrie étudiée.

La théorie prévoit une valeur de 0.067 K et la différence de température obtenue numériquement atteint 0.069 K au bout d'une trentaine de période acoustique. Le modèle numérique permet donc d'obtenir une valeur de la différence de la température en bon accord avec la prévision obtenue grâce à la théorie linéaire dans ces conditions.

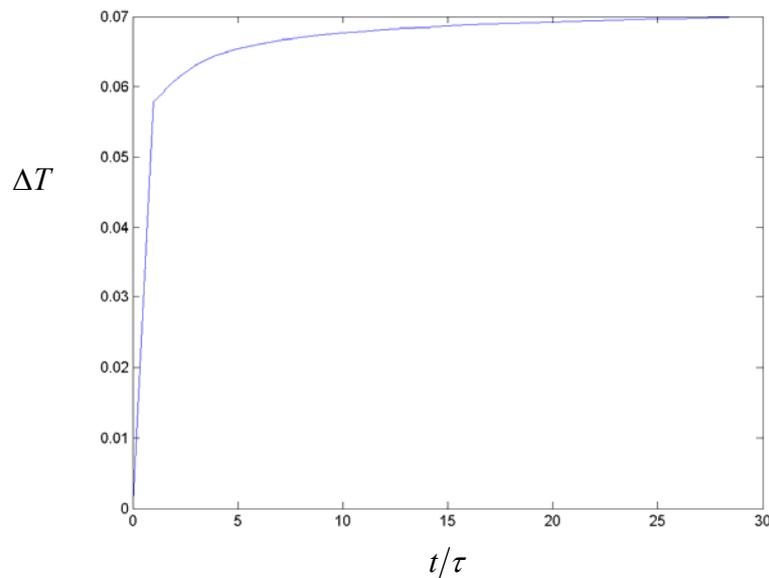
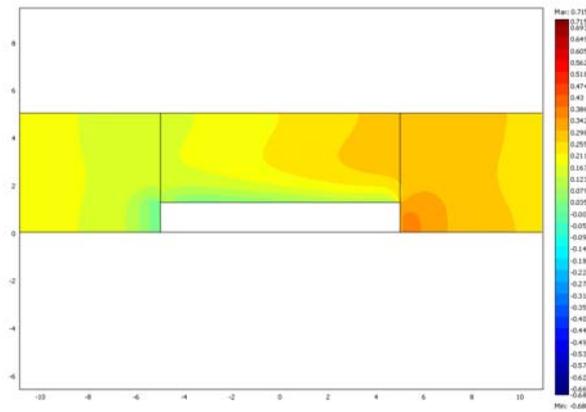


figure IV.13 Evolution de la différence de température entre les extrémités du stack, $Ma = 0.5\%$

Pour finir on compare qualitativement le champ de température obtenu au voisinage du stack de la même façon que pour les champs de vorticité, pour l'étude des vitesses.

$$t = t_a + \pi/16, u(M) = 1.53 \text{ m/s}$$



$$t = t_a + 3\pi/16, u(M) = 0.17 \text{ m/s}$$

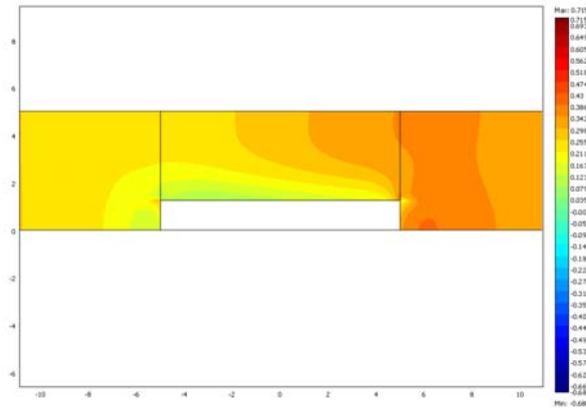
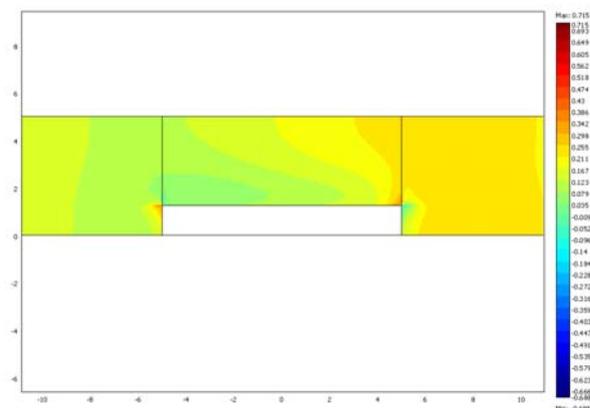
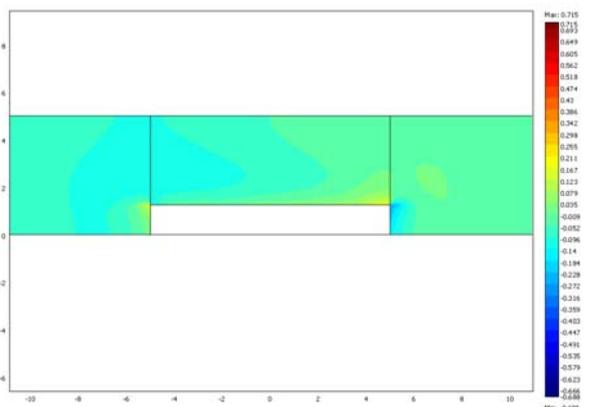


figure IV.14 Evolution des vitesses et de la vorticité entre l'instant $t+t/16$ et $t+3t/16$

$$t = t_a + 5\pi/16, u(M) = -1.32 \text{ m/s}$$



$$t = t_a + 7\pi/16, u(M) = -2.01 \text{ m/s}$$



$$t = t_a + 9\pi/16, u(M) = -1.53 \text{ m/s}$$

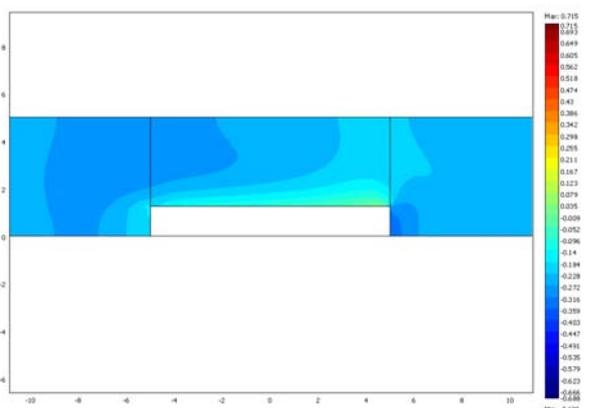
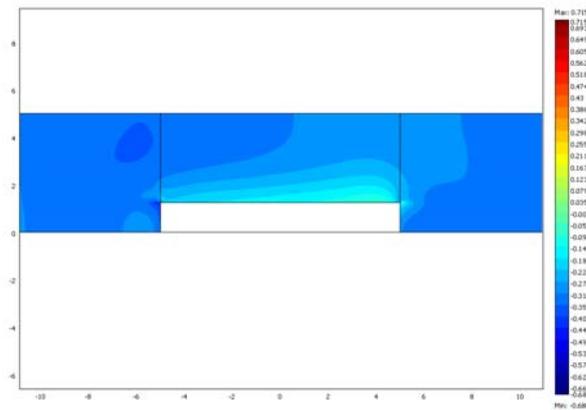
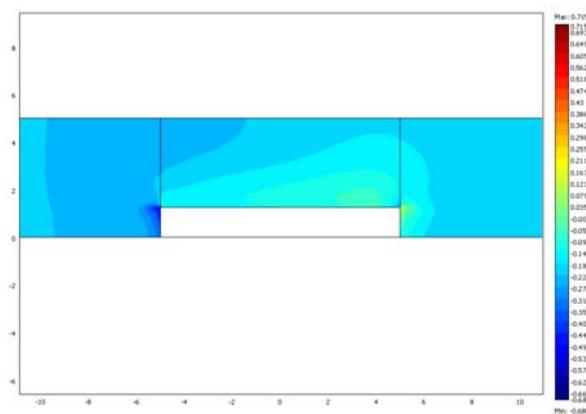


figure IV.15 Evolution des vitesses et de la vorticité entre l'instant $5t+t/16$ et $t+9t/16$

$$t = t_a + 11 \tau/16, u(M) = -0.17 \text{ m/s}$$



$$t = t_a + 13 \tau/16, u(M) = 1.31 \text{ m/s}$$



$$t = t_a + 15 \tau/16, u(M) = 1.98 \text{ m/s}$$

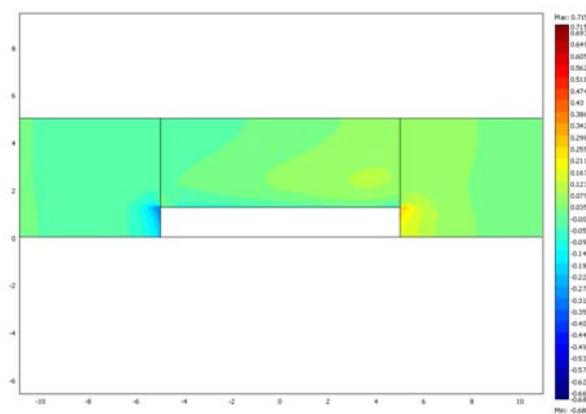


figure IV.16 Evolution des vitesses et de la vorticité aux instants $11t+t/16$ et $t+15t/16$

Un examen qualitatif de ces acquisitions, permet de retrouver des amplitudes et un comportement des champs de température beaucoup plus en accord avec les résultats obtenus par Marx sur la même configuration, que les champs de vitesses. Cela s'explique par le fait que la couche limite thermique, étant plus grande, contient plus de mailles que la couche limite visqueuse et est donc mieux résolu. Par ailleurs, cette différence de température résulte de l'équilibre thermique entre le gaz et le solide. Du côté du solide l'équation est une simple équation de conduction de la chaleur, dont l'intégration numérique est surdimensionnée, par rapport à une étude numérique classique de la conduction de la chaleur dans un solide. Du côté du gaz, le terme de diffusion verticale de la chaleur est du même ordre que le terme d'advection horizontal de la température, l'influence des termes de transports y est donc moins prépondérant. Par conséquent, ces équations sont résolues plus efficacement par le logiciel.

4. Conclusions

Dans ce chapitre, notre modèle numérique a été validé sur plusieurs points. Dans un premier temps, la simulation d'une portion de résonateur à montrer que le jeu de conditions aux limites, utilisé sur la frontière S_{onde} , permet bien d'obtenir la bonne portion d'onde acoustique stationnaire dans le domaine de calcul. Ensuite on simule l'effet thermoacoustique au dessus d'une plaque 2D à 20 kHz. Les résultats sur les champs aérodynamiques, sont satisfaisants par rapport aux prévisions analytiques. Cependant, une étude qualitative du champ de vorticité met en évidence un manque de convergence, notamment lié à un nombre de maille trop faible dans la couche limite. Du côté des champs thermiques, l'accord avec la théorie linéaire est très satisfaisant, et relève que les erreurs sont moins importantes que pour les vitesses, par rapport aux résultats de simulations numériques directes issues de la littérature.

Chapitre V: Influence de la loi d'état du gaz sur l'effet thermoacoustique

1. Introduction

Dans le cadre de l'utilisation de réfrigérateurs thermoacoustiques à des fins d'exploitation industriels, de nombreux prototypes de grandes échelles ont été réalisés. On peut citer par exemple, les procédés de réfrigération thermoacoustique réalisés par la collaboration des laboratoires IPNO (Institut de Physique Nucléaire d'Orsay) et LIMSI (Laboratoire d'informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur) et l'entreprise HEKYOM [19]. Il s'agit de machines de grande taille, fonctionnant à des gaz pressurisés, dont l'objectif est de pouvoir obtenir une température froide très inférieure à 0°C . L'une d'entre elle fonctionne avec de l'hélium, dont la pression moyenne est de 26 bar et génère une température froide de -84°C . De plus, lorsqu'un moteur thermoacoustique génère l'onde acoustique pour un réfrigérateur dans le même résonateur, le gaz est parfois soumis à des contraintes thermiques locales, très importante. La température chaude pour le moteur peut dépasser plusieurs centaines de degré Celsius, alors que la température froide du réfrigérateur peut atteindre des températures négatives de l'ordre de -100°C .

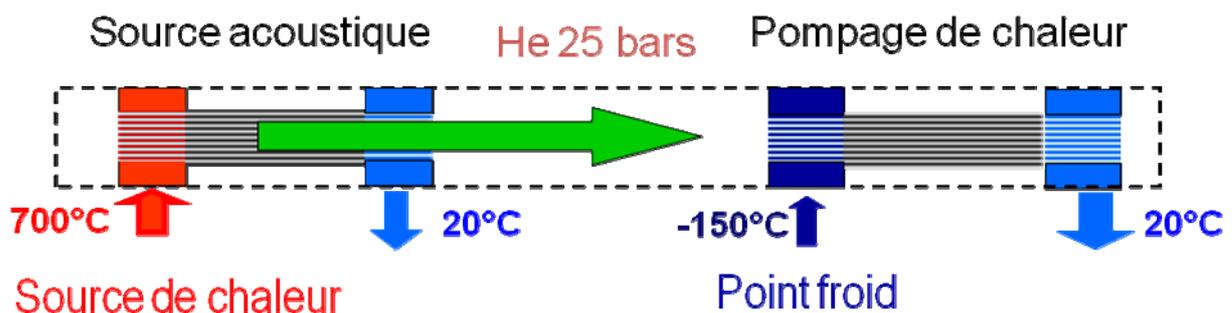


figure V.1 Schéma du dispositif expérimental, réalisé avec la collaboration de l'IPNO, le LIMSI et HEKYOM.

Cependant, que ce soit dans le cadre d'étude analytique, ou de simulation numérique les hypothèses utilisées sont formulés sur des écoulements en conditions normales de température et de pression, mais aussi pour des comportements thermodynamique isentropique pour le gaz. Dans le cadre de simulation numérique directe, on peut se demander si la traduction du

comportement thermodynamique du gaz par la loi des gaz parfait, est toujours une modélisation viable. Dans ce chapitre, on se propose d'étudier l'influence de la loi d'état du gaz sur l'effet thermoacoustique. On choisit comme autre loi d'état celle du gaz de Van Der Waals. Notons qu'il ne s'agira pas de déterminer si le gaz de Van Der Waals donne des résultats plus pertinent que le gaz parfait, mais plutôt de faire un constat sur les éventuelles écarts observés sur les simulations numériques. La première section se consacre à une étude analytique comparative entre les grandeurs thermodynamiques et acoustiques pour un gaz parfait et pour un gaz de Van Der Waals. Dans la deuxième section, on réalise une comparaison entre ses deux lois à l'aide de simulations numériques d'une onde stationnaire. Par la suite, on se consacre à la simulation numérique d'effet thermoacoustique sur une plaque 2D, avec un gaz de Van Der Waals, pour de l'air et de l'hélium.

2. Comparaison analytique entre les lois d'états

Dans cette partie, on se propose de comparer les propriétés thermodynamiques trouvées à partir de l'hypothèse des gaz parfait d'un côté et la loi du gaz de Van Der Waals, de l'autre. La comparaison se fera notamment au niveau de l'expression de la pression, de l'évolution de la température au cours d'une transformation isentropique et de la célérité des ondes sonores dans le gaz. Ces deux lois, déjà formulé dans le chapitre II, s'expriment en reliant la pression, la température et la densité du gaz. Les formes dimensionnelles pour la loi des gaz parfaits et celle de Van Der Waals sont respectivement :

$$p = \rho r T$$

$$\left(P + \rho^2 \frac{a}{M^2} \right) = \frac{\rho r T}{(1 - \rho b/M)}$$

On rappelle que r est la constante du gaz et M sa masse molaire. a , la pression de cohésion, et b , le covolume, sont les paramètres supplémentaires intégrés dans la loi de Van Der Waals afin d'enrichir le comportement thermodynamique du gaz parfait. Ces constantes dépendent du type de gaz utilisé. Les constantes de quelques gaz utilisés dans le domaine de la réfrigération thermoacoustique, sont exposées dans le tableau ci-après.

	M (g/mol)	r (J/K/kg)	a	b
Air	29	287	$1.358 \cdot 10^{-1}$	$3.64 \cdot 10^{-5}$
Azote	14	594	$1.408 \cdot 10^{-1}$	$3.91 \cdot 10^{-5}$
Hélium	4	2079	$3.457 \cdot 10^{-3}$	$2.37 \cdot 10^{-5}$
Argon	40	208	$1.363 \cdot 10^{-1}$	$3.22 \cdot 10^{-5}$

tableau V.1 Masse molaire, constante de gaz et coefficients de Van Der Waals pour l'air, l'azote, l'hélium et l'argon.

Rappelons aussi que les formes adimensionnelles de ces deux lois, aussi exprimées dans le chapitre II, sont respectivement :

$$p = \rho T$$

$$p = \frac{\rho T}{(1 - \rho B)} - \rho^2 A$$

Avec les coefficients adimensionnés avec $A = \frac{\rho_0 a}{c_0^2 M^2}$ et $B = \rho_0 \frac{b}{M}$ et la célérité des ondes sonores pour un gaz parfait $c_0 = \sqrt{\gamma r T_0}$.

2.2 Différence sur la pression

Les écritures ci-dessus, permettent facilement d'exprimer la pression calculée pour le gaz réel en fonction de la pression du gaz parfait. Si on pose p_{vdw} , la pression du gaz de Van Der Waals et p_{gp} celle du gaz parfait, on a :

$$(1.43) \quad p_{vdw} = \frac{p_{gp}}{(1 - \rho B)} - \rho^2 A$$

Examinons les valeurs de A et B . On l'évalue tout d'abord pour des conditions de température et de pression normales. On suppose pour cela que l'état de référence, qui permet de définir ces coefficients, suit la loi des gaz parfait. C'est-à-dire qu'on estimera la densité et la célérité de cet état à l'aide du modèle classique. On rassemble ainsi quelques exemples, pour une température de l'ordre de 20°C et une pression atmosphérique, dans le tableau ci-dessous

	B	A
Air	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
Azote	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$
Hélium	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$0.8 \cdot 10^{-3}$
Argon	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$

On observe dans ces conditions, que l'ordre de ces coefficients est de 10^{-3} . Ce qui nous permet de faire l'hypothèse que le terme ρB est très faible devant 1, étant donné que la valeur adimensionnelle de la densité et de la température est de l'ordre de l'unité. Ainsi, avec un développement asymptotique en ρB à l'ordre 1, l'équation (1.43) devient :

$$p_{vdw} \approx p_{gp}(1 + \rho B) - \rho^2 A$$

On peut même se permettre de négliger l'influence de B et de A . Ainsi, pour des conditions normales de pression de température, la loi de Van Der Waals, ne donne pas de différence significative sur le comportement thermodynamique du gaz.

$$p_{vdw} \approx p_{gp} = \rho T$$

Cependant, on peut se demander comment ces ordres de grandeurs évoluent lorsqu'on fait varier la densité et la température de l'état de référence. On choisit de faire varier la température de 200 à 500 K et la densité, en considérant que la pression varie de 1 à 50 bars pour l'état de référence. Notons, que dans ces gammes de variations l'hélium est toujours dans son état supercritique, alors que l'air et l'argon passent de l'état gazeux à supercritique au-delà de 5 bars environ. Aucune de ces trois espèces ne passent à l'état liquide dans ces conditions et ne se trouve pas non plus au voisinage du point critique.

Les figures V.1, V.3 et V.5 correspondent à la variation de A respectivement pour l'air, l'hélium et l'argon. Les figures V.2, V.4 et V.6 donnent à la variation de B respectivement pour l'air, l'hélium et l'argon.

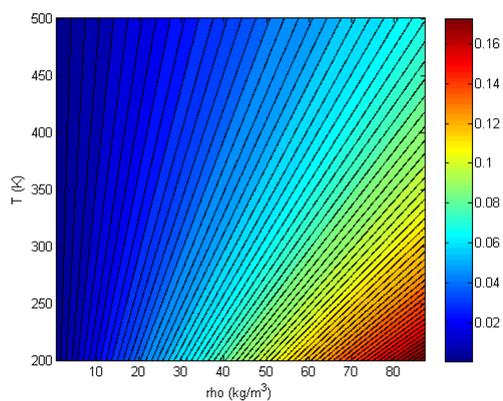


figure V.2 Evolution de A en fonction de ρ et T , pour l'air.

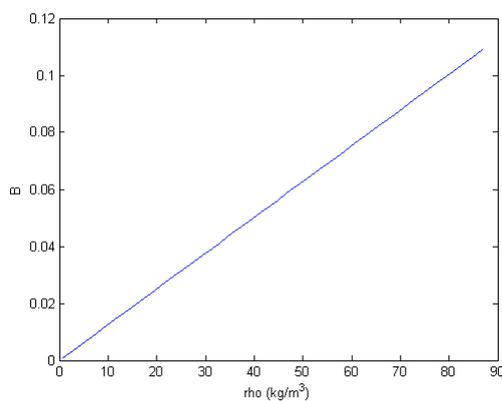


figure V.3 Evolution de B en fonction de ρ , pour l'air

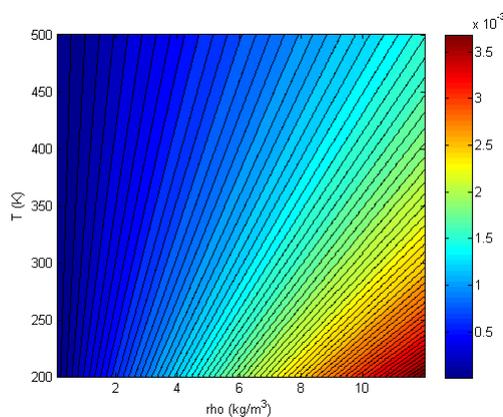


figure V.4 Evolution de A en fonction de ρ et T , pour l'hélium.

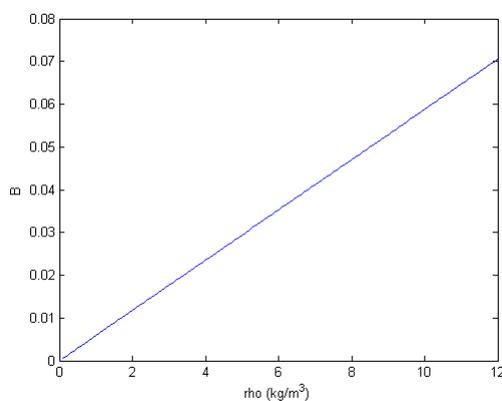


figure V.5 Evolution de B en fonction de ρ , pour l'hélium

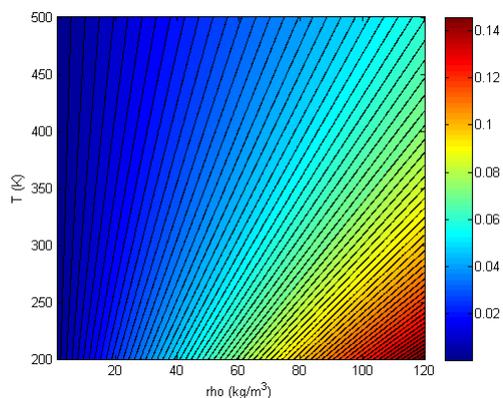


figure V.6 Evolution de A en fonction de ρ et T , pour l'argon.

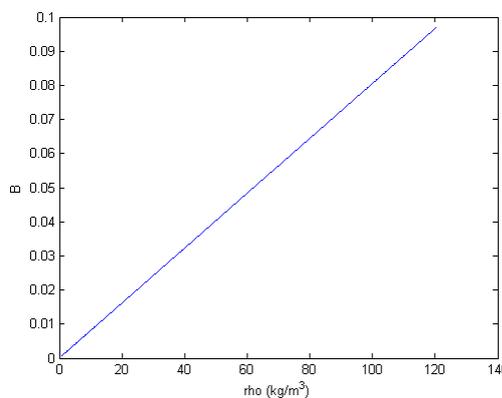


figure V.7 Evolution de B en fonction de ρ , pour l'argon

Dans ces conditions, on observe que dans le cas de l'air et de l'argon, A atteint des valeurs de l'ordre 10^{-1} , pour des basses températures et de fortes densités. Alors que pour l'hélium, l'ordre

est toujours de 10^{-3} . Du côté de B , on atteint l'ordre 10^{-1} , pour ces trois gaz et pour de fortes densités. On se propose d'évaluer leur impact en étudiant la différence Δp et l'écart relatifs E_p entre ces deux formulations.

$$\Delta p = p_{vdw} - p_{gp}$$

$$E_p = \frac{|p_{vdw} - p_{gp}|}{p_{gp}}$$

Les figures V.7, V.9 et V.11 correspondent à la variation de Δp respectivement pour l'air, l'hélium et l'argon. Les figures V.8, V.10 et V.12 donnent à la variation de E_p respectivement pour l'air, l'hélium et l'argon.

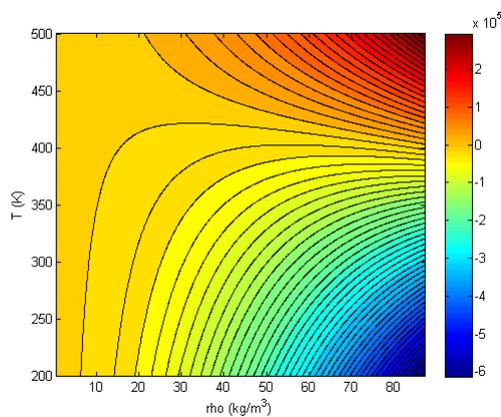


figure V.8 Evolution de Δp (Pa) en fonction de ρ et T , pour l'air.

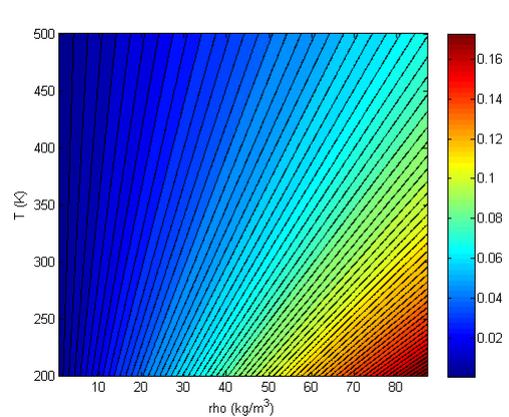


figure V.9 Evolution de E_p en fonction de ρ et T , pour l'air.

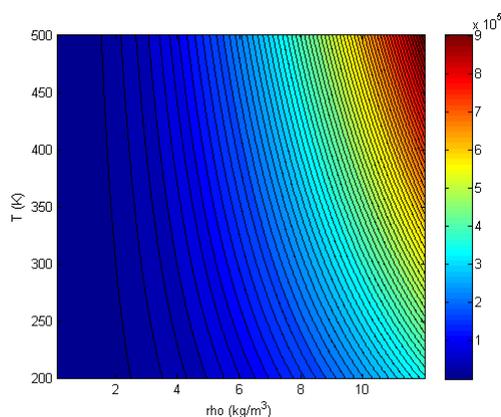


figure V.10 Evolution de Δp (Pa) en fonction de ρ et T , pour l'hélium.

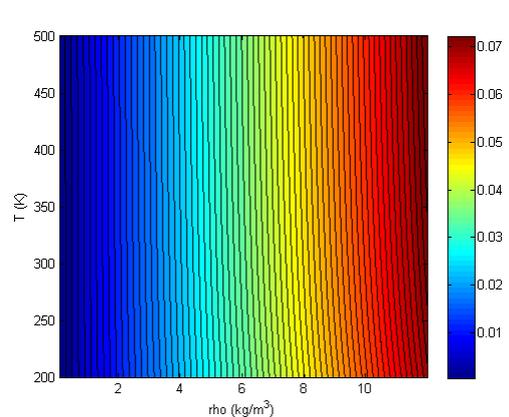


figure V.11 Evolution de E_p en fonction de ρ et T , pour l'hélium.

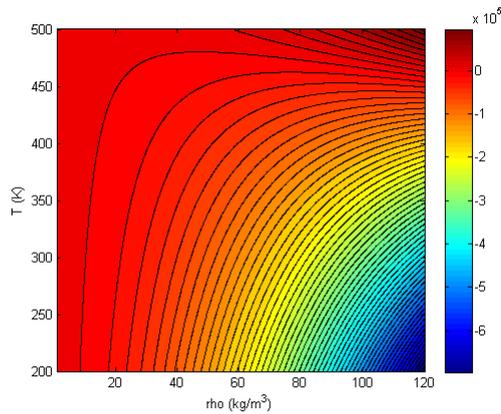


figure V.12 Evolution de Δ_p (Pa) en fonction de ρ et T , pour l'argon.

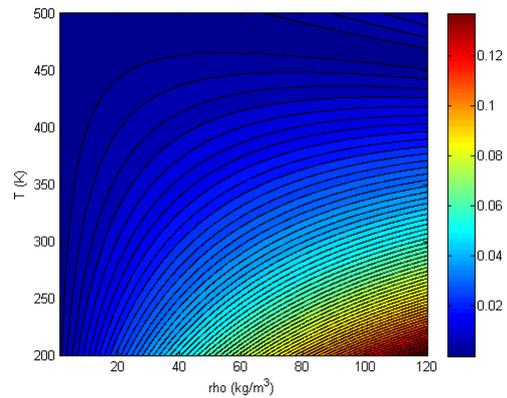


figure V.13 Evolution de E_p en fonction de ρ et T , pour l'argon.

L'écart entre ces deux lois sur la pression évolue sensiblement avec la même tendance que le coefficient A : il augmente avec la densité et diminue avec la température. On retrouve que dans des conditions normales, l'écart relatif E_p est de l'ordre du dixième de pourcent pour les trois gaz. Pour une pression de gaz parfait de 30 bars, cet écart est de l'ordre de 3%, à température ambiante. L'écart est de l'ordre de 10% pour les une température de 200 K et les densités maximales utilisées pour cette étude (elles correspondent à une pression de gaz parfait de 50 bar, pour ces trois gaz). On note que contrairement à l'air et à l'argon, la température joue un rôle relativement mineur dans le cas de l'hélium. Ce qui s'explique par une valeur du coefficient B qui reste beaucoup plus faible pour l'hélium, par rapport aux deux autres gaz. Pour résumer cette étude simple, le gaz de Van Der Waals ne présenterait d'amélioration significative que lorsque la pression est suffisamment élevée.

2.3 Evolutions isentropiques

On peut approfondir cette étude en se demandant si la loi d'état du gaz à impact sur le comportement thermodynamique du gaz. En effet, comme on l'a expliquée dans le chapitre I (§1.2), le cycle thermoacoustique est constitué de compression et détente isentropique, engendrées par l'onde acoustique. De la même façon que pour un gaz parfait, il est possible de quantifier l'évolution adiabatique et réversible des grandeurs thermodynamiques du gaz de Van Der Waals. Par exemple, on peut relier l'amplitude de la fluctuation de la température d'une onde acoustique à son amplitude de la pression acoustique, en supposant que ces fluctuations acoustiques sont très inférieures à la valeur de leur grandeur moyenne respective. On montre que les fluctuations acoustiques de température pour un gaz de Van Der Waals T_{vdw}' et T_{gp}' celle pour un gaz parfait suivent les relations suivantes :

$$T'_{vdw} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T_0}{P_{vdw}} p'$$

$$T'_{gp} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T_0}{P_{gp}} p'$$

On étudie alors l'écart E_{iso} entre ces deux relations, pour une même sollicitation acoustique :

$$E_{iso} = \frac{|T'_{gp} - T'_{vdw}|}{T'_{gp}} = \left| 1 - \frac{P_{gp}}{P_{vdw}} \right|$$

On observe un comportement similaire à l'écart entre les pressions E_p , pour l'air (figure V.14), ainsi que pour l'hélium (figure V.15). A 50 bars, l'écart peut atteindre 10% pour l'air et dépasse à peine 5% pour l'hélium.

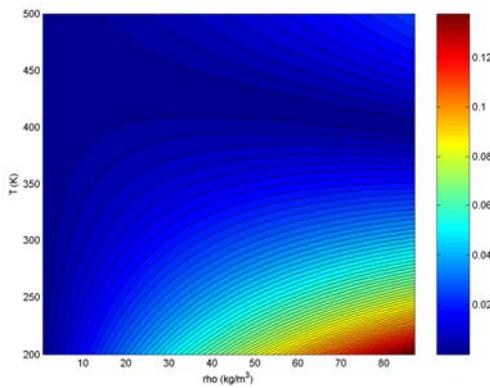


figure V.14 Evolution de E_{iso} en fonction de la température moyenne et la densité moyenne du gaz, pour l'air.

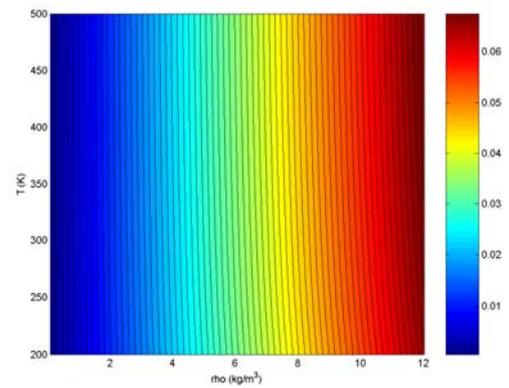


figure V.15 Evolution de E_{iso} en fonction de la température moyenne et la densité moyenne du gaz, pour l'hélium.

2.4 Célérités des ondes sonores

Le dernier point de comparaison de cette étude analytique se base sur la célérité des ondes sonores obtenues par les deux lois. L'expression de la vitesse des ondes acoustiques dans un gaz s'obtient par l'intermédiaire du coefficient de compressibilité isentropique de ce gaz, χ_s par l'intermédiaire de la relation :

$$c^2 = \frac{1}{\rho \chi_s}, \text{ avec } \chi_s = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s$$

Le calcul de χ_s , nous permet alors de déterminer la célérité des ondes dans un gaz de Van Der Waals, que l'on va pouvoir comparer avec l'expression, bien connu, de la célérité des ondes dans un gaz parfait.

$$c_{vdw} = \sqrt{\frac{\gamma T}{(1 - \rho b / M)^2} - 2\rho \frac{a}{M^2}}$$

$$c_{gp} = \sqrt{\gamma T}$$

Là aussi, on effectue la comparaison en étudiant la différence entre ces deux célérités et l'écart relatif de c_{vdw} , par rapport à c_{gp} . Concernant l'écart, il reste inférieur à 10% pour l'air et l'hélium. La différence permet elle de nous faire remarque que pour de l'air à forte pression (ou forte densité), la célérité du son gaz de Van Der Waals est supérieur à celle du gaz parfait à basse température, mais inférieure à haute température.

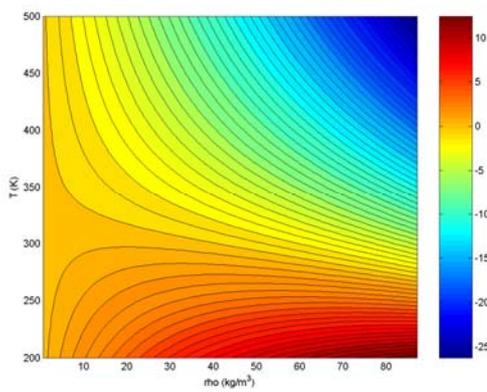


figure V.16 *Différence entre les célérités des ondes sonores dans l'air.*

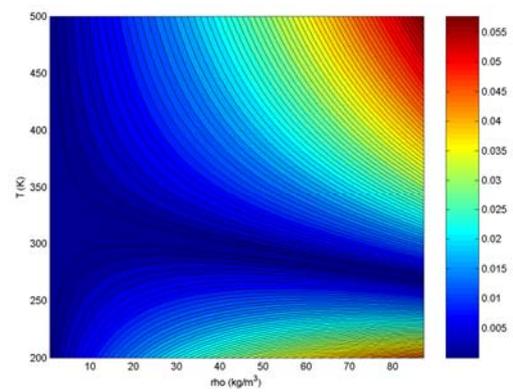


figure V.17 *Ecart entre les célérités des ondes sonores dans l'air.*

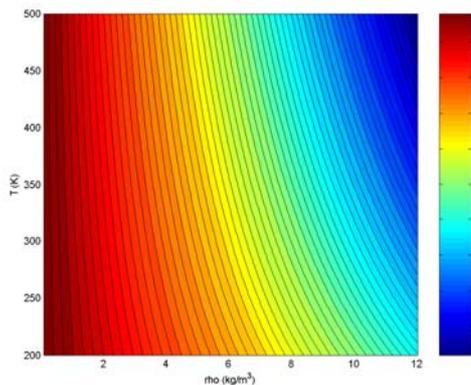


figure V.18 *Différence entre les célérités des ondes sonores dans l'hélium.*

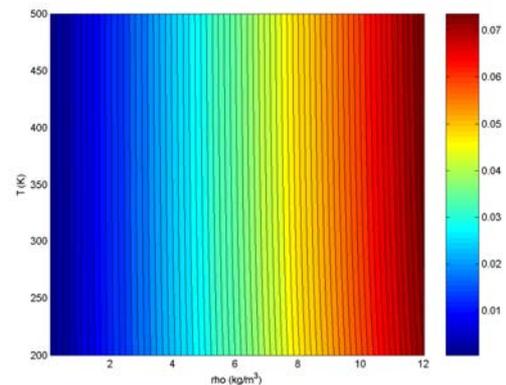


figure V.19 *Ecart entre les célérités des ondes sonores dans l'hélium.*

Pour conclure cette étude, on retient que la loi de Van Der Waals, n'apporte des différences que dans le cas de pression élevée. Bien que ces écarts ne dépassent pas l'ordre des 10%, on peut tout de même se pencher sur l'influence de cette loi sur l'effet thermoacoustique. En effet, le

transport de chaleur thermoacoustique, le long stack, est expliqué qualitativement par une chaîne de cycles thermodynamiques élémentaires des particules fluides, sous l'effet de l'onde acoustique. Par ailleurs, étant donné que les écarts aux niveaux des transformations isentropiques et de la célérité des ondes sonore, on peut supposer que les propriétés de l'onde acoustique entre les deux lois ne changent pas. Ce qui nous permet entre autre de conserver la même méthode numérique afin de générer de l'onde acoustique dans le domaine de calcul.

3. Simulation d'onde stationnaire avec un gaz de Van Der Waals

Dans cette section, on s'intéresse à la simulation numérique d'une onde stationnaire dans un résonateur, dans lequel l'air est considéré comme un gaz de Van Der Waals. Le modèle numérique est adapté au niveau de l'équation de la température et prend en compte la nouvelle loi d'état. Le reste de la formulation reste identique à celle utilisée pour un gaz parfait. Il s'agissait d'abord de vérifier si la formulation du modèle numérique modifiée permet toujours d'obtenir une portion d'onde acoustique stationnaire, à l'aide de la méthode des caractéristiques. Puis, les résultats sont comparés avec le modèle gaz parfait, dans des conditions normales de pression et de température, puis dans un cas où la pression moyenne de l'écoulement est de 30 bars.

Le domaine de calcul (figure V.20) est équivalent à celui du deuxième cas de validation, exposé dans le chapitre IV (§2.4). Il en est de même pour les paramètres géométriques du résonateur et la longueur de référence (tableau V.2).

λ (m)	L_{ref} (m)	x_e (m)	L_{DC} (m)	h_{DC} (m)	n_x	n_y
3	0.5	1	1	0.05	200	10

tableau V.2 Paramètres pour la simulation numérique d'une onde stationnaire dans un résonateur contenant un gaz de Van Der Waals

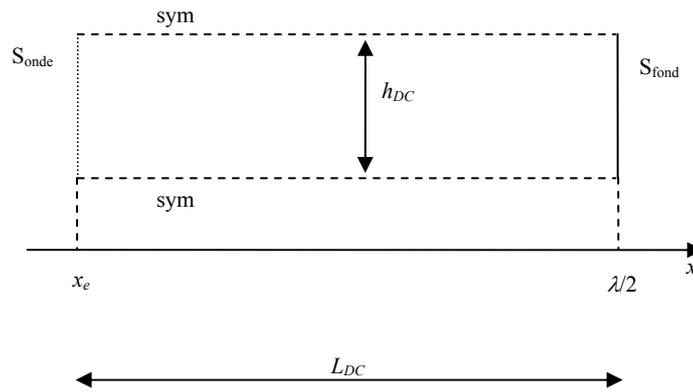


figure V.20 Schéma du domaine de calcul utilisé

3.2 Cas de l'air à 1 bar

Dans un premier temps, on étudie le modèle dans des conditions classiques : la température est de 293 K et la pression de 1 bar, dans le résonateur. Le nombre de mach est $Ma = 0.5\%$. Les résultats numériques sont comparés avec les résultats obtenus pour un gaz parfait.

En étudiant l'évolution de la vitesse sur un point de la frontière $S_{ondé}$ (figure V.21), on vérifie que la loi de Van Der Waals n'a pas altéré les capacités du code à simuler une portion d'onde stationnaire. Son temps d'établissement, ainsi que sa fréquence sont identiques. Concernant l'évolution de la fluctuation de pression le long du domaine (figure V.22), on trouve des résultats similaires entre les deux lois. On note que la différence entre les pressions moyennes est inférieure à 80 Pa, soit un écart relatif inférieur à 0.1%. Ce qui confirme que dans des conditions normales, la loi de Van Der Waals donne des résultats similaires à celle du gaz parfait.

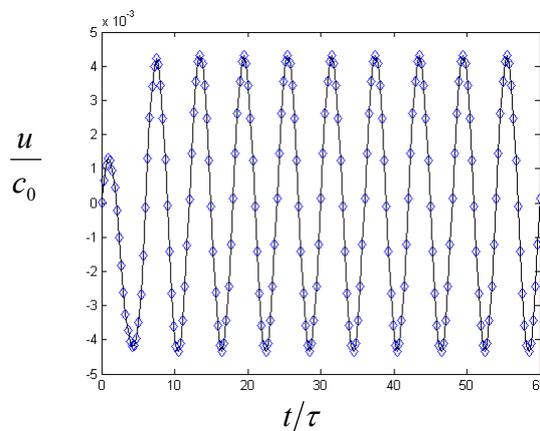


figure V.21 évolution de la vitesse sur un point de la surface $S_{ondé}$. \diamond : gaz de Van Der Waals, $-$: gaz parfait.
 $p_0=1bars, T_0=293K, Ma=0.005$.

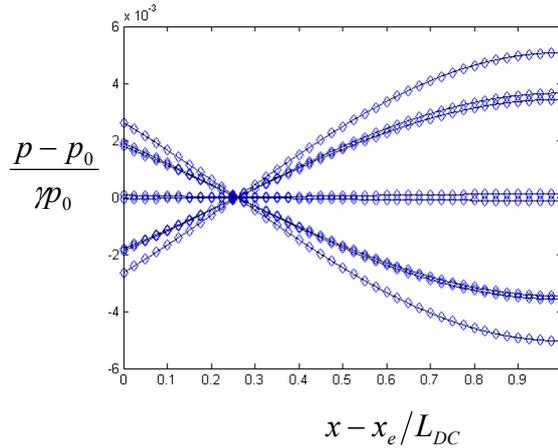


figure V.22 évolution de la fluctuation de pression le long du domaine. \diamond : gaz de Van Der Waals, $-$: gaz parfait.
 $p_0=1\text{bars}$, $T_0=293\text{K}$, $Ma=0.005$.

3.3 Cas de l'air à 30 bars

Pour l'étude qui suit, la température est de 293 K, et la pression du gaz dans le résonateur est de 30 bars. Le nombre de mach Ma est toujours de 0.5%. L'évolution temporelle des fluctuations de vitesses (figure V.23) reste identique. Du côté de la pression, même si l'évolution des fluctuations (figure V.24) restent sensiblement identique, on relève sur l'évolution des pressions totales (figure V.25) que la différence entre les deux pressions moyennes atteint 8500 Pa, ce qui correspond à un écart relatif de 2% entre ces deux pressions moyennes.

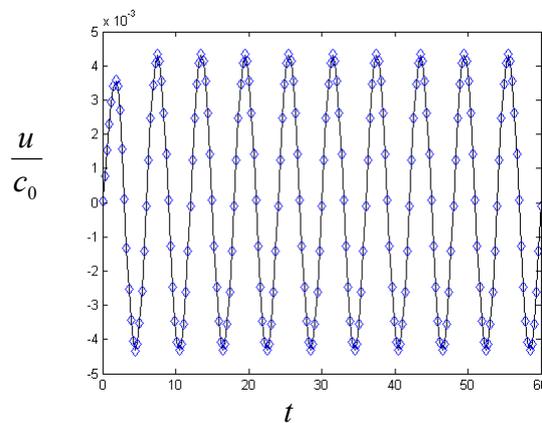


figure V.23 évolution de la vitesse sur un point de la surface S_{onde} . \diamond : gaz de Van Der Waals, $-$: gaz parfait.
 $p_0=30\text{bars}$, $T_0=293\text{K}$, $Ma=0.005$.

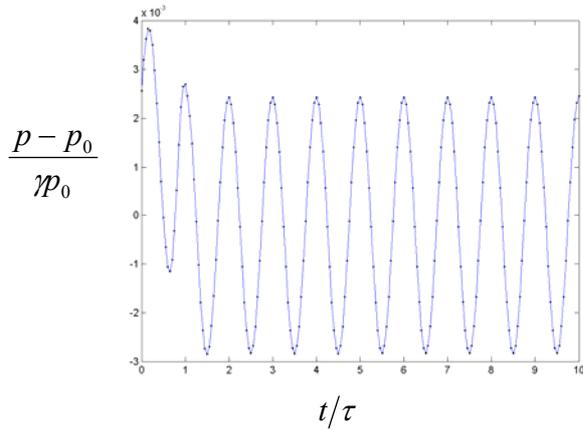


figure V.24 Evolution de la fluctuation de pression

sur un point de la surface S_{onde} . • : gaz parfait, - : gaz de Van Der Waals. $p_0=30bars$, $T_0=293K$, $Ma=0.005$.

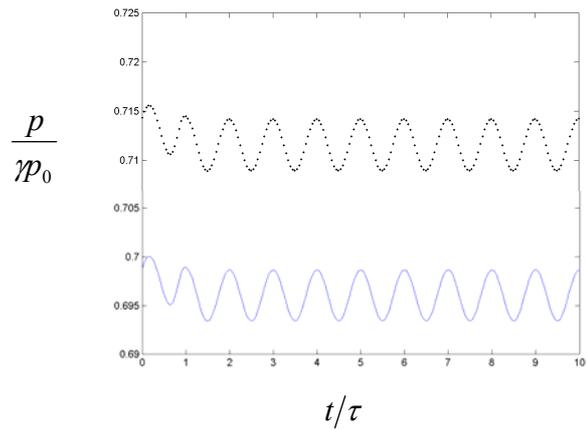


figure V.25 Evolution de la pression totale sur un

point de la surface S_{onde} . • : gaz parfait, - : gaz de Van Der Waals. $p_0=30bars$, $T_0=293K$, $Ma=0.005$.

On poursuit la comparaison en augmentant le nombre de Mach acoustique à 5%, la température et la pression moyenne restant respectivement à 293 K et 30 bars. Là aussi, les fluctuations de vitesses (figure V.26) sont identiques, l'écart entre les amplitudes restent inférieure à 0.5%. Il en est de même pour l'évolution temporelle de la pression acoustique (figure V.27) et de la pression la pression totale (figure V.28). L'écart entre les pressions moyennes est toujours de 2%.

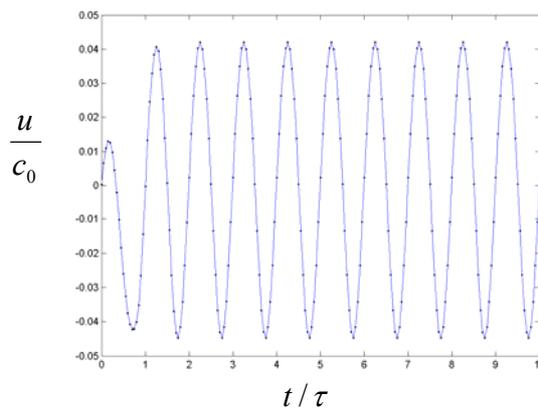


figure V.26 Evolution de la vitesse sur un point de la surface S_{onde} . En trait continu: gaz de Van Der Waals et en pointillés: gaz parfait. $p_0=30bars$, $T_0=293K$, $Ma=0.05$.

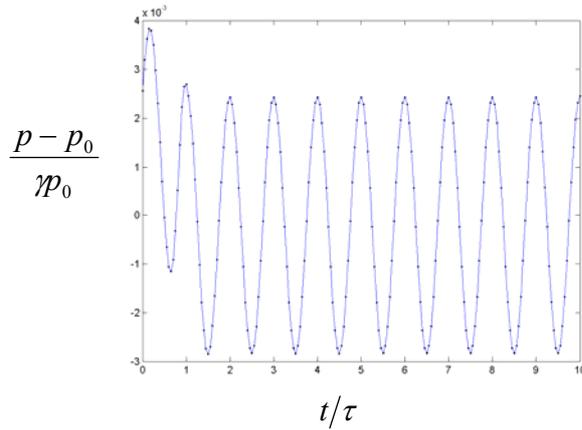


figure V.27 Evolution de la fluctuation de pression

sur un point de la surface S_{onde} . • : gaz parfait, - : gaz de Van Der Waals. $p_0=30\text{bars}$, $T_0=293\text{K}$, $Ma=0.05$.

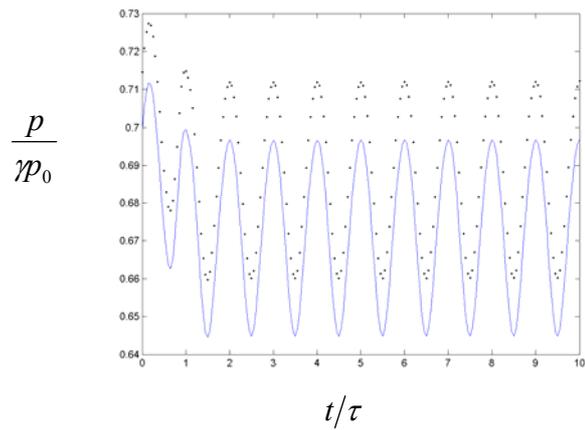


figure V.28 Evolution de la pression totale sur un

point de la surface S_{onda} . • : gaz parfait, - : gaz de Van Der Waals. $p_0=30\text{bars}$, $T_0=293\text{K}$, $Ma=0.05$.

4. Simulation numérique de l'effet thermoacoustique avec un gaz de Van Der Waals

Dans cette section, on s'intéresse à l'influence de la loi de Van Der Waals sur la simulation numérique de l'effet thermoacoustique. Dans un premier temps, on présente les propriétés géométriques du résonateur. Il a été modifié, par rapport à celui utilisé pour la validation du code, afin de réduire les temps de calcul, mais aussi pour s'adapter au gaz étudié. Les simulations sont effectuées pour de l'hélium, d'abord en les considérant comme parfait, puis avec le modèle de gaz de Van Der Waals. Les pressions moyennes de l'état initial sera soit de 1 et soit de 10 bars, le nombre de mach sera soit de 0.5%, soit de 5%. Quand à la température, elle restera à 293 K.

4.1 Description du domaine de calcul

Le domaine de calcul utilisé reprend les mêmes notations que celui utilisé pour la validation. Les nouveaux paramètres géométriques sont exposés dans le tableau. Notons que les paramètres d'adimensionnalisation diffèrent, étant donné que les propriétés thermophysiques du gaz changent, mais aussi parce que la pression moyenne. On peut citer l'exemple des épaisseurs de couche limite qui varie proportionnellement, dont on rappelle les expressions :

$$\delta_v = \sqrt{\frac{\nu\lambda}{\pi c}}$$

$$\delta_{\kappa} = \sqrt{\frac{\kappa\lambda}{\pi c}}$$

Les tableaux V.3 et tableau V.4 donnent la densité et les propriétés thermophysiques à température et pression normale de l'air, l'hélium et l'argon, déjà étudié dans la partie précédente.

	μ_0 (Pa.s)	ρ (kg/m ³)	ν (m ² /s)
Air	1.75 10 ⁻⁵	1.19	1.5 10 ⁻⁵
Hélium	1.9 10 ⁻⁵	0.16	10.5 10 ⁻⁵
Argon	1.8 10 ⁻⁵	1.6	1.3 10 ⁻⁵

tableau V.3 Densité et paramètres de viscosité de l'air, l'hélium et l'argon

	K (W/m/K)	C_p (J/K/kg)	κ (m ² /s)
Air	0.027	1004	2.15 10 ⁻⁵
Hélium	0.15	5196	17.37 10 ⁻⁵
Argon	0.25	533	2.1 10 ⁻⁵

tableau V.4 Paramètres thermiques de l'air l'hélium et l'argon

On constate que les termes de viscosité cinématique et de diffusivité thermique de l'hélium sont quasiment 10 fois plus importants que pour l'air et l'argon. L'argon quant à lui a des propriétés thermiques relativement proches de celles de l'air. A l'aide de la valeur de la célérité des ondes sonores dans chaque gaz, on peut comparer les épaisseurs de couche limite, par l'intermédiaire des rapports $\sqrt{\nu/c_0}$ et $\sqrt{\kappa/c_0}$ (tableau V.5). Pour une longueur d'onde fixe, on constate que ces épaisseurs sont plus importantes pour l'hélium. Le rapport δ_v/λ étant plus important pour l'hélium, ainsi le rapport d'aspect du domaine de calcul, L_{DC}/h , sera plus faible. Ou alors si on fixe l'épaisseur de la couche limite visqueuse, la longueur d'onde correspondante à la simulation pour l'hélium sera plus faible que celle avec de l'air, ou de l'argon. Le domaine de calcul est alors moins long. On choisit alors d'effectuer les simulations suivantes avec de l'hélium, tout en gardant la même longueur (réelle) de résonateur que dans le chapitre précédent. Cette longueur

d'onde était de 857 μm ce qui équivalait à une fréquence de résonance de 20 kHz avec de l'air, dans des conditions normales ($p_0 = 10^5$ Pa, $T_0 = 293$ K). Elle correspond maintenant à une fréquence de 58757 Hz, environ, pour un même résonateur, mais rempli d'hélium en condition de température et de pression normale. L'épaisseur de la couche limite dans ce cas est environ de 25 μm .

	c_0 (m/s)	$\sqrt{\nu/c_0}$ ($\text{m}^{1/2}$)	$\sqrt{\kappa/c_0}$ ($\text{m}^{1/2}$)
Air	343	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$
Hélium	1007	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-4}$
Argon	322	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$

tableau V.5 Célérités et valeurs des termes $\sqrt{\nu/c_0}$ et $\sqrt{\kappa/c_0}$ pour l'air, l'hélium et l'argon.

Afin de réduire la taille des domaines de calcul, on choisit de consacrer les simulations à une configuration dans laquelle la demi-épaisseur des plaques du stack et l'espace entre deux centres de plaques valent respectivement la moitié et le double de l'épaisseur de la couche limite visqueuse.

L_{DC}/λ	kx_p	L_p/δ_v	e_p/δ_v	h/δ_v
1/3	2.35	10	0.5	2

tableau V.6 Paramètres de simulation du troisième cas

4.2 Simulations numériques avec de l'hélium à 1 bar

Dans un premier temps, les simulations numériques sont effectuées avec de l'hélium à 1 bar. On compare les résultats obtenus à l'aide des deux lois pour un nombre de Mach de 0.5%, puis de 5%. On observe dans ces deux cas aucune différence entre les vitesses calculées par les deux modèles (figure V.29 et figure V.30). Au niveau de la différence de températures, (figure V.31) et (figure V.32), on observe un écart entre les deux lois de 2%, pour les deux nombres de Mach étudiés.

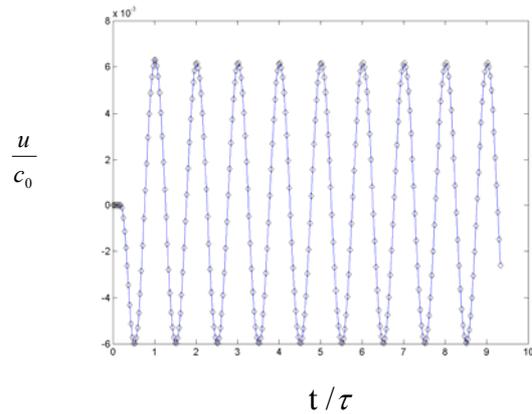


figure V.29 Evolution de la vitesse au point (x_s, h) dans l'hélium, $Ma = 0.5\%$. \diamond gaz de Van der Waals, — gaz parfait.

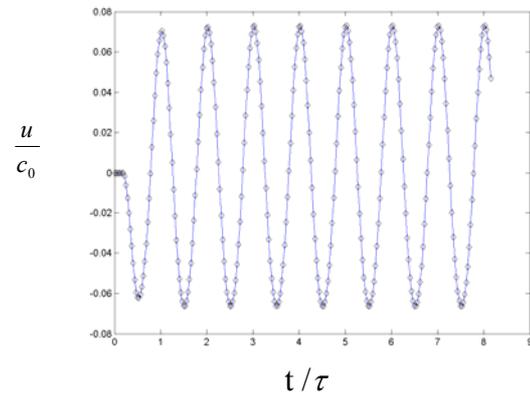


figure V.30 Evolution de la vitesse au point (x_s, h) dans l'hélium, $Ma = 5\%$. \diamond gaz de Van der Waals, — gaz parfait.

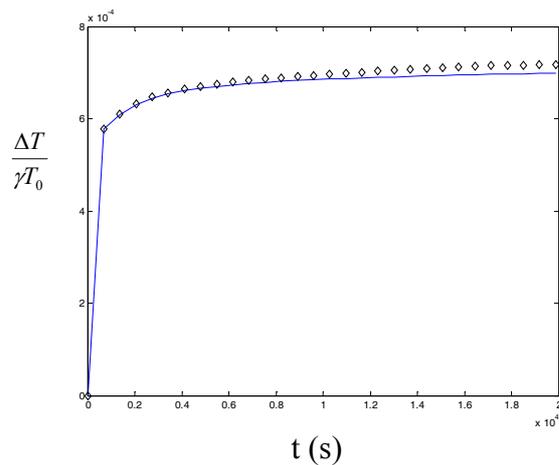


figure V.31 Evolution de la différence de température entre les extrémités du stack pour de l'hélium, $Ma = 0.5\%$. \diamond gaz de Van der Waals, — gaz parfait.

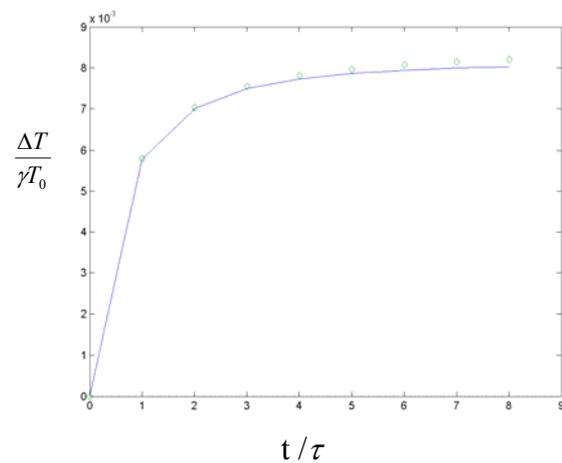


figure V.32 Evolution de la différence de température entre les extrémités du stack pour de l'hélium, $Ma = 5\%$. \diamond gaz de Van der Waals, — gaz parfait.

4.3 Influence de la pression moyenne sur la résolution numérique

Le modèle numérique implémenté sous COMSOL, n'utilise pas directement la valeur initiale de la pression afin d'initialiser les champs de variables du problème sur le domaine de calcul. Cependant, le changement de pression s'effectue, par l'intermédiaire de la valeur initiale de la densité du gaz dans le domaine de calcul, étant donné que ces simulations se font à la même température $T_0 = 293$ K. La façon de procéder est la même quelque soit la loi d'état de gaz utilisée par le modèle. On suppose qu'à l'état initial, le gaz contenu dans le résonateur est au repos et qu'il est modélisé par une loi de gaz parfait. On initialise alors le champs de densité en

calculant la densité ρ_0 obtenue en fonction de la température T_0 et la pression p_0 voulue. Dans le cas, où le modèle utilise la loi des gaz parfait, il y a correspondance directe et on supposera que le modèle utilisant un gaz de Van Der Waals est initialisé à la pression p_0 voulue. En effet, l'étude qualitative de cette loi, nous montre que l'écart est négligeable dans des conditions classiques et restent inférieur à 10% pour une pression équivalente en gaz parfait de 50 bars.

Cependant étant donné que la valeur de la densité initiale est modifiée, on modifie plusieurs paramètres d'adimensionnalisation dont l'épaisseur de la couche limite visqueuse. Par exemple, pour une pression p_0 de 10 bar, c'est-à-dire une densité initiale ρ_0 de 1.64 kg/m^3 , l'épaisseur de la couche limite à la même fréquence (58757 Hz) est maintenant de $7.88 \text{ }\mu\text{m}$. La longueur de référence est donc à peu près le tiers de sa valeur quand p_0 était de 1 bar. Si l'on souhaite conserver les dimensions géométriques du résonateur en changeant la pression initiale, il faut alors adapter la géométrie adimensionnée en fonction des nouvelles longueurs de référence. Plutôt que de devoir changer les géométries entre chaque étude, on fixe comme nouvelle longueur de référence l'épaisseur de la couche limite obtenue pour $p_0 = 1$ bar. Mais on garde la même résolution de la couche limite, ainsi le maillage doit devenir de plus en plus fin quand on augmente la pression initiale. Cela étant, dans tout les cas où l'on souhaite conserver des paramètres géométriques similaires entre chaque simulation de pression initiale différente, augmenter la pression revient à augmenter le coût de la résolution numérique. Ainsi, une simulation à 10 bars est environ cent fois plus coûteuse et une simulation à 30 bars sera presque 1000 fois plus coûteuse que le cas avec 1 bar.

Bien qu'on n'étudiera pas l'influence de la température sur les résultats donnés par le gaz parfait et par le gaz de Van Der Waals, à pression fixée, elle influe sur le coût de la simulation par l'intermédiaire de la célérité des ondes sonores qui sert de vitesse de référence.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, une étude analytique des différences entre la loi des gaz parfait et celle du gaz de Van Der Waals a été effectuée. Les écarts ne dépassent 1% qu'à partir du moment où la pression du gaz est suffisamment élevée et sa température assez basse. On relève notamment que dans ces conditions, que l'erreur peut dépasser 10% sur le calcul de la pression, de la fluctuation de la température isentropique, mais aussi de la célérité des ondes sonores.

Puis on compare les simulations numériques faites dans le cas d'une onde stationnaire dans un résonateur, sans stack, soit rempli d'un gaz parfait, soit d'un gaz de Van Der Waals. Ces simulations sont effectuées avec de l'air dans les conditions normales avec un nombre de Mach de 0.5%, puis pour de l'air à 30 bar et des nombre de Mach successivement de 0.5% et 5%. On constate d'abord, qu'il n'est pas nécessaire d'adapter la méthode des caractéristiques afin de générer l'onde acoustique dans le gaz de Van Der Waals. L'effet de la loi d'état est négligeable sur les fluctuations d'origines acoustiques et le nombre de Mach ne semble pas accentuer ces écarts, dans la gamme étudiée. Cependant, à 30 bars, on observe tout de même une différence de l'ordre de 2% sur la pression moyenne.

La dernière partie est consacrée à la comparaison des deux lois d'état sur l'effet thermoacoustique autour d'une plaque 2D. Des simulations sont d'abord effectuées avec de l'hélium à 1 bar : on observe un écart de 2% entre les différences de température obtenues de part et d'autre du stack, à l'aide des deux lois. Or on souhaite simuler des configurations à des pressions plus élevées, mais l'augmentation de la pression initiale entraîne vite des temps de calcul très importants. Lors de ce travail, la plupart des simulations numériques ont été réalisées, au laboratoire PHASE sur une machine de calcul possédant 8 nœuds, cadencés à 2.5 G Hz. Le temps de résolution pour obtenir un régime thermique établi avec de l'hélium à 1 bar est de l'ordre de 8h. Les temps de calcul requis pour des simulations numériques à 10 et 30 bars seraient respectivement de 800h et 8000h. Il est donc nécessaire d'envisager une utilisation parallèle de COMSOL afin de résoudre ces configurations. Ceci sera possible au centre de calcul du département de Mécanique de l'Université Claude Bernard, de Lyon où des calculs ont déjà été effectués, mais sans utiliser toutes les ressources de calcul parallèle possible.

Bibliographie

- [1] Atchley, A. A. Analysis of the initial buildup of oscillations in a thermoacoustic prime mover. *J. A. Soc. Am.* 95(3) (1994), 1661-1664.
- [2] Atchley, A. A., and Kuo, F. Stability curves for a thermoacoustic prime mover. *J. A. Soc. Am.* 95(3) (1994), 1401-1404.
- [3] Backhaus, S., and Swift, G.W. A thermoacoustic-Stirling heat engine: Detailed study. *J. A. Soc. Am.* 107(6) (2000), 3148-3166.
- [4] Benavides E. M., Thermoacoustic nanotechnology: Derivation of a lower limit to the minimum reachable size, *J. Applied Ph.*, 25 February, 2007.
- [5] Besnoin, E. Numerical study of thermoacoustic heat exchangers. PhD Thesis, John Hopkins University, 2001.
- [6] Betrancourt. A., Le Polles, T., Defresne, G. Baltean-Carles, D., Thermeau, J.-P., François, M.-X. La réfrigération thermoacoustique à 200 K. Acte de congrès SFT, 2008.
- [7] Blanc-Benon, P., Besnoin, E., and Knio, O. Experimental and computational visualization of the flow field in a thermoacoustic stack. *C. R. Mécanique* 331 (2003), 17-24.
- [8] Bruneau, M. Manuel d'acoustique fondamentale.
- [9] Cao, N., Olson, J., Swift, G. W., and Chen, S. Energy flux density in a thermoacoustic couple. *J. Acoust. Soc. Am.* 99 (1996), 3456-3464.
- [10] Ceperley, P.H. A pistonless Stirling engine -traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.* 66(5) (1979), 1508-1513.
- [11] Chassaing, P. *Turbulence and Mixing in constant and variable density fluid motions: basic concepts and modeling issues*. Cours pour M2R Energétique et Transfert, Université de Toulouse, 2004.
- [12] Chen, R.-L., Chen, Y.-C., Chen, C.-L., Tsai, C. and Denatale, J. Development of miniature thermoacoustic refrigerators. *AIAA-2002-0206* (2002).
- [13] Comsol AB. *Comsol Multiphysics Modeling guide*, version 3.4, 2007

-
- [14] Comsol AB. *Comsol Multiphysics Modeling guide*, version 3.5, 2008
- [15] Comsol AB. *Comsol Multiphysics Model Library*, version 3.5, 2008
- [16] Comsol AB. *Comsol Multiphysics Reference guide*, version 3.5, 2008
- [17] Duffourd, S. Réfrigérateur thermoacoustique : études analytiques et expérimentales en vue d'une miniaturisation. Thèse de Doctorat n°2001-06, Ecole Centrale de Lyon, 2001.
- [18] Duthil, P., Weisman, C., Bretagne, E., François, M.-X. Experimental and numerical investigation of temperature differences within a thermoacoustic cell. *The Internat. J. Transf; Phen.*, 6(4) (2004).
- [19] Duthil, P., *TACSOL Le froid thermoacoustique solaire*. Présentation GDR Thermoacoustique 2008.
- [20] Feldman, K. T. Review of the literature on Rijke thermoacoustic phenomena. *J. Sound Vib.* 7(1) (1968), 83-89.
- [21] Feldman, K. T. Review of the literature on Sondhaus thermoacoustic phenomena. *J. Sound Vib.* 7(1) (1968), 71-82.
- [22] François, M., Zao, B., Jeballi, F. : Mesure des propriétés acoustiques d'un régénérateur utilisé dans une machine thermoacoustique. Acte de congrès CFA, 1997.
- [23] Gifford, W. E., and Longworth, R. C. Surface heat pumping. *Adv Cryog. Eng.* 11 (1966),171-179
- [24] Giles, M. B. Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equation Calculations, *AIAA J.* 28(12).
- [25] Herman C., Chen Y., A simplified model of heat transfer in heat exchangers and stack plates of thermoacoustic refrigerators, 18 May, 2006.
- [26] Ishikawa, H., and Mee, D. J. Numerical investigations of flow and energy fields near a thermoacoustic couple. *J.Acoust Soc. Am.* 111 (2002), 831-839.
- [27] Job, S. Etudes théoriques et expérimentales d'un générateur thermoacoustique annulaire à ondes progressives. Thèse de Doctorat, Université du Maine, 2001.
- [28] Le Quéré P., Weisman C., Paillère H. and al, Modeling of natural convection flows with large temperature differences: a benchmark problem for low mach number solvers. Part 1. Reference solutions, *ESAIM*, 39 (2005), 609-616.

-
- [29] Laloë, F., Gibiat, V. Acoustical impedance measurements by two-microphone-three-calibration (tmtc) method. *J. of Acoust. Soc of Am*, 88(6) (1990), 2533-2543.
- [30] Martaj, N., Rochelle, P., Grosu, L., Bennacer, R., Savarese, S. Etude numérique d'un moteur Stirling LTD à régénérateur poreux. Acte de congrès SFT, 2010.
- [31] Marx, D. Simulation numérique d'un réfrigérateur thermoacoustique. Thèse de Doctorat n°2003-34, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [32] Marx, D., and Blanc-Benon, P. Numerical simulation of a thermoacoustic refrigerator. *In proceedings of 5th World on Ultrasonics (2003)*, 1069-1072.
- [33] Marx, D., and Blanc-Benon, P. Numerical simulation of stack-heat exchangers coupling in a thermoacoustic refrigerator. Submitted to AIAA Journal, 2003.
- [34] Marx, D., and Blanc-Benon, P. Numerical study of coupling between stack and heat exchangers in a thermoacoustic refrigerator. *In Proceedings of 9th AIAA-CEAS aeroacoustics conference, Hilton Head, SC, USA, 12-14 May 2003*. AIAA Paper, 2003-3150.
- [35] Marx, D., and Blanc-Benon, P. Simulation numérique d'un réfrigérateur thermoacoustique avec un stack et échangeurs de chaleur. In *Actes du 16^{ème} Congrès de Français de Mécanique*, Nice, France, 1-5 septembre 2003.
- [36] Marx, D., and Blanc-Benon, P. Numerical simulation of aerodynamic and thermal effects around 2D stack plate in a thermoacoustic refrigerator. *J. Acoust. Soc. Am.* 114(4) (2003), 2329.
- [37] Marx, D., and Blanc-Benon, P. Nonlinear effects in a standing wave thermoacoustic refrigerator, In *Joint workshop of Russian acoustical society and French acoustical society*, Moscow, 14-15 November, 2005.
- [38] Moret-Gabaro, L. Aeroacoustic investigation and adjoint analysis of subsonic cavity flows. Thèse de doctorat, l'Université de Toulouse, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2009.
- [39] Penelet G., Gusev V., Lotton P. And Bruneau M., Experimental and theoretical study of processes leading to steady-state sound in annular thermoacoustic engines, *Phys. Rev. E* 72, 016625 (2005).
- [40] Penelet G., Gusev V., Lotton P. And Bruneau M., Nontrivial influence of acoustic streaming on the efficiency of annular thermoacoustic prime movers, *Phys. Letters A*, 351 (2006), 268-273.
- [41] Piccolo A., Pistone G., Computation of the time-averaged temperature fields and energy fluxes in thermally isolated thermoacoustic stack at low acoustic Mach numbers, *Int. J. Therm. Sc.* ,46 (2007), 235-244.

- [42] Poignand G., Lihoreau B., Lotton P. And al, Optimal acoustic fields in compact thermoacoustic refrigerator, *App. Acoust.*, 68 (2007), 647-659.
- [43] Poinso, T. J., and Lele, S. K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *J. Comput. Phys.* 101 (1992), 104-129.
- [44] Rayleigh, J. W. S. *The theory of sound*. Dover, New York, 2nd edition, 1945.
- [45] Rott, N. Thermoacoustics. *Z. Angew Math. Phys.* 20 (1980), 135-175.
- [46] Schneider, T., Botta, N. Geratz, K. J. and Klein, R. Extension of finite volume compressible flow solvers to multi-dimensional, variable density zero mach number. *J. Comput. Phys* 155 (1999), 248-286.
- [47] Seguin, P. Etude expérimentale d'un réfrigérateur thermoacoustique annulaire. Rapport de M2R, Laboratoire PHASE, 2008.
- [48] Spagnol, S. Propriétés thermiques des aérogel de silice. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, Institut National de Sciences Appliquées de Toulouse, 2007.
- [49] Staffelbach, G. Simulation aux grandes échelles et analyse acoustique de turbines à gaz industrielles multi-bruleurs. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2006.
- [50] Swift, G. W. Thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* 84 (1988), 1145-1180.
- [51] Swift, G. W., Migliori, A., Hofler, T., and Wheatley, J. Theory and calculations for intrinsically irreversible acoustic prime mover using liquid sodium as a primary working fluid. *J. Acoust. Soc. Am.* 78 (1985), 767-781.
- [52] Tam, C. K. W., Dong, J.C. and Webb. Z. A study of the short wave components in computational acoustics. *J. Comput. Acoustics.* 1 (1993), 1-30.
- [53] Tam, C. K. W., and Webb, J. C. Dispersion-Relation-Preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.* 107 (1993), 262-281.
- [54] Thompson, K. W. Time dependant boundary conditions for hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.* 68 (1987), 1-24.
- [55] Tu Q., Gusev V., Bruneau M., and al, Experimental and theoretical investigation on frequency characteristic of loudspeaker-driven thermoacoustic refrigerator, *Cryo.* 45(2006) 739-746.
- [56] Ward, W.C., and Swift, G. W. Design environment for low amplitude thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* 95(6) (1994), 3671-3672.

-
- [57] Wetzels, M., and Herman, C. Design optimization of thermoacoustic refrigerators. *Internat. J. Refrig.* 20 (1997), 3-21.
- [58] Wheatley, J., Hofler, T., Swift, G.W. and Migliori, A. An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine. Part 1: temperature fields. *Heat and Mass Transf* 36 (2000), 7-20.
- [59] Worlikar, A. S., and Knio, O. M. Numerical simulation of thermoacoustic refrigerator. Part 1 : Unsteady adiabatic flow around the stack. *J. Comput. Phys.* 68 (1996), 424-451.
- [60] Worlikar, A. S., and Knio, O. M. Numerical study of oscillatory flow and heat transfer in a loaded thermoacoustic stack. *Num. heat transf., PART A : Applications* 35 (1999), 49-65.
- [61] Yazaki T., Iwata A., Maekawa T. And Tominaga A., Traveling wave Thermoacoustic Engine in a Looped Tube, *Phys. Rev. Letters*, Vol. 81 number 15 (1998).

Seconde partie :

Influence de l'acoustic streaming sur la séparation des espèces
dans un mélange binaire en microgravité

Chapitre VI: Influence of acoustic streaming on thermodiffusion in a binary mixture under microgravity.

Article soumis à l'International Journal of Heat and Mass Transfer

Résumé:

On présente une étude analytique et numérique de l'influence d'un écoulement généré par des ondes ultrasons (Eckart streaming) sur la séparation des espèces d'un mélange binaire en microgravité. On considère une cavité très allongée, remplie d'un fluide binaire, dont une partie de l'un de ses petits cotés est soumise à une onde progressive ultrasonore (cf. figure 1) alors que le coté opposé est parfaitement absorbant. Un gradient de température est appliqué entre les deux autres cotés de la cellule. Le faisceau acoustique est appliqué à partir du « haut » i.e. $z \in [1 - H_b, H]$, $x=0$, H_b étant l'épaisseur de ce dernier. On ne tient pas compte de l'interaction éventuelle entre le faisceau d'onde ultrasonore se propageant dans la direction x et la paroi « supérieure » définie par $z=H$, $x \in [0, L]$. L'écoulement unicellulaire induit par l'acoustic streaming peut conduire, dans certaines conditions, à une séparation notable des espèces. Dans une première partie, en utilisant l'hypothèse d'écoulement de type parallèle, la solution correspondant à l'écoulement monocellulaire est déterminée analytiquement, les profils de vitesse sont présentés pour différentes valeurs de la largeur adimensionnée du faisceau acoustique $\varepsilon = H_b / H$. La séparation, S , est ensuite calculée en fonction du paramètre acoustique A , de ε , et du nombre de Lewis, Le , et du nombre de Prandtl, Pr en utilisant le logiciel MAPLE. On montre qu'il existe un maximum de séparation pour $\varepsilon=0,5$ et $A=315,038 Pr/Le$. Ainsi pour $Le=100$ et $Pr=7$, $A_{opt}=22,05$. S est alors étudiée comme fonction de ε et A à Le et Pr fixés. Les résultats analytiques sont corroborés par des simulations numériques directes réalisées à l'aide du logiciel COMSOL. Les champs de concentration et les iso-concentrations sont tracés pour $\varepsilon=0,5$ et différentes valeurs de A variant de 0 (cas où il n'y a pas de séparation) à $A=1000$. C'est au voisinage de $A_{opt}=22,05$, que le champ de concentration est le plus stratifié verticalement, résultat déjà obtenu dans les études antérieures sur la séparation thermo-gravitationnelle.

Dans une deuxième partie, une étude de stabilité linéaire de l'écoulement monocellulaire est développée. Le système d'équations aux perturbations est résolu par trois méthodes : la méthode de Galerkin à l'ordre 12, la méthode spectrale Tau-Chebyshev et une méthode aux éléments finis. Les paramètres critiques caractérisant la transition stationnaire et instationnaire (bifurcation de Hopf) sont déterminés en fonction de la largeur du faisceau acoustique ε , du nombre de Lewis, Le , et du nombre de Prandtl, Pr . On montre que l'écoulement monocellulaire perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf pour les valeurs de ε sauf pour $\varepsilon=0.5$ où la bifurcation est stationnaire et est caractérisée par les paramètres critiques : $A_c=148\,351,8$ et $kc=3,33$. Les diagrammes de stabilité $A_c=g_1(\varepsilon)$ et $\omega_c=g_2(\varepsilon)$ sont présentés. En conclusion, on montre que A_c est beaucoup plus élevé que A_{opt} conduisant au maximum de séparation et ce pour toutes les valeurs de ε .

Mots-clés: Acoustic streaming, Thermogravitation, Effet Soret, Séparation des espèces, Stabilité

Influence of acoustic streaming on thermo-diffusion in a binary mixture under microgravity.

Marie Catherine CHARRIER-MOJTABI^a, Alain FONTAINE,^a Abdelkader MOJTABI,^b

^a Université de Toulouse, University Paul Sabatier, Laboratoire Phase, E.A 3028, 118 Route de Narbonne, F- 31400, Toulouse, France.

^b Université de Toulouse; INPT, UPS; IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse); Allée Camille Soula, F-31400 Toulouse, France.

^b CNRS; IMFT; F-31400 Toulouse, France

Contact e-mail address: cmojtabi@cict.fr

Abstract

An analytical and numerical study of the influence of acoustic streaming on species separation of a binary mixture under microgravity is presented. A rectangular cell filled with binary fluid is submitted to an ultrasonic propagating wave along a portion of one of its small wall while the opposite wall is perfectly absorbing wall. A temperature gradient is applied between the two other walls. The unicellular flow induced by the Eckart streaming may lead to significant species separation. In a first part, the hypothesis of parallel flow is used to determine the analytical solution which describes the unicellular flow and the separation is calculated analytically based on the acoustic parameter, A , the acoustic beam width, ε , the Lewis number, Le and the Prandtl number, Pr . These analytical results are corroborated by direct numerical simulations. In a second part, a linear stability analysis of the unicellular flow is performed. The eigenvalue problem resulting from the temporal stability analysis is solved by the Galerkin method, a spectral Tau-Chebyshev method and by a finite element method. The thresholds for the stationary and oscillatory instability depend on the normalized acoustic beam width, the Lewis number, Le , and the Prandtl number, Pr .

Keywords: Acoustic streaming, thermogravitation, Soret effect, species separation, stability

Nomenclature		S	Separation
A	Acoustic parameter $A = \alpha U_{ac}^2 H^3 / a^2$	U_{ac}	amplitude of the acoustic velocity oscillation ($m s^{-1}$)
a	Thermal diffusivity of the mixture	\vec{V}	Flow velocity ($m s^{-1}$)
B	Aspect ratio of the cell: $B=L/H$		
C	Mass fraction of the denser component of the mixture	<i>Greek symbols</i>	
C_i	Initial mass fraction of the denser component of the mixture	α	amplitude attenuation coefficient for ultrasound wave
D	Mass diffusion Coefficient ($m^2 s^{-1}$)	β_T	Thermal expansion coefficient (K^{-1})
D_T	Thermodiffusion Coefficient ($m^2 s^{-1} K^{-1}$)	β_C	Solutal expansion coefficient
H	Height of the cavity along the z-axis	ε	Normalized acoustic beam width $\varepsilon = H_b / H$
H_b	Height of the acoustic beam		
L	Length of the cavity along the x-axis	σ	Temporal amplification of perturbation
Le	Lewis number, $Le = a / D$	ρ	Density of the fluid mixture ($kg \cdot m^{-3}$)
m	Gradient of mass fraction along the x-axis	ν	Kinematic viscosity of mixture ($m^2 s^{-1}$)
Pr	Prandtl number, $Pr = \nu / a$	<i>Subscripts</i>	
Ra	Thermal Rayleigh number, $Ra = [g\beta_T \Delta T H^3] / (\nu a)$	c	critical

1. Introduction

The propagation of ultrasonic waves in a fluid may induce a stationary flow at large scale: this phenomenon is called “Acoustic streaming” (Lighthill (1978) [1], Eckart (1948) [2]). A review of most of the pertinent information on the acoustic streaming can be found in recent paper by Lei et al. [3], Dridi et al. [4, 5]. These authors considered an incompressible liquid layer, of thickness h , confined between two infinite horizontal walls. This layer was subjected to a temperature gradient and to a radiation pressure caused by an ultrasound beam generated by a transducer. The ultrasound beam, which was applied inside the layer, had a normalized width $\varepsilon = H_b / H$ in the z direction and was uniform in the transverse direction x .

The velocity profiles of the basic flows were determined analytically when the beam was centered on the side of the cavity and in the case where the beam was not centered but was positioned at a given location $z = z_b$.

The authors studied the linear stability of Eckart streaming flows in an isothermal or laterally heated mono-constituent fluid layer in the gravity field. The critical value of the acoustic parameter, A_c , leading to a Hopf bifurcation, was determined in the case of an isothermal flow for an infinite horizontal fluid layer. A_c is minimum for an acoustic beam width $\varepsilon = 0.32$ and increases when either ε decreases or increases.

In the present paper, we are interested in the coupling between Eckart streaming and Soret effect in a binary fluid, in weightlessness. Unlike the works developed in [3, 4, 5], where the acoustic source was centered or not, in the current study, the beam were always placed in contact with the wall $z=H$ to obtain an unicellular flow. This is a necessary condition to obtain the separation of species as previously obtained in the thermo-gravitational columns. The ultrasonic waves lead to important species separation for particular values of the acoustic parameter, A , the acoustic beam width, ε , the Lewis number, Le and the Prandtl number, Pr .

Separation species due to thermogravitational effect was first studied by Clusius and Dickel (1938) [6]. These authors carried out the separation of gas mixtures in a vertical cavity heated from the side, namely a thermogravitational column (TGC). Furry, Jones and Onsager (1939) [7] developed a fundamental theory to interpret the experimental processes of isotope separation. Lorenz and Emery (1959) [8] introduced a porous medium in the TGC columns to increase the separation. More recently, many works were carried out with the aim to increase the separation and to study the linear stability of Soret-driven convection in different configurations. Platten et al. (2003) [9] used an tilted thermogravitational column. Experiments were performed with water-ethanol mixtures. Bou-Ali et al. (2000) [10] were interested in mixtures with negative Soret coefficient in the TGC. Elhajjar et al. (2008) [11] developed a linear stability analysis of the unicellular flow which appears when the separation ratio is higher than a certain positive value, in a Raleigh -Bénard configuration. Zebib and Bou-Ali (2009) [12] performed a linear stability analysis of a binary mixture buoyant return flow in a tilted differentially heated infinite layer using asymptotic long-wave analysis and pseudo-spectral Chebyshev numerical solutions. Elhajjar et al (2010) [13] presented a theoretical and numerical study of species separation in an inclined porous cavity.

In the present configuration, in order to obtain an analytical solution of the unicellular flow, a shallow cavity along the x direction is considered ($B=L/H \gg 1$, B being the aspect ratio of the rectangular cavity). A portion of one of its small side along the z axis is submitted to an ultrasonic propagating wave while the opposite wall is perfectly absorbing wall. The sides along the x axis are maintained at uniform temperature T_1 and T_2 respectively. The normalized width ε of the acoustic beam varies between $[0, 1]$, and the beam is applied from the top of the cell ($z=H$). Acoustic streaming describes a steady flow generated by an ultrasound wave propagating in a fluid. This effect was first observed in 1831 by Faraday [14]. It is well known that it is a non linear phenomenon whose origin is due to Reynolds stress and the dissipation of the acoustic

energy flux. Nyborg (1998) [15] showed that a constant radiation pressure associated to an ultrasonic travelling wave and generated in a given direction (x direction in our configuration) is associated to a constant body force oriented along the x axis. Its intensity is given by: $F = \rho \alpha U_{ac}^2 e^{-2\alpha x}$, where α is the amplitude attenuation coefficient for an ultrasound wave, and U_{ac} is the amplitude of the acoustic velocity oscillation. Under the assumption that the attenuation of the wave is sufficiently weak, the body force is considered as a constant $F = \rho \alpha U_{ac}^2$ inside the beam of height H_b , and equal to zero outside the beam. This body force can be introduced in Navier-Stokes equations [1].

The species separation per unit of length, m , was calculated as function of the acoustic parameter A and ε for a given value of the Lewis number and the Prandtl number. These analytical results were corroborated by direct 2D numerical simulations. The linear stability analysis of the unicellular flow, performed for an infinite layer, showed that the unicellular flow loses its stability via Hopf bifurcation for all the values of the acoustic beam width, ε , except for $\varepsilon=0.5$.

2. Mathematical formulation

We consider a rectangular cavity of large aspect ratio $B=L/H$, where H is the height of the cavity along the z-axis and L is the length along the x-axis. The cavity is filled with a binary fluid mixture of density ρ and dynamic viscosity μ . The two walls $x=0$ and $x=L$ are adiabatic and impermeable. The two other walls $z=0$ and $z=H$ are kept at uniform temperature T_1 for $z=0$ and T_2 for $z=H$. The mathematical formulation is presented taking into account the gravity field in order to obtain the general formulation: $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ (figure 1). The Boussinesq approximation is assumed valid, thus, the thermophysical properties of the binary fluid are constant, except the density in the buoyancy term which varies linearly with the local temperature T and the mass fraction C of the denser component;

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_{\text{ref}}) - \beta_C (C - C_{\text{ref}})] \quad (1)$$

where β_T and β_C are respectively the thermal and mass expansion coefficients of the binary fluid

The dimensionless mathematical formulation of the problem is given by:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + A \delta \vec{e}_x + Ra Pr (T + \psi C) \vec{e}_z + Pr \nabla^2 \vec{V} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla C = \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 T) \end{array} \right. \quad (2)$$

Where the parameter δ , in the system (2), is defined by: $\delta = 1$ for $z \in [1 - \varepsilon, 1]$ and $\delta = 0$ for $z \in [0, 1 - \varepsilon[$.

The reference scales are H for the length, a/H for the velocity (a is the thermal diffusivity of the binary fluid), H^2/a for the time, $\Delta T = T_1 - T_2$ for the temperature, and $\Delta C = -\Delta T C_0 (1 - C_0) (D_T / D)$ for the mass fraction, where D_T and D are, respectively, the thermo-diffusion and mass-diffusion coefficient of the denser component. The problem under consideration depends on six non-dimensional parameters: the thermal Rayleigh number, $Ra = (g \beta_T H^3 \Delta T) / (\nu a)$, the acoustic parameter $A = \alpha U_{ac}^2 H^3 / a^2$, the Lewis number $Le = a / D$, the separation ratio $\phi = -(\beta_T / \beta_C) (D_T / D) C_i (1 - C_i)$ where C_i is the initial mass fraction of the denser component, $\varepsilon = H_f / H$, the normalized acoustic beam width and the aspect ratio of the cell $B = L / H$.

The corresponding dimensionless boundary conditions are:

$$z = 0, 1 : \vec{V} = \vec{0} \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial z} ; \quad x = 0, B = H / L : \vec{V} = \vec{0} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

3. Analytical solution in the case of a shallow cavity: unicellular flow in microgravity (Ra=0).

3.1 Closed-form analytical solution

In the case of a shallow cavity $B \gg 1$, in microgravity (i.e. $Ra=0$), the parallel flow approximation, used by many previous authors [8], is considered. The solution corresponding to the unicellular flow is given as follows:

$$\vec{U}_0 = U_0(z)\vec{e}_x, \quad T_0 = 1 - z, \quad C_0(x, z) = m x + f(z) \quad (4)$$

where m is the mass fraction gradient along the x axis.

We suppose that the travelling wave does not interact with the wall $z=H$.

With these assumptions and for the steady state, the system of equations (2) with the boundary conditions (3) is reduced to a set of the following equations solved using Maple software:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pr} \frac{d^2 U_0}{dy^2} - \frac{\partial P_0}{\partial x} + A \delta = 0 \\ \frac{\partial P_0}{\partial z} = -\text{Ra} \text{Pr} (T_0 + \psi C_0) \\ \frac{d^2 T_0}{dz^2} = 0 \\ m U_0 \text{Le} = \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} \end{array} \right. \quad (5)$$

To solve the system (5), the following assumptions are considered:

- continuity of the velocity, the stress constraint, the mass fraction and temperature at the interface of the acoustic beam for $z=1-\varepsilon$.
- the mass flow rate through any cross section perpendicular to the x -axis is equal to zero.
- the mass flow rate of the component of mass fraction C on all the cell is equal to zero

Thus the expression of the velocity, the mass fraction and the temperature field are given by the following expressions:

$$\begin{aligned}
U_0(z) &= \frac{A\varepsilon^2}{2\text{Pr}} z[z(3-2\varepsilon) + 2(\varepsilon-1)] - \delta \left[\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon-1+z)^2}{\text{Pr}} \right] \\
C_0(x,z) &= mx + f_1(z) - \delta \left[\frac{1}{24} \left(\frac{A\text{Le}m(\varepsilon+z-1)^4}{\text{Pr}} \right) \right] \\
T_0(z) &= 1-z
\end{aligned} \tag{6}$$

where $f_1(z) = f_1(A, m, \text{Le}, \varepsilon, \text{Pr}, B)$.

The velocity profile is presented, in figure 2, for $\varepsilon=0.5$, $\text{Le}=100$, $\text{Pr}=7$ and $A=22.05$, value of the acoustic parameter for which the species separation is maximum (see § 3.2). It can be observed that the velocity profile is symmetrical with respect to $z=0.5$. The velocity profile for $\varepsilon=0.2$, $\text{Le}=100$, $\text{Pr}=7$ and $A=22.05$ is plotted in figure 3. As expected this velocity profile is not symmetrical for all values of $\varepsilon \neq 0.5$.

Note: In all the following sections, the chosen value of Lewis number and Prandlt Number are $\text{Le}=100$ and $\text{Pr}=7$.

3.2. Study of the separation, S.

The species separation in the binary mixture is studied in this section. The separation S is defined as the difference in mass fraction of the denser species between the two ends of the cell, $x=0$ and $x=B$, and its expression is $S=mB$, with m defined as:

$$\begin{aligned}
m := & -\frac{105}{2} (Le A \varepsilon^2 Pr (-1 + \varepsilon)^2) / (-1260 Pr^2 + Le^2 A^2 \varepsilon^{10} \\
& + 11 Le^2 A^2 \varepsilon^5 - 3 Le^2 A^2 \varepsilon^4 - 5 Le^2 A^2 \varepsilon^9 + 7 Le^2 A^2 \varepsilon^8 \\
& + 2 Le^2 A^2 \varepsilon^7 - 13 Le^2 A^2 \varepsilon^6)
\end{aligned} \tag{7}$$

As indicated in eq. (7), the separation $S=mB$ is function of (A, Le, ε , Pr, B) (the concentration gradient; m, does not depend on B). The optimum separation S is obtained for $\varepsilon=0.5$ and

$$A = \frac{192\sqrt{455}}{13} \text{Pr Le}. \text{ Thus, for } \text{Le}=100 \text{ and } \text{Pr}=7, \text{ the value of the acoustic parameter for which}$$

the separation is optimum is $A_{\text{opt}}= 22.05$.

In table 1, we present the different values of the separation for $A \in [0,1000]$ and in figure 4 the evolution of the separation versus A for $\varepsilon=0.5$, $Le=100$, $Pr=7$. In figure 5, the variations of S versus ε is reported for $A_{opt}=22$, $Le=100$, $Pr=7$. A symmetry of the curve with respect to $\varepsilon=0.5$ can be observed. This result could be expected as the study is performed under microgravity.

4. Numerical simulations

The system of equations (2) (with $Ra=0$) associated to the boundary conditions (3) is solved numerically using a finite element code (Comsol industrial code) with a rectangular grid, better suited to the rectangular configuration. For the computations, an aspect ratio $B=10$ is considered. The quadrangle spatial resolution is 120×20 or 150×30 for high values of the acoustic parameter A .

In order to eliminate the boundary effect, to determine the separation, the curve $C=g(x)$ is plotted at a given value of z ($z=0.5$ for instance) and the slope of the curve, which is a straight line in the central part of the cell, is calculated.

As mentioned in § 3, in figure 5 the analytical curve S function of ε for $Le=100$ and $Pr=7$ is plotted. The points on the curve correspond to the separation obtained numerically. A very good agreement is observed between analytical and numerical results.

The mass fraction field is presented for five values of ε : $\varepsilon=0.1, 0.5, 0.8, 0.9$, and $\varepsilon=1$, in figure 6. The black lines represent the iso-concentrations. As expected the mass fraction fields obtained for $\varepsilon=0.1$ and $\varepsilon=0.9$ are identical due to the symmetry with respect to $\varepsilon=0.5$.

The evolution of the mass fraction field is presented, in figure 7, for $A=0, 22, 50, 100, 200, 600$, and 1000 , for $\varepsilon=0.5$, $Le=100$ and $Pr=7$.

For very small values of A , the concentration field stratification is horizontal and for values of A exceeding A_{opt} there is a significant deformation of the concentration field leading to a small separation.

5. Linear stability analysis of the unicellular flow

In order to analyze the stability of this unicellular flow described in § 3, the perturbations of velocity $\vec{v} = (u, v, w)$, of temperature θ , of mass fraction c and pressure p are first introduced. The perturbations (\vec{v}, θ, c, p) are assumed to be of small amplitude, then, after simplification the following linearized equations are obtained:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w - \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U_0 \frac{\partial w}{\partial x}) - \text{Pr} \nabla^4 w - \text{Ra Pr} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\theta + \psi c) = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nabla^2 \theta + w = 0 \\ \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial x} + U_0 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - m \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (w \frac{\partial f}{\partial z}) - \frac{1}{\text{Le}} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 (c - \theta)) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

The associated boundary conditions are:

$$w = \theta = 0, \quad \text{and} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial z} \quad \text{for} \quad z = 0 \quad \text{and} \quad z = 1 \quad \forall x, y, t \quad (9)$$

In microgravity the Rayleigh number, Ra , is equal to zero.

The stability of the basic flow is then investigated by a temporal linear analysis.

The perturbation quantities are chosen as follows:

$$(w, \theta, c) = (\tilde{w}, \tilde{\theta}, \tilde{c})(z) \exp(i k x + i h y + \sigma t) \quad (10)$$

where k and h are the wavenumbers respectively in the x and y directions, $I^2 = -1$, and $\sigma = \omega_r + I\omega_i$ is a complex eigenvalue. The real part of σ , ω_r , represents an amplification rate and its imaginary part, ω_i , the Hopf pulsation.

Of interest are the instabilities leading to convective rolls with axis perpendicular to the direction of the base flow due only to ultrasonic waves in microgravity, therefore, the wavenumber h is equal to zero. For $Ra=0$, the system (10) leads after a few transformations to a fourth order equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \tilde{w}) + U_0 \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \tilde{w}) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U_0 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{w}) - Pr \nabla^4 \tilde{w} = 0 \quad (11)$$

The critical value of the acoustic parameter, A_c , are first determined using the Galerkin method for stationary and Hopf bifurcation: the disturbance \tilde{w} is developed as a polynomial function which verifies all the boundary conditions and the different polynomials obtained when i varies from 1 to N form a complete basis of the studied problem:

$$\tilde{w}(z) = \sum_{i=1}^N a_i (z-1)^{i+1} z^2 \quad (12)$$

The convergence for the resolution using the Galerkin method is obtained for $N \geq 12$.

Two others methods have been used to solve the eigenvalue problem resulting from the temporal stability analysis for the determination of the critical parameters corresponding to either stationary or Hopf bifurcation : a spectral Tau-Chebyshev method with more than 200 collocation points and a finite element method with quadrangle spatial resolution 150×30 . The results obtained by these three methods are in good agreement for both stationary and Hopf bifurcation.

The neutral stability curve describing the evolution of the critical acoustic parameter A_c and Hopf pulsation ω_c as function of ε are presented respectively in figure 8(a) and 8(b). It can be observed that the bifurcation is a stationary one ($\omega=0$) only for $\varepsilon=0.5$.

The neutral curve which corresponds to the onset of oscillatory instabilities presents a minimum value for $\varepsilon = 0.5$, associated to a stationary bifurcation characterized by the critical parameters: $A_c=147920$ and $k_c=3.32$ for $Le=100$, $Pr=7$. The threshold increases for smaller and higher values

of ε around $\varepsilon=0.5$. The increase of A_c for large values of ε is particularly important indicating that the flows induced by large beam widths are particularly stable.

6. Conclusion

In this paper, the influence of the acoustic streaming on species separation in a rectangular cavity, filled with a binary fluid in weightlessness, was presented. A new experimental configuration was considered in order to obtain species separation in a binary mixture. To the authors' knowledge, no work has yet been presented on this topic.

In a first part an analytical solution of the unicellular flow induced by the ultrasound travelling wave was determined using the assumption of parallel flow observed for $B \gg 1$. The velocity profiles were plotted for $\varepsilon=0.5$ and $\varepsilon=0.2$. ($Le=100, Pr=7$). As expected the velocity profile is symmetrical with respect to $z=0.5$ only for $\varepsilon=0.5$. Thus, the separation S was calculated as function of the acoustic parameter, A , the acoustic beam width, ε , the Lewis number, Le and the Prandtl number Pr and its variation was presented as a function of A and ε . The maximum separation was obtained for $\varepsilon=0.5$ and $A = \frac{192\sqrt{455}}{13} Pr Le$. So, for $Le=100$ and $Pr=7$,

$$A_{opt}=22.05.$$

The analytical results were corroborated by direct numerical simulations using a finite element code (Comsol). The mass fraction fields were plotted, for different values of ε and A_{opt} : the symmetry of the curve $S=f(\varepsilon)$ with respect to $\varepsilon=0.5$ is illustrated with the fields obtained for $\varepsilon=0.1$ and $\varepsilon=0.9$ which are identical. The mass fraction fields were also plotted for different values of A varying between $A=0$ and $A=1000$, for $\varepsilon=0.5$, $Le=100$ and $Pr=7$, in order to show the evolution of the iso-concentrations as A increases.

In a second part a linear stability analysis of the unicellular flow was performed using the Galerkin method, a spectral Tau-Chebyshev method and a finite element method. The results obtained by these three methods were in good agreement. This study showed that the unicellular flow loses its stability via a Hopf bifurcation for all values of ε , except for $\varepsilon=0.5$, for which the transition is a stationary one. The values of the critical acoustic parameter A_c obtained for different values of ε are much larger than the optimum value A_{opt} leading to the maximum of separation.

References

- [1] J. Lighthill, *J. Sound Vibration*. **61**(1978) 391-418.
- [2] C. Eckart, Vortices and streams caused by sound waves, *Phys. Rev.* **73**, (1948) 68-76.
- [3] H. Lei, D. Henry and H. BenHadid, Numerical study of the influence of a longitudinal sound field on natural convection in a cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **49** (2006) 3601-3616
- [4] W. Dridi, D. Henry, and H. Ben Hadid, Influence de l'acoustic streaming sur les instabilités affectant une couche de fluide chauffée latéralement, *C.R. Mécanique*, **335** (2007), 175-180.
- [5] W. Dridi, D. Henry, and H. Ben Hadid, Influence of acoustic streaming on the stability of a laterally heated three-dimensional cavity, *Phys. Rev. E* **77**, (2010), 056309 .
- [6] K. Clusius, G. Dickel, Neues Verfahren zur Gasenmischung und Isotroprennung, *Naturwisse* **6** (1938) 546.
- [7] W.H. Furry, R.C. Jones, L. Onsager, On the theory of isotope separation by thermal diffusion, *Phys. Rev.* **55** (1939) 1083-1095.
- [8] M. Lorenz and A.H. Emery, The packed thermal diffusion column, *Chemical Eng. Science*, **11**, issue 1 (1959) 16-23.
- [9] J.K. Platten, M.M. Bou-Ali, J.F. Dutrieux, Enhanced molecular separation in inclined thermogravitational columns, *J. of Physical Chemistry B*, **107** (42) (2003) 11763-11767
- [10] M.M. Bou-Ali, O. Ecenarro, J.A. Madariaga, C.M. Santamaria and J.J. Valencia, Measurement of negative soret coefficients in a vertical fluid layer with an adverse density gradient, *Phys. Rev. E*, **62**, (2000) 1420.
- [11] B. Elhajjar, M. C. Charrier-Mojtabi, A. Mojtabi, Separation of a binary fluid mixture in a porous horizontal cavity, *Phys. Rev. E* **77**, 026310 (2008) 1-6.
- [12] A. Zebib ; M.M. Bou-Ali, Inclined layer Soret Instabilities, *Phys. Rev. E* , **79**, (2009) 056305.

-
- [13] B. Elhajjar, A. Mojtabi , P. Costesèque and M.C. Charrier-Mojtabi, Separation in an inclined porous thermogravitational cell, *Int. J. Heat Mass Tranfer*, 53,(2010) 4844
- [14] M. Faraday, *Philos. Trans. R. Soc. London* 121, (1831), 319.
- [15] W. L. Nyborg, *Nonlinear Acoustics*, edited by M. F. Hamilton and D. T. Blackstock, Academic Press, San Diego, (1998), 207.

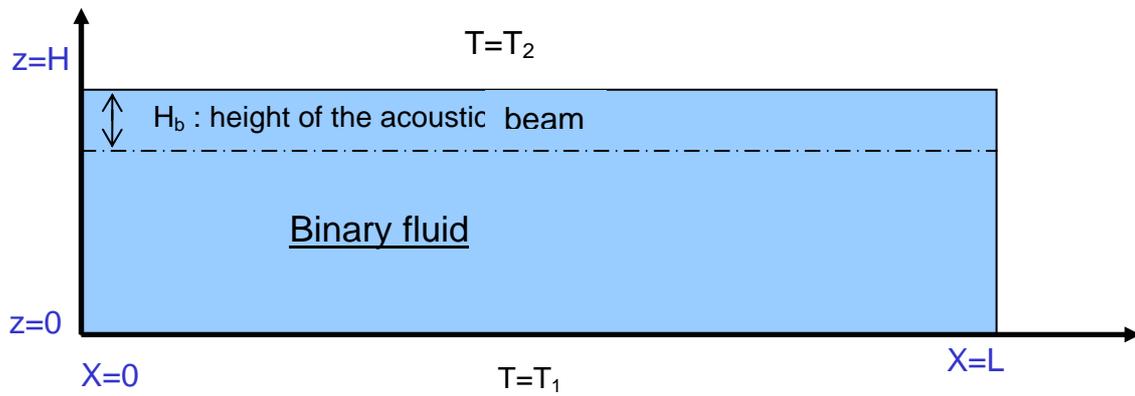


Figure.1 : Geometrical configuration of the cell submitted to an ultrasound beam

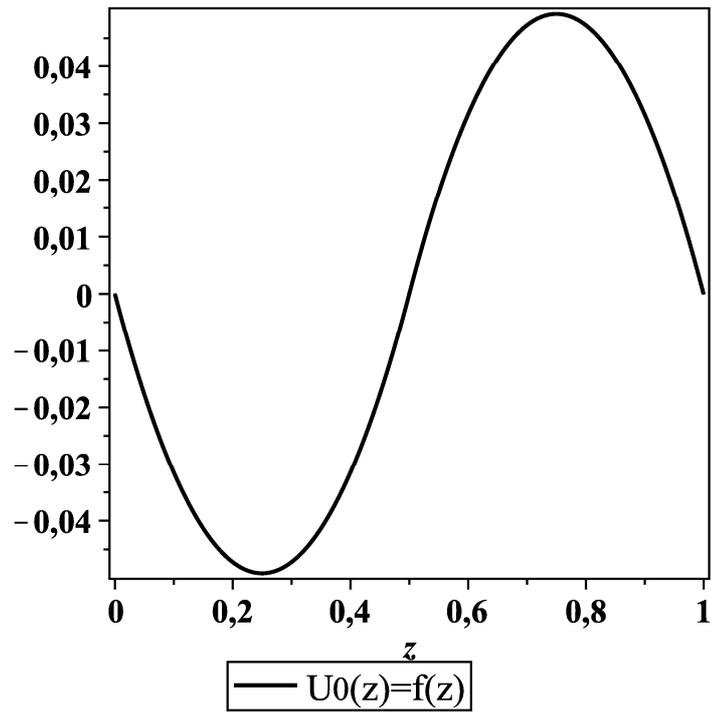


Figure 2 : $U_0(z) = f(z)$ for $\varepsilon=0.5$, $A=22.05$, $Le=100$, $Pr=7$

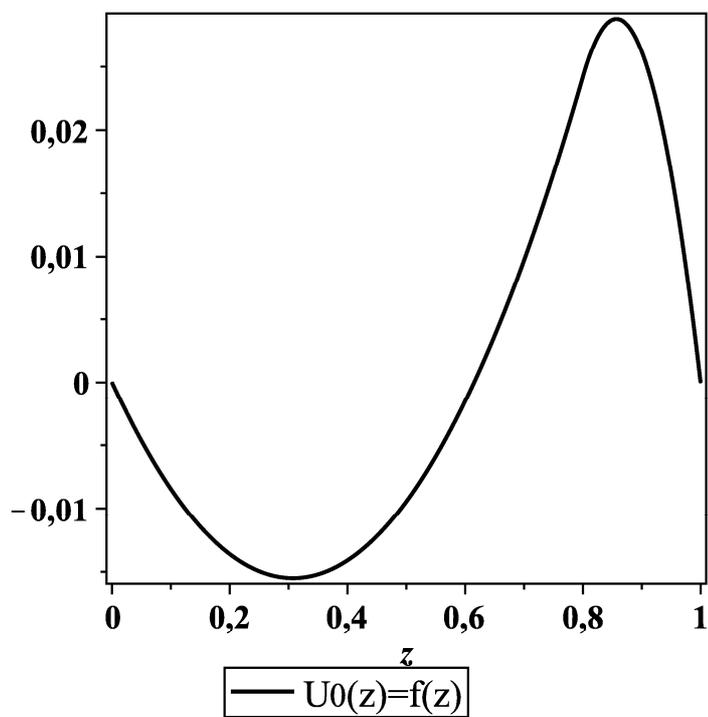


Figure 3 : $U_0(z) = f(z)$ for $\varepsilon=0.2$, $A=22.05$, $Le=100$, $Pr=7$

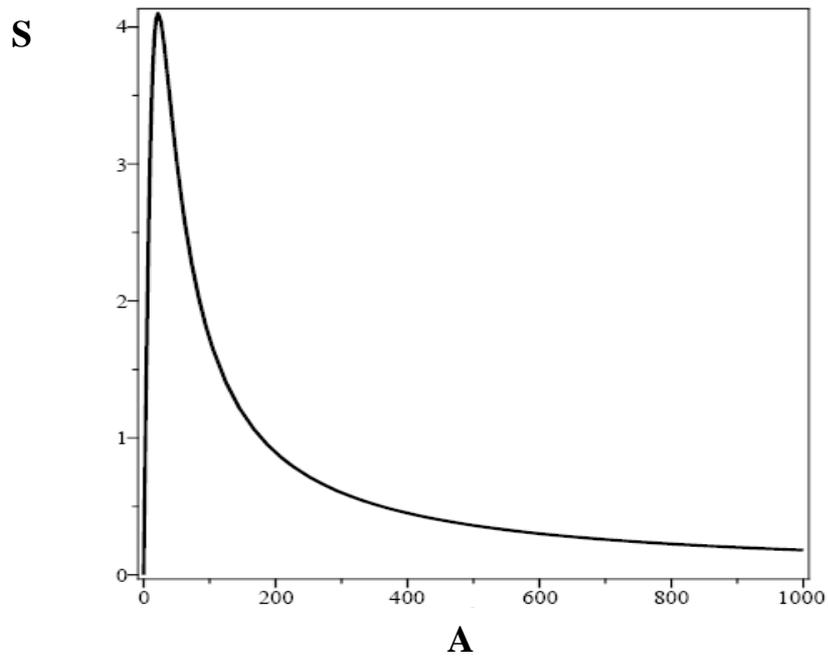


FIGURE 4: ANALYTICAL CURVE OF THE SEPARATION S VERSUS THE ACOUSTIC PARAMETER A FOR $\varepsilon=0.5$, $LE=100$, $PR=7$.

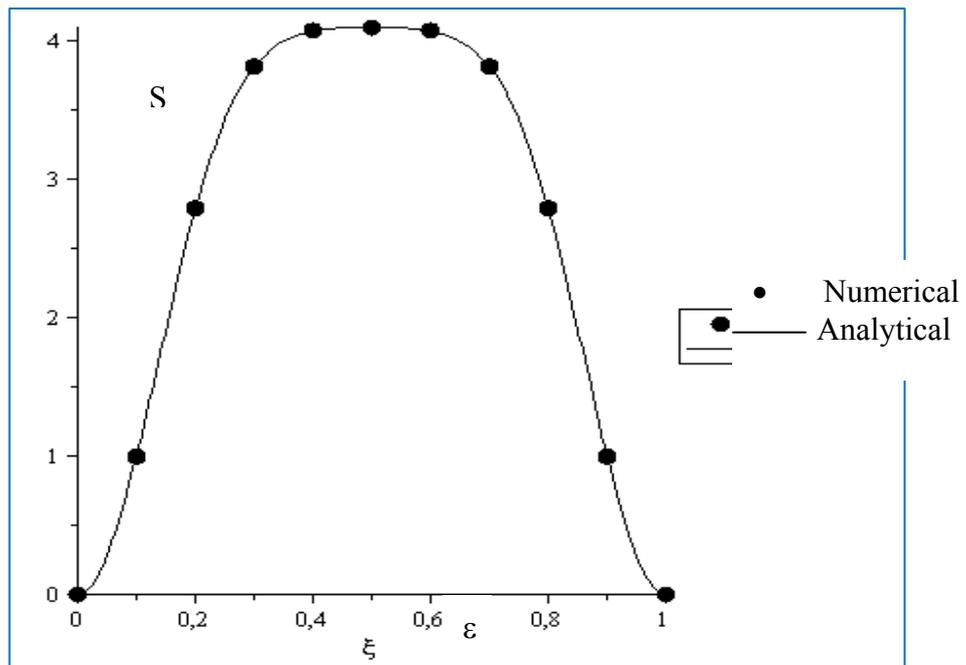


FIGURE 5: SEPARATION S VERSUS THE ACOUSTIC BEAM WIDTH $\varepsilon=0.5$ FOR $A_{OPT}=22$, $LE=100$, $PR=7$.

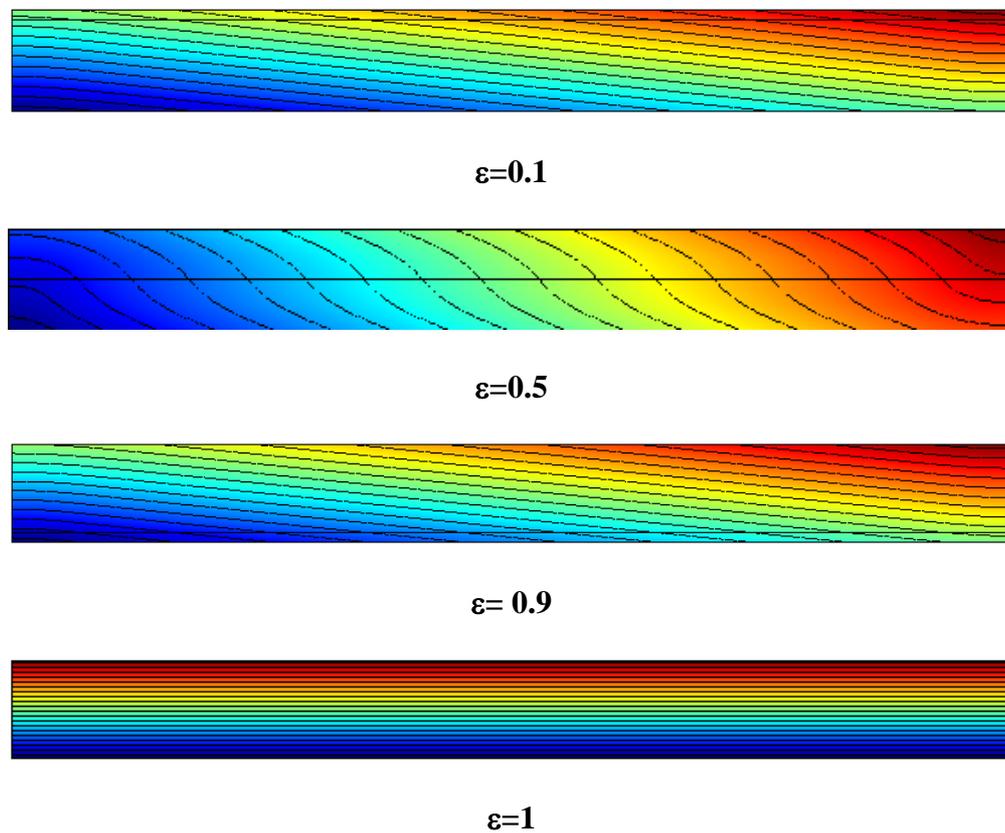


Figure 6: Mass fraction fields and iso-concentrations for different values of ε and A_{opt} . ($Le=100, Pr=7$).

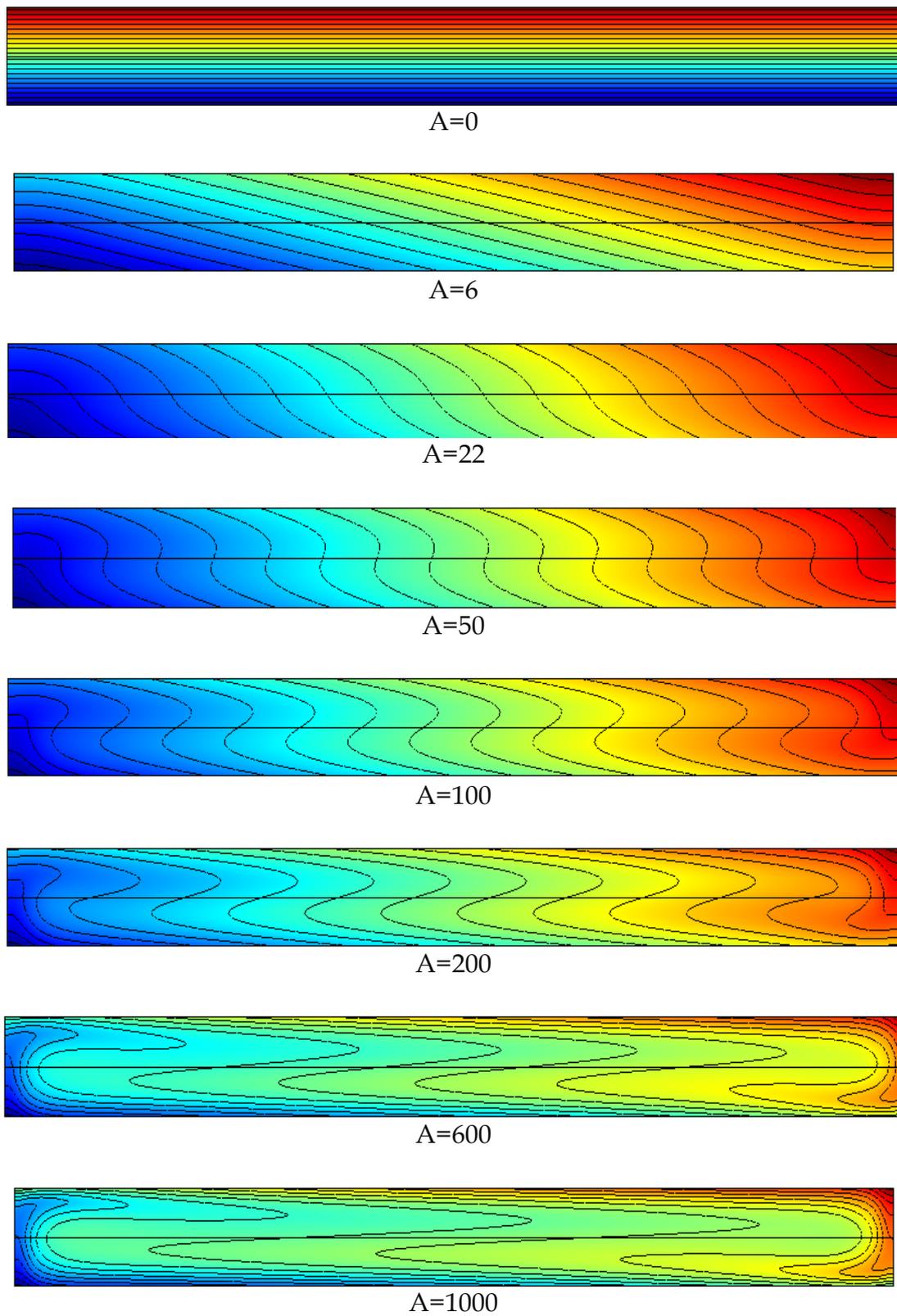


Figure 7: Mass fraction fields and iso-concentrations for different values of A : $\varepsilon=0.5$, $Le=100$, $Pr=0.7$

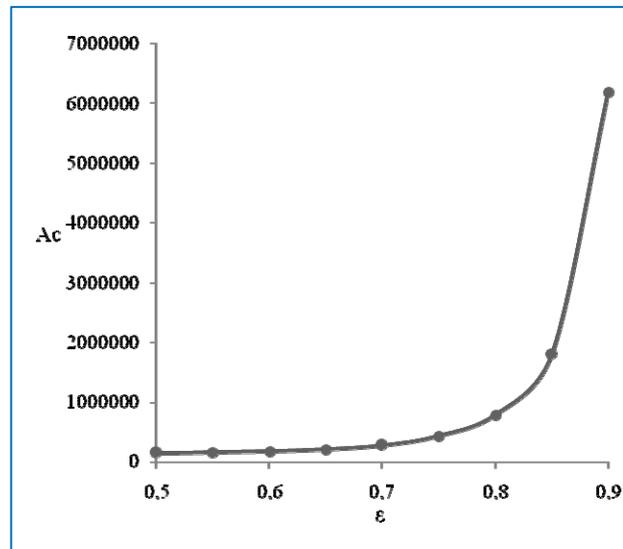


Figure 8(a): Critical value A_c versus ε , $Le=100$, $Pr=7$

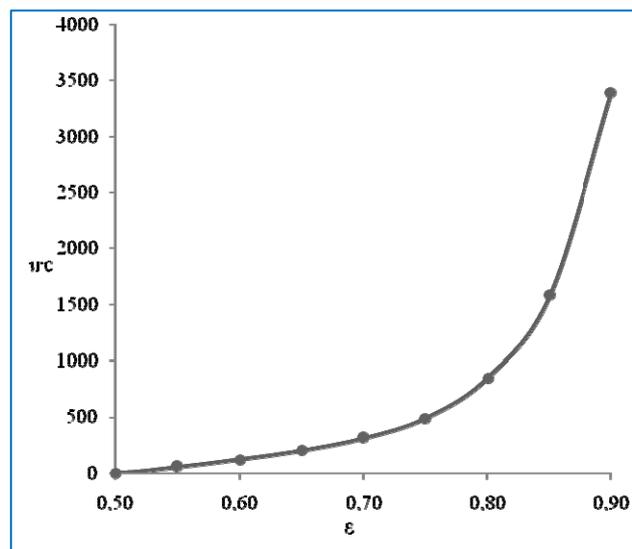


figure 8(b): Critical value ω_c versus ε , $Le=100$, $Pr=7$.

A	S
0	0
6	2.078
15	3.815
19	4.057
21	4.097
22	4.100
23	4.098
40	3.469
50	3.029
70	2.351
100	1.725
200	0.894
600	0.301
1000	0.181

Table I. Analytical values of the separation S versus the acoustic parameter A for $\square=0.5$,
 $Le=100$, $Pr=7$.

Legends

Figure 1: Geometrical configuration of the cell submitted to an ultrasound beam

Figure 2 : $U_0(z) = f(z)$ for $\varepsilon=0.5$, $A=22.05$, $Le=100$, $Pr=7$

Figure 3 : $U_0(z) = f(z)$ for $\varepsilon=0.2$, $A=22.05$, $Le=100$, $Pr=7$

Figure 4: Analytical curve of the separation S versus the acoustic parameter A for $\square=0.5$, $Le=100$, $Pr=7$.

Figure 5: Separation S versus the acoustic beam width $\varepsilon=0.5$ for $A_{opt}=22$, $Le=100$, $Pr=7$.

Figure 6: Mass fraction fields and iso-concentrations for different values of ε and A_{opt} .

Figure 7: Mass fraction fields and iso-concentrations for different values of A : $\varepsilon=0.5$, $Le=100$, $Pr=0.7$

Figure 8(a): Critical value A_c versus ε , $Le=100$, $Pr=7$

Figure 8(b): Critical value ω_c versus ε , $Le=100$, $Pr=7$

Table I : Analytical values of the separation S versus the acoustic parameter A for $\varepsilon=0.5$, $Le=100$, $Pr=7$.

Chapitre VII: Conclusion et perspectives

Dans ce travail qui comporte deux parties, nous avons étudié l'action entre un fluide compressible et une onde acoustique stationnaire au sein d'un réfrigérateur thermoacoustique d'une part et d'autre part l'influence d'un écoulement généré par des ondes ultrasonores (Eckart streaming) sur la séparation des espèces d'un mélange binaire en microgravité. Ces deux parties peuvent sembler complètement disjointes mais dans les deux cas il s'agit d'étudier l'interaction entre un fluide compressible ou incompressible et une onde acoustique, soit stationnaire, soit progressive.

Dans la première partie, on étudie le comportement d'un réfrigérateur thermoacoustique en s'intéressant à l'influence de la loi d'état du gaz sur l'effet thermoacoustique et en considérant soit la loi classique des gaz parfaits adopté classiquement dans la littérature pour l'étude de ce problème, soit la loi de Van der Waals compte tenu du fait que de nombreuses expériences ont été réalisées avec par exemple de l'hélium à haute pression (de l'ordre de 30 bars). La prise en compte de la loi d'état de Van der Waals pour le gaz contenu dans le réfrigérateur thermoacoustique constitue donc un apport nouveau par rapport aux études antérieures sur le sujet. L'étude menée est essentiellement numérique et a consisté en l'élaboration d'un code de calcul de fluide compressible en utilisant le logiciel industriel COMSOL Multiphysics. Cependant contrairement à la simulation numérique de nombreux problèmes y compris de celui présenté dans la deuxième partie, il n'existe pas dans COMSOL de modèle prédéfini d'écoulement de fluide compressible non isotherme prenant en compte l'interaction avec une plaque solide en 2D (la plaque représente une partie du stack du réfrigérateur) au sein de laquelle l'équation de la chaleur est résolue. En effet le phénomène physique qui est à la base du fonctionnement d'un réfrigérateur thermoacoustique est précisément qu'au passage de l'onde acoustique au niveau de l'empilement des plaques qui constitue le stack, il se produit un flux hydrodynamique de chaleur dans la couche limite thermique qui se développe aux niveaux des parois de celui-ci. Il en résulte une différence de température entre ses deux extrémités.

Sur la base du modèle développé par Marx [31], nous n'avons pas modélisé la totalité du résonateur de longueur $\lambda/2$, mais une partie contenant une demi plaque du stack compte tenu des propriétés de symétrie et dont le centre est situé $3\lambda/8$, une partie amont du fluide délimitée par

une surface fictive et la partie aval délimitée par la fond du résonateur. Sur la surface fictive les conditions aux limites ont été introduites à partir de la méthode des caractéristiques.

On expose dans le chapitre II, les équations en 2D, régissant l'écoulement de fluide compressible au dessus d'une demi plaque du stack, ainsi que le transfert de chaleur au sein de la demi plaque et la mise sous forme adimensionnelle des équations et des conditions aux limites associées. Dans le chapitre III, le modèle numérique utilisé ainsi que le maillage utilisé sont décrits et ainsi que les contraintes imposées par le temps de calcul donc le coût de calcul : on explique pourquoi les simulations numériques sont faites à fréquences élevées ici 20khz, conduisant à des écarts de température faibles aux extrémités du stack.

Dans le chapitre IV, de validation du modèle numérique, on expose d'abord une étude simplifiée qui nous permet de valider la génération de l'onde stationnaire dans le domaine de calcul. L'utilisation de la méthode des caractéristiques, pour simuler une portion de résonateur, permet un temps d'établissement de l'onde faible. Ensuite on compare nos résultats de simulations numériques avec ceux obtenus par Marx, 2003, Marx ([31], cas de la plaque 3, p.184) pour un nombre de mach $Ma = 0,5\%$. On trace l'évolution les champs de vitesse de vorticité et de température obtenus dans ce cas test, à différents instants d'une période. On retrouve qualitativement le champ de vitesse et de vorticité, les différences observées étant certainement dues au manque de résolution spatiale de notre code, Marx utilisant un schéma aux différences finies d'ordre 6, et au schéma temporel utilisé qui est d'ordre 2 alors que celui utilisé par Marx est d'un ordre plus élevé (méthode de Runge-Kutta d'ordre 4). Par contre un meilleur accord est obtenu sur l'évolution du champ de température sur une période, car la couche limite thermique contient beaucoup plus de mailles que la couche limite visqueuse.

Enfin dans le chapitre V, on présente l'influence de la loi d'état du gaz sur l'effet thermoacoustique. Les premières simulations sont faites avec de l'hélium à 1 bar, pour un nombre de Mach de 0.5% et 5%. Aucune différence n'est observée sur le profil des vitesses, par contre on observe un écart entre les deux lois de 2% sur la différence de température aux extrémités du stack. Cependant, pour les simulations qui nous intéressent, à pressions plus élevées, l'augmentation de la pression initiale entraîne vite des temps de calcul très importants. Au laboratoire PHASE, les calculs ont été effectués sur une machine de calcul possédant 8 nœuds, cadencés à 2.5 GHz. Le temps de résolution pour obtenir un régime thermique établi avec de l'hélium à 1 bar est de l'ordre de 8h. Les temps de calcul requis pour des simulations numériques à 10 et 30 bars seraient respectivement de 800h et 8000h. Il est donc nécessaire

d'envisager une utilisation parallèle de COMSOL, ce qui sera fait ultérieurement au centre de calcul du département de Mécanique de l'Université Claude Bernard, de Lyon.

Dans la deuxième partie, on présente une étude analytique et numérique de l'influence d'un écoulement généré par des ondes ultrasons (Eckart streaming) sur la séparation des espèces d'un mélange binaire en microgravité. Le fluide est contenu dans une cavité très allongée dont une partie de l'un de ses petits cotés est soumise à une onde progressive ultrasonore alors que le côté opposé est parfaitement absorbant. Un gradient de température est appliqué entre les deux autres côtés de la cellule. Dans certaines conditions, un écoulement monocellulaire s'établit et il est alors possible de séparer les espèces du mélange de part et d'autre de la cavité. Les champs de vitesses, de température et de fraction massique décrivant l'écoulement monocellulaire sont déterminés en utilisant l'hypothèse de type « parallel flow ». La séparation, S , est ensuite calculée en fonction du paramètre acoustique A , de l'épaisseur normalisée du faisceau acoustique ε , du nombre de Lewis, Le , et du nombre de Prandtl, Pr en utilisant le logiciel MAPLE. On montre qu'il existe un maximum de séparation pour $\varepsilon=0,5$ et $A=315,038 Pr/Le$. Ainsi pour $Le=100$ et $Pr=7$, $A_{opt}=22,05$. Puis les résultats analytiques sont ensuite corroborés par des simulations numériques directes réalisées avec le logiciel COMSOL. Les champs de concentrations et les iso-concentrations sont tracés pour différentes valeurs de A variant de 0 (cas où il n'y a pas de séparation) à $A=1000$.

Une étude de stabilité linéaire de l'écoulement monocellulaire est ensuite effectuée. Le système d'équations aux perturbations est résolu par trois méthodes : la méthode de Galerkin à l'ordre 12, la méthode spectrale Tau-Chebychev et une méthode aux éléments finis. Les paramètres critiques caractérisant la transition stationnaire et instationnaire (bifurcation de Hopf) sont déterminés en fonction ε , Le et Pr . On montre que l'écoulement monocellulaire perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf pour toutes les valeurs de ε sauf pour $\varepsilon=0.5$ où la bifurcation est stationnaire et est caractérisée par les paramètres critiques : $A_c=148\,351,8$ et $kc=3,33$. Cette valeur de A_c est évidemment bien plus élevée que la valeur de $A_{opt}=22,05$ conduisant au maximum de séparation pour $\varepsilon=0.5$.

Les perspectives de ce travail sont les suivantes :

Pour la partie thermoacoustique, il serait très intéressant de pouvoir prendre comme domaine de calcul une partie contenant une demi-place du stack dont le centre est situé $3\lambda/8$, une partie amont du fluide délimitée par une surface fictive et la partie aval délimitée par une autre surface fictive sur laquelle les conditions aux limites tirées de la méthode des caractéristiques seraient appliquées. Une étude préliminaire a été faite dans ce sens mais reste à développer. De plus afin de bien exploiter le code mise au point en fluide compressible il faudrait augmenter les nombres de Mach, et la pression de fonctionnement afin de tirer profit d'une tel modèle comparé à un modèle faible Mach, très utilisé dans la littérature sur ce sujet.

Pour la partie II, l'étude en gravité, avec prise en compte du nombre de Rayleigh et du facteur de séparation reste à faire. Le problème dépendra alors sept paramètres adimensionnels, ce qui montre la difficulté du problème à résoudre dans ce dernier cas.

ANNEXE

Annexe : Récapitulatif du modèle écrit sur COMSOL

Dans cette annexe, on récapitule la façon dont est implémenté les équations à résoudre à l'aide du logiciel industriel COMSOL. On utilise deux modes *PDE General Form* : *I* pour les grandeurs dynamiques et *II* pour la température. Les constantes, comme par exemple les propriétés thermophysiques du gaz ou les nombres adimensionnelles, sont définies dans le menu *Constants*. Les coefficients de chaque mode sont spécifiés selon le type de milieu dans les menus *Subdomain Setting* pour les équations sur le domaine et dans les menus *Boundary Setting* pour les conditions aux limites. Les termes dépendants des variables du problème (ρ , ρu , ρv et T) sont définis dans le menu *Expression*. Ainsi les termes définis sur le domaine, tels que les vitesses, la pression et le tenseur des contraintes visqueuses, sont écrits dans *Subdomain Expression*, tandis que ceux définis sur les frontières, comme les amplitudes des ondes caractéristiques, le sont dans *Boundary Expression*.

1. Mode *I* : équation pour les grandeurs dynamique

<i>I</i>	Fluide
U_I	$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}$
d_{aI}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
F_I	$-\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \\ u \frac{\partial \rho u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho u}{\partial y} + \rho u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \\ u \frac{\partial \rho v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \rho v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix}$

Γ_I	$-\frac{1}{R_e} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix}$
------------	--

2. Mode II : équations pour la température

II	Fluide	Solide
U_{II}	T	T
d_{aII}	ρ	1
F_{II}	$-\left(\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} + (\gamma - 1)p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \Phi$	0
Γ_{II}	$-\frac{\gamma}{P_e} (q_x \quad q_y)$	$-\frac{1}{P_{es}} (q_{sx} \quad q_{sy})$

3. Conditions aux limites

	Conditions aux limites	Coefficients
S_{fond}	$\begin{cases} u = v = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{cases}$	$\text{constr}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}$ $G_{II} = 0$ $R_{II} = 0$
sym	$\begin{cases} v = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases}$	$\text{constr}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho v \\ 0 \end{pmatrix}$ $G_{II} = 0$ $R_{II} = 0$

S_{plaque}	$\begin{cases} u = v = 0 \\ T_{\text{fluide}} = T_{\text{plaque}} \\ \gamma \frac{\partial T}{\partial n_{\text{fluide}}} = \frac{1}{Pe_s} \frac{\partial T}{\partial n_{\text{plaque}}} \end{cases}$	$\text{constr}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}$
S_f	$\begin{cases} u = v = 0 \\ T_{\text{fluide}} = T_f \end{cases}$	$\text{constr}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}$ $G_{II} = 0$ $R_{II} = -T - T_f$
S_c	$\begin{cases} u = v = 0 \\ T_{\text{fluide}} = T_c \end{cases}$	$\text{constr}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}$ $G_{II} = 0$ $R_{II} = -T - T_c$
S_{sonde}	$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_4 + L_1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_4 - L_1) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{2\rho}(\gamma - 1)(L_4 + L_1) = 0 \end{cases}$	$G_I = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_4 + L_1) \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\rho}{2}(L_4 - L_1) + \frac{u}{2}(L_4 + L_1) - \frac{1}{R_e} \tau_{xx} \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{v}{2}(L_4 + L_1) - \frac{1}{R_e} \tau_{xy} \end{pmatrix}$ $R_I = 0$ $G_{II} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{2\rho}(\gamma - 1)(L_4 + L_1) - \frac{\gamma}{P_e} q_x$ $R_{II} = 0$

Communications effectuées au cours de cette thèse

Publication dans des revues internationales à comité de lecture :

M.C. Charrier-Mojtabi, A. Fontaine, A. Mojtabi, Influence of acoustic streaming on thermodiffusion in a binary mixture under microgravity, soumise en septembre 2011 à l'International Journal of Heat and Transfer.

Congrès internationaux:

M.-C. Charrier-Mojtabi, A. Fontaine ; A Mojtabi, Analytical and numerical stability analysis of the flow induced by acoustic streaming in a heated binary fluid layer under weightlessness, 4th International Symposium Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics, 18-21 juillet 2011, Barcelone. Sans acte publié, sélection de papier pour publication dans IOP's Fluid Dynamics Research.

A. Fontaine, M.-C. Charrier-Mojtabi, A. Mojtabi, J.-L. Breton and V. Gibiat, Van der Waals gaz and direct simulation for thermoacoustics, ACOUSTIC'S08 PARIS, 115th ASA Meeting, June 29-July 4th, 2008. Communication orale.

Congrès nationaux:

A. Fontaine, M.C. Charrier-Mojtabi, V. Gibiat, Etude d'un réfrigérateur thermoacoustique avec un Gaz de Van der Waals, 19^{ème} Congrès Français de mécanique, Marseille, 24-28 Août 2009. Congrès avec actes publiés.

A. Fontaine, M.C. Charrier-Mojtabi, V. Gibiat, Influence des conditions aux limites sur la simulation d'un réfrigérateur thermoacoustique, 10^{ème} Congrès Français d'Acoustique, Lyon, 12-16 Avril 2010. Communication orale (poster).

Présentation au GDR Thermoacoustique

A. Fontaine, M.C. Charrier-Mojtabi, V. Gibiat, Simulation numérique de l'écoulement au sein d'une enceinte thermoacoustique à l'aide d'un modèle de fluide compressible, GDR Thermoacoustique, LIMSI Orsay, 15-16 Décembre 2008. Communication orale.

AUTEUR : Alain FONTAINE

TITRE : Interaction entre une onde acoustique et un fluide : Application à la thermoacoustique et à la séparation des constituants d'un mélange binaire par onde ultrasonore

DIRECTRICE DE THESE : Pr Marie Catherine CHARRIER-MOJTABI

RESUME

Ce travail de thèse s'intéresse à deux problématiques mettant en jeu des interactions entre fluide et ondes acoustique.

Dans la première partie, on présente la modélisation numérique d'un réfrigérateur thermoacoustique, dispositif dans lequel une acoustique permet d'engendrer une différence de température de part et d'autre d'une paroi solide. On s'intéresse particulièrement à l'influence de la loi d'état du gaz sur l'effet thermoacoustique.

Dans la deuxième partie, on présente une nouvelle configuration pour la séparation des espèces d'un mélange binaire. Il s'agit de générer un écoulement monocellaire dans une cavité rectangulaire en microgravité, à l'aide d'ondes ultrasonores. Nous y exposons l'étude analytique, numérique ainsi que l'étude de stabilité de cette configuration.

MOTS-CLES : réfrigérateur thermoacoustique, écoulement compressible, acoustic streaming, thermogravitation, séparation des espèces

ABSTRACT

In the present work, we study the interaction between an acoustic wave and a compressible and incompressible fluid.

In the first part, we present the numerical study of a thermoacoustic refrigerator and more particularly the influence of the gas state equation on the thermoacoustic effect.

Thermoacoustic heat pumping is a complex phenomenon which leads to a hydrodynamic heat flux in the thermal boundary layer near a porous medium, due to acoustic waves.

The second part deals with the influence of acoustic streaming on species separation of a binary mixture in a shallow cavity cell subjected to temperature gradient and under microgravity. The unicellular flow induced by the streaming may lead to significant species separation. Analytical results are corroborated by direct numerical simulations. Then, a linear stability analysis of the unicellular flow is performed.

KEYWORDS : thermoacoustic, compressible flow, acoustic streaming, thermogravitation, species separation

Laboratoire PHASE (Physique de l'Homme Appliqué à Son Environnement)

Université Toulouse III Paul Sabatier

118, route de Narbonne 31062 TOULOUSE CEDEX 9

Tél : 05 61 55 65 33 – Fax : 05 61 55 81 54