МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

СЕНЧУК Ю.Ф.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

Часть I

Учебное пособие

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета
протокол № 2 от 14. 05. 2003г.

ХАРЬКОВ 2003

ББК 22.161
С – 31
УДК 517 (07)

Рецензенти: О.М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф., Українська педагогічна академія.
Є.Г. Голоскоков, д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ “ХПІ”.

С – 31 Сенчук Ю.Ф. Математичний аналіз для инженерів: – Навч. посібник – Ч. І. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2003 – 408 стор. – Рос. мовою.

ISBN

Учебное пособие Ю.Ф. Сенчука «Математический анализ для инженеров» написано на базе курса лекций по математическому анализу, который автор читал на протяжении четырёх десятилетий студентам НТУ “ХПИ” с усиленной математической подготовкой. В первой части этого пособия изложены такие разделы: теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функций, зависящих от одной переменной, функции нескольких переменных, кратные интегралы. Все изложенные теоретические факты доказаны и проиллюстрированы большим количеством примеров и задач.

Книга будет полезна студентам инженерно-физического, физико-технического факультетов, всех факультетов машиностроительного профиля, а также для экономических специальностей. Безусловный интерес она должна вызвать у преподавателей, так как материал в ней излагается в соответствии с учебными программами указанных факультетов, что значительно облегчит подготовку к лекциям и практическим занятиям.

Навчальний посібник Ю.Ф. Сенчука «Математичний аналіз для інженерів» написано на базі курсу лекцій з математичного аналізу, який автор читав протягом чотирьох десятиліть студентам НТУ “ХПІ” із посиленою математичною підготовкою. У першій частині цього посібника викладено такі розділи: теорія границь, диференціальне й інтегральне числення функцій, що залежать від однієї змінної, функції декількох змінних, кратні інтеграли. Всі викладені теоретичні факти доведено і проілюстровано великою кількістю прикладів і задач.

Книга буде корисна студентам інженерно-фізичного, фізико-технічного факультетів, усіх факультетів машинобудівного профілю, а також для економічних фахів. Безумовний інтерес вона повинна викликати у викладачів, тому що матеріал у ній викладається відповідно до навчальних програм зазначених факультетів, що значно полегшить підготовку до лекцій і практичних занять.

The Yu.F. Senchuk’s school-book “The mathematical analysis for engineers” has been written on the based of course of lectures on the mathematical analysis. The author has read it to students of NTU “KhPI” with intensive mathematical studying during four ten years. In the first part of this school-book such sections are set out: the theory of limits, the differential and integral calculus of one-variable functions, multivariable functions, multiple integrals. All of stated theoretical facts are proved and illustrated with a great number of examples and problems.

The book will be useful for the students of physical engineering, energomashinebuilding and economic specialities. One will be interesting for teachers, so as the material is set out according to the educational programs of mentioned faculties. That can greatly facilitate the preparing to lectures and practice.

Іл. 394. Табл. 3. Бібліогр: 9 назв.

ББК 22.161
С – 31

ISBN

Предисловие

Рукопись учебного пособия “Математический анализ для инженеров” была написана Юрием Федоровичем Сенчуком в 2002 году. К сожалению, он не успел закончить окончательную проверку компьютерного набора и увидеть книгу, вышедшую в печать.

Юрий Федорович был одним из лучших преподавателей Национального технического университета “ХПИ”. Многие студенты, убеленные сейчас сединами, хорошо помнят лекции Сенчука Ю.Ф., который был для них легендой. Опыт, стиль и манера изложения материала, присущие этому прекрасному педагогу, всегда вызывали восхищение не только у студентов, но и у многих преподавателей. Несмотря на то, что Юрий Федорович в совершенстве знал курс высшей математики и многие ее специальные разделы, он скрупулезно готовился к каждой лекции и тщательно продумывал методику изложения материала. Свой сорокалетний опыт работы он постарался изложить в этом учебном пособии. Сотрудники и аспиранты кафедры “Прикладная математики”, его коллеги постарались закончить издание первой части этого пособия и продолжают готовить к изданию вторую часть. Это сделано для того, чтобы не потерять лучшие достижения наших предшественников в области преподавания сложных предметов, к числу которых относится и математический анализ. Материал книги изложен последовательно, четко, на достаточном уровне строгости и в доступной форме. Отличительной особенностью данного пособия является не только простота его изложения, но и большое количество графических иллюстраций, способствующих наглядности и лучшему усвоению математических понятий. Книга содержит большое количество тщательно подобранных примеров, которые могут быть использованы как преподавателями на практических занятиях, так и студентами при самостоятельном изучении того или иного раздела. К достоинствам книги следует отнести и то, что при сравнительно небольшом объеме учебного пособия автору удалось изложить курс полностью соответствующий высокому уровню фундаментальной математической подготовки студентов физических, математических и инженерных специальностей технических университетов.

Сотрудники кафедры “Прикладная математика” уверены, что книга будет полезной не только студентам, но и преподавателям, читающим лекции и проводящим практические занятия по математическому анализу.

Зав. каф. “Прикладная математика” НТУ “ХПИ”, профессор Л.В. Курпа

Сенчук Юрий Федорович родился 11 мая 1930 г. в семье педагогов в с. Богатырь Донецкой области.

Окончив среднюю школу с серебряной медалью в 1948 г., он поступил в Харьковский государственный университет им. А. М. Горького на физико-математический факультет, который окончил с отличием в 1953 году по специальности “астрономия”.

Свою педагогическую деятельность Юрий Федорович начал в августе 1953 года в Дрогобычском педагогическом институте, где преподавал математику и астрономию. Когда в Харькове открыли Планетарий, Сенчук Юрий Федорович, будучи лектором-методистом, консультировал молодых астрономов и занимался научной работой. В Ученых записках ХГУ и Астрономическом циркуляре вышли его работы: "Общая фотометрия солнечной кроны во время затмения 25 февраля 1952 г." и "Улучшение элементов орбиты планеты 729 (Metcalfia)".

В Национальном техническом университете ”ХПИ” Сенчук Ю.Ф. проработал 44 года, сначала на кафедре теоретической и математической физики, а впоследствии – на кафедре прикладной математики.

В 1968 году Сенчук Ю.Ф. защитил кандидатскую диссертацию по теме "Градиентная минимизация некоторых классов функционалов в абстрактном пространстве и ее применения к задачам вариационного исчисления". В июле 1977 года он был избран по конкурсу на должность доцента кафедры автоматического управления движением. На протяжении долгих лет работы Юрию Федоровичу приходилось читать не только лекции по классическому курсу высшей математики, но и по многим ее специальным разделам, в том числе по интегральным уравнениям и функциональному анализу, теории дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного и другим. Он читал курс статистической радиофизики на радиотехническом факультете ХГУ и курс вычислительной математики для аспирантов института.

Излагая сложные разделы математики, Сенчук Ю.Ф. всегда стремился к доступности. Он опубликовал работу "О неформальном подходе к определениям и доказательствам в курсе математики". Считая, что источником трудностей понимания абстрактных математических рассуждений является не их содержание, а форма, Юрий Федорович разработал новые информационные технологии обучения для облегчения восприятия студентам, создал новые программы и структурно-логические схемы математических дисциплин. Он был одним из организаторов модульно-рейтинговой системы контроля знаний студентов при изучении курса высшей математики. В 90-е годы было опубликовано 9 научных работ Сенчука Ю.Ф. по этому направлению, с которыми он выступал на международных научно-методических конференциях. Он разработал алгоритм полного перехода на модульно-рейтинговую систему контроля знаний студентов, который он осуществлял на потоках факультета. В методическую работу Юрия Федоровича входило руководство методическим семинаром кафедры. Он проводил семинары по теории вероятностей и по теории графов для сотрудников института, а на кафедре электроники – семинар по теории случайных процессов.

За отличные успехи в работе Сенчук Ю.Ф. награжден знаком "Высшая школа СССР".

Юрий Федорович постоянно работал над повышением своего научно-педагогического мастерства, проходил стажировку в Ленинградском политехническом институте. А чаще повышением квалификации занимался самостоятельно, разрабатывая учебные пособия, методические рекомендации и учебники. Он фактически являлся учителем и наставником целого ряда преподавателей математических дисциплин на кафедрах прикладной математики и АУД. Его рекомендациями по проведению лекций и практических занятий и сейчас пользуются многие преподаватели. Лекции Сенчука Ю.Ф. отличались живостью, доходчивостью и в то же время тщательностью отбора материала и глубиной его изложения. Эти лекции пользуются успехом во всем институте; их прослушало немало преподавателей прикладных дисциплин.

Огромную работу Юрий Федорович проводил и по линии учебно-организационного отдела, возглавляя контроль качества преподавания математики во всем институте.

Юрий Федорович был не только квалифицированным, но и требовательным преподавателем, читающим лекции на высоком теоретическом и методическом уровне. Он непрерывно работал над совершенствованием своих курсов, стараясь в каждой теме найти какое-нибудь методическое новшество.

Несмотря на высокую требовательность Юрия Федоровича, студенты высоко ценили его лекции и практические занятия и считали его одним из лучших преподавателей.

Он был отличный педагог, опытнейший лектор. Строгость изложения он блестяще сочетал с рассмотрением физической сущности данного математического положения, что чрезвычайно важно в математическом образовании инженера.

I. Введение в математический анализ

1. Основные логические символы

В дальнейшем мы будем систематически использовать следующие обозначения.

$\forall$ - вместо слов «для всех», «для каждого».

$\exists$ - вместо слова «существует», «найдется».

$\Rightarrow$ - вместо слова «следует». Например, запись $A \Rightarrow B$ означает, что «*A* влечет за собой *B*», «из *A* следует *B*».
Символ $\Rightarrow$ называется импликацией.

$\Leftrightarrow$ - вместо слова «равносильно», «эквивалентно». Например, запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что «из *A* следует *B*» и наоборот из «*B* следует *A*», а значит *A* и *B* равносильны.

$\vee$ - вместо слова «или». Запись $A \vee B$ означает, что имеет место по крайней мере одно из высказываний *A* или *B*.

$\wedge$ - вместо слова «и». Запись $A \wedge B$ означает, что одновременно имеют место высказывания *A* и *B*.

2. Простейшие понятия и обозначения теории множеств

Множеством будем называть совокупность некоторых объектов (точек, чисел, векторов, функций и т.п.), называемых элементами этого множества. Принадлежность данного элемента x множеству A записывают так: $x \in A$. Если, наоборот, x не есть элемент множества *A*, то пишут: $x \notin A$.

Пусть множество A состоит из всех элементов x, обладающих некоторым общим свойством. Тогда пишут

$$A = \{x \,|\, \ldots\ldots\},$$

где вместо многоточия записывается упомянутое свойство всех элементов множества A. Например, пусть A – множество всех x, при которых величина $\arcsin x$ имеет смысл. Тогда, очевидно,

$$A = \{x \,|\, -1 \le x \le 1\}.$$

Если все элементы множества A одновременно принадлежат некоторому другому множеству B, то есть $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$, то A называют подмножеством множества B и пишут, что $A \subset B$ (символ $\subset$ называют символом включения), рис. 1.1. В частности, запись $A \subset B$ может означать, что множество A совпадает с множеством B.

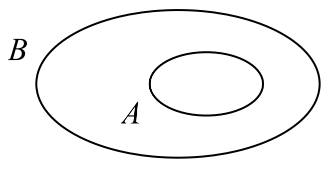


Рис.1.1

Пусть имеется два множества A и B. Множество элементов, каждый из которых принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B, называется объединением множеств A и B и обозначается $A\bigcup B$, рис. 1.2. Итак,

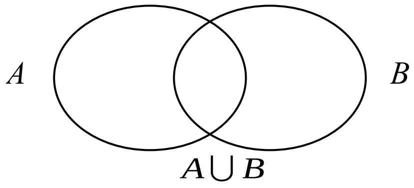


Рис.1.2

$$\left(x\in A\bigcup B\right)\Leftrightarrow\left(x\in A\right)\vee\left(x\in B\right).$$

При этом множества A и B могут как иметь общие точки, так и не иметь их.

Пример 1.1. Пусть A – множество жителей данного города в возрасте от 18 до 30 лет, а B – множество жителей этого города старше 25 лет. Тогда $A\bigcup B$ есть множество всех совершеннолетних жителей данного города.

Пусть снова A и B – произвольные множества. Совокупность всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B, называется разностью множеств A и B и обозначается $A\setminus B$, рис. 1.3. Иными словами

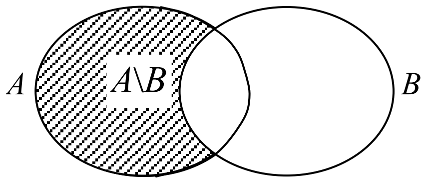


Рис.1.3

$$\left(x\in A\setminus B\right)\Leftrightarrow\left\{x\mid\left(x\in A\right)\wedge\left(x\notin B\right)\right\}.$$

Пример 1.2. Пусть A – множество всех футболистов данной команды, участвовавших в данной игре, а B – множество игроков, проведших всю игру на поле. Тогда $A\setminus B$ есть множество игроков, которые были заменены в ходе матча, либо, наоборот, вышли на поле в качестве замены.

Множество элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B, называется пересечением множеств A и B и обозначается $A\bigcap B$, рис. 1.4. Таким образом,

$$\left(x\in A\bigcap B\right)\Leftrightarrow\left\{x\mid\left(x\in A\right)\wedge\left(x\in B\right)\right\}.$$

Пример 1.3. Пусть A – множество всех целых чисел, делящихся на 2, а B – множество всех целых чисел, делящихся на 3. Тогда $A\bigcap B$ есть множество всех целых чисел, кратных числу 6.

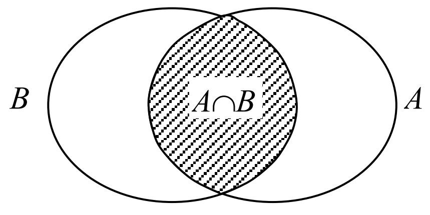


Рис.1.4

В частности, если множества A и B не имеют общих элементов, т.е. не пересекаются, то $A\bigcap B$ представляет собой так называемое пустое множество и в этом случае $A\bigcap B=0$.

Примечание. Легко заметить, что выражения $A\bigcap B$ и $A\bigcup B$ есть множественные аналоги соответствующих логических выражений $A\wedge B$ и $A\vee B$.

3. Рациональные и иррациональные числа

Всевозможные дроби вида $\frac{m}{n}$, где m и n – целые числа $(n \neq 0)$, называются рациональными числами. Арифметические действия над рациональными числами приводят к рациональным же числам.

Недостаточность одних только рациональных чисел проявляется уже при извлечении корней. Например, $\sqrt{2}$ не есть рациональное число.

■Для доказательства этого факта предположим противное, т.е. пусть

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где m и n – натуральные числа. При этом дробь $\frac{m}{n}$, не ограничивая общности, можно считать несократимой.

Из равенства (1.1) имеем

$$2 = \frac{m^2}{n^2},$$

или

$$m^2 = 2n^2 \tag{1.2}$$

Последнее означает, что m^2 – четное число. Но тогда и m – четное число, т.е. $m = 2p$, где p – целое. Следовательно, выражение (1.2) принимает вид

$$4p^2 = 2n^2,$$

т. е.

$$2p^2 = n^2.$$

Отсюда следует, что число n^2, а значит и число n – четное. Но тогда в дроби $\frac{m}{n}$ возможно сокращение на 2, что противоречит начальному предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$.□*)

Каждое рациональное число изображается либо конечной десятичной дробью, либо бесконечной периодической.

Пример 1.4. Возьмём число $x = 2{,}147(3)$. Оно равно

$$x = 2{,}147 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + 0{,}000003 + \ldots = 2{,}147 + \frac{0{,}0003}{1 - 0{,}1} = 2{,}147 + \frac{3}{9900} =$$

---

*) Здесь и всюду в дальнейшем символы ■ и □ означают соответственно начало и конец доказательства.

$$= 2{,}147 + \frac{1}{3300},$$

а это, как легко видеть, рациональное число.

Будем говорить, что всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь изображает иррациональное число.

Рациональные и иррациональные числа, рассматриваемые в совокупности, называют вещественными (или действительными) числами.

Возьмем произвольную бесконечную непериодическую дробь вида

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots,$$

где $a_0 > 0$. Введем конечные десятичные дроби

$$x_n^- = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n, \quad x_n^+ = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Их называют соответственно нижним и верхним n-значными приближениями вещественного числа x.

Например, числа 3,141592 и 3,141593 есть соответственно нижнее и верхнее 6-значное приближения числа π.

Если число n брать достаточно большим, то разность $x_n^+ - x_n^-$ становится сколь угодно малой. Именно в этом смысле говорится, что любая бесконечная непериодическая дробь определяет некоторое иррациональное число.

Любое иррациональное число можно сколь угодно точно заменить рациональным числом. Исходя из этого факта и учитывая общеизвестные сведения о рациональных числах, можно сформулировать свойства вещественных чисел.

Свойство 1. Для любых вещественных чисел x и y имеет место одно и только одно из соотношений:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

При этом, если $x < y, \quad y < z$, то $x < z$. Последний факт называют транзитивностью множества вещественных чисел.

Свойство 1 означает, что множество вещественных чисел упорядочено.

Свойство 2. Для любых вещественных чисел x и y можно определить, и притом единственным образом, число $x + y$, называемое суммой чисел x и y. При этом

a. $x + y = y + x$ (переместительное свойство);

b. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (сочетательное свойство);

c. существует число, обозначаемое 0 и называемое нулём, такое, что

$$x + 0 = x, \ \forall x;$$

d. для любого числа x существует число y, обозначаемое $-x$ и такое, что

$$x+y=0;$$

число $y=-x$ называется противоположным числу x.

Нетрудно показать, что числа 0 и $-x$ (для любого x) определяются единственным образом.

e. Если $x<y$, то для любого числа z

$$x+z<y+z.$$

Вычитание чисел определяется как действие, обратное сложению, т. е.

$$(z=x-y)\Leftrightarrow(x=y+z).$$

Свойство 3. Для любых вещественных чисел x и y можно определить, и притом единственным образом, число z, называемое произведением чисел x и y и обозначаемое xy. При этом

f. $xy=yx$ (переместительный (коммутативный) закон умножения);

g. $(xy)z=x(yz)$ (сочетательный (ассоциативный) закон умножения);

h. существует число, обозначаемое 1 и называемое единицей, такое, что $1\neq 0$, и

$$x\cdot 1=x,\ \forall x;$$

i. для любого $x\neq 0$ существует число, обозначаемое $\frac{1}{x}$ и называемое обратным числу x, такое, что $x\cdot\frac{1}{x}=1$;

j. если $x<y$, а $c>0$, то $cx<cy$. Если же $c<0$, то $cx>cy$;

k. $(x+y)z=xz+yz$ (распределительный (дистрибутивный) закон умножения).

Для любых чисел x и y $(y\neq 0)$ определяется их частное

$$\frac{x}{y}=x\cdot\frac{1}{y}.$$

Свойство 4. Для любого вещественного числа x существует целое число *n*, такое, что $n>x$.

Свойство 4 называют свойством Архимеда.

Множество всех вещественных чисел геометрически изображается как бесконечная ось (имеется в виду, что на этой оси выбраны направление положительного отсчета и единица длины, т.е. масштаб, рис. 1.5).

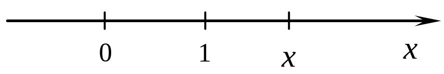


Рис.1.5

Множество $A=\{x\,|\,a\leq x\leq b\}$ называется отрезком числовой оси с концами a и b и обозначается ещё $[a,b]$.

Возьмём на оси Ox систему отрезков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots, \tag{1.3}$$

таких, что

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1,$$

т. е.

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1], [a_3, b_3] \subset [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], \ldots .$$

В этом случае систему (1.3) называют системой вложенных отрезков.

Свойство 5. Для любой системы вложенных отрезков (1.3) существует по крайней мере одно число x, принадлежащее всем отрезкам этой системы (рис. 1.6).

Свойство 5 означает, что на числовой оси отсутствуют пустоты. По-

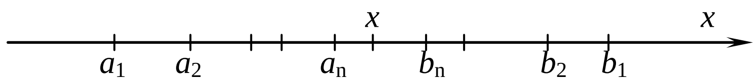


Рис.1.6

этому его называют свойством непрерывности множества вещественных чисел.

Примечание. Мы получили свойства 1-5 вещественных чисел на том основании, что этими же свойствами обладают сколь угодно близкие к ним рациональные числа. Однако можно было поступить и иначе, взяв упомянутые свойства в качестве аксиом, т.е. вводя множество вещественных чисел как множество, обладающее свойствами 1-5. Такой способ введения вещественных чисел называется аксиоматическим.

4. Модуль числа и его свойства

Модулем вещественного числа x называется число, обозначаемое $|x|$, такое, что

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Очевидны следующие свойства модуля:

1. $|x + y| \le |x| + |y|$.

Действительно, если x и y – числа одного знака, то $|x + y| = |x| + |y|$. Если же знаки чисел x и y различны, то $|x + y| < |x| + |y|$.

Данное свойство, очевидно, верно и для любого числа слагаемых.

2. $|xy| = |x| \cdot |y|$.

3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Геометрически величина $|x|$ есть расстояние точки x на числовой оси от начала отсчёта. Поэтому неравенство $|x| < a$ означает, что точка x находится между точками a и $-a$, т.е. что $-a < x < a$, рис. 1.7.

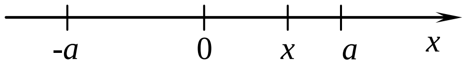


Рис.1.7

Рассмотрим теперь величину $|x_1 - x_2|$. Легко видеть, что при любом взаимном расположении точек $0, x_1, x_2$ число $|x_1 - x_2|$ геометрически представляет собой расстояние между точками x_1 и x_2 на числовой оси, рис. 1.8. Этот факт оказывается удобным при решении некоторых уравнений и неравенств, содержащих модули неизвестных величин.

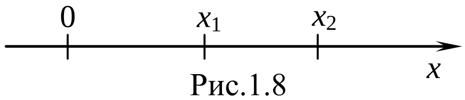


Рис.1.8

Пример 1.5. Решить уравнение

$$|x-1| = |x+3|.$$

Геометрически оно означает, что точка x равноудалена от точек $x=1$ и $x=-3$. Легко видеть, что таковой является точка $x=-1$, рис. 1.9.

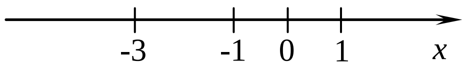


Рис.1.9

Пример 1.6. Решить неравенство

$$|2x-1| < 3.$$

Придав ему вид

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2},$$

заключаем, что искомое x находится между числами $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ и $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$, рис. 1.10, т. е. что

$$-1 < x < 2.$$

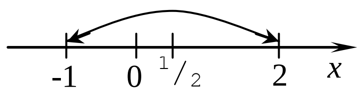


Рис.1.10

5. Интервалы и промежутки

Мы уже видели, что, по определению,

$$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}.$$

Множество $[a,b]$ называют ещё замкнутым интервалом.

В то же время множество

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

называют интервалом (или открытым интервалом).

Рассматривают также полуоткрытые интервалы $[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$ и $(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$.

Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называют ε-окрестностью точки $x=a$, рис. 1.11; будем обозначать её $C_\varepsilon(a)$. Здесь ε – радиус окрестности.

Итак,

$$C_\varepsilon(a)=\{x\,|\,|x-a|<\varepsilon\}.$$

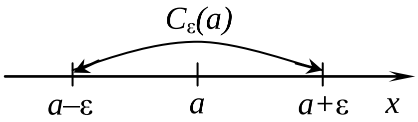


Рис.1.11

Множество всех x, таких, что $x>a$, обозначают $(a,+\infty)$.

Аналогично вводятся множества $[a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ и $(-\infty,a]$. Под $(-\infty,+\infty)$ подразумевается вся числовая ось. Её называют ещё множеством R.

Числовое множество E называется ограниченным сверху, если существует такое число Q, что $x<Q$ (или $x\le Q$) для всех $x\in E$. Аналогично, если для всех $x\in E$ будет $x>q$ (или $x\ge q$), то множество E называют ограниченным снизу.

Пример 1.7. Множество $E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$ ограничено снизу числом 0 (и, тем более, любым отрицательным числом).

Множество, ограниченное одновременно сверху и снизу, называется ограниченным множеством. Очевидно, множество E ограничено тогда и только тогда, когда существуют такие числа a и b, что $E\subset[a,b]$.

Пример 1.8. Множество всех правильных дробей ограничено, поскольку оно полностью лежит на отрезке $[0,\ 1]$.

Множество E из примера 1.7. ограничено, так как лежит на том же отрезке.

6. Постоянные и переменные величины. Классификация переменных

Если величина x в процессе её рассмотрения сохраняет постоянное значение или её изменением можно пренебречь, то её называют постоянной и пишут

$$x=const.$$

Если же величина x при её рассмотрении принимает разные значения, то её называют переменной.

Одна и та же физическая величина в одних случаях может рассматриваться как постоянная (если её изменение неощутимо), а в других – как переменная. Например, при малых высотах ускорение свободного падения g может считаться постоянным. Если же высота h сравнима с радиусом Земли R, то g уже нельзя считать постоянным, так как приходиться учитывать, что с ростом h величина g убывает пропорционально величине $\dfrac{1}{(R+h)^2}$, рис. 1.12.

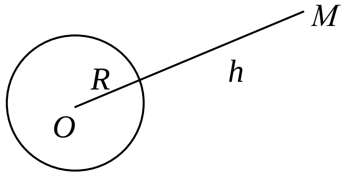


Рис. 1.12

Мы уже по существу говорили (см. свойство 1 вещественных чисел), что переменная называется упорядоченной, если о каждой паре её значений можно сказать, какое из них – предыдущее, а какое – последующее.

Переменная называется монотонно возрастающей, если каждое последующее её значение больше предыдущего. Геометрически это означает, что изображающая эту величину точка на числовой оси перемещается вправо.

Аналогично определяется монотонно убывающая величина.

По характеру своего изменения переменные делятся также на дискретные и непрерывные. Переменная называется дискретной, если она принимает лишь отдельные, изолированные значения. Примером может служить число жителей данного города. Характерный пример дискретной переменной – числовая последовательность $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \ldots$. Например, величина

$$\{x_n\} = 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots, \tfrac{1}{n}, \ldots$$

есть монотонно убывающая числовая последовательность.

Переменная называется непрерывной, если при переходе от одного своего значения к другому она принимает и все промежуточные значения.

Множество всех значений, принимаемых данной переменной, называется областью её изменения. Если переменная – дискретная, то область её изменения есть множество изолированных точек на числовой оси. Область же изменения непрерывной переменной представляет собой некоторый промежуток на числовой оси (или всю числовую ось).

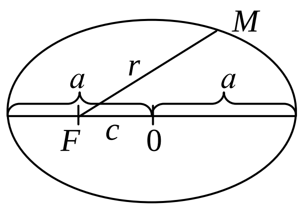


Рис. 1.13

Переменная называется ограниченной, если область её изменения ограничена. Примером может служить фокальный радиус-вектор r точки M, рис. 1.13, движущейся по эллипсу, поскольку

$$a - c \le r \le a + c.$$

Если x – ограниченная переменная, то найдётся такое число $M > 0$, что всегда будет

$$|x| \le M.$$

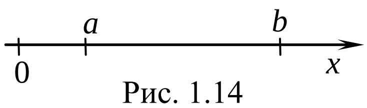


Рис. 1.14

Действительно, пусть $[a, b]$ – отрезок, в который можно заключить область изменения переменной x, рис. 1.14. Тогда достаточно положить $M = \max\{\,|a|, |b|\}$.

Переменная x называется неограниченной, если область её изменения – неограниченная. Примером может служить фокальный радиус-вектор r точки M, движущейся по параболе, рис. 1.15.

Второй пример: числовая последовательность

$$\{x_n\} = 1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots .$$

Если x – неограниченная переменная, то какое бы большое число $M > 0$ мы ни взяли, неравенство $|x| \le M$ будет бесчисленное множество раз нарушаться.

Примечание. Легко видеть, что деления переменных на монотонные и немонотонные, на дискретные и непрерывные, на ограниченные и неограниченные совершенно независимы друг от друга.

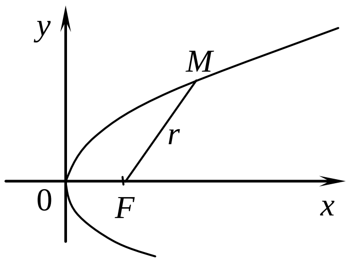


Рис.1.15

7. Функция и способы её задания

Если каждому значению переменной x из области её изменения отвечает одно или несколько значений другой переменной y, то переменная y называется функцией переменной x, а сама переменная x по отношению к переменной y называется независимой переменной, или аргументом. Тот факт, что y есть функция переменной x, записывают так: $y = f(x)$. Если одновременно рассматривают несколько функций, то пишут:

$$y = f_1(x), y = f_2(x), y = f_3(x), \ldots$$

или

$$y = f(x), y = \varphi(x), y = g(x), \ldots .$$

Функцию можно задать тремя основными способами.

1. Табличный способ. Он состоит в том, что для некоторых «табличных» значений $x: x_1, x_2, \ldots, x_n$ задаются соответствующие значения $y: y_1, y_2, \ldots, y_n$, т.е. задаётся таблица

x	x_1	x_2	…	x_n
$y=f(x)$	y_1	y_2	…	y_n

Табличное задание функции удобно при практических вычислениях, но непригодно для теоретических исследований, а поэтому в математическом анализе используется очень редко.

2. Графическое задание. График функции является как бы её «портретом». Поэтому графический способ задания функции наиболее нагляден.

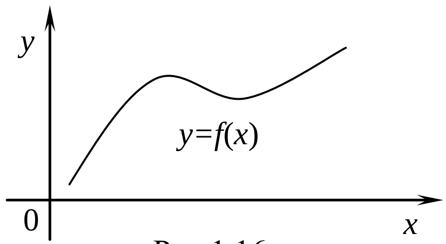


Рис.1.16

3. Аналитический способ. Если функция $y = f(x)$ задана уравнением, связывающим x и y и, следовательно, показывающим, какие действия надо проделать над переменной x, чтобы получить y, то говорят, что функция $y = f(x)$ зада-

на аналитически.

По аналитическому заданию функции делятся на явные и неявные. Если связывающее величины x и y уравнение разрешено относительно y, то функция называется заданной явно, или просто явной. Например,

$$y = \frac{x^3 + \lg x}{3 - \sin x}.$$

Если же упомянутое уравнение не разрешено относительно y, то функцию называют заданной неявно.

В ряде случаев от неявного задания можно перейти к явному. Например из уравнения

$$x10^y - \operatorname{tg} x = 1$$

легко находим

$$y = \lg \frac{1 + \operatorname{tg} x}{x}.$$

Однако, если функция задана, например, уравнением

$$\sin(x + y) = 2^x + \lg y,$$

то переход к явному заданию в точном виде невозможен.

Аналитический способ задания функции является основным в математическом анализе, а графический – вспомогательным, используемым только для наглядных иллюстраций.

8. Область определения функции

Возьмём функцию $y = f(x)$. Символ $f(a)$ означает, что в этой функции мы положили $x = a$. Число $f(a)$ есть значение функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, рис. 1.17.

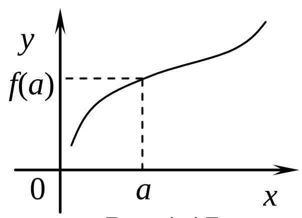


Рис.1.17

Пример 1.9. Пусть $y = \sqrt{2 + x}$. Тогда

$$f(1) = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}.$$

В то же время

$$f(-4) = \sqrt{2 - 4} = \sqrt{-2},$$

т. е. $f(-4)$ не существует (если ограничиться рассмотрением только вещественных чисел).

Совокупность всех значений x, при которых функция $y = f(x)$ имеет смысл, называется областью определения этой функции. Будем обозначать её D_y или D_f.

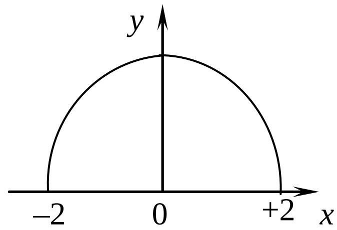


Рис.1.18

Пример 1.10. Пусть $y = \sqrt{4 - x^2}$. Тогда

$$D_y = \left\{ x \middle| 4 - x^2 \geq 0 \right\} = \left\{ x \middle| x^2 \leq 4 \right\},$$

т. е. областью определения функции является отрезок $[-2,2]$, рис. 1.18.

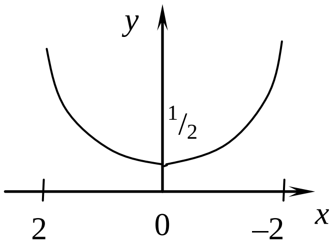


Рис.1.19

Пример 1.11. Пусть $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$. Здесь

$$D_y = \left\{ x \middle| 4 - x^2 > 0 \right\} = \left\{ x \middle| x^2 < 4 \right\} = (-2,2),$$

т.е. в данном случае множество D_y есть такой же промежуток, как и в примере 1.10, но не содержащий концов, рис. 1.19.

Пример 1.12. Пусть $y = \arcsin(\lg x)$.Тогда

$$D_y = \left\{ x \middle| -1 \leq \lg x \leq 1 \right\} = \left\{ x \middle| \frac{1}{10} \leq x \leq 10 \right\} = [0{,}1;10],$$

рис. 1.20.

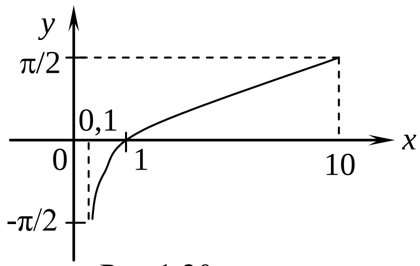


Рис.1.20

Примечание. Легко видеть, что в общем случае область определения функции геометрически есть проекция графика функции на ось $0x$.

9. Чётные и нечётные функции. Периодические функции

Функция $f(x)$ называется чётной, если для всех $x \in D_f$ будет

$$f(-x) = f(x).$$

Примерами могут служить функции $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = 2^x + 2^{-x}$ и др. Очевидно, график чётной функции симметричен относительно оси Oy, рис. 1.21.

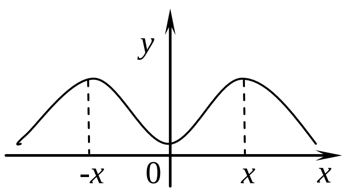


Рис.1.21

Функция $f(x)$ называется нечётной, если

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D_f.$$

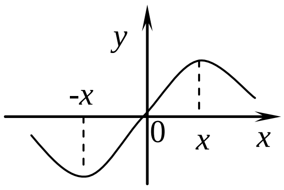


Рис.1.22

Например, $y = x^3 - 2x$, $y = \sin x$, $y = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$.

Легко видеть, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат, рис. 1.22.

Если при замене x на $-x$ функция $f(x)$ меняет свою величину (независимо от перемены или же сохранения знака), то эта функция не является ни чётной, ни нечётной.

Очевидны следующие утверждения.

1. Сумма чётных функций есть чётная функция.
2. Сумма нечётных функций есть нечётная функция.

3. Сумма чётной и нечётной функций есть ни чётная, ни нечётная функция.
4. Произведение чётных функций есть чётная функция.
5. Произведение двух нечётных функций есть чётная функция.
6. Произведение чётной и нечётной функций есть нечётная функция.

Функция $f(x)$ называется периодической с периодом a, если

$$f(x+a)=f(x),\ \forall x\in D_f,$$ рис. 1.23.

Если a – период функции $f(x)$, то $2a, 3a, 4a, \ldots$ также есть её период.

Наименьший из периодов функции называется её основным периодом. Например, основной период функции $2^{\sin 3x}$ равен $\frac{2\pi}{3}$.

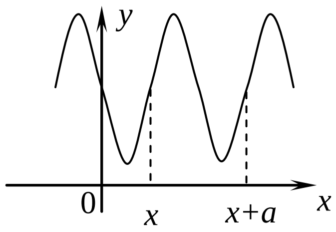


Рис.1.23

10. Однозначные и многозначные функции

Функция $y=f(x)$ называется однозначной, если каждому $x\in D_y$ отвечает одно и только одно значение y. Примером может служить функция $y=\sqrt[3]{1+\lg^2 x}$.

Если же одному значению x отвечает несколько значений y, то функцию $y=f(x)$ называют многозначной.

Многозначность функции чаще всего бывает связана с неявным способом их задания.

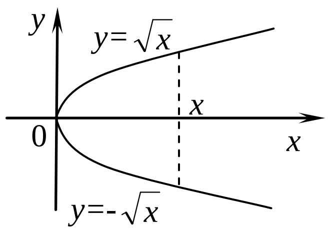


Рис.1.24

Пример 1.13. Возьмём уравнение $y^2-x=0$. Имеем из него $y=\pm\sqrt{x}$. Эта функция – двузначная. Она распадается на две однозначные: $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$, рис. 1.24.

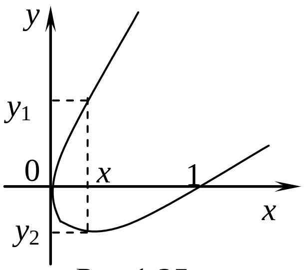


Рис.1.25

Пример 1.14. Пусть имеется уравнение $(y-x)^2=x$. Имеем из него

$$y-x=\pm\sqrt{x} \quad \text{или} \quad y=x\pm\sqrt{x}.$$

Эта функция – также двузначная, рис. 1.25.

11. Обратная функция

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Меняя x, мы будем менять и y. Обратно, всякое изменение y вызвано изменением переменной x, т. е., меняя y, мы изменяем и x. Следовательно, соотношение $y=f(x)$ определяет не только y как функцию от x, но и, наоборот, величину x как функцию величины y. Иными словами, из равенства $y = f(x)$ следует, что, вообще говоря, $x = \varphi(y)$. Функция $x = \varphi(y)$ называется обратной функции $y = f(x)$.

Например, для функции $y = x^3$ обратной является функция $x = \sqrt[3]{y}$, рис. 1.26.

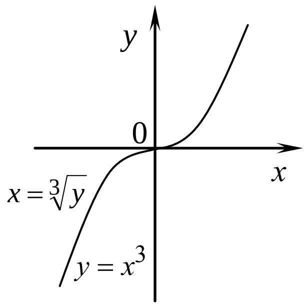


Рис.1.26

Очевидно, что функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ имеют один и тот же график, т. к. оба равенства описывают одно и то же соотношение между x и y.

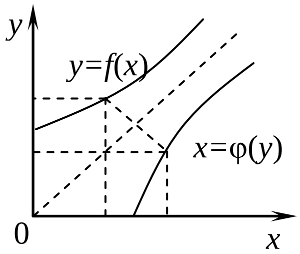


Рис.1.27

Возьмём теперь функцию $x = \varphi(y)$, обратную функции $y = f(x)$, и снова обозначим аргумент через x, а функцию – через y. Получим функцию $y = \varphi(x)$, которую также называют обратной по отношению к функции $y = f(x)$. Однако графики этих функций теперь уже не совпадают, а представляют собой две различные линии, симметричные, как легко видеть, относительно прямой $y = x$, рис. 1.27, рис. 1.29.

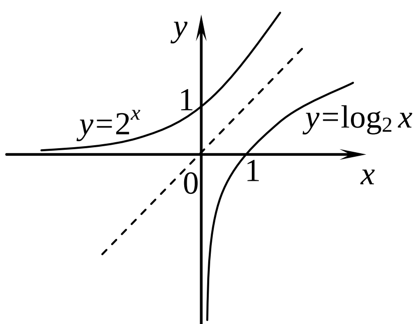


Рис.1.28

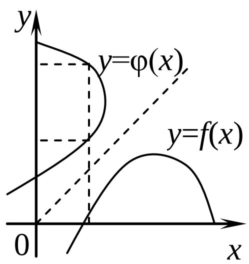


Рис.1.29

Пример 1.15. Пусть $y = 2^x$.

Тогда обратная функция

$$y = \log_2 x, \text{ рис 1.28.}$$

Если функция $y = f(x)$ – монотонная, то обратная ей функция $y = \varphi(x)$ – однозначная. Если же функция $y = f(x)$ – не монотонная, то обратная ей функция $y = \varphi(x)$ – многозначная, рис. 1.29. Например, функция $y = \mathrm{Arcsin}\, x$, обратная немонотонной функции $y = \sin x$, является «бесконечно много»-значной, рис. 1.30, 1.31.

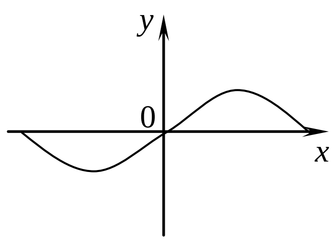


Рис.1.30

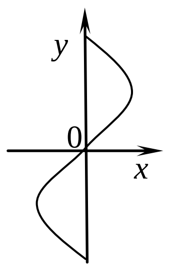


Рис.1.31

Примечание. Понятие обратной функции и связанные с ним сведения мы затронули сейчас на элементарном уровне соображений наглядности. Мы вернёмся к рассмотрению этого вопроса позже, в одном из последующих разделов.

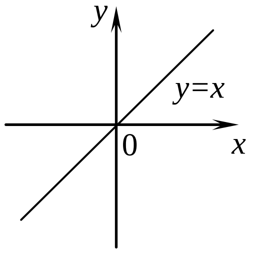
12. Основные элементарные функции

1.<u>Степенная функция</u>. Эта функция записывается так

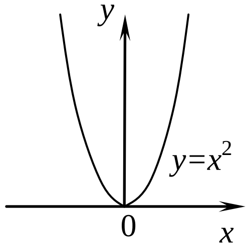
$$y = x^a,$$

где a – любое вещественное число.

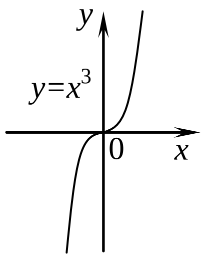
График степенной функции существенным образом зависит от показателя степени a. Укажем некоторые характерные случаи.



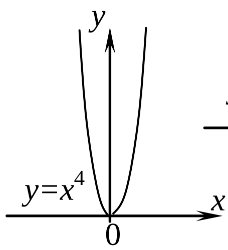
a=1
Рис.1.32



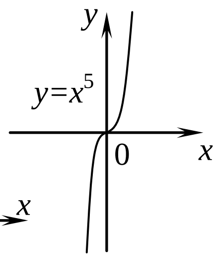
a=2
Рис.1.33



a=3
Рис.1.34

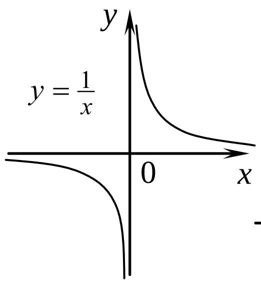


a=4
Рис.1.35

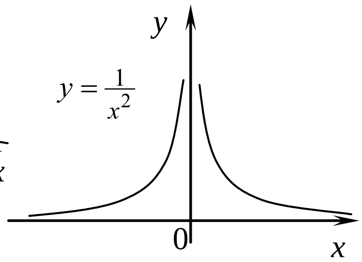


a=5
Рис.1.36

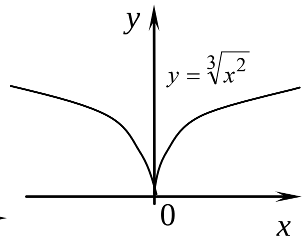
Заметим, что кривую $y = x^3$ называют кубической параболой, кри-



a=-1
Рис.1.37



a=-2
Рис.1.38



$a = \dfrac{2}{3}$
Рис.1.39

вую $y = x^4$ – параболой 4-ой степени и т. д.

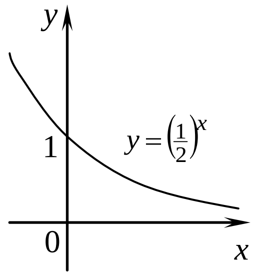
Линию $y = \sqrt[3]{x^2}$ называют полукубической параболой.

Определение функции $y = x^a$ для случая произвольного вещественного a будет дано ниже.

2. <u>Показательная функция</u>. Эта функция имеет вид $y = a^x$, где $a > 0$ и притом $a \neq 1$. Общий вид графика функции известен из школьного курса математики, рис. 1.40–1.42.

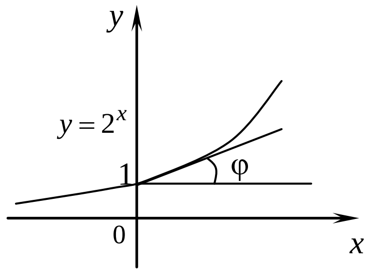
Угол φ между осью Ox и касательной к линии $y = a^x$ в точке $(0,1)$ тем больше, чем больше основание a. При $a = 2$ он равен, как можно подсчитать, $34^\circ 44'$, а при $a = 3$ – $47^\circ 42'$. Поэтому естественно предположить, что существует число a, такое, что $2 < a < 3$, которому соответствует угол $\varphi = 45^\circ$.

Такое число называется числом e; оно является иррациональным и равно 2,71828…. Функцию $y = e^x$ называют экспоненциальной функцией; она является наиболее используемой показательной функцией в математическом анализе.



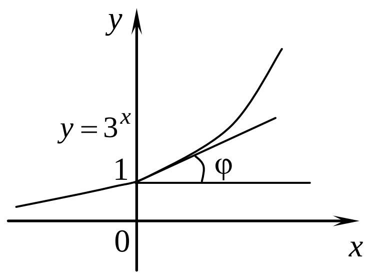
$a = 1/2$

Рис.1.40



$a=2$

Рис.1.41



$a=3$

Рис.1.42

Примечание. Использованное нами введение числа e на основании геометрических (угловых) соображений не является стандартным. Позже мы познакомимся и с общепринятым определением числа e и убедимся в равносильности обоих определений.

3. Логарифмическая функция. Функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ обратна по отношению к функции $y = a^x$. На практике чаще всего полагают $a = 10$ и рассматривают десятичные логарифмы $y = \lg x$. В математическом же анализе обычно полагают $a = e$. Логарифмы с основанием e называются натуральными логарифмами и обозначаются символом $\ln$, рис. 1.44.

Очевидно, функция $y = \ln x$ обратна $y = e^x$.

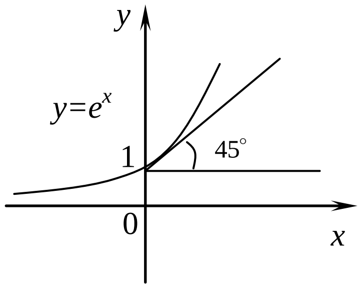


Рис.1.43

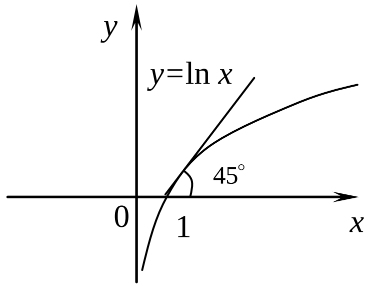


Рис.1.44

Получим формулы перехода от десятичных логарифмов к натуральным и наоборот. Для этого основное логарифмическое тождество

$$x = 10^{\lg x}$$

прологарифмируем по основанию e. Получим

$$\ln x = \lg x \cdot \ln 10,$$

а так как $\ln 10 = 2{,}30\ldots$, то

$$\ln x = 2{,}30\ldots \lg x.$$

Число $M = 2{,}30\ldots$ – есть модуль перехода от десятичных логарифмов к натуральным.

Обратно

$$\lg x = \frac{1}{2{,}30\ldots} \ln x,$$

т. е.

$$\lg x = 0{,}43\ldots \ln x.$$

Тот факт, что натуральные логарифмы примерно в 2,3 раза больше (по модулю) десятичных, легко объясняется, поскольку число e значительно меньше числа 10.

4. <u>Тригонометрические функции</u>. К ним относятся функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Эти функции имеют периоды соответственно 2π и π. Их графики хорошо известны из школьного курса тригонометрии.

5. <u>Обратные тригонометрические функции</u>. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис.1.45-1.48) есть главные ветви многозначных функций $y = \operatorname{Arcsin} x$, $y = \operatorname{Arccos} x$, $y = \operatorname{Arctg} x$ и $y = \operatorname{Arcctg} x$, обратные функциям $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

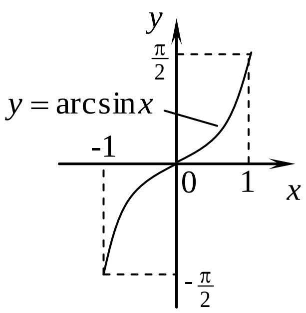


Рис.1.45

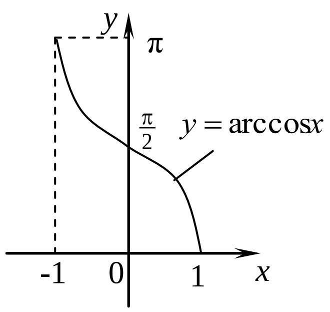


Рис.1.46

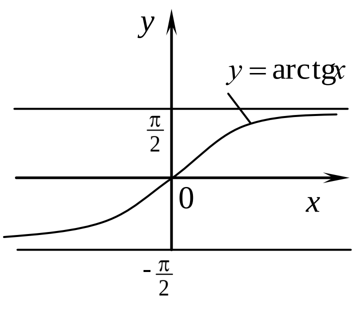


Рис.1.47

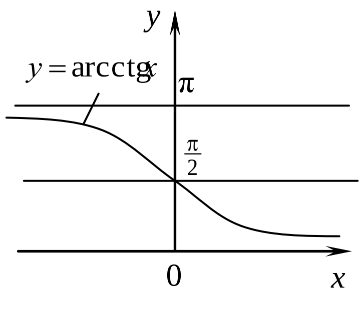


Рис.1.48

6. <u>Гиперболические функции</u>. Функция $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим косинусом (величины x) и обозначается $y = \operatorname{ch} x$. Функция $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим синусом и обозначается $y = \operatorname{sh} x$, рис. 1.49, 1.50. По этим двум функциям вводят гиперболические

тангенс и котангенс

$$\mathrm{th}\,x=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \mathrm{cth}\,x=\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Очевидно, что функция $y=\mathrm{sh}\,x$ – нечётная, а функция $y=\mathrm{ch}\,x$ – чётная. Линию $y=\mathrm{ch}\,x$ называют цепной линией, так как именно такую форму принимает линия провисания гибкой нерастяжимой нити с закреплёнными концами.

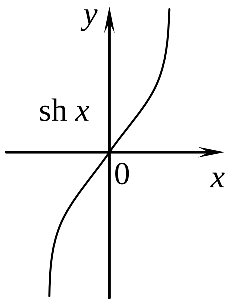


Рис.1.49

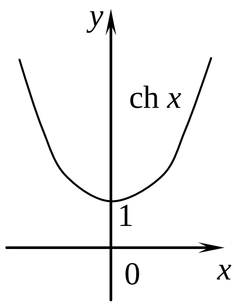


Рис.1.50

Далее, легко видеть, что $\mathrm{sh}\,0=0$, $\mathrm{ch}\,0=1$.

В то же время очевидно, что гиперболические функции, в отличие от тригонометрических, не обладают периодичностью.

Из формул-определений

$$\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

имеем

$$\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x=e^x,\quad \mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x=e^{-x}.$$

Поэтому

$$\mathrm{sh}(x_1+x_2)=\frac{e^{x_1+x_2}-e^{-(x_1+x_2)}}{2}=\frac{e^{x_1}e^{x_2}-e^{-x_1}e^{-x_2}}{2}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[(\mathrm{ch}\,x_1+\mathrm{sh}\,x_1)(\mathrm{ch}\,x_2+\mathrm{sh}\,x_2)-(\mathrm{ch}\,x_1-\mathrm{sh}\,x_1)(\mathrm{ch}\,x_2-\mathrm{sh}\,x_2)\right]=$$
$$=\tfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\,x_1\mathrm{ch}\,x_2+\mathrm{ch}\,x_1\mathrm{sh}\,x_2+\mathrm{sh}\,x_1\mathrm{ch}\,x_2+\mathrm{sh}\,x_1\mathrm{sh}\,x_2-$$
$$-\mathrm{ch}\,x_1\mathrm{ch}\,x_2+\mathrm{ch}\,x_1\mathrm{sh}\,x_2+\mathrm{sh}\,x_1\mathrm{ch}\,x_2-\mathrm{sh}\,x_1\mathrm{sh}\,x_2),$$

т. е.

$$\mathrm{sh}(x_1+x_2)=\mathrm{sh}\,x_1\mathrm{ch}\,x_2+\mathrm{ch}\,x_1\mathrm{sh}\,x_2.$$

Точно так же проверяется, что

$$\mathrm{ch}(x_1+x_2)=\mathrm{ch}\,x_1\mathrm{ch}\,x_2+\mathrm{sh}\,x_1\mathrm{sh}\,x_2.$$

Заменяя x_2 в обеих формулах на $-x_2$, получим

$$\mathrm{sh}(x_1-x_2)=\mathrm{sh}\,x_1\mathrm{ch}\,x_2-\mathrm{ch}\,x_1\mathrm{sh}\,x_2,$$
$$\mathrm{ch}(x_1-x_2)=\mathrm{ch}\,x_1\mathrm{ch}\,x_2-\mathrm{sh}\,x_1\mathrm{sh}\,x_2.$$

Полагая $x_1=x_2=x$, из первой формулы получим

$$\mathrm{sh}\,2x=2\mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,x,$$

из второй –

$$\mathrm{ch}\,2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x,$$

а из последней –

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \qquad (1.4)$$

Эта формула есть аналог известной тригонометрической формулы

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Левую часть последней формулы, как известно, называют тригонометрической единицей; по аналогии с этим левую часть формулы (1.4) называют гиперболической единицей.

Запишем теперь тождества:

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 \tfrac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \tfrac{x}{2},$$

$$1 = \operatorname{ch}^2 \tfrac{x}{2} - \operatorname{sh}^2 \tfrac{x}{2}.$$

Складывая и вычитая их, будем иметь

$$\operatorname{ch} x + 1 = 2\operatorname{ch}^2 \tfrac{x}{2}, \quad \operatorname{ch} x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 \tfrac{x}{2}.$$

Эти формулы будут очень удобны позже при вычислении неопределённых интегралов.

7. Обратные гиперболические функции. Найдём функцию, обратную функции $\operatorname{sh} x$. Если $y = \operatorname{sh} x$, т. е.

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

то отсюда

$$e^x - e^{-x} - 2y = 0,$$

т. е.

$$\left(e^x\right)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

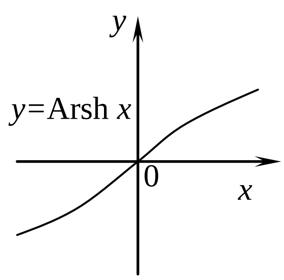


Рис.1.51

Знак «–» следует отбросить, так как e^x не может быть отрицательным. Итак,

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

откуда

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

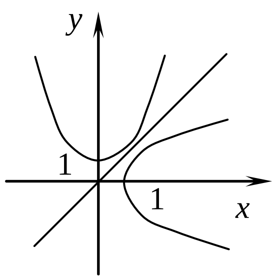


Рис.1.52

Меняя теперь местами x и y, получим, что функцией, обратной функции $\operatorname{sh} x$, является функция $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$. Её называют ареа-синусом величины x и обозначают $\operatorname{Arsh} x$, рис. 1.51.

Точно так же из уравнения $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ получим

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1},$$

т. е.

$$x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Итак, функцией, обратной функции $\operatorname{ch} x$, является функция $\ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$. Она двузначна ввиду немонотонности функции $\operatorname{ch} x$. Беря только верхнюю ветвь, получим функцию

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Она называется ареа-косинусом и обозначается $\operatorname{Arch} x$, рис. 1.52.

13. Сложные функции

Пусть y есть функция некоторой переменной u, которая в свою очередь является функцией переменной x, т.е. пусть

$$y = f(u),\ u = \varphi(x).$$

Тогда

$$y = f[\varphi(x)],$$

или

$$y = F(x).$$

В этом случае y называется сложной функцией переменной x (или функцией от функции), а переменную u называют промежуточным аргументом.

Пример 1.16. Пусть $y = \sin^3 x$. Это можно переписать так

$$y = u^3,\ u = \sin x.$$

Здесь сложная функция есть результат суперпозиции (наложения) двух основных элементарных функций: тригонометрической и целой степенной.

Предположим теперь, что a – иррациональное число. Тогда, поскольку $x = e^{\ln x}$, то, по определению

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

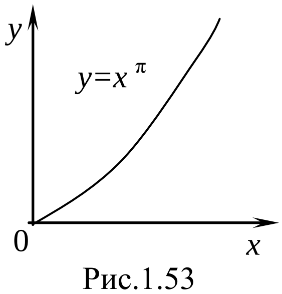


Рис.1.53

Таким образом, в случае произвольного показателя a степенная функция x^a определяется как сложная функция в виде суперпозиции показательной и логарифмической функций. Поскольку выражение $\ln x$ существует лишь для $x>0$, то и функция $y=x^a$ определена, вообще говоря, только при $x>0$. Например, $x^\pi=e^{\pi\ln x}$, рис. 1.53.

Сложная функция может иметь и не один промежуточный аргумент.

Пример 1.17. Пусть $y=\sqrt{\operatorname{arctg} 2^{\operatorname{ch} x}}$. Это значит, что

$$y=\sqrt{u},\ \ u=\operatorname{arctg} v,\ \ v=2^w,\ \ w=\operatorname{ch} x.$$

Итак, здесь имеются 3 промежуточных аргумента: u, v, w. Говорят, что операция взятия функции от функции здесь производится 3 раза.

14. Элементарные функции

Функция называется элементарной, если её можно задать одной формулой вида $y=f(x)$, где выражение $f(x)$ составлено из основных элементарных функций и констант при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Пример 1.18. Функция

$$y=10^{\frac{\sqrt{\operatorname{sh} x}+\ln(1-x)}{\operatorname{tg} 2x-x^3}}$$

– элементарная. Здесь в правой части производится одно сложение, два вычитания, одно умножение и 4 операции взятия функции от функции.

С некоторыми неэлементарными функциями мы познакомимся позже.

Упражнения к главе I

Построить множества:

1. $[-2,1]\setminus\{0\}$;
2. $(0,3)\cup(\{0\}\cup\{3\})$;
3. $[0,2]\cup(1,\infty)$;
4. $[0,2]\setminus(1,\infty)$;
5. $(-\infty,0)\cap(0,\infty)$.

Найти области определения функций:

6. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}}+\arcsin\dfrac{x-2}{4}$;
7. $y=\dfrac{1}{x^2-9}+\lg\left(x-x^3\right)$;
8. $y=\sqrt{3x-x^2}+\lg(-x)$;
9. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}+\lg\dfrac{x+3}{3-x}$;

17. $y=\lg\left(\dfrac{1}{x}-x\right)+\sqrt{1-\lg^2 x}$;
18. $y=\lg\left(4x-x^2\right)+\sqrt{-x}$;
19. $y=\dfrac{1}{\sqrt{10^x-1}}+\sqrt{9x-x^3}$;
20. $y=\lg(\lg x)+\sqrt{9-x^2}$;

10. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}+\arcsin\dfrac{3}{x}$;

11. $y=\sqrt{5^x-1}+\lg\left(4-x^2\right)$;

12. $y=\dfrac{1}{\lg\left(x^2-3x+2\right)}+\arcsin\left(\ln x\right)$;

13. $y=\lg\left(\lg x\right)+\arccos\left(2^{x-2}\right)$;

14. $y=\arccos\dfrac{1}{10^x-1}$;

15. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\lg\left(x^2-3x+3\right)}}+\arcsin\dfrac{3x-5}{2}$;

16. $y=\sqrt{1-2\sin x}+\sqrt{1-\lg\left(x^2-2x+7\right)}$;

21. $y=\lg(1-2\cos x)+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$;

22. $y=\arcsin 10^x+\sqrt{x^3-4x}$;

23. $y=\ln\left(9x-x^3\right)+\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$;

24. $y=\sqrt{9x-x^3}+\lg\left(1-10^{x-2}\right)$;

25. $y=\lg\cos x+\sqrt{5+4x-x^2}$;

26. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}+\lg\dfrac{x+4}{4-x}$;

27. $y=\lg\left(4x-x^3\right)+\arcsin\dfrac{2x-5}{3}$.

Данные функции исследовать на чётность и нечётность:

28. $y=\dfrac{5^x-1}{5^x+1}$;

29. $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{(1-x)^2}$;

30. $y=\dfrac{10^x+1}{x}$;

31. $y=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$;

32. $y=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

33. $y=\left|\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right|$.

Найти функции, обратные функциям:

34. $y=\log_3\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

35. $y=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}-3$;

36. $y=\dfrac{5^x}{1+5^x}$;

37. $y=4\arcsin\sqrt{1-x^3}$;

38. $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$.

Построить графики функций:

39. $y=3^{|x|}$;

40. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$;

41. $y=3^{x^2}$;

42. $y=5^{-x^2}$;

43. $y=\lg|x|$;

44. $y=|\lg x|$;

45. $y=|\lg|x||$;

46. $y=\lg|1-x|$.

II. Предел числовой последовательности

1. Определение предела числовой последовательности

Напомним, что числовой последовательностью называется упорядоченное бесконечное множество чисел

$$\{x_n\} = x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ..., \tag{2.1}$$

причем каждое из чисел (2.1) является функцией своего номера, т.е. $x_n = f(n)$, в связи с чем говорят, что числовая последовательность есть функция целочисленного аргумента. Числа x_1, x_2, x_3... называют членами этой последовательности. Если n – не конкретное, а произвольное (текущее) натуральное число, то выражение $x_n = f(n)$ называют общим членом последовательности.

Пример 2.1. В последовательности

-1, 1, -1, 1, -1, 1, …

общий член равен $(-1)^n$.

Пример 2.2. Для последовательности

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...$$

очевидно, $x_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Еще раз укажем, что последовательность (2.1) есть частный случай упорядоченной дискретной переменной, принимающей значения x_1, x_2, x_3...

Постоянное число a называется пределом числовой последовательности (2.1), если для любого, сколь угодно малого, но фиксированного, числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n \geq N$ будет

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

В этом случае пишут, что

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{2.3}$$

Итак,

$$\left(a = \lim_{n\to\infty} x_n\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \middle| \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right).$$

Равенство (2.3) на основе выражения (2.2) означает геометрически, что, начиная с $n = N+1$, все точки x_n принадлежат ε-окрестности точки $x = a$. Но, поскольку ε можно взять сколь угодно малым, то это значит, что при $n \to \infty$ точки x_n

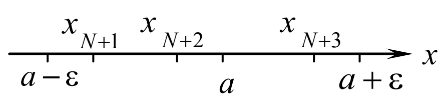


Рис. 2.1

неограниченно сгущаются около точки $x = a$.
Таким образом, любая, сколь угодно малая, окрестность точки a содержит в себе бесконечное множество точек x_n: x_{N+1}, x_{N+2}, $x_{N+3}, ...$, в то время как вне каждой ε-окрестности может находиться лишь конечное число точек x_n: x_1, x_2, ..., x_N, рис. 2.1.

Пример 2.3. Возьмем последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ... = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}.$$

Покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.

Имеем, $|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$.

Следовательно, неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ запишется так:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

откуда

$$n + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

т. е.

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1. \tag{2.4}$$

Взяв, например, $\varepsilon = 0{,}001$, получим $n > 999$, откуда следует, что $N(0{,}001) = 999 + 1 = 1000$. Итак, начиная с $n = 1000$, будет $|x_n - 1| < 0{,}001$. Взяв меньшее ε, получим большее n, начиная с которого будет $|x_n - 1| < \varepsilon$.

Пример 2.4. Пусть $x_n = \frac{4n^2 + 1}{2n^2 - 3}$.

Если n велико, то $x_n \approx \frac{4n^2}{2n^2} = 2$. Следовательно, можно предположить, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$. Докажем, что это так и есть. Имеем

$$|x_n - 2| = \left| \frac{4n^2 + 1}{2n^2 - 3} - 2 \right| = \left| \frac{4n^2 + 1 - 4n^2 + 6}{2n^2 - 3} \right| = \frac{7}{2n^2 - 3}.$$

При достаточно большом n величина $\frac{7}{2n^2 - 3}$ сколь угодно мала, а поэтому для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ будет

$$|x_n - 2| < \varepsilon,$$

откуда и следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$.

Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}001$. Тогда неравенство $|x_n - 2| < \varepsilon$ примет вид

$$\frac{7}{2n^2 - 3} < 0{,}001,$$

откуда

$$2n^2 > 7003,$$

т. е.

$$n^2 > 3501{,}5,$$

или

$$n > \sqrt{3501{,}5}.$$

Но целая часть числа $\sqrt{3501{,}5}$ равна $\left[\sqrt{3501{,}5}\right] = 59$, а значит $N(0{,}001) = 60$, т. е. начиная с $n = 60$, выполняется неравенство $|x_n - 2| < 0{,}001$.

Пример 2.5. Возьмем последовательность

$$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\} = 0,1,0,1,...$$

Очевидно, она не имеет предела, к которому при $n \to \infty$ неограниченно приближались бы числа x_n.

2. Простейшие свойства пределов числовых последовательностей

Любая числовая последовательность не может иметь более одного предела.

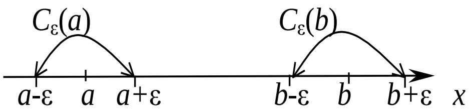


Рис. 2.2

■Пусть $a \neq b$, тогда если бы было $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \wedge \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b\right)$, то это означало бы, что, начиная с некоторого n, $(x_n \in C_\varepsilon(a)) \wedge (x_n \in C_\varepsilon(b))$, а так как $C_\varepsilon(a) \cap C_\varepsilon(b) = \varnothing$, рис. 2.2, то свойство 1 доказано.□

Если для всех n будет $x_n = a$, $(a = const)$, т. е. если

$$\{x_n\} = a, a, a, .., a, ...,$$

то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

■Действительно, в этом случае $|x_n - a| = 0 \forall n$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n |x_n - a| < \varepsilon.□$$

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то она ограничена.

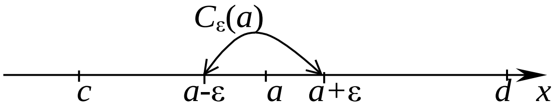


Рис. 2.3

■Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда вне интервала $C_\varepsilon(a)$ находится лишь конечное число точек последовательности: $x_1, x_2, ..., x_N$. Следовательно, существует такой отрезок $[c, d]$, который содержит в себе все точки $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, рис. 2.3 (очевидно можно взять $c = \min\{x_1, x_2, x_3, ..., x_N, a - \varepsilon\}$, $d = \max\{x_1, x_2, x_3, ..., x_N, a + \varepsilon\}$.□

Примечание. Утверждение, обратное свойству 3, неверно, т.е. последовательность может быть ограничена, но не иметь предела. Примером может служить последовательность из примера 2.5, принимающая значения 0, 1, 0, 1, …

Пусть имеется последовательность $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...$. Выберем из нее некоторым образом числа $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...$, причем если в исходной последовательности число x_{n_i} предшествует числу x_{n_k}, то это будет иметь место и в новой последовательности. Последовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ называют подпоследовательностью исходной последовательности.

Пример 2.6. Пусть имеется последовательность

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ... \tag{2.5}$$

Одной из ее подпоследовательностей является, например, последовательность

$$\left\{\frac{1}{2k-1}\right\} = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, ... \tag{2.6}$$

Другая подпоследовательность той же последовательности:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{14}, ..., \ldots \tag{2.7}$$

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a, то и любая ее подпоследовательность имеет предел, также равный a.

■Действительно, если, начиная с некоторого n, будет $x_n \in C_\varepsilon(a)$, то этой окрестности принадлежат и все числа x_{n_k}, следующие после x_n.□

В качестве примера можно указать последовательность (2.5), которая имеет предел, равный нулю, и ее подпоследовательности (2.6) и (2.7) имеют тот же предел.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, и если $x_n \le y_n$, то и $a \le b$.

■Действительно, если бы было $a > b$, то, начиная с некоторого n, было бы $x_n > y_n$, рис. 2.4, что противоречит условию.□

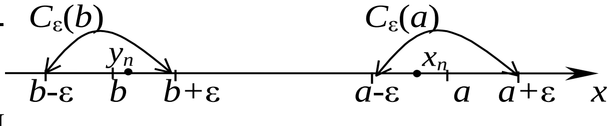


Рис. 2.4

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и при этом $x_n \ge 0 \forall n$, то и $a > 0$, т. е. неотрицательная последовательность не может иметь отрицательного предела. Аналогично, неположительная последовательность не может иметь положительного предела.

Примечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причем $x_n < y_n \; \forall n$, то не обязательно $a < b$, поскольку может быть и $a = b$. Например, при всех n будет $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$, но тем не менее, последовательности

$$\left\{ \frac{1}{(n+1)^2} \right\} = \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$$

и

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \right\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

имеют общий предел, равный нулю.

Если $u_n \le x_n \le v_n \; \forall n$, и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$, то и последовательность $\{x_n\}$ также имеет предел, и он равен a.

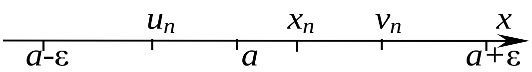


Рис. 2.5

■Действительно, если, начиная с некоторого n, будет $u_n \in C_\varepsilon(a)$ и $v_n \in C_\varepsilon(a)$, то начиная с этого n и $x_n \in C_\varepsilon(a)$, рис. 2.5, а это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.□

Свойство 6 иногда полушутя называют теоремой о двух милиционерах.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, и если $u_n \le x_n \le a$ или $u_n \ge x_n \ge a \; \forall n$ то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ также существует и равен a.

Примечание. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a, то эта последовательность называется сходящейся к числу a. Очевидно, на сходимость последовательности к данному пределу не влияет добавление или отбрасывание любого конечного числа ее членов. В связи с этим в свойствах 2, 5 и 6 после слов «для всех» можно сделать оговорку «начиная с некоторого».

3. Бесконечно большие последовательности

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого, сколь угодно большого, фиксированного числа $M > 0$, начиная с некоторого n, будет $|x_n| > M$. Тот факт, что последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, записывается так: $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, или, условно,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Из определения бесконечно большой последовательности следует, что если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то таковой является и последовательность $\{-x_n\}$.

Пример 2.7. Пусть $x_n = \sqrt{n-1}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Зададим произвольное $M > 0$. Тогда соотношение $|x_n| > M$ означает, что $\sqrt{n-1} > M$, откуда $n > M^2 + 1$. Поскольку при любом $M = const$, начиная с некоторого n, будет $n > M^2 + 1$, то требуемый факт доказан.

Если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ и если, начиная с некоторого n, будет $x_n > 0$, то пишут, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Аналогично определяется равенство

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Пример 2.8. Пусть $x_n = \sqrt{n-1}$. Очевидно, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Пример 2.9. Пусть $x_n = (-1)^n n^2$, т.е. пусть

$$\{x_n\} = -1, 4, -9, 16, -25, \ldots$$

Очевидно, здесь не будет $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, а можно лишь писать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Легко устанавливаются следующие свойства.

1. Сумма бесконечно большой и ограниченной последовательностей есть бесконечно большая последовательность.
2. Сумма бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность того же знака.
3. Произведение бесконечно большой последовательности и последовательности, не обращающейся в нуль и не стремящейся к нулю, есть бесконечно большая последовательность.

Далее, легко видеть, что бесконечно большая последовательность является также и неограниченной. Обратное утверждение неверно, т.е. неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой. Таковой является, например, последовательность

$$1, 0, -2, 0, 3, 0, -4, 0, 5, \ldots$$

В данном случае, какое бы большое $M > 0$ мы не взяли, при одних n будет $|x_n| > M$, но уже для следующего значения x_{n+1} будет $x_{n+1} = 0$, а значит $|x_{n+1}| < M$.

4. Бесконечно малые последовательности и их свойства

Последовательность $\{\alpha_n\} = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, т. е. если для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n выполняется неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon.$$

Иными словами, последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если, начиная с некоторого своего значения, она становится и при дальнейшем изменении остается меньшей по модулю любого, сколь угодно малого, наперед заданного положительного числа.

Пример 2.10. Пусть $\alpha_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}$, т. е. пусть

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = -\frac{1}{4}, \alpha_3 = \frac{1}{8}, \alpha_4 = -\frac{1}{16}, \ldots$$

Взяв достаточно большое n, мы сделаем величину $|\alpha_n|$ сколь угодно малой, так что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Положим $\varepsilon = 0{,}001$ и решим неравенство $|\alpha_n| < 0{,}001$. Получим

$$\frac{1}{2^n} < 0{,}001,$$

т. е.

$$2^n > 1000\ ,$$

а значит $n > 10$. Итак, начиная с $n = 10$, будет $|\alpha_n| < 0{,}001$.

Из определения бесконечно малой последовательности следует, что если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то и $\{-\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Бесконечно малые последовательности обладают следующими свойствами.

Сумма бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

■Возьмем сначала две бесконечно малые последовательности: $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, начиная с некоторого n, будет $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, а значит, начиная с этого n, выполняется неравенство

$$|\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а так как $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|$, то тем более $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$, откуда следует, что $\{\alpha_n + \beta_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

В случае трех бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ мы полагаем $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n$ и применяем только что доказанное утверждение. Таким образом, очевидно, что свойство 1 верно для любого конечного числа слагаемых.□

Примечание. Сумма бесконечно большого числа бесконечно малых последовательностей может и не быть бесконечно малой последовательностью. Например,

$$\underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0; \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = 1 = const;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty.$$

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

■Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность. Тогда существует такое $M > 0$, что $|x_n| < M \forall n$. Далее, пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Тогда, начиная с некоторого n, будет $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Поэтому, начиная с этого n, выполняется неравенство

$$|\alpha_n x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

а значит $\{\alpha_n x_n\}$ – бесконечно малая последовательность.□

Примечание. Произведение бесконечно малой последовательности на неограниченную может и не быть бесконечно малой последовательностью. Например,

$$\frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0; \quad \frac{1}{n} \cdot n = 1 = const; \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty \quad .$$

Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то $\{\alpha_n\} = \left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность.

■Зададим некоторое число $M > 0$. Тогда, начиная с некоторого n, будет $|x_n| > M$, а значит $|\alpha_n| = \dfrac{1}{|x_n|} < \dfrac{1}{M}$. Поскольку M можно взять сколь угодно большим, то величина $|\alpha_n|$ может быть сделана сколь угодно малой.□

Совершенно аналогично можно доказать следующее свойство.

Если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, и при этом $\alpha_n \neq 0$ ни при одном n, то $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ – бесконечно большая последовательность.

Понятие бесконечно малой последовательности тесно связано с понятием предела. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда из (2.2) следует, что последовательность $\{x_n - a\}$– бесконечно малая, и, наоборот, если $\{x_n - a\}$– бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Таким образом, для того чтобы число a было пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы их разность $\{x_n - a\}$ была бесконечно малой последовательностью. Иными словами, всякая числовая последовательность, имеющая предел, отличается от него на бесконечно малую величину, т. е. если $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{2.8}$$

где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

5. Арифметические свойства пределов числовых последовательностей

Теорема 2.1. Предел суммы последовательностей, имеющих пределы, равен сумме этих пределов.

■Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда, на основании (2.8),

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Поэтому

$$x_n + y_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n). \tag{2.9}$$

На основании свойства 1, последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – бесконечно малая. Поэтому из (2.9) следует, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ отличается от числа $a+b$ на бесконечно малую последовательность, а это и значит, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n. \square$$

Легко видеть, что теорема 2.1 верна для любого конечного числа слагаемых.

Теорема 2.2. Предел произведения последовательностей, имеющих пределы, равен произведению этих пределов.

■Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

$$x_n y_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + (\alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n).$$

Поскольку константа есть частный случай ограниченной последовательности, то $\{\alpha_n b\}$ и $\{a\beta_n\}$ есть бесконечно малые последовательности. Бесконечно малая последовательность тем более является ограниченной, так что и $\{\alpha_n\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Но тогда и $\{\alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Итак, величина $x_n y_n$ отличается от числа ab на бесконечно малую величину, а значит

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \square$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела числовой последовательности.

■Действительно, пусть $c = const$. Тогда, по теореме 2.2,

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$$

(здесь мы использовали свойство 2 пределов числовых последовательностей).□

Теорема 2.3. Предел частного двух последовательностей, имеющих пределы, равен частному этих пределов, если только предел знаменателя отличен от нуля.

■Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причем $b \neq 0$. Тогда

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}.$$

Величина $b\alpha_n - a\beta_n$ очевидно есть бесконечно малая. Далее, поскольку $b \neq 0$, то величина $b+\beta_n$ не может быть сколь угодно близка к нулю, так что последовательность $\left\{\dfrac{1}{b(b+\beta_n)}\right\}$ ограничена. Но тогда величина $(b\alpha_n - a\beta_n)\dfrac{1}{b(b+\beta_n)}$ – бесконечно малая, т. е. величина $\dfrac{x_n}{y_n}$ отличается от числа $\dfrac{a}{b}$ на бесконечно малую величину. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \square$$

Примечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, то, очевидно,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\infty$. Случай же, когда $\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\right)\wedge\left(\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0\right)$, будет рассмотрен ниже.

6. Лемма о стягивающихся отрезках

Система (1.3) вложенных отрезков называется системой стягивающихся отрезков, если при $n\to\infty$ длина отрезка $[a_n,b_n]$ бесконечно мала, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

Лемма 2.1. Если (1.3) – система стягивающихся отрезков, то существует одно и только одно число, принадлежащее всем отрезкам этой системы.

■Тот факт, что хотя бы одно принадлежащее всем отрезкам системы число существует, вытекает из свойства 5 множества вещественных чисел, т. е. из аксиомы непрерывности числовой оси. Докажем, что это число – единственное.

Предположим, что существует два таких числа x и y, что

$$a_n\le x\le b_n,\ a_n\le y\le b_n\ \forall n.$$

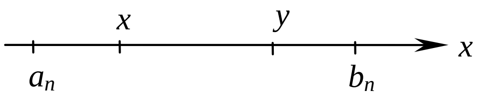


Рис. 2.6

Тогда $|x-y|\le b_n-a_n$, рис. 2.6. Поскольку $x\ne y$, то существует такое число $h>0$, что $|x-y|>h$. Но тогда тем более $b_n-a_n>h\ \forall n$, а это противоречит тому, что, по условию, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.□

7. Точная верхняя и нижняя грани числовых множеств

Пусть E – некоторое множество чисел x. Число M называется точной верхней гранью этого множества, если:

а) $x\le M\ \forall x\in E$,

б) для каждого числа $M_1<M$ найдется по крайней мере одно число $x\in E$, такое, что $M_1<x\le M$, рис. 2.7.

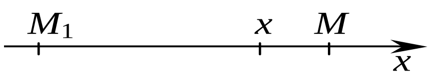


Рис. 2.7

Условие а) означает, что множество E ограничено сверху числом M, а из условия б) следует, что число M является наименьшим из чисел, обладающих этим свойством. Очевидно, что M геометрически означает абсциссу самой правой точки множества E.

Пример 2.11. Пусть множество E состоит из конечного числа точек

$x_1, x_2, \ldots x_m$. Тогда, очевидно $M = \max\{x_1, x_2, \ldots x_m\}$.

Пример 2.12. Пусть $E = [a, b]$. В этом случае $M = b$, а значит $M \in E$.

Пример 2.13. Пусть $E = (a, b)$. Тогда снова $M = b$, но теперь уже $M \notin E$.

Эти примеры показывают, что само число M может как принадлежать, так и не принадлежать множеству E.

Точная верхняя грань числового множества E обозначается $\sup E$. Если множество не ограничено сверху, то пишут, что $\sup E = +\infty$.

Теорема 2.4. Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань, являющуюся конечным числом.

■Пусть E – непустое ограниченное сверху множество; тогда существует, по крайней мере, один элемент $a \in E$, и имеется такое число b, что для всех $x \in E$ будет $x \le b$ (при этом вовсе не обязательно, что $b \in E$). Отрезок $[a, b]$ содержит, по крайней мере, одну точку множества E (например, точку $x = a$). Разделим этот отрезок пополам и рассмотрим два отрезка $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Если правый отрезок содержит хотя бы одну точку множества E, то мы обозначаем его $[a_1, b_1]$, а левый отрезок отбрасываем (рис. 2.8). В противном случае (рис. 2.9) левый отрезок содержит по крайней мере одну точку множества E, и мы его обозначим $[a_1, b_1]$, а правую половину исходного отрезка $[a, b]$ выбрасываем из дальнейшего рассмотрения. Очевидно, в обоих случаях все множество E лежит левее точки b_1.

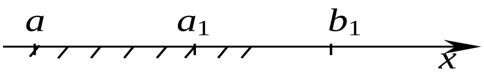


Рис. 2.8

От отрезка $[a_1, b_1]$ точно так же переходим к отрезку $[a_2, b_2]$ и т. д. На n-ом шаге отрезок $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ делим пополам, и, если правая его половина содержит хотя бы одну точку множества E, то обозначаем ее $[a_n, b_n]$ (а левую половину отбрасываем), а если нет, то в качестве $[a_n, b_n]$ берем левую половину, а правую половину, как не содержащую точек множества E, отбрасываем и т.д.

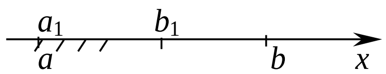


Рис. 2.9

В результате этого процесса получим систему вложенных отрезков $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$,..., $[a_n, b_n]$... При этом для всех n множество E полностью расположено левее точки b_n, а отрезок $[a_n, b_n]$ содержит по крайней мере одну точку множества E. Кроме того, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, а значит $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, т.е. получена система стягивающихся отрезков. На основании леммы 2.1 о стягивающихся отрезках, существует, и притом единственное, число $x = M$,

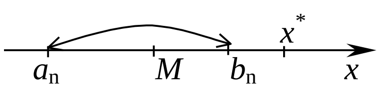


Рис. 2.10

принадлежащее всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Докажем, что $M = \sup E$.

Покажем сначала, что для любого $x \in E$ будет $x \le M$. Предположим противное, т. е. пусть существует такое $x^* \in E$, что $x^* > M$ (рис. 2.10). Поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$, то, начиная с некоторого n, будет $b_n < x^*$, чего не может быть, поскольку все точки лежат левее точки b_n. Возьмем теперь некоторое $\varepsilon > 0$ Начиная с некоторого n будет $b_n - a_n < \varepsilon$, а значит $a_n > M - \varepsilon$. Но отрезок $[a_n, b_n]$ содержит по крайней мере одну точку $x \in E$, причем, как уже доказано, $x \le M$, рис. 2.11.

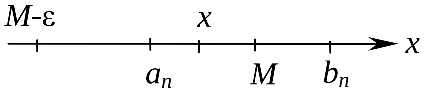


Рис. 2.11

Следовательно,

$$M - x \le b_n - a_n < \varepsilon,$$

откуда

$$x > M - \varepsilon.$$

Таким образом, для любого числа $M_1 = M - \varepsilon$ существует такое число $x \in E$, что $x > M_1$. Отсюда и следует, что $M = \sup E$.□

Теорема 2.5. Любое числовое множество имеет единственную точную верхнюю грань.

Заметим, что в этой теореме множество E может и не быть ограниченным сверху; в противном случае $\sup E = +\infty$.

■Предположим, что множество E имеет две различные точные верхние грани M и M' (для определенности будем считать, что $M < M'$), рис. 2.12. Поскольку $M' = \sup E$, то существует такое $x \in E$, что $M < x \le M'$, а это противоречит тому, что $M = \sup E$. Тем самым теорема доказана.□

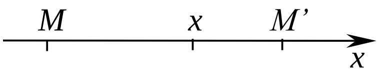


Рис. 2.12

Число m называется точной нижней гранью множества E, если:

а) $x \ge m \; \forall x \in E$,

б) для каждого числа $m' > m$ найдется по крайней мере одно число $x \in E$, что $x < m'$, рис. 2.13.

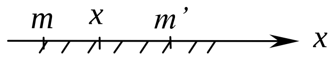


Рис. 2.13

Точная нижняя грань множества E обозначается $\inf E$. Если множество E не ограничено снизу, то пишут, что $\inf E = -\infty$.

Теорема 2.6. Любое непустое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань, являющуюся конечным числом.

Теорема 2.7. Любое числовое множество имеет единственную точную нижнюю грань.

Теоремы 2.6 и 2.7 доказываются совершенно аналогично теоремам 2.4 и 2.5.

8. Предел монотонной последовательности

Теорема 2.8. Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно не убывает и ограничена сверху некоторым числом Q, то она имеет предел, и этот предел не превосходит числа Q.

■Пусть $x_1, x_2, ... x_n, ...$ – члены последовательности. Тогда, по условию

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_n \le ... \le Q.$$

Поскольку последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то, на основании теоремы 2.4, существует конечное число $M = \sup\{x_n\}$.□

Докажем, что $M = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Для этого зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По определению точной верхней грани (часть а) определения) для всех n будет

$$x_n \le M,$$

а значит

$$\forall n, \forall \varepsilon > 0, x_n < M + \varepsilon. \qquad (2.10)$$

Далее, на основании части б) определения точной верхней грани, хотя бы при одном n будет

$$M - \varepsilon < x_n,$$

а так как числа x_n не убывают при $n \to \infty$, то и для всех последующих n будет

$$M - \varepsilon < x_n. \qquad (2.11)$$

Из неравенств (2.10) и (2.11) следует, что, начиная с некоторого n будет $M - \varepsilon < x_n < M + \varepsilon$, т.е. $x_n \in C_\varepsilon(M)$, откуда и следует, что $M = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тот факт, что $M \le Q$, очевиден, так как если бы было $M > Q$, то, начиная с некоторого n, было бы и $x_n > Q$, что противоречит условию.□

В дополнение к доказанной теореме покажем, что если последовательность монотонно не убывает и не ограничена сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

■Действительно, пусть $M > 0$ – произвольное число. В силу того, что величина x_n не ограничена сверху, при некотором n будет $x_n > M$, а так как числа x_n не убывают с ростом n, то и при всех последующих n будет $x_n > M$, т.е., начиная с некоторого n, будет $x_n > M \ \forall n$, откуда и следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty. \square$$

Теорема 2.9. Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно не возрастает и ограничена снизу некоторым числом q, то она имеет предел, и этот предел не меньше числа q.

Эта теорема доказывается совершенно аналогично теореме 2.8.

Пример 2.14. Пусть

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4},\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \ldots$$

Очевидно, что для всех n будет $x_n < 1$, и что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. На основании теоремы 2.8, последовательность $\{x_n\}$ имеет предел и этот предел не превосходит числа 1, рис. 2.14. Легко проверить, что в данном случае предел равен именно 1. Действительно

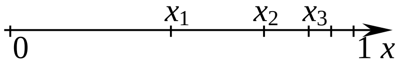


Рис. 2.14

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Если $n \to \infty$, то $\dfrac{1}{2^n} \to 0$, а значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Пример 2.15. Рассмотрим последовательность

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1 + \frac{1}{2!},\ x_3 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, \ldots, x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \ldots$$

Очевидно, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. В то же время

$$x_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} <$$

$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Из теоремы 2.8. следует, что существует число $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и при этом $a < 2$.

Позже мы увидим, что $a = e - 1 = 1{,}718\ldots$.

9. Решение характерных примеров на признаки существования пределов числовой последовательности

Пример 2.16. Пусть $x_n = \dfrac{n}{2^n}$.

Тогда

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}},$$

откуда

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n},$$

а значит

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2n} x_n. \qquad (2.12)$$

Поскольку $n+1 < 2n \; \forall n = 2,3,4, \ldots$, то

$$x_{n+1} < x_n \; \forall n > 1.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает. Кроме того, $x_n > 0 \, \forall n$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает, но ограничена снизу числом 0. На основании теоремы 2.9, существует число $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и при этом $c \geq 0$.

Поскольку рекуррентное соотношение (2.12) верно при всех n, то в нем можно совершить предельный переход при $n \to \infty$.
Тогда получим

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} \lim_{n\to\infty} x_n,$$

т. е.

$$c = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)c,$$

или

$$c = \frac{1}{2}c,$$

откуда следует, что $c = 0$.

Итак, мы показали, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Легко убедиться, что при произвольном $k > 1$ и при любом $a > 1$ будет $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, откуда, по существу, следует, что при $x = n,\; n \to \infty$ степенная функция неограниченно возрастает медленнее показательной функции.

Пример 2.17. Пусть $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Будем считать, что $a > 1$, так как при $a \leq 1$, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Имеем

$$x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!}\frac{a}{n+1} = x_n \frac{a}{n+1},$$

т. е.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a}{n+1},$$

а значит

$$x_{n+1}=\frac{a}{n+1}x_n, \tag{2.13}$$

При больших n (точнее, при $n>a-1$) будет $x_{n+1}<x_n$. Кроме того, $x_n>0\,\forall n$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает, но ограничена снизу числом 0. В силу теоремы 2.9, она имеет предел c, и при этом $c\ge 0$.

Совершая в соотношении (2.13) предельный переход при $n\to\infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}\lim_{n\to\infty} x_n,$$

т. е.

$$c=0\cdot c$$

откуда $c=0$.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0,$$

т. е. при $n\to\infty$ показательная функция растет медленнее факториала.

Пример 2.18. Пусть $x_n=\sqrt[n]{a}$, где $a>1$. Очевидно, что $x_n>1\forall n$. Положив $x_n=1+\alpha_n$, получим, что $\alpha_n>0$.

Таким образом,

$$\sqrt[n]{a}=1+\alpha_n, \tag{2.14}$$

а значит $a=(1+\alpha_n)^n$, откуда, на основании формулы бинома Ньютона,

$$a=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+...+\alpha_n^n.$$

Поскольку $a_n>0$, то

$$a>1+n\alpha_n,$$

так что

$$\alpha_n<\frac{a-1}{n},$$

отсюда находим:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,$$

т. е., на основании (2.14),

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

Пример 2.19. Пусть $x_n = \sqrt[n]{n}$. Снова положим $x_n = 1 + \alpha_n$, где $\alpha_n > 0$. Таким образом,

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n,$$

а значит

$$n = (1 + \alpha_n)^n,$$

или, по формуле бинома Ньютона,

$$n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \ldots + \alpha_n^n,$$

откуда следует, что

$$n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2,$$

т. е.

$$\frac{n-1}{2}\alpha_n^2 < 1,$$

а значит

$$\alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

и, в то же время, $\qquad \alpha_n > 0 \; \forall n$.

Полагая $n \to \infty$, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Пример 2.20. Пусть $x_n = \sqrt[n]{n!}$. Покажем, что эта последовательность монотонно возрастает, т.е. что

$$x_n < x_{n+1}. \tag{2.15}$$

Неравенство (2.15) равносильно следующему:

$$x_n^{n+1} < x_{n+1}^{n+1},$$

т. е.

$$n!\sqrt[n]{n!} < (n+1)!,$$

или

$$\sqrt[n]{n!} < n+1,$$

а значит

$$n! < (n+1)^n,$$

т. е.

$$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n<(n+1)(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+1).$$

Последнее неравенство очевидно, а значит доказано и неравенство (2.15), т. е. доказано, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает.

Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху.

Предположим противное, т. е. пусть существует такое число $M>0$, что $x_n<M\ \forall n$, т. е., $\sqrt[n]{n!}<M$ откуда $n!\le M^n$, а этот результат противоречит тому, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M^n}{n!}=0$$

(см. пример 2.17).

Тем самым доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty.$$

Пример 2.21. Пусть $x_n=\dfrac{\log_a n}{n}$. Будем считать, что $a>1$. Тогда, на основании результата примера 2.19,

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1.$$

Возьмем некоторое малое $\varepsilon>0$. Тогда, начиная с некоторого n, будет $n^{\frac{1}{n}}<a^{\varepsilon}$, откуда

$$\frac{1}{n}\log_a n<\varepsilon,$$

или

$$\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon,$$

а так как ε можно взять сколь угодно малым, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

Пример 2.22. Возьмем последовательность

$$x_1=\sqrt{2},x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots$$

Рекуррентная формула:

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\,. \tag{2.16}$$

Имеем

$$x_1 < 2, x_2 < \sqrt{2+2} = 2, x_3 < \sqrt{2+2},$$

и вообще

$$x_n < 2 \, \forall n,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху числом 2.

На основании (2.16) имеем

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - \sqrt{2 + x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{2 + x_n} + \sqrt{2 + x_{n-1}}}.$$

Легко видеть, что $x_2 > x_1$. Применяя метод математической индукции, получим, что

$$x_{n+1} > x_n \, \forall n,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает, но ограничена сверху числом 2. На основании теоремы 2.8, существует число $c = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, и при этом $c \le 2$.

Совершая в равенстве (2.16), т. е. в равенстве $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$, предельный переход, получим

$$c^2 = 2 + c,$$

т. е.

$$c^2 - c - 2 = 0,$$

откуда

$$c_1 = 2, \; c_2 = -1.$$

Корень $c = -1$ отпадает, так как $x_n > \sqrt{2}$, а значит и $c > \sqrt{2}$. Итак, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$.

Пример 2.23. Возьмем последовательность

$$x_1 = \frac{10}{1}, \; x_2 = \frac{10 \cdot 11}{1 \cdot 3}, \; x_3 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 3 \cdot 5}, \ldots,$$

т. е.

$$x_n = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot (n+9)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}.$$

Очевидно, рекуррентная формула:

$$x_n = \frac{n+9}{2n-1} \cdot x_{n-1} \tag{2.17}$$

Из неравенства $n+9<2n-1$ получим $n>10$. Таким образом, из (2.17) следует, что, начиная с $n=11$, последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает. Кроме того, $x_n>0\,\forall n$. Следовательно, эта последовательность удовлетворяет условиям теоремы 2.9. Поэтому существует число $c=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, причем $c\geq 0$.

Переходя в соотношении (2.17) к пределу при $n\to\infty$, получим

$$c=\frac{1}{2}c,$$

откуда $c=0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

Этот результат естественен, поскольку, на основании (2.17), при больших n будет $x_n\approx\frac{1}{2}x_{n-1}$, т. е. последовательность x_n при больших n близка к геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}$.

10. Лемма Больцано–Вейерштрасса

Возьмем последовательность

$$2,\frac{1}{2},-2,\frac{2}{3},2,\frac{3}{4},-2,\frac{4}{5},\ldots$$

Она является ограниченной, но не имеет предела. Однако из нее можно выделить подпоследовательность

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,$$

которая, очевидно, сходится, имея предел, равный 1. Возникает вопрос, случаен ли этот факт, или же он имеет общий характер?

Теорема 2.10 (лемма Больцано–Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу.

■Пусть последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n,\ldots. \tag{2.18}$$

ограничена. Тогда существует такой отрезок $[a,b]$, что $x_n\in[a,b]\forall n$. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам. По крайней мере одна из его половин содержит бесконечное множество точек x_n; обозначим эту половину через $[a_1, b_1]$. Если бесконечное множество точек x_n содержит каждая из половин отрезка $[a, b]$, то любую из них можно взять в качестве $[a_1, b_1]$.

Аналогично делим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и обозначаем $[a_2, b_2]$ ту из его половин, которая содержит бесконечное множество точек x_n, и т. д. На k–м шаге получим отрезок $[a_k, b_k]$, содержащий бесконечное множество точек x_n, и т. д.

В результате получим систему стягивающихся отрезков $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_k, b_k]$, ... На основании леммы о стягивающихся отрезках, существует единственная точка c, принадлежащая всем этим отрезкам.

Искомую подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, ... x_{n_k}, ...$ можно построить, например, так (вообще это можно сделать бесчисленным множеством способов). В качестве x_{n_1} возьмем первое из чисел x_n, содержащееся в $[a_1, b_1]$. В качестве x_{n_2} возьмем первое из чисел x_n, следующих в последовательности (2.18) после x_{n_1} и попавшее в $[a_2, b_2]$. В качестве x_{n_3} берем первое из чисел x_n, следующих в (2.18) после x_{n_1} и x_{n_2} и попавшее в $[a_3, b_3]$ и т. д. Это построение возможно, поскольку каждый из отрезков $[a_k, b_k]$ содержит бесчисленное множество точек x_n, а значит ему принадлежат точки со сколь угодно большими номерами.

Так как для всех n_k будет $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, и в то же время $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = \lim\limits_{k \to \infty} b_k = c$, то, в силу свойства 6 пределов, имеем

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = c,$$

что и требовалось доказать.□

Упражнения к главе II

Построить последовательности и установить их расходимость

1. $x_n = (-1)^{n^2}$;
2. $x_n = (-1)^n n$;
3. $x_n = n^{(-1)^n}$;
4. $x_n = 0{,}5^{[(-1)^n - 1]n}$;

5. $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n}{n+1}$;

6. $x_n = 2^{(-1)^n + 1}$;

7. $x_n = (-1)^n n^3$.

8. Дана последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{1-2n^2}{3+4n^2}$. Пользуясь определением предела, показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{1}{2}$. Начиная с какого n будет $\left|x_n + \dfrac{1}{2}\right| < 0{,}001$?

Дана последовательность $\{x_n\}$. Найти ее предел, а также $N(\varepsilon)$.

9. $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$;

10. $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}$.

11. $x_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$;

12. $x_n = \dfrac{n+1}{3n-2}$;

13. Дана последовательность $x_1 = \dfrac{1}{4}, x_2 = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{7}, \ldots, x_n = x_{n-1}\dfrac{2n-1}{3n+1}$. Показать, что она монотонно убывает, и что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

14. Дана последовательность $x_1 = \sqrt{12},\ x_n = \sqrt{12 + x_{n-1}}$. Показать, что она монотонно возрастает, и найти ее предел.

Вычислить пределы

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^n}$ $\quad (a > 1;\ a = 1;\ 0 < a < 1)$;

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{2n}}{1+a^{2n+1}}$ $\quad (a > 1;\ a = 1;\ 0 < a < 1)$;

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}$;

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2+2^2+\ldots n^2}{n^2} - \dfrac{n}{3}\right)$;

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^2}$;

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{n^3}$;

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}$;

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$.

III. Предел функции. Непрерывность функций

1. Предел функции в точке и на бесконечности

Пусть имеется функция $y = f(x)$ с областью определения D_f. Возьмем некоторую последовательность

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{3.1}$$

такую, что

а) $x_n \in D_f \ \forall n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и при этом $x_n \neq a \ \forall n$.

Очевидно, последовательностей вида (3.1), удовлетворяющих условиям а) и б), существует, вообще говоря, бесчисленное множество.

По последовательности (3.1) строим соответствующую числовую последовательность

$$\{f(x_n)\} = f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots \tag{3.2}$$

Если для любой последовательности (3.1), удовлетворяющей условиям а) и б), соответствующая последовательность (3.2) сходится к некоторому числу b, то это число называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, и это записывают так

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \tag{3.3}$$

или

$$f(x) \underset{x\to a}{\to} b.$$

При этом числа x_n могут приближаться к точке a совершенно произвольно, и в любом из этих случаев будет

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

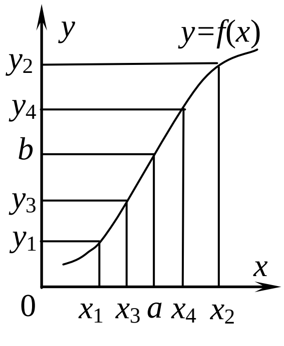


Рис. 3.1

Данное определение предела функции в точке можно сформулировать и короче:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \ \forall\{x_n\} \to a\right). \tag{3.4}$$

Геометрически соотношение (3.4) означает, что если абсциссы точек x_n стремятся к a, то ординаты этих точек неограниченно приближаются к b.

Пример 3.1. Пусть $f(x) = \sqrt{x+2}$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x+2} = \sqrt{3}$.

В данном случае $D_f = [-2, +\infty)$. Возьмем в D_f последовательность $\{x_n\}$, такую, что $x_n \to 1$. Имеем

$$\sqrt{x_n+2}-\sqrt{3}=\frac{(x_n+2)-3}{\sqrt{x_n+2}+\sqrt{3}}=(x_n-1)\frac{1}{\sqrt{x_n+2}+\sqrt{3}}.$$

Знаменатель во втором множителе не может быть сколь угодно близким к нулю, а значит, этот множитель является ограниченной величиной. Множитель же x_n-1 бесконечно мал при $n\to\infty$. Но тогда и $\sqrt{x+2}-\sqrt{3}$, как произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную, есть бесконечно малая последовательность, а это, на основании (3.4) и (3.3), означает, что $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+2}=\sqrt{3}$.

Пример 3.2. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к нулю. Если α измерять в радианах, то

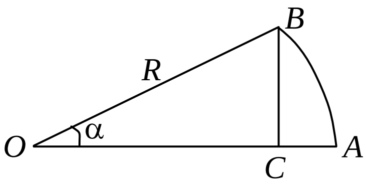


Рис. 3.2

$$\alpha=\frac{A\breve{B}}{R},\ \text{рис. 3.2.}$$

В то же время $\sin\alpha=\dfrac{BC}{R}$, а так как $BC<A\breve{B}$, то

$$\sin\alpha_n<\alpha_n\ \ \forall n.$$

Здесь мы считаем, что $\alpha_n>0$. В общем же случае, очевидно, имеем

$$|\sin\alpha_n|<|\alpha_n|.$$

Так как, по условию, $\alpha_n\to 0$, а значит и $|\alpha_n|\to 0$, то тем более и $|\sin\alpha_n|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, откуда и следует, что

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0. \tag{3.5}$$

Пример 3.3. Пусть a – произвольное число. Докажем, что

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a. \tag{3.6}$$

Имеем

$$\sin x_n-\sin a=2\sin\frac{x_n-a}{2}\cos\frac{x_n+a}{2}.$$

Если $x_n\to a$, то, на основании (3.5), $\sin\dfrac{x_n-a}{2}\to 0$. В то же время

$$2\left|\cos\frac{x_n+a}{2}\right|\le 2\ \forall n.$$

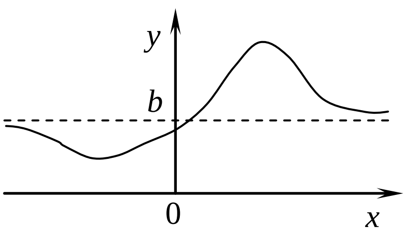


Рис. 3.3

Следовательно, величина $\sin x_n-\sin a$ при $n\to\infty$ бесконечно мала, как произведение бесконечно малой величины на ограниченную. Отсюда, на основании произвольности последовательности $\{x_n\}$, и следует равенство (3.6).

В равенстве (3.3) каждое из чисел a и b может и не быть конечным. Пусть, например, $a=\infty$. Тогда вместо (3.3) получим

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b.$$

В частности, можно рассматривать пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, рис. 3.3.

Пример 3.4. Из рис. 3.4 легко усматривается, что

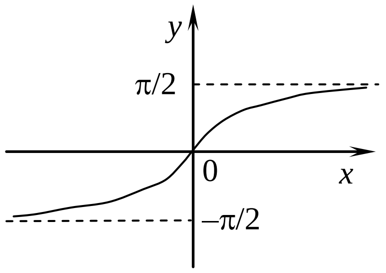


Рис. 3.4

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}. \qquad (3.7)$$

Для доказательства зададим произвольное $\varepsilon>0$. Решим неравенство

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x<\varepsilon.$$

Получим

$$\operatorname{arctg} x>\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$

откуда

$$x>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right),$$

т. е.

$$x>\operatorname{ctg}\varepsilon.$$

Но $x_n\to+\infty$, а поэтому, начиная с некоторого n, будет $x_n>\operatorname{ctg}\varepsilon$. Тогда, начиная с этого n, будет

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x_n<\varepsilon,$$

откуда следует первое из равенств (3.7). Точно так же доказывается и второе из равенств (впрочем, оно вытекает и из нечетности функции $\operatorname{arctg} x$).

Пусть теперь в равенстве (3.3) будет $b=\infty$, т. е. пусть

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

В таких случаях говорят, что функция $f(x)$ в точке $x=a$ обращается в бесконечность.

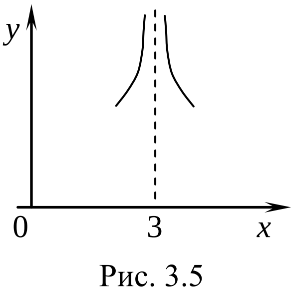


Рис. 3.5

Пример 3.5. Убедимся, что $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x}{(x-3)^2}=+\infty$.

Действительно, если $x_n\to3$, то $\dfrac{1}{(x_n-3)^2}x_n$ есть бесконечно большая положительная величина (как произведение бесконечно большой положительной величины на величину, не стремящуюся к нулю и, начиная с некоторого n, положительную), рис. 3.5.

Возьмем, наконец, случай, когда одновременно $a=\infty$ и $b=\infty$, т. е. когда

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty .$$

Это равенство означает, что если $\{x_n\}$ – произвольная бесконечно большая последовательность, то и последовательность $\{f(x_n)\}$ – бесконечно большая.

Пример 3.6. Покажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty .$$

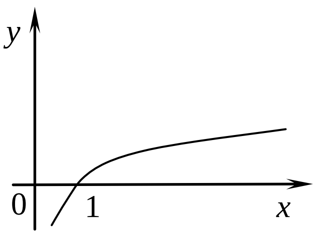


Рис. 3.6

Зададим некоторое число $M>0$. Решим неравенство

$$\ln x > M .$$

Оно выполняется для $x>e^M$. Но, поскольку $x_n\to+\infty$, то, начиная с некоторого n, будет $x_n>e^M$, а значит, начиная с этого n, будет $\ln x_n > M$, рис. 3.6.

2. Односторонние пределы функции в точке

Предположим, что числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a, и пусть $x_n>a$ $\forall n$, рис. 3.7. В этом случае говорят, что величина x_n стремится к числу a справа, и пишут:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} a+0 .$$

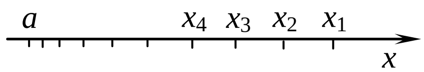


Рис. 3.7

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и в то же время $x_n<a$ $\forall n$, то величина x_n называется стремящейся к числу a слева; в этом случае пишут:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} a-0 .$$

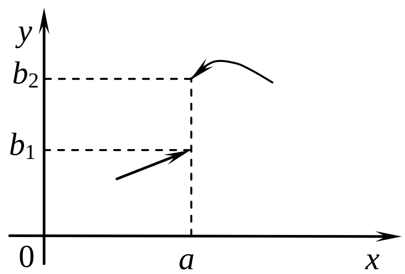


Рис. 3.8

В частности, если $a=0$, то пишут не $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0+0$ или $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0-0$, а просто $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +0$ или $x_n \underset{n\to\infty}{\to} -0$.

Предположим теперь, что $y=f(x)$ – некоторая функция. Если для любой последовательности $\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\to} a-0$ будет $\{f(x_n)\} \underset{n\to\infty}{\to} b_1$, то число b_1 называют пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$ слева, рис. 3.8, и в этом случае пишут, что

$$b_1 = \lim_{x \to a-0} f(x).$$

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ в точке $x = a$ справа:

$$b_2 = \lim_{x \to a+0} f(x).$$

Для произвольной функции в произвольной точке пределы слева и справа не обязательно равны между собой. Более того, любой из них (или даже оба) может не существовать.

Пример 3.7. Возьмем функцию $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ и точку $x = 0$. Если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +0$, то $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, и, в силу первого из равенств (3.7), $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{\pi}{2}$, так что

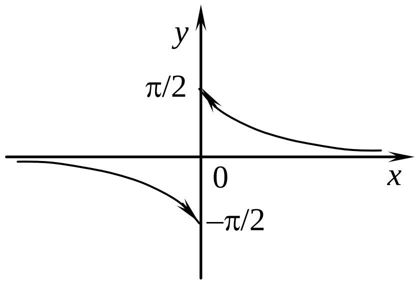


Рис. 3.9

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично, используя вторую из формул (3.7), получим

$$\lim_{x\to-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Обычно, с целью уточнения предыдущих равенств, их пишут так:

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - 0, \quad \lim_{x\to-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 0.$$

Смысл каждого из этих уточнений очевиден, рис. 3.9.

Итак, в данном примере пределы функции в точке $x = 0$ существуют, но не равны между собой.

Пример 3.8. Пусть $y = 2^{\frac{1}{x}}$. Если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +0$, то $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, а значит

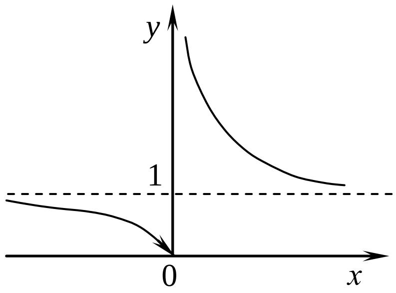


Рис. 3.10

и $2^{\frac{1}{x_n}} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Если же $x_n \underset{n\to\infty}{\to} -0$, то $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$, а значит $2^{\frac{1}{x_n}} \underset{n\to\infty}{\to} +0$. Итак,

$$\lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}} = +0, \quad \lim_{x\to+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

т. е. предел функции в точке $x = 0$ слева существует, а предел справа – не существует.

Заметим еще также, что, если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, то $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +0$, а значит $2^{\frac{1}{x_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1+0$, так что

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1+0,$$

и аналогично

$$\lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1-0.$$

Легко видеть, что для того чтобы данная функция в данной точке имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке пределы как слева, так и справа, и чтобы эти пределы были равны между собой.

3. Свойства пределов функций

Рассмотренные выше определения и свойства пределов числовых последовательностей легко переносятся и на случай функций непрерывного аргумента. Перечислим основные из них.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ (здесь, как и всюду ниже, вместо $x \to a$ может быть $x \to \infty$).

Имеют место, в частности, следующие свойства.

1. Сумма бесконечно большой и ограниченной функций есть бесконечно большая функция.
2. Сумма бесконечно больших функций одного знака есть бесконечно большая функция того же знака.

■Докажем, например, свойство 1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, а $\varphi(x)$ – ограниченная при $x \to a$ функция (т.е. существует такое $M > 0$, что для всех $x \in C_\varepsilon(a)$, где $\varepsilon > 0$ – любое число, будет $|\varphi(x)| \le M$). Тогда при $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ получим последовательность $\{f(x_n) + \varphi(x_n)\}$, которая является суммой бесконечно большой $\{f(x_n)\}$ и ограниченной последовательности $\{\varphi(x_n)\}$. В силу соответствующего свойства числовых последовательностей будет $f(x_n) + \varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, а так как $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, то $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + \varphi(x)] = \infty$, что и требовалось доказать. □

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. Имеют место следующие свойства.

1. Сумма любого конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
2. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.
3. Если при $x\to a$ функция $f(x)$ является бесконечно большой, то функция $\alpha(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ есть бесконечно малая при $x\to a$.
4. Если при $x\to a$ функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая и если она не обращается в нуль в некоторой окрестности точки a (за исключением, быть может, самой точки a), то функция $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x\to a$.

■Докажем, например, свойство 3. Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Тогда при $n\to\infty$ последовательность $\{f(x_n)\}$ есть бесконечно большая, и, по доказанному ранее, величина $\{\alpha(x)\}=\left\{\dfrac{1}{f(x)}\right\}$ есть бесконечно малая последовательность, т.е. $\alpha(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а так как последовательность $\{x_n\}$ – произвольная, то $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.□

Предположим теперь, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. Тогда $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$. Обратно, если $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, то $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

■Докажем, например, первое из этих утверждений. Пусть $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Это значит, что если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, то $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} b$, а значит $f(x_n)-b \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Положив

$$f(x_n)-b=\alpha(x_n), \tag{3.8}$$

будем иметь $\alpha(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Следовательно, $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$, а так как из (3.8) следует, что $f(x)=b+\alpha(x)$, то утверждение доказано.□

Далее, справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.1. Предел суммы любого конечного числа функций, имеющих предел, равен сумме этих пределов, т. е.

$$\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{m} f_k(x)=\sum_{k=1}^{m}\lim_{x\to a} f_k(x).$$

Теорема 3.2. Предел произведения функций, имеющих пределы, равен произведению этих пределов, т. е.

$$\lim_{x\to a}\prod_{k=1}^{m} f_k(x)=\prod_{k=1}^{m}\lim_{x\to a} f_k(x).$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{x\to a}[cf(x)]=c\lim_{x\to a} f(x).$$

Теорема 3.3. Предел частного двух функций, имеющих пределы, равен частному этих пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\ \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0.$$

Все эти теоремы доказываются совершенно аналогично.

■Докажем, например, теорему 3.1, причем для простоты возьмем случай двух слагаемых. Предположим, что

$$\lim_{x\to a} f(x)=b,\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=c.$$

Это значит, что если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b,\ \lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=c$. Но тогда, на основании теоремы 2.1,

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)+\varphi(x_n)]=\lim_{n\to\infty} f(x_n)+\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n),$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)+\varphi(x_n)]=b+c.$$

А так как последовательность $\{x_n\}$ – произвольная, то это значит, что

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)+\varphi(x)]=b+c.\square$$

Пример 3.9. На основании теорем 3.1. и 3.2, получим

$$\lim_{x\to 1}\left(2x^2+3x-1\right)=2\lim_{x\to 1}(x\cdot x)+3\lim_{x\to 1} x-1=2\cdot 1^2+3\cdot 1-1=4.$$

Отметим еще следующие свойства.

1. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке $x=a$, то она ограничена при $x\to a$.
2. Если существуют конечные пределы
$$\lim_{x\to a} f(x)=b,\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=c,$$
и если в некоторой окрестности точки a будет $f(x)\geq\varphi(x)$, то и $b\geq c$.
3. Если в некоторой окрестности точки a будет $\varphi(x)\leq f(x)\leq g(x)$ и если

$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$, то предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ также существует и равен b.

4. Пусть функция $f(x)$ монотонно не убывает на отрезке $[a_1,a_2]$ и ограничена на нем сверху числом M (т.е. $f(x)\le M$, $\forall x\in[a_1,a_2]$). Тогда существует односторонний предел $\lim\limits_{x\to a_2-0}f(x)$, и этот предел не превосходит числа M.
5. Пусть функция $f(x)$ монотонно не возрастает на отрезке $[a_1,a_2]$ и ограничена на нем снизу числом m. Тогда существует односторонний предел $\lim\limits_{x\to a_2-0}f(x)$, и этот предел не меньше числа m.

Все эти свойства легко следуют из соответствующих свойств числовых последовательностей.

Докажем еще одно свойство.

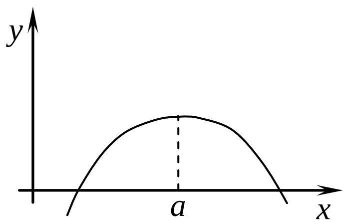


Рис. 3.11

Лемма 3.1. Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)>0$, то существует такая окрестность точки $x=a$, внутри которой будет $f(x)>0$ (рис. 3.11).

■Предположим противное, т. е. пусть в любой, сколь угодно малой, окрестности $C_\varepsilon(a)$ содержится точка x, в которой $f(x)\le 0$. Тогда в любом ограниченном интервале, содержащем точку a, имеется бесчисленное множество точек x, для которых $f(x)\le 0$. На основании леммы Больцано–Вейерштрасса, из этого множества точек можно выделить подпоследовательность $\{x_n\}$, такую, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. По предположению, для всех этих точек будет $f(x_n)\le 0$. Но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\le 0$ (этот предел существует, поскольку, по условию, существует предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)$). Полученное неравенство противоречит условию, согласно которому $\lim\limits_{x\to a}f(x)>0$.□

Доказанное утверждение называют **леммой о сохранении знака функции**.

Заменяя в лемме $f(x)$ на $-f(x)$, получим, что если $\lim\limits_{x\to a}f(x)<0$, то существует такая окрестность точки $x=a$, всюду в которой $f(x)<0$.

4. Второе определение пределов функции в точке и на бесконечности

Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, где a и b – конечные числа. Это равенство означает, что для любой последовательности $\{x_n\}\underset{n\to\infty}{\to} a$ будет $\{f(x_n)\}\underset{n\to\infty}{\to} b$.

Покажем, что равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ может трактоваться более просто, без связи с последовательностями, а именно: если x достаточно близко к a, то $f(x)$ сколь угодно близко к b.

Зададим некоторое $\varepsilon>0$. Поскольку $\lim\limits_{x\to a}|f(x)-b|=0$, то

$$\lim_{x\to a}\left[\varepsilon-|f(x)-b|\right]=\varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{x\to a}\left[\varepsilon-|f(x)-b|\right]>0.$$

На основании леммы о сохранении знака, существует окрестность $C_\delta(a)$, рис. 3.12, в которой будет

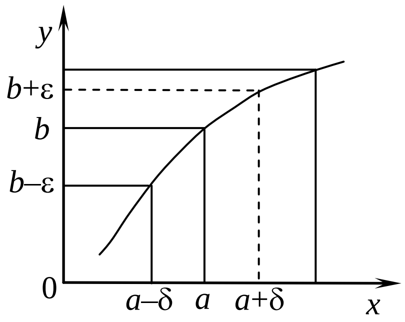


Рис. 3.12

$$\varepsilon-|f(x)-b|>0,$$

т. е.

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Итак, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$ (это δ, вообще говоря, зависит от ε), что неравенство $|x-a|<\delta$ влечет за собой неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$, т. е.

$$(|x-a|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon).$$

Очевидно, чем меньше ε, тем меньше, вообще говоря, будет и δ.

Докажем теперь, что и, наоборот, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$(|x-a|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon),\text{ то } b=\lim_{x\to a} f(x).$$

Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, такая, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Зададим $\varepsilon>0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, то, начиная с некоторого n, будет $|x_n-a|<\delta$. Но тогда, по условию, начиная с этого n, будет $|f(x_n)-b|<\varepsilon$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b,$$

а так как последовательность $\{x_n\}$ – произвольная, то это значит, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Итак, мы приходим к новому определению предела функции в точке (его называют определением на языке “ε,δ”, или определением по Коши): число b называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$(|x-a|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon).$$

Пример 3.10. Легко проверить, что $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$ (ср., например, с примером 3.1). Положим $\varepsilon=0{,}1$ и потребуем, чтобы было $\left|\sqrt{x+1}-2\right|<0{,}1$, т. е.

$$-0{,}1<\sqrt{x+1}-2<0{,}1.$$

Получим

$$1{,}9<\sqrt{x+1}<2{,}1$$

или

$$3{,}61<x+1<4{,}41,$$

т. е.

$$2{,}61<x<3{,}41.$$

Отсюда следует, что в качестве δ следует взять меньшее из чисел $3-2{,}61=0{,}39$ и $3{,}41-3=0{,}41$, т. е. число 0,39.

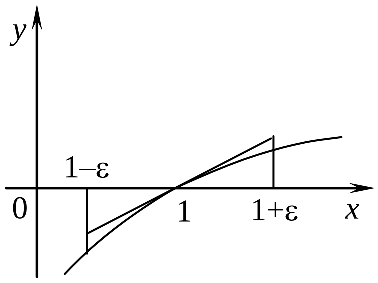


Рис. 3.13

Пример 3.11. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$. Для определенности будем считать, что $a>1$. Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и потребуем, чтобы было

$$\left|a^x-1\right|<\varepsilon,$$

т. е.

$$-\varepsilon<a^x-1<\varepsilon.$$

Это неравенство выполняется, если

$$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon,$$

т. е. если

$$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon).$$

Поскольку $\log_a(1+\varepsilon)<\left|\log_a(1-\varepsilon)\right|$ (см. рис. 3.13), то положим $\delta=\log_a(1+\varepsilon)$; получим, что если $|x|<\delta$, то $\left|a^x-1\right|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

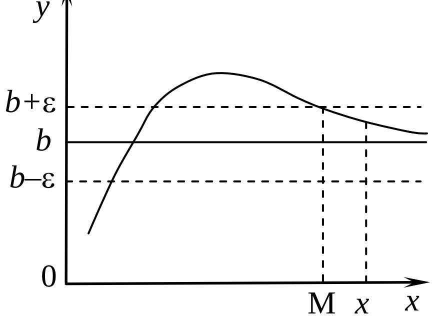


Рис. 3.14

Обратимся теперь к равенству

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим новое определение: число b называется пределом функции $f(x)$ на бесконечности, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $M(\varepsilon)>0$, что

$$\left(|x|>M\right)\Rightarrow\left(|f(x)-b|<\varepsilon\right).$$

В частности, в случае $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$ условие $|x|>M$ превращается в условие $x>M$ или $x<-M$.

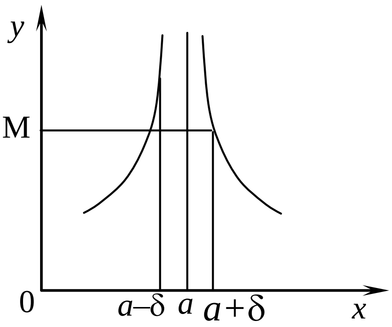


Рис. 3.15

Пусть теперь $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. Теперь этому равенству можно дать следующее определение: функция $f(x)$ обращается в бесконечность в точке $x=a$, рис. 3.15, если для любого $M>0$ найдется такое $\delta(M)>0$, что

$$\left(|x-a|<\delta\right)\Rightarrow\left(|f(x)|>M\right).$$

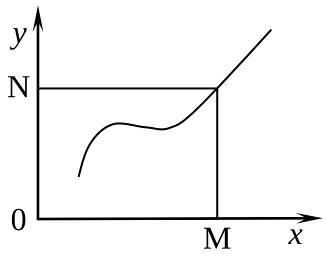


Рис. 3.16

Пусть, наконец, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, рис. 3.16. Это означает, что для любого $N>0$ найдется такое $M(N)>0$, что

$$\left(|x|>M\right)\Rightarrow\left(|f(x)|>N\right).$$

Таковы различные варианты определения предела функции в точке на языке Коши.

5. Непрерывность функции в точке и на промежутке

Функция называется непрерывной в данной точке, если ее предел в этой точке равен значению этой функции в этой же точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (3.9)$$

Это определение можно сформулировать и более подробно: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

а) эта функция определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности (т. е. существует такое $\delta>0$, что $C_\delta(x_0)\subset D_f$); последнее необходимо для того, чтобы можно было рассматривать ситуацию, когда $x\to x_0$;

б) в точке x_0 существуют пределы функции $f(x)$ слева и справа;

в) оба односторонние предела равны между собой;

г) эти пределы равны значению функции $f(x)$ в точке x_0.

Пример 3.12. Мы уже видели (см. пример 3.1), что $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x+2}=\sqrt{3}$. Но $\sqrt{3}=\sqrt{2+1}$ есть значение функции $\sqrt{x+2}$ в точке $x=1$. Следовательно, на основании (3.9), функция $\sqrt{x+2}$ непрерывна в точке $x=1$.

Пример 3.13. Мы видели также (см. пример 3.3), что $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ при любом x_0. Теперь это означает, что функция $\sin x$

непрерывна во всех точках числовой оси.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 справа, если выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

При этом слева от точки x_0 функция $f(x)$ может и не быть определена.

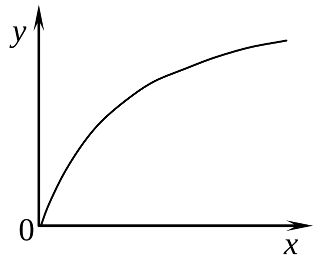


Рис. 3.17

Пример 3.14. Покажем, что функция $\sqrt{x}$ (рис. 3.17) непрерывна в точке $x = 0$ справа. Действительно, пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +0$. Тогда, начиная с некоторого n, будет $x_n < \varepsilon^2$, а значит $\sqrt{x_n} < \varepsilon$, а так как ε можно брать сколь угодно малым, а $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, стремящаяся к нулю, то это и значит, что

$$\lim_{x \to +0} \sqrt{x} = 0.$$

Если же $x < 0$, то функция $\sqrt{x}$ вообще не определена.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 слева, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в (открытом!) интервале, если она непрерывна во всех точках этого интервала.

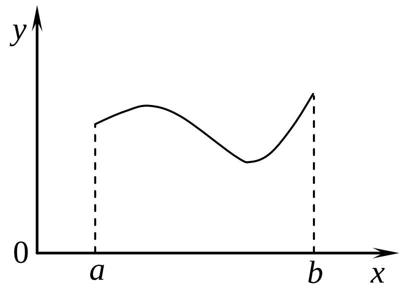


Рис. 3.18

Функция называется непрерывной на отрезке, если она непрерывна во всех его внутренних точках, а на левом и правом концах непрерывна соответственно справа и слева.

Геометрически непрерывность функции на отрезке означает, что график этой функции на данном отрезке есть сплошная, т. е. не имеющая разрывов, линия, рис. 3.18.

6. Другие формы определения непрерывности функции в точке

Равенство (3.9), выражающее непрерывность функции в точке, можно сформулировать и на языке “ε, δ”: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, рис. 3.19, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что условие $|x - x_0| < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \mid(|x-x_0|<\delta)\Rightarrow$$
$$(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon).$$

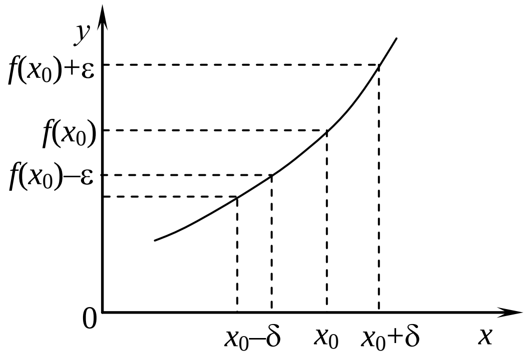


Рис. 3.19

Можно придать и еще одну форму равенству (3.9), для чего введем сначала определение.

Возьмем функцию $y=f(x)$ и некоторую точку x_0. Придадим затем числу x_0 приращение Δx, такое, что $[x_0,x_0+\Delta x]\subset D_f$. Разность

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

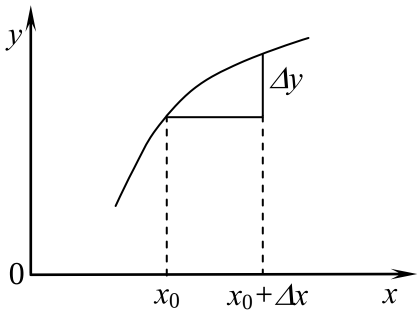


Рис. 3.20

называется приращением функции $y=f(x)$ в точке x_0 и обозначается еще $\Delta f(x_0)$, рис. 3.20. При этом каждая из величин Δx и Δy может и не быть положительной.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда, переписав равенство (3.9) в виде

$$\lim_{x-x_0\to 0}[f(x)-f(x_0)]=0$$

и положив $x-x_0=\Delta x,\ f(x)-f(x_0)=\Delta y$, будем иметь

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \qquad (3.10)$$

Итак, если функция в данной точке непрерывна, то бесконечно малому приращению ее аргумента отвечает бесконечно малое приращение самой функции.

Рассуждая в обратном порядке, получим обратное утверждение: если в данной точке для функции $y=f(x)$ выполняется равенство (3.10), то данная функция непрерывна в этой точке. Таким образом, равенство (3.10) есть необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке.

Примечание. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда выполняется равенство (3.9), которое в данном случае запишем так:

$$\lim f(x)=f(\lim x). \qquad (3.11)$$

Это значит, что вместо вычислений предела непрерывной функции достаточно вместо ее аргумента подставить его предельное значение. Поэтому равенство (3.11) называют правилом предельного перехода под знаком непрерывной функции.

Формально равенство (3.11) означает, что в случае непрерывной функции символы $\lim$ и f можно менять местами. Это обстоятельство будет не раз использовано в дальнейшем.

7. Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 3.4. Сумма функций, непрерывных в данной точке, есть функция, непрерывная в этой точке.

■Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Обозначим $F(x) = f(x) + \varphi(x)$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x) + \varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f(x_0) + \varphi(x_0) = F(x_0),$$

что и требовалось доказать.□

Поскольку в ходе доказательства была использована теорема о пределе суммы функций, то теорема 3.4. может быть обобщена на случай любого конечного числа слагаемых.

Теорема 3.5. Произведение функций, непрерывных в данной точке, есть функция, непрерывная в этой точке.

Теорема 3.6. Частное функций, непрерывных в данной точке, есть функция, непрерывная в данной точке, если только знаменатель не обращается в этой точке в нуль.

Две последние теоремы доказываются точно так же, как и теорема 3.4, на основании теорем 3.2 и 3.3 о пределах функций.

Теорема 3.7 (теорема о непрерывности сложной функции). Пусть даны функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $\varphi(x_0) = u_0$, а функция $f(u)$ непрерывна в точке u_0, то сложная функция $F(x) = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

■Покажем сначала, что функция $F(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Действительно, из непрерывности функции $f(u)$ в точке u_0 следует существование окрестности $C_\varepsilon(u_0)$, в которой функция $f(u)$ определена. Далее, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0, существует такая окрестность $C_\delta(x_0)$, что из соотношения $x \in C_\delta(x_0)$ вытекает соотношение $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $u \in C_\varepsilon(u_0)$. Но если $u \in C_\varepsilon(u_0)$, то $f(u)$ имеет смысл. Таким образом, существует такая окрестность $C_\delta(x_0)$, в которой функция $f[\varphi(x)]$ имеет смысл.

Приступая к доказательству основного утверждения, зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции $f(u)$ в точке u_0, существует такое $\eta(\varepsilon) > 0$, что $(|u - u_0| < \eta) \Rightarrow (|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon)$. Далее, поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, для полученного η найдется такое

$\delta(\eta) > 0$, что

$$(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \eta), \text{ т. е. } (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|u - u_0| < \eta).$$

Но

$$(|u - u_0| < \eta) \Rightarrow (|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon),$$

т. е.

$$(|u - u_0| < \eta) \Rightarrow (|f[\varphi(x)] - f[\varphi(x_0)]| < \varepsilon),$$

откуда и следует непрерывность функции $F(x)$ в точке x_0.□

Примечание. Выделяя "главную линию" в доказательстве основной части теоремы, можно записать ее в виде следующей цепочки импликаций:

$$(x \to x_0) \Rightarrow (\varphi(x) \to \varphi(x_0)) \Leftrightarrow (u \to u_0) \Rightarrow (f(u) \to f(u_0)) \Leftrightarrow (F(x) \to F(x_0)).$$

Теорему 3.7 можно записать в следующем удобном для практики виде

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u). \tag{3.12}$$

Это равенство выражает так называемое правило замены переменной при вычислении предела непрерывной функции.

Пример 3.15. Вычислим $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(a^x - 1\right)$. Полагая $u = a^x - 1$ и учитывая, что, по ранее доказанному, $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$, получим, на основании (3.12),

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(a^x - 1\right) = \lim_{u \to 0} \sin u = 0.$$

Теорема 3.8 (теорема о существовании и непрерывности обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) и непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$. Тогда на соответствующем отрезке $[c, d]$ значений этой функции существует и однозначна обратная функция $x = \varphi(y)$, также монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Эта теорема будет использована нами сразу же, но ее доказательство мы приведем несколько позже.

8. Непрерывность основных элементарных функций

Обратимся сначала к показательной функции $y = a^x$. Пусть x_0 – произвольное число. Имеем

$$\lim_{x \to x_0} \left(a^x - a^{x_0}\right) = \lim_{x \to x_0} a^{x_0}\left(a^{x - x_0} - 1\right) = a^{x_0} \lim_{x - x_0 \to 0}\left(a^{x - x_0} - 1\right) =$$

$$= a^{x_0} \lim_{u \to 0}\left(a^u - 1\right),$$

а так как, по ранее доказанному, $\lim\limits_{u\to 0} a^u = 1$, то
$$\lim_{x\to x_0}\left(a^x - a^{x_0}\right) = 0,$$
т. е.
$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Итак, показательная функция непрерывна при всех x.

Пусть теперь $y = \log_a x$. Эта функция обратная функции $y = a^x$, которая монотонно возрастает (если $a > 1$) или монотонно убывает (при $a < 1$), изменяясь в промежутке $(0, +\infty)$ и, в силу только что доказанного, непрерывна при всех $x > 0$. На основании теоремы 3.8 об обратной функции, функция $y = \log_a x$ монотонна и непрерывна всюду в промежутке $(0, +\infty)$.

Далее, как мы видели,
$$x^a = e^{a\ln x}.$$
Из непрерывности показательной и логарифмической функций, в силу теоремы 3.7 о непрерывности сложной функции, следует, что и степенная функция непрерывна при всех $x > 0$. Если же a таково, что x^a имеет смысл и при $x < 0$ (или даже и при $x = 0$), то функция x^a, как нетрудно убедиться, непрерывна и при этих значениях x. Например,
$$\lim_{x\to x_0}\left(x^{2/3} - x_0^{2/3}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x_0^2}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2 - x_0^2}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x_0^2 x^2} + \sqrt[3]{x_0^4}} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\left(x - x_0\right)\frac{x + x_0}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x_0^2 x^2} + \sqrt[3]{x_0^4}} = 0$$
как предел произведения бесконечно малой функции на ограниченную; легко проверить, что этот результат верен и при $x = 0$. Таким образом, при всех x
$$\lim_{x\to x_0} x^{2/3} = x_0^{2/3},$$
откуда следует непрерывность функции $y = x^{2/3}$ при всех x.

Обратимся теперь к тригонометрическим функциям. Ранее была доказана непрерывность функции $\sin x$ при всех x. Поскольку $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, то, на основании теоремы о непрерывности сложной функции, функция $\cos x$ также непрерывна при всех x. Далее, функция $\operatorname{tg} x$, как частное двух непрерывных функций, непрерывна всюду, кроме точек, где $\cos x = 0$, т. е. точек $x = \pm\frac{\pi}{2}, x = \pm\frac{3\pi}{2}, x = \pm\frac{5\pi}{2}, ...$, т. е. кроме точек, где функция $\operatorname{tg} x$ вообще не определена. Точно так же получим, что и функция $\operatorname{ctg} x$ непрерывна всюду, где она определена. Из теоремы об обратной функции следует, что функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ непрерывны всюду на отрезке $[-1,1]$, а функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны при всех x.

Совершенно аналогично устанавливается непрерывность гиперболических и обратных гиперболических функций.

Итак, все основные элементарные функции непрерывны всюду, где они определены. Поскольку же всякая элементарная функция "составлена" из основных элементарных функций, то в силу теорем 3.4 – 3.8 они также непрерывны всюду, где они определены.

9. Классификация точек разрыва функций

1 . Разрывы 1-го рода. Рассмотрим сначала в качестве примера две функции: $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ и $y = x + 1$. Если $x \neq 1$, то обе функции совпадают. Если же $x = 1$, то вторая функция определена (и равна 2), а первая не определена. В то же время

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,$$

т. е. просто

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Следовательно, график функции $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ отличается от прямой $y = x + 1$ лишь тем, что в нем отсутствует точка (1,2), рис. 3.21.

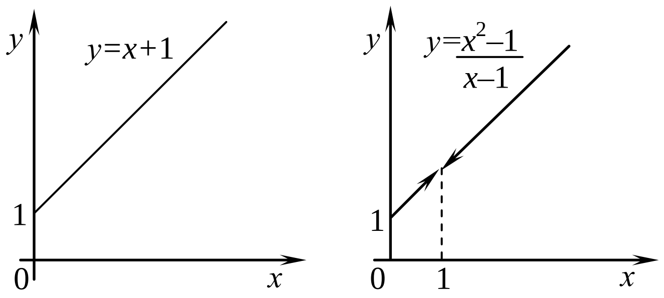


Рис. 3.21

Итак, в точке $x = 1$ функция $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ имеет пределы слева и справа, равные между собой, но в самой точке $x = 1$ функция не определена, а значит и не непрерывна (в отличие от функции $y = x + 1$). Но если бы мы определили первую из функций так

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$$

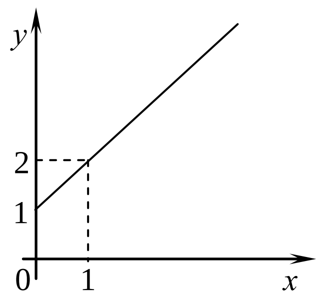


Рис. 3.22

то она стала бы непрерывной и в точке $x=1$, т. е. разрыв устранился бы, рис. 3.22. Поэтому разрывы такого типа называют устранимыми, а их устранение описанным только что способом называют доопределением функции в точке разрыва.

Итак, функция имеет в данной точке устранимый разрыв, если она имеет в этой точке пределы слева и справа, равные между собой, но в самой этой точке функция не определена.

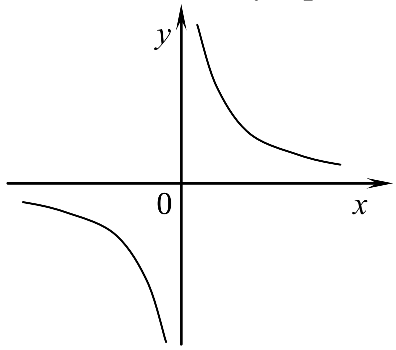


Рис. 3.23

Возьмем теперь функцию $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ (рис. 3.4). В этом случае, как мы видели, пределы функции слева и справа в точке $x=0$ существуют, но различны. Такие разрывы называют конечными скачками. Устранить такой разрыв путем доопределения невозможно.

Устранимые разрывы и конечные скачки называют разрывами 1-го рода. Их общей особенностью является существование обоих односторонних пределов в точке разрыва.

2. Разрывы 2-го рода. Если в точке разрыва отсутствует хотя бы один из односторонних пределов, разрыв называется разрывом 2-го рода.

Пример 3.16. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x}$, рис. 3.23. Тогда

$$\lim_{x\to-0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+0} f(x)=+\infty.$$

Разрывы такого типа называют бесконечными скачками.

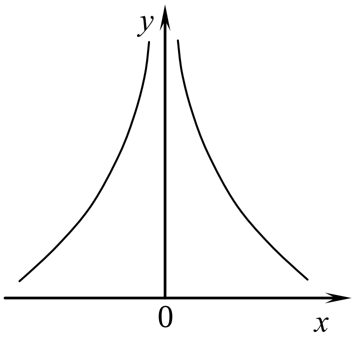


Рис. 3.24

Пример 3.17. Пусть $f(x)=2^{1/x}$ (см. рис. 3.10). Имеем

$$\lim_{x\to-0} f(x)=+0,\ \lim_{x\to+0} f(x)=+\infty,$$

т. е. предел слева существует (и равен нулю), а предел справа не существует.

Здесь разрыв также имеет характер бесконечного скачка.

Пример 3.18. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, рис. 3.24. Здесь

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to +0} f(x) = +\infty .$$

В данном случае пределы слева и справа отсутствуют (т. е. разрыв – 2-го рода), но скачка нет.

Пример 3.19. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, рис. 3.25. Эта функция обращается

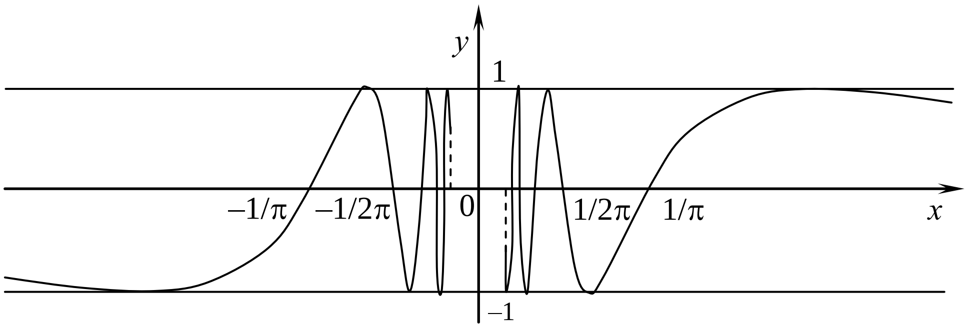


Рис. 3.25

в нуль при $\frac{1}{x} = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, т. е. в точках $x = \pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, \ldots$. Следовательно, в окрестности точки $x = 0$ функция совершает бесчисленное множество колебаний, т. е. в этой точке пределы как слева, так и справа не существуют.

Таким образом, разрыв 2-го рода не обязательно связан с обращением функции в данной точке в бесконечность.

Одна и та же функция одновременно может иметь несколько разрывов, вообще говоря, разных типов. Укажем на одну из возможных форм записи исследования функций на разрыв.

Пример 3.20. Пусть $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x}\right)$. Здесь имеются две точки разрыва: $x = 1$ и $x = 2$. Имеем

$$(x \to 1-0) \Rightarrow (x-1 \to -0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} \to -\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \to -\infty\right) \Rightarrow \left(y \to -\frac{\pi}{2} + 0\right);$$

$$(x \to 1+0) \Rightarrow (x-1 \to +0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} \to +\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \to +\infty\right) \Rightarrow \left(y \to \frac{\pi}{2} - 0\right);$$

$$(x \to 2-0) \Rightarrow (2-x \to +0) \Rightarrow \left(\frac{1}{2-x} \to +\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \to +\infty\right) \Rightarrow \left(y \to \frac{\pi}{2} - 0\right);$$

$$(x \to 2+0) \Rightarrow (2-x \to -0) \Rightarrow \left(\frac{1}{2-x} \to -\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \to -\infty\right) \Rightarrow \left(y \to -\frac{\pi}{2} + 0\right).$$

Таким образом, данная функция имеет две точки разрыва 1-го рода в виде конечных скачков.

Для получения общего вида графика исследуем еще поведение функции на бесконечности. Имеем

$$\left(x \to \pm\infty\right) \Rightarrow \left(x-1 \to \pm\infty\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2-x}=-\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right) \Rightarrow \left(y \to -0\right).$$

Итак, график данной функции имеет вид, изображенный на рис. 3.26.

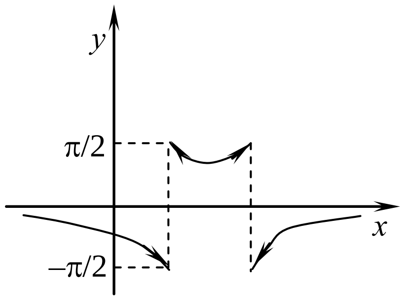


Рис. 3.26

Пример 3.21. Пусть

$$y = 3^{\frac{1-x}{x(x-2)^2}}.$$

Функция имеет две точки разрыва: $x=0$ и $x=2$. Получим

$$\left(x \to -0\right) \Rightarrow \left(x(x-2)^2 \to -0\right) \Rightarrow \left(\frac{1-x}{x(x-2)^2} \to -\infty\right) \Rightarrow \left(y \to +0\right);$$

$$\left(x \to +0\right) \Rightarrow \left(x(x-2)^2 \to +0\right) \Rightarrow \left(\frac{1-x}{x(x-2)^2} \to +\infty\right) \Rightarrow \left(y \to +\infty\right);$$

$$\left(x \to 2 \pm 0\right) \Rightarrow \left(x(x-2)^2 \to +0\right) \Rightarrow \left(\frac{1-x}{x(x-2)^2} \to -\infty\right) \Rightarrow \left(y \to +0\right);$$

$$\left(x \to +\infty\right) \Rightarrow \left(x(x-2)^2 \to +\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1-x}{x(x-2)^2} \to -0\right) \Rightarrow \left(y \to 1-0\right);$$

$$\left(x \to -\infty\right) \Rightarrow \left(x(x-2)^2 \to -\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1-x}{x(x-2)^2} \to -0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y \to 1-0\right).$$

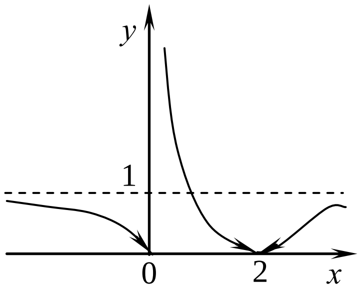


Рис. 3.27

Таким образом, график функции имеет примерно следующий вид: в точке $x=0$ – разрыв 2-го рода в виде бесконечного скачка, а в точке $x=2$ – устранимый разрыв, рис. 3.27.

10. О строгих определениях основных элементарных функций

В главе I говорилось, что при произвольном значении показателя степени a степенная функция x^a определяется как $e^{a \ln x}$, т. е. выражается через показательную и логарифмическую функции. Гиперболические функции, как мы видели, также выражаются "напрямую" через показательную функцию. Позже мы увидим (см. главу VI), что функции $\sin x$ и $\cos x$, а значит и $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, также могут быть выражены через показательную функцию, т. е. находятся с ними в "близком родстве". Следовательно, можно сказать, что показательные функции занимают центральное место среди основных элементарных функций. Поэтому коснемся сейчас вопроса о строгом определении показательной функции a^x. Пусть, для определенности, $a > 1$.

Если x – рациональное число, т.е. $x = \frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа, то a^x определяется по правилам элементарной алгебры, т. е. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Поэтому будем считать, что x – иррациональное число. Но в этом случае число x можно представить как предел последовательности рациональных чисел:

$$x = \lim_{n\to\infty} r_n .$$

Поэтому, по определению,

$$a^x = a^{\lim\limits_{n\to\infty} r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} . \tag{3.13}$$

Можно показать, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$. Например, считая, что $\sqrt{2}$ есть предел последовательности $1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; 1{,}4142; \ldots$, мы можем определить число $3^{\sqrt{2}}$ как предел последовательности

$$3^{1,4}; 3^{1,41}; 3^{1,414}; 3^{1,4142}; \ldots$$

Если же a есть натуральное число m, то

$$x^m = e^{m\ln x} = e^{\overbrace{\ln x + \ln x + \ldots + \ln x}^{m \text{ раз}}} = \underbrace{e^{\ln x} \cdot e^{\ln x} \cdot \ldots \cdot e^{\ln x}}_{m \text{ раз}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ раз}},$$

что и понимается обычно под a^m.

Аналогичное замечание касается и случая, когда $x = \frac{m}{n}$ – произвольное рациональное число.

Примечание. Равенство (3.13) по своему виду аналогично определению (3.3) предела функции в точке на языке последовательностей, или, как еще говорят, определению предела функции в точке по Гейне.

11. Основные виды неопределенных выражений и простейшие способы их раскрытия

1. <u>Неопределенности вида</u> $\frac{0}{0}$. Пусть требуется вычислить предел

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ (здесь и в дальнейшем вместо $x\to a$, где $a<\infty$, может быть и $x\to\infty$). В рассматриваемом случае теорема о пределе частного неприменима. В подобных случаях говорят, что при $x\to a$ выражение $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ представляет собой неопределенное выражение (или просто неопределенность) вида $\dfrac{0}{0}$.

Из равенств $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ следует, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ содержат в себе множители, стремящиеся к нулю при $x\to a$. Во многих случаях эти множители нетрудно выделить, а затем произвести сокращение, в результате чего получим некоторый новый предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$, который может быть вычислен более просто.

Пример 3.22. Вычислим предел $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^3-2x+1}$.

Легко видеть, что и числитель, и знаменатель обращаются в нуль при $x=1$, т. е. имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. В данном случае числитель и знаменатель содержат в себе множитель $x-1$. Выделяя его (путем деления числителя и знаменателя на $x-1$), будем иметь

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^3+x^2+3x+3\right)}{(x-1)\left(x^2+x-1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+3x+3}{x^2+x-1}=\frac{1+1+3+3}{1+1-1}=8.$$

Пример 3.23. Вычислим предел

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Непосредственная подстановка снова дает неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Раскрывая ее, будем иметь:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 3.24. Поступая аналогично, получим

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=\frac{1}{3}.$$

Нетрудно убедиться, что при произвольном натуральном n

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}. \qquad (3.14)$$

Кроме того, позже мы получим совершенно строго более общую формулу, из которой как частный случай будет следовать (3.14).

2. Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Так называют дробь вида $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x\to a$, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x)=\infty$. Для вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ следует выделить множители в числителе и знаменателе, которые обуславливают стремление к бесконечности, и затем произвести сокращение.

Пример 3.25. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+2x-3}{3x^3-x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

Практически при вычислении пределов такого типа надо числитель и знаменатель разделить на слагаемое с наивысшей степенью x. Очевидно, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0 & \text{при } n<m;\\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{при } n=m;\\ \infty & \text{при } n>m.\end{cases}$$

Аналогичное правило применяем и в случае иррациональных дробей. Например,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+x^2-2}}{5x+1}=\frac{\sqrt[3]{8}}{5}=\frac{2}{5}.$$

3. Неопределенности вида $\infty-\infty$. Неопределенностью вида $\infty-\infty$ называют выражение $f(x)-\varphi(x)$, в котором функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при данном поведении x стремятся к бесконечности одного знака. Во многих случаях для "раскрытия" такой неопределенности удобно превратить ее в неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 3.26. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+3x\right)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Пример 3.27. Аналогично

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

4. Неопределенности вида $0\cdot\infty$. Для раскрытия таких неопределенностей чаще всего их также превращают в дробную неопределенность.

Пример 3.28. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

12. Сравнение бесконечно малых

Под сравнением бесконечно малых величин понимают вычисление предела их отношения. При этом мы одновременно будем рассматривать сравнение как бесконечно малых числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, так и бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Поэтому для общности обозначений мы вместо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ или $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ будем писать просто $\lim\frac{\alpha}{\beta}$.

Пусть α и β – бесконечно малые. Если $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, т. е. если α стремится к нулю быстрее, чем β, то говорят, что α есть бесконечно малая высшего порядка, чем β. Это записывают так:

$$\alpha=o(\beta).$$

Пример 3.29. Пусть $n\to\infty$ и пусть $\alpha_n=\frac{1}{n^2+1}$, $\beta_n=\frac{1}{n+1}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=0,$$

т. е. $\alpha = o(\beta)$.

Если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то говорят, что α есть бесконечно малая низшего порядка по сравнению с β. Очевидно, в этом случае $\beta = o(\alpha)$.

Если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c$, где $c < \infty$ и $c \neq 0$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка. Это записывают так: $\alpha = O^{*}(\beta)$, или, что то же самое, $\beta = O^{*}(\alpha)$.

Пример 3.30. Пусть $x \to 0$ и пусть $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1, \beta(x) = x$. Тогда (см. пример 3.23)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2},$$

т. е., если $x \to 0$, то $\alpha(x) = O^{*}(\beta(x))$.

Бесконечно малая α называется бесконечно малой k-го порядка относительно бесконечно малой β, если $\alpha = O^{*}\left(\beta^{k}\right)$, т. е. если $\lim \frac{\alpha}{\beta^{k}} = c$, где c – произвольное число, отличное от нуля.

Пример 3.31. Пусть $x \to 0$ и пусть $\alpha(x) = \sqrt{1+x^{3}} - 1, \beta(x) = x$. Определим порядок малости $\alpha(x)$ по сравнению с $\beta(x)$. Имеем

$$\alpha(x) = \frac{\left(1+x^{3}\right) - 1}{\sqrt{1+x^{3}}+1} = \frac{x^{3}}{\sqrt{1+x^{3}}+1},$$

а значит

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{3}}{x^{3}\left(\sqrt{1+x^{3}}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^{3}}+1} = \frac{1}{2},$$

откуда следует, что $\alpha(x) = O^{*}\left\{[\beta(x)]^{3}\right\}$, т. е. $\alpha(x)$ – бесконечно малая 3-го порядка относительно $\beta(x)$.

Легко проверяются следующие свойства:

1 . Если $\alpha = O^{*}(\beta)$, а $\beta = O^{*}(\gamma)$, то и $\alpha = O^{*}(\gamma)$ (свойство транзитивности).

2 . Если $\alpha = O^{*}(\gamma)$, а $\beta = o(\gamma)$, то $\alpha + \beta = O^{*}(\gamma)$.

3 . Если $\alpha = O^{*}(\gamma)$, $\beta = O^{*}(\gamma)$, то либо $\alpha + \beta = O^{*}(\gamma)$, либо $\alpha + \beta = o(\gamma)$.

Проверим, например, свойство 3. По условию

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = c_1, \lim \frac{\beta}{\gamma} = c_2,$$

где c_1 и c_2 – конечные числа, отличные от нуля. Поэтому

$$\lim \frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\lim\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}\right)=\lim \frac{\alpha}{\gamma}+\lim \frac{\beta}{\gamma}=c_1+c_2.$$

Если $c_2 \neq -c_1$, то $c_1+c_2 \neq 0$, и тогда $\alpha+\beta=O^*(\gamma)$. Если же $c_2=-c_1$, то $c_1+c_2=0$, а значит $\alpha+\beta=o(\gamma)$. В общем же случае

$$\alpha+\beta=\left(\alpha+\beta=O^*(\gamma)\right)\cup\left(\alpha+\beta=o(\gamma)\right).\square$$

13. Эквивалентные бесконечно малые

Бесконечно малые α и β называются эквивалентными, если

$$\lim \frac{\alpha}{\beta}=1;$$

эквивалентность бесконечно малых α и β записывается так: $\alpha \sim \beta$.

Пример 3.32. Пусть $n \to \infty$ и пусть $\alpha_n=\frac{1}{n}$, $\beta_n=\frac{1}{n+1}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}=1,$$

а значит, если $n \to \infty$, то $\alpha_n \sim \beta_n$.

Легко видеть, что $(\alpha \sim \beta) \wedge (\beta \sim \gamma) \Rightarrow (\alpha \sim \gamma)$ (транзитивность отношения эквивалентности).

■Действительно,

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)=\lim \frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim \frac{\beta}{\gamma}=1\cdot 1=1,$$

что и требовалось доказать.□

Далее, очевидно, что $(\alpha \sim \beta) \Rightarrow (\alpha = O^*(\beta))$. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, из примера 3.27 следует, что если $x \to 0$, то $\sqrt{1+x}-1=O^*(x)$, но, в то же время бесконечно малые $\sqrt{1+x}-1$ и x не эквивалентны.

Теорема 3.9. Для того, чтобы бесконечно малые α и β были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы они различались на бесконечно малую более высокого порядка.

■<u>Необходимость.</u> Пусть $\alpha \sim \beta$. Обозначим $\gamma=\alpha-\beta$. Тогда

$$\lim \frac{\gamma}{\beta}=\lim \frac{\alpha-\beta}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=\lim \frac{\alpha}{\beta}-1=1-1=0,$$

т. е. $\gamma=o(\beta)$, а так как $\alpha=O^*(\beta)$, то одновременно $\gamma=O(\alpha)$.

<u>Достаточность.</u> Пусть $\alpha=\beta+\gamma$, где $\gamma=o(\beta)$. Тогда

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\beta+\gamma}{\beta} = \lim \left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right) = 1 + \lim \frac{\gamma}{\beta} = 1 + 0 = 1,$$

а значит, $\alpha \sim \beta$.□

Пусть $\alpha \sim \beta$. Тогда $\alpha = \beta + \gamma$, где $\gamma = o(\beta)$. Это значит, что, начиная с некоторого значения, будет $\gamma < \beta$, а значит $\alpha \approx \beta$. В этом случае бесконечно малую β называют главной частью бесконечно малой α.

Пример 3.33. Пусть $x \to \infty$ и пусть $\alpha(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Тогда при больших $|x|$ будет $\alpha(x) \approx \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$, т. е. можно предположить, что $\beta(x) = \dfrac{1}{x}$ есть главная часть бесконечно малой $\alpha(x)$. Покажем, что это так и есть. Имеем

$$\alpha(x) - \beta(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^3+x} = O^*\left(\frac{1}{x^3}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Итак, если $x = 100$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ различаются на величину порядка 0,000001.

Очевидно, одна и та же бесконечно малая имеет бесчисленное множество главных частей (различающихся на бесконечно малую более высокого порядка).

Для получения одного из следствий теоремы 3.9 перепишем формулу (3.14) так:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\dfrac{x}{n}} = 1.$$

Отсюда следует, что если $x \to 0$, то

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}, \qquad (3.15)$$

а значит

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}. \qquad (3.16)$$

Очевидно, эта формула тем точнее, чем меньше x. Она позволяет приближённо извлекать корни из чисел.

Пример 3.34. Вычислим приближённо $\sqrt[3]{30}$. Имеем, на основании (3.16),

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} = 3\left(1+\frac{1/9}{3}\right) = 3 + \frac{1}{9} \approx 3{,}11.$$

Примечание. Как уже отмечалось в связи с примером 3.24, формула

(3.14), или, что то же самое, формула (3.15), будет позже получена совершенно строго как частный случай более общего соотношения.

Теорема 3.10. Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если заменить их эквивалентными им бесконечно малыми.

■Пусть $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$. Тогда

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} \right) = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \lim \frac{\beta_1}{\beta} = 1 \cdot \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot 1 = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

что и требовалось доказать.□

Пример 3.35. Используя теорему 3.10 и соотношение (3.15), имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{\sqrt[8]{1+3x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{5}}{\frac{3x}{8}} = \frac{8}{15}.$$

Пример 3.36. Точно так же

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + 5x^3 + 1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left[x \left(\sqrt[4]{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^4}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{5}{x} + \frac{1}{x^4} \right) \right] = \frac{5}{4}.$$

Пример 3.37. Вычислим предел

$$A = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right).$$

Имеем

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \left(x^2 + \sqrt{x^4 + 1} - 2x^2 \right)}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^4 + 1} - x^2 \right) x^3}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \left(x^4 + 1 - x^4 \right)}{\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2} \right) \left(\sqrt{x^4 + 1} + x^2 \right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2} \right) \left(\sqrt{x^4 + 1} + x^2 \right)}.$$

Если x велико, то знаменатель может быть заменён эквивалентной бесконечно большой функцией

$$\left(\sqrt{x^2 + x^2} + x\sqrt{2} \right) \left(x^2 + x^2 \right) = \left(x\sqrt{2} + x\sqrt{2} \right) 2x^2 = 4\sqrt{2} x^3$$

(подробнее об этом – в параграфе 17 данного раздела).

Таким образом,

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{4\sqrt{2} x^3} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

14. Первый замечательный предел и его следствия

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, где x выражается в радианах. Непосредственно этот предел не вычисляется, так как при $x\to 0$ выражение $\dfrac{\sin x}{x}$ представляет собой неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$.

Попытаемся сначала "угадать", чему равен искомый предел. Для этого возьмём поочерёдно углы $10^0, 5^0, 2^0$ и вычислим для каждого из них отношение $\dfrac{\sin x}{x}$.

Пусть $\alpha = 10^0$. Тогда $x=\dfrac{\pi}{18}=\dfrac{3{,}14159}{18}=0{,}17453$. По таблице находим $\sin x = 0{,}17365$, а значит $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{0{,}17365}{0{,}17453}=0{,}9950$.

Пусть теперь $\alpha = 5^0$. Тогда $x=\dfrac{3{,}14159}{36}=0{,}08726$; $\sin x = 0{,}08716$, а значит $\dfrac{\sin x}{x}=0{,}9989$.

Пусть, наконец, $\alpha = 2^0$. Тогда $x=\dfrac{3{,}14159}{90}=0{,}03491$; $\sin x = 0{,}03490$, а значит $\dfrac{\sin x}{x}=0{,}9996$.

Итак, естественно предположить, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Докажем, что это так и есть.

■Пусть сначала $x>0$. Очевидно, $BC < A\breve{B} < AD$ (рис. 3.28), откуда

$$\frac{BC}{R}<\frac{A\breve{B}}{R}<\frac{AD}{R},$$

т. е.

$$\sin x < x < \mathrm{tg} x.$$

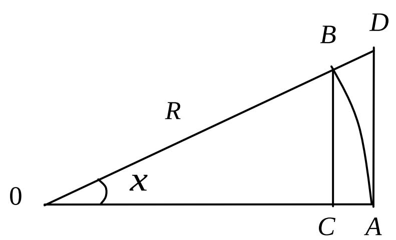


Рис. 3.28

Делим это двойное неравенство на $\sin x$. Получим

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}. \qquad (3.17)$$

Пусть теперь $x\to +0$. Тогда $\dfrac{1}{\cos x}\to 1$, а значит, на основании (3.17), тем более $\dfrac{x}{\sin x} \to 1$. Таким образом,

$$\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ввиду очевидной чётности функции $\dfrac{\sin x}{x}$ следует, что и

$$\lim_{x\to-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следовательно, вообще

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (3.18)$$

(в точке $x = 0$ функция $\dfrac{\sin x}{x}$, очевидно, имеет устранимый разрыв, рис. 3.29).□

Равенство (3.18) называют первым замечательным пределом.

Выясним геометрический смысл формулы (3.18). Имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x},$$

а значит, $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

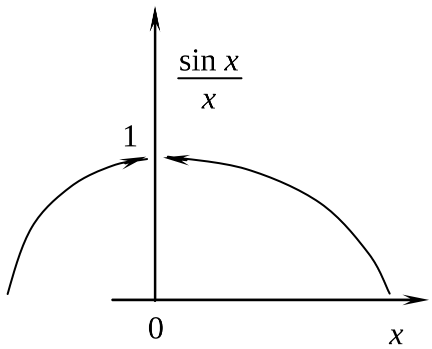


Рис.3.29

Но, в силу непрерывности функции $\operatorname{tg} x$ и на основании формулы (3.12), обозначив $\lim\limits_{x\to 0} \varphi = \varphi_0$, находим

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}\varphi(x) = \lim_{\varphi\to\varphi_0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_0.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 1$, а значит $\varphi_0 = 45^0$.

Но если $x \to 0$, то секущая OM стремится занять положение касательной к синусоиде в точке O, рис. 3.30. Итак, если x измеряется в радианах, а масштабы на осях Ox и Oy одинаковы, то касательная к линии $y = \sin x$ в точке O образует с осью Ox угол $\varphi_0 = 45^0$. В этом и состоит геометрический смысл первого замечательного предела.

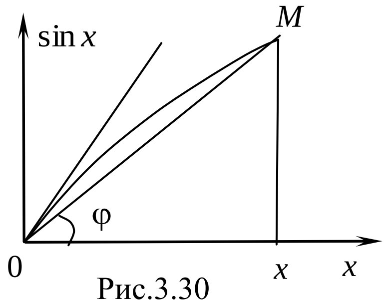


Рис.3.30

Получим несколько простых следствий равенства (3.18).

Пример 3.38. Используя соотношение $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, а также теорему 3.10, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Перепишем это так: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1.$

Отсюда следует, что если $x\to 0$, то $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$. Этот результат полезно помнить при вычислении тригонометрических пределов.

Пример 3.39. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Итак, если $x\to 0$, то не только $\sin x\sim x$, но и $\operatorname{tg}x\sim x$, так что $\operatorname{tg}x\sim\sin x$.

Но тогда, в силу теоремы 3.9, при $x\to 0$ должно быть

$$\operatorname{tg}x-\sin x=o(x).$$

Определим при $x\to 0$ порядок малости функции $\operatorname{tg}x-\sin x$ относительно x.

Имеем

$$\operatorname{tg}x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)\sim x\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^3.$$

Итак, если $x\to 0$, то $\operatorname{tg}x-\sin x=O^*\left(x^3\right)$.

Пример 3.40. Вычислим предел $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. Для этого отметим, что если $x\to 0$, то не только $\sin x\sim x$, но и наоборот, $x\sim\sin x$.

Следовательно, $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\arcsin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$,

а значит, если $x\to 0$, то $\arcsin x\sim x$.

Совершенно аналогично убеждаемся, что если $x\to 0$, то и $\operatorname{arctg}x\sim x$. Эти два последних результата также полезно помнить.

Пример 3.41. Вычислим несколько более сложный предел

$$A=\lim_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Положив $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{\pi}{4}$, получим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha=\operatorname{arctg}1-\dfrac{\pi}{4}=0$,

т.е. α – бесконечно малая функция при $x\to\infty$. Но тогда $\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$, а значит и $\alpha\sim\operatorname{tg}\alpha$.

Поэтому

$$A = \lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{x+1} - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x\to\infty} x\,\frac{\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{x+1}\right) - \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}}{1+\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{x+1}\right)\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\,\frac{\frac{x}{x+1}-1}{1+\frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1+x} = -\frac{1}{2}.$$

15. Число e как предел числовой последовательности

Пусть имеется последовательность

$$x_1 = (1+1)^1, x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, x_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

Докажем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Полагая $n = 1, 2, 3, \ldots,$ получим

$$x_1 = 2; x_2 = 2{,}25; x_3 = 2{,}37; \ldots,$$

т. е. при начальных значениях n величина x_n возрастает. Докажем, что и при всех n будет $x_{n+1} > x_n$.

Формула бинома Ньютона даёт:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n},$$

т. е.

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot$$
$$\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{3.19}$$

При замене n на $n+1$ увеличивается каждое слагаемое справа, начиная со второго, и, кроме того, появляется ещё одно положительное слагаемое, так что, действительно, $x_{n+1} > x_n$.

С другой стороны, на основании (3.19),

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} <$$

$$< 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}},$$

т. е. $x_n < 3\ \forall n$.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает, но ограничена сверху числом 3. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, не превосходящий числа 3. Кроме того, поскольку уже $x_n > 2$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 2$. Таким образом,

$$2 < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 3.$$

Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ называется числом e. Позже мы покажем, что это определение числа e равносильно ранее введенному (см. п. 12 гл. 1).

Примечание. Очевидно, что если $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ – произвольная возрастающая подпоследовательность натуральной последовательности $1, 2, \ldots, n, \ldots$, то всё равно

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{3.20}$$

16. Второй замечательный предел

Докажем теперь, что если x – непрерывная переменная, то также имеет место равенство

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.21}$$

Для этого возьмём произвольную последовательность $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$, такую, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Очевидно, для каждого k найдётся такое натуральное число n_k, что $n_k \le x_k < n_k + 1$, а значит, $\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} \le \frac{1}{n_k}$. Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \le \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{3.22}$$

Но, используя формулу (3.20), имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)} = \frac{e}{1} = e;$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Поэтому, переходя к пределу в соотношении (3.22) и используя свойство 6 из простейших свойств числовых последовательностей (п. 2 гл. 2), будем иметь

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e, \tag{3.23}$$

а так как последовательность $\{x_k\} \to +\infty$ – произвольная, то отсюда и следует (3.21).

Докажем теперь, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \tag{3.24}$$

Возьмём последовательность $\{x_k\}$, такую, что $x_k \underset{k\to\infty}{\to} -\infty$, и положим $u_k = -(x_k+1)$, откуда следует, что $x_k = -(u_k+1)$. Если $x_k \underset{k\to\infty}{\to} -\infty$, то $u_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty$. Поэтому, используя (3.23), получим

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{u_k+1}\right)^{-(u_k+1)} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{u_k}{u_k+1}\right)^{-(u_k+1)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{u_k+1}{u_k}\right)^{u_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{u_k}\right)^{u_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{u_k}\right)^{u_k} \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{u_k}\right) = e\cdot 1 = e,$$

откуда, в силу произвольности последовательности $\{x_k\}$, и следует (3.24).

Положим в соотношении (3.21) $u = \frac{1}{x}$. Тогда получим

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e,$$

или, если снова заменить u на x:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{3.25}$$

Формулу (3.21) (или равносильную ей формулу (3.25)) называют вторым замечательным пределом.

Пример 3.42. Вычислим предел $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$, где a – любое вещественное число. На основании (3.21) имеем

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/a}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a=\left(\lim_{x/a\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/a}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^a.$$

Окончательно

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a. \tag{3.26}$$

В частности, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\dfrac{1}{e}$.

17. Следствия второго замечательного предела

Прологарифмируем равенство (3.25) по основанию e. Получим

$$\ln\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=1,$$

или $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=1$, т. е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1. \tag{3.27}$$

Отсюда следует, что если $x\to 0$, то $\ln\left(1+x\right)\sim x$.

Вычислим теперь предел $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, где $a>0$, $a\neq 1$. Поскольку при $x\to 0$ будет $a^x-1\to 0$, то, на основании только что доказанного, $a^x-1\sim\ln[1+(a^x-1)]$, а значит

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(a^x-1)]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln a^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}.$$

Окончательно

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{3.28}$$

В частности

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad (3.29)$$

Отсюда следует, что если $x\to 0$, то $a^x-1\sim x\ln a,\ e^x-1\sim x$.

Установим геометрический смысл формулы (3.29).

Очевидно (см. рис. 3.31), что $\dfrac{e^x-1}{x}=\mathrm{tg}\varphi$, а значит, на основании (3.29), $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}\varphi=1$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\varphi=45^0$. Следовательно, касательная в точке $(0,1)$ к линии $y=e^x$ образует с осью Ox угол 45^0. Тем самым мы установили, что определение числа e как предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ равносильно первоначальному определению.

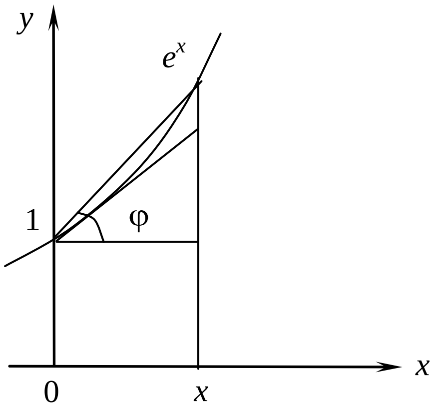


Рис.3.31

Далее, на основании (3.29),

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}2x}{2x}=1$$

Следовательно, если $x\to 0$, то $\mathrm{sh}x\sim x$. Так же, как и в случае тригонометрических функций, легко получить отсюда, что если $x\to 0$, то $\mathrm{th}\,x\sim x,\ \mathrm{Arsh}\,x\sim x,\ \mathrm{ch}\,x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$.

Рассмотрим теперь предел

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x},$$

где $\alpha\neq 1$– произвольное число. Поскольку $(x\to 0)\Rightarrow\left(\left((1+x)^\alpha-1\right)\to 0\right)$, то

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left\{1+\left[(1+x)^\alpha-1\right]\right\}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^\alpha}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}.$$

Окончательно, на основании (3.27),

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha. \qquad (3.30)$$

Формулы (3.26) – (3.30) (или вытекающие из них соотношения эквивалентности) очень полезны при решении соответствующих примеров.

При раскрытии неопределённостей вида 1^∞ очень полезна также следующая теорема.

Теорема 3.11. Пусть (при данном поведении аргумента) будет $\alpha\to 0,\, y\to\infty$, и пусть $\beta\sim\alpha, z\sim y$*). Тогда, если $\lim(1+\alpha)^y$ существует, то существует и равен ему предел $\lim(1+\beta)^z$, то есть в этом случае

$$\lim(1+\alpha)^y=\lim(1+\beta)^z. \tag{3.31}$$

■Используя теорему 3.10 и соотношение (3.27), получим

$$\lim(1+\alpha)^y=\lim e^{y\ln(1+\alpha)}=e^{\lim y\ln(1+\alpha)}=e^{\lim y\alpha}=e^{\lim z\beta}=$$
$$=e^{\lim z\ln(1+\beta)}=\lim(1+\beta)^z.\square$$

Отметим, что в ходе доказательства мы использовали ещё не сформулированную официально теорему 3.13.

Пример 3.43. На основании (3.31) и (3.26), имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(2x+3)-4}{2x+3}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\frac{1}{e^2}.$$

Пример 3.44. Аналогично, используя теорему 3.11, находим

$$\lim_{x\to0}(1+\operatorname{tg}3x)^{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to0}(1+\operatorname{tg}3x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}=\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=e^3.$$

Пример 3.45. Имеем

$$\lim_{x\to0}(x\sin 2x+\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\{1+[x\sin 2x-(1-\cos x)]\}^{\frac{1}{x^2}}=$$
$$=\lim_{x\to0}\left(1+2x^2-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{3}{2}x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Пример 3.46. Пусть

$$A=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Тогда

$$A=\lim_{x\to0}\left[1+\left(\frac{2}{\pi}\arccos x-1\right)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{2}{\pi}\left(\arccos x-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{x}}=$$
$$=\lim_{x\to0}\left[1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[1-\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)\right]^{\frac{1}{x}}=$$

*) см § 18

$$= \lim_{x\to 0}\left[1-\frac{2}{\pi}\cos(\arccos x)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{\pi}x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

Пример 3.47. Имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(2x-3)}{5^x-25} = \lim_{x\to 2}\frac{\ln[1+(2x-4)]}{25\left(5^{x-2}-1\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{25(x-2)\ln 5} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{25\ln 5(x-2)} = \frac{2}{25\ln 5}.$$

18. О сравнении бесконечно больших величин

Теория сравнения бесконечно малых величин почти без изменения переносится на случай бесконечно больших величин.

Пусть y и z – бесконечно большие величины. Если $\lim \frac{y}{z} = 0$, т. е. если y стремится к бесконечности медленнее, чем z, то y называется бесконечно большой низшего порядка, чем z. В этом случае пишут, что $y = O(z)$. Наоборот, z есть в этом случае бесконечно большой более высокого порядка по сравнению с y.

Если $\lim \frac{y}{z} = c$, где $c \neq 0$ и $c < \infty$, то y и z называют бесконечно большими одного порядка и пишут, что $Z = O^*(y)$, или, что то же самое, $z = O^*(y)$. В частности, если $\lim \frac{y}{z} = 1$, то бесконечно большие y и z называются эквивалентными, т. е. $y \sim z$. Очевидно, в этом случае величины $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$ есть эквивалентные бесконечно малые.

Теорема 3.12. Для того, чтобы две бесконечно большие были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была либо ограниченной величиной, либо бесконечно большой более низкого порядка.

Эта теорема доказывается так же, как и теорема 3.9 для эквивалентных бесконечно малых.

Пример 3.48. Пусть $x \to \infty$ и пусть $y = x^2$, $z = x^2 - 2x + 4$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{z} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+4} = 1,$$

т. е. $y \sim z$. При этом

$$y - z = 2x - 4,$$

т. е. $y - z = o(y)$.

Пример 3.49. Пусть снова $x \to \infty, y = x^2$, но $z = x^2 - 2\sin^2 x$. Очевидно, снова $y \sim z$, но теперь уже $y - z$ есть не бесконечно большая величина, а ограниченная.

Так же, как и для бесконечно малых величин, можно ввести понятие главной части бесконечно большой величины. Например, если $x \to \infty$, то x^2 – есть главная часть бесконечно большой $x^2 - 2x + 4$.

Далее, аналогично теореме 3.10 для эквивалентных бесконечно больших можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.13. Если y и z – бесконечно большие величины, а $y_1 \sim y,\ z_1 \sim z$, то $\lim \dfrac{y_1}{z_1} = \lim \dfrac{y}{z}$.

Пример 3.50. Пусть требуется вычислить предел $A = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 5x - 8}{2x^2 - x + 6}$. Поскольку при $x \to \infty$, очевидно, будет $x^2 + 5x - 8 \sim x^2$, а $2x^2 - x + 6 \sim 2x^2$, то

$$A = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, сформулированное ранее правило вычисления подобных пределов оказывается теперь следствием теоремы 3.13.

Примечание. Символы $f(x) = o[\varphi(x)], f(x) = O^*[\varphi(x)]$ используют и в тех случаях, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при данном поведении x не является ни бесконечно малой, ни бесконечно большой величинами. Например, выражение $f(x) = o[\varphi(x)]$ при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) означают просто, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$. В связи с этим символ $o(1)$ иногда употребляется как обозначение бесконечно малой. Действительно, равенство $\alpha = o(1)$ означает, что $\lim \dfrac{\alpha}{1} = 0$, т. е. что $\lim \alpha = 0$.

Аналогично равенство $f(x) = O^*[\varphi(x)]$ означает, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = c$, где $c < \infty, c \neq 0$. В этом случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$ называют функциями одного порядка.

19. Теоремы Больцано–Коши

Теорема 3.14. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах разные по знаку значения. Тогда существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a,b)$, в которой $f(\xi)=0$.

■Пусть, для определённости, $f(a)<0,...,f(b)>0$, рис. 3.32. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам точкой $c=\dfrac{a+b}{2}$. Тогда возможно два случая:

1. $f(c)=0$, т.е. $c=\xi$, и теорема доказана.
2. $f(c)\neq 0$. Тогда либо $f(c)<0$, либо $f(c)>0$. Пусть, например, $f(c)<0$. В этом случае положим $c=a_1, b=b_1$; получим новый отрезок $[a_1,b_1]$, такой, что $f(a_1)<0,\ f(b_1)>0$. Аналогично делим пополам отрезок $[a_1,b_1]$ и обозначим $[a_2,b_2]$ ту его половину, для которой $f(a_2)<0,\ f(b_2)>0$, и т.д. На каждом последующем шаге будем иметь $f(a_n)<0, f(b_n)>0$.

В результате получим систему стягивающихся отрезков

$$[a,b],[a_1,b_1],...,[a_n,b_n],...,$$

такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, и при этом $f(a_n)<0, f(b_n)>0, \forall n$.

Но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, а поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке c, то

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(c)\le 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = f(c)\ge 0.$$

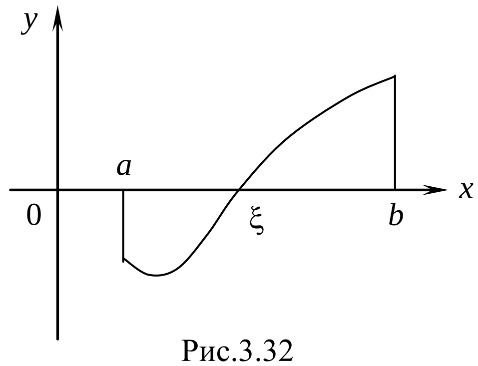


Рис.3.32

Но $(f(c)\le 0)\wedge(f(c)\ge 0)=(f(c)=0)$, т. е. c и есть упоминаемая в теореме точка ξ.□

Примечание 1. Из проведенного доказательства не следует, что фигурирующая в теореме 3.14 точка ξ единственна. Очевидно, таких точек может быть и несколько, рис. 3.33.

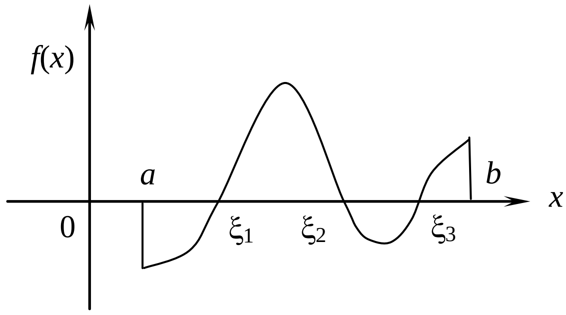


Рис.3.33

Примечание 2. Если функция $f(x)$ непрерывна не всюду на отрезке $[a,b]$, рис. 3.34, то она может и не принимать на нём значения, равного нулю, а значит требование непрерывности функции в теореме является существенным.

Теорема 3.15. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ непрерывна, а на его концах принимает различные значения $f(a)=A,\ f(b)=B$. Тогда для любого C, лежащего между A и B, найдётся по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$, что $f(\xi) = C$ (рис. 3.35).

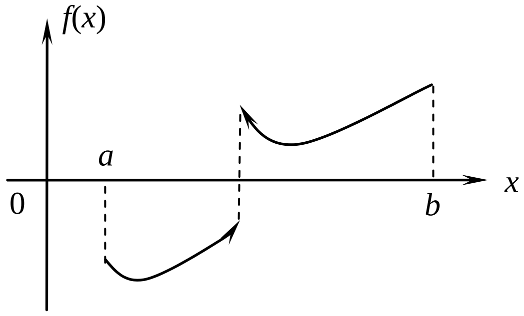


Рис.3.34

■Для определённости предположим, что $A < B$. Тогда $A < C < B$. Введём вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Очевидно, что она, как и функция $f(x)$, непрерывна на отрезке $[a,b]$. Кроме того,

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0;$$
$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

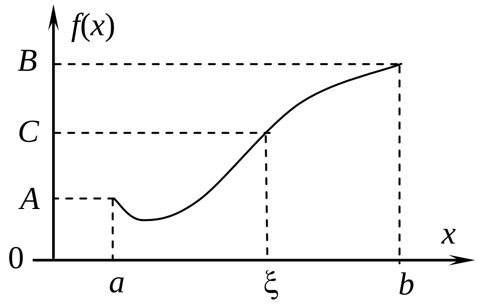


Рис.3.35

На основании теоремы 3.14, существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a,b)$, такая, что $\varphi(\xi) = 0$, т. е. $f(\xi) - C = 0$, а значит, $f(\xi) = C$, что и доказывает теорему.□

Геометрический смысл теоремы 3.15 очевиден из чертежа, рис. 3.35.

Следствие. Если функция $f(x) \neq const$ определена и непрерывна в некотором промежутке E (не обязательно замкнутом и не обязательно конечном), то принимаемые ею значения также сплошь заполняют некоторый промежуток.

Действительно, пусть F – множество всех значений $f(x)$ при условии, что $x \in E$. Обозначим $m = \inf F$, $M = \sup F$, и пусть C – такое число, что $m < C < M$. Тогда существуют такие значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$ функции $f(x)$, что

$$m \leq f(x_1) < C < f(x_2) \leq M$$

(это вытекает из самого определения точных верхней и нижней граней). Поскольку $f(x_1) < f(x_2)$, то, на основании теоремы 3.15, существует по крайней мере одна точка ξ между x_1 и x_2, такая, что $f(\xi) = C$, а значит $C \in F$. Но C– произвольное число между m и M, а поэтому функция $f(x)$ при изменении x в промежутке E принимает все значения между m и M, т. е. F представляет собой промежуток на оси Oy, рис. 3.36, с концами m и M (каждый из них может принадлежать этому промежутку).

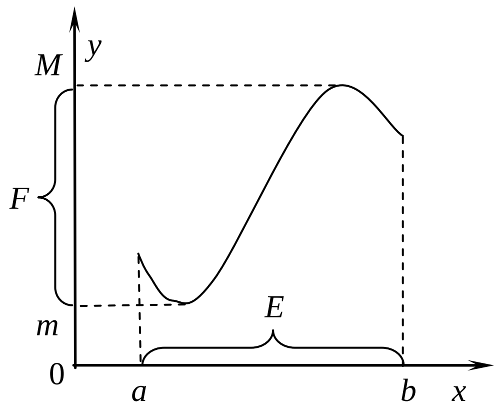


Рис.3.36

Примечание. Промежуток F иногда называют образом промежутка E и пишут, что $F = f(E)$. Промежуток E называют в этом случае прообразом промежутка F.

Рассмотренные теоремы 3.14 и 3.15 называют соответственно 1-й и 2-й теоремами Больцано–Коши.

20. Условие непрерывности монотонной функции

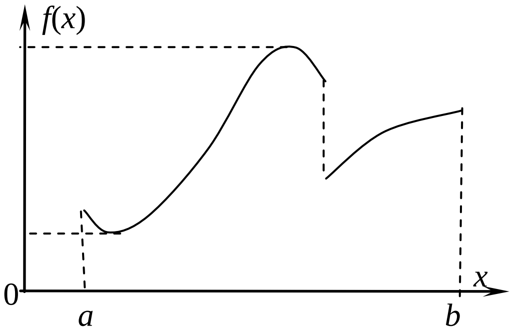


Рис.3.37

Если при изменении x в некотором промежутке соответствующие значения функции $f(x)$ сплошь заполняют некоторый промежуток, то данная функция не обязательно непрерывна на этом промежутке (см. рис. 3.37). Однако оказывается, что если функция $f(x)$ в данном промежутке монотонна, а соответствующие значения $f(x)$ сплошь заполняют некоторый промежуток, то функция $f(x)$ непрерывна в указанном промежутке изменения x.

Теорема 3.16. Пусть функция $f(x)$ монотонна в промежутке E и пусть при изменении x на множестве E соответствующие значения $f(x)$ сплошь заполняют некоторый промежуток. Тогда функция $f(x)$ непрерывна в промежутке E [*)].

■Пусть для определённости функция $f(x)$ монотонно возрастает в промежутке E. Далее, пусть x_0 – произвольная точка множества E, не являющаяся его правым концом. Положим $f(x_0) = y_0$. Тогда $y_0 \in F$, причём y_0 не есть правый (верхний) конец промежутка F (поскольку на множестве E есть точки $x > x_0$, а им отвечают на множестве F значения $y > y_0$). Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, такое, чтобы было не только $y_0 \in F$, но и $y_0 + \varepsilon \in F$. Обозначим $y_0 + \varepsilon = y_1$. Значению y_1 отвечает некоторая точка x_1, такая, что $f(x_1) = y_1$. При этом, очевидно, $x_1 > x_0$. Поэтому можно положить $x_1 - x_0 = \delta$, где $\delta > 0$. В силу монотонности функции $f(x)$,

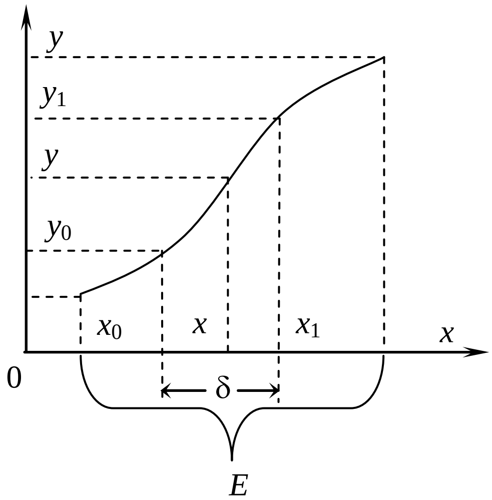


Рис.3.38

[*)] Промежуток E может быть как конечным, так и бесконечным, как открытым, так и замкнутым (или же полузамкнутым).

$(x_0 < x < x_1) \Rightarrow (y_0 < f(x) < y_1)$, т. е. $(0 < x - x_0 < \delta) \Rightarrow (f(x) - f(x_0) < \varepsilon)$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, т. е. что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа.

Совершенно аналогично убедимся, что если точка x_0 не есть левый конец промежутка *E*, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева.

Из совокупности этих двух фактов следует непрерывность функции $f(x)$ в прямежутке *E*.

21. Доказательство теоремы о существовании и непрерывности обратной функции

Предположим, что в некотором промежутке *E* функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает (случай монотонного убывания рассматривается совершенно аналогично). Из непрерывности функции $f(x)$ в промежутке *E* следует, что $F = f(E)$ представляет собой сплошной промежуток. Возьмём произвольное $y_0 \in F$. В силу 2-й теоремы Больцано–Коши ему отвечает по крайней мере одно $x_0 \in E$. Но поскольку функция $y = f(x)$ монотонна, то значению y_0 может отвечать только одно x_0 (действительно, если $x_0' > x_0$ или $x_0' < x_0$, то соответственно $f(x_0') > y_0$ или $f(x_0') < y_0$).

Число $y_0 \in F$ было взято произвольно, а значит каждому $y \in F$ отвечает одно и только одно значение $x \in E$, т. е. на промежутке *F* определена однозначная функция $x = \varphi(y)$, обратная функции $y = f(x)$. При этом значения функции $\varphi(y)$ сплошь заполняют промежуток *E*. Действительно, пусть $x \in E$ – произвольное число. Найдём для этого x число $y = f(x)$. Тогда можно сказать, что выбранному значению x функции $\varphi(y)$ отвечает именно это значение y.

Докажем, что функция $\varphi(y)$, как и $f(x)$, монотонно возрастает. Возьмём в промежутке *F* произвольные числа y_1 и y_2, такие, что $y_1 < y_2$. Обозначим $\varphi(y_1) = x_1$, $\varphi(y_2) = x_2$ (это значит, что $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$). Если бы было $x_1 > x_2$, то, в силу монотонного возрастания функции $f(x)$, было бы $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. $y_1 > y_2$, что противоречит условию.

Аналогично, $(x_1 = x_2) \Rightarrow (y_1 = y_2)$. Итак, $(y_1 < y_2) \Rightarrow (x_1 < x_2)$, что и доказывает монотонное возрастание функции $\varphi(y)$ в промежутке *F*.

Таким образом, функция $x = \varphi(y)$ монотонно возрастает в промежутке *F*, и её значения сплошь заполняют промежуток $E = \varphi(F)$. В силу теоремы 3.16, функция $\varphi(y)$ непрерывна в промежутке F, что и доказывает следующее утверждение.

Теорема 3.17. Пусть в промежутке E оси Ox функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает (убывает).Тогда в промежутке $F = f(E)$ существует обратная ей функция $x = \varphi(y)$, также непрерывная и монотонно возрастающая (убывающая) в промежутке F.

22. Теоремы Вейерштрасса

Возьмём, например, функцию $\ln x$, рис. 3.39. Она непрерывна в любом промежутке (0,a], где $a > 0$. В то же время она не является ограниченной в этом промежутке, так как нет такого числа $M > 0$, чтобы для всех $x \in (0, a]$ было $|\ln x| \le M$.

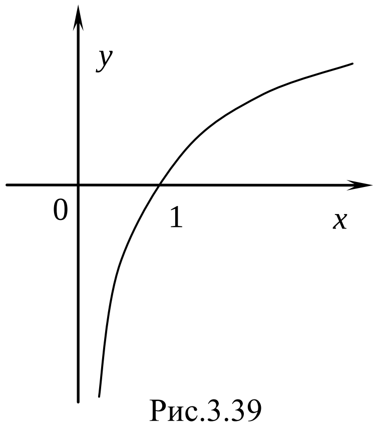


Рис.3.39

Итак, из непрерывности функции в промежутке ещё не следует её ограниченность в этом промежутке. Иначе обстоит дело, если промежуток непрерывности функции замкнут, т. е. является отрезком.

Теорема 3.18. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

■Предположим противное, т. е. пусть функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a,b]$, является, например, неограниченной сверху. Тогда для любого натурального n найдётся такое число $x_n \in [a,b]$, что $f(x_n) > n$. Из последовательности $\{x_n\}$, на основании леммы Больцано–Вейерштрасса, можно извлечь такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, где x_0– некоторое число. Поскольку, очевидно, $x_0 \in [a,b]$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, так что $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f\left(x_0\right)$. С другой стороны, из неравенства $f\left(x_{n_k}\right) > n_k$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = +\infty$. Полученное противоречие и доказывает теорему.□

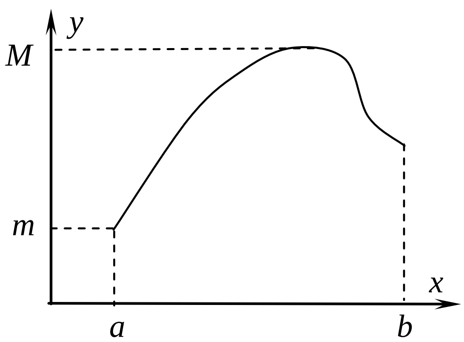


Рис.3.40

Из теоремы 3.18 следует, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существуют такие конечные числа m и M, что для всех $x \in [a,b]$ будет $m \le f(x) \le M$, рис. 3.40. При этом наибольшее из всех возможных чисел m есть, очевидно, $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, а наименьшим из всех возможных чисел M является число $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Будем ниже под m и M подразумевать именно эти числа. В связи с этим возникает вопрос: существуют ли на отрезке $[a,b]$ точки x_0 и x_1, такие, что $f(x_0)=m,\ f(x_1)=M$.

Теорема 3.19. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на нём своих точных нижней и верхней граней m и M, т. е. существуют такие точки x_0 и x_1 на отрезке $[a,b]$, что $f(x_0)=m,\ f(x_1)=M$.

■Предположим, что упомянутой точки $x_1\in[a,b]$ нет. Тогда для всех $x\in[a,b]$ будет $f(x)<M$. Введём вспомогательную функцию $\varphi(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$. Очевидно, она непрерывна для всех $x\in[a,b]$, а значит, в силу теоремы 3.18, существует такое $M_1>0$, что для всех $x\in[a,b]$ будет $\varphi(x)\le M$, т. е.

$$\frac{1}{M-f(x)}\le M_1,$$

откуда
$$M-f(x)\ge\frac{1}{M_1},$$

а значит

$$f(x)\le M-\frac{1}{M_1}.$$

Но отсюда следует, что $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)<M$, что противоречит условию, а значит доказано существование такой точки $x\in[a,b]$, что $f(x_1)=M$.□

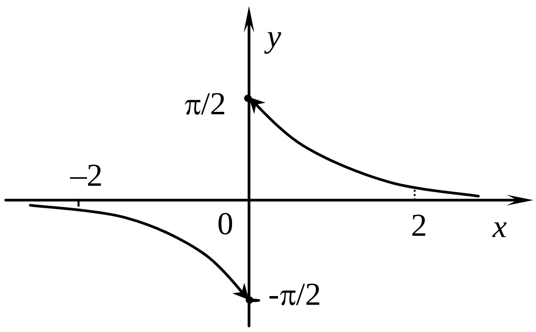


Рис.3.41

Аналогично доказывается достижимость точной нижней грани.

Примечание. Если функция $f(x)$ на отрезке ограничена, но не непрерывна, то её верхняя и нижняя грани могут не достигаться. Примером может служить функция $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ на отрезке [-2, 2], рис. 3.41. Действительно, $\sup\limits_{[-2,2]}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$, но нет такой точки на этом отрезке, в которой

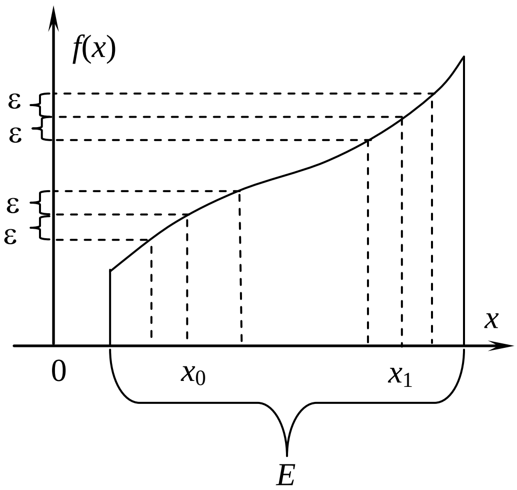


Рис.3.42

отрезке, в которой $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

Доказанные теоремы 3.18 и 3.19 называют соответственно 1-й и 2-й теоремами Вейерштрасса. Числа $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$ и $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$, благодаря достижимости этих значений, называют соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и пишут $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$ и $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$.

23. Равномерная непрерывность функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке *E*. Возьмём произвольную точку $x_0\in E$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что $(|x-x_0|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$. При этом очевидно, что δ зависит, вообще говоря, не только от ε, но и от x_0, т. е. при одном и том же значении ε для различных x_0 будем иметь разные δ, что связано с различной скоростью изменения функции $f(x)$ на разных участках промежутка *E*.

Возникает вопрос, нельзя ли из всех чисел δ, отвечающих данному ε для различных x_0, выбрать наименьшее. В этом случае для всех $x_0\in E$ и $x\in E$ было бы

$$(|x-x_0|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon), \tag{3.32}$$

т. е. число δ не зависело бы от x_0, а зависело бы только от ε.

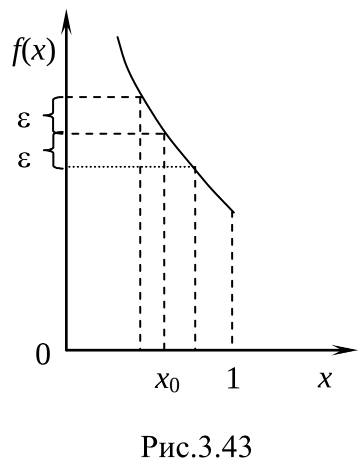


Рис.3.43

Если функция $f(x)$, непрерывная в промежутке *E*, такова, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon)>0$, что соотношение (3.32) выполняется для любого $x_0\in E$ и $x\in E$, то функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной в промежутке *E*.

Возьмём конкретную функцию $f(x)=\frac{1}{x}$, рис. 3.43. Она непрерывна в промежутке $(0,1]$. Пусть $x_0\in(0,1]$ и $x\in(0,1]$ – произвольные числа. Имеем

$$\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{x_0\cdot x},$$

а значит, неравенство $\left|\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$ выполняется, если $|x-x_0|<\varepsilon\cdot x_0\cdot x$.

Таким образом, в данном случае $\delta=2\cdot x_0\cdot x$. Поскольку же x_0 и x можно взять сколь угодно близкими к нулю, то числа δ, единого для всего промежутка $[0,1]$, не существует, т. е. функция $f(x)=\frac{1}{x}$ в промежутке $(0,1]$ непрерывна, но не равномерно непрерывна.

Иначе обстоит дело, если промежуток непрерывности функции является замкнутым.

Теорема 3.20 (Кантора). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она и равномерно непрерывна на нём.

■Предположим противное, т. е. пусть для некоторого $\varepsilon>0$ не существует такого $\delta>0$, что соотношение (3.32) выполняется для всех $x_0,x\in[a,b]$. Тогда для любого $\delta>0$ найдутся такие $x\in[a,b]$ и $x'\in[a,b]$, что $|x-x'|<\delta$ и в то же время $|f(x)-f(x')|\geq\varepsilon$.

Возьмём такую последовательность $\{\delta_n\}$, что $\delta_n>0\ \forall n$ и $\delta_n\to 0$. Для каждого указанного δ существуют такие x_n и x_n' из отрезка $[a,b]$, что $|x_n-x_n'|<\delta$, и в то же время $|f(x_n)-f(x_n')|\geq\varepsilon$. На основании леммы Больцано–Вейерштрасса, из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, такую, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$, где x_0 – некоторое число. Поскольку, очевидно, $x_0\in[a,b]$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а значит,

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0). \tag{3.33}$$

Далее, подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ отвечает некоторая подпоследовательность $\{x_{n_k}'\}$ подпоследовательности $\{x_n'\}$. При этом

$$\left(\left|x_{n_k}-x_{n_k}'\right|<\delta_k,\ \delta_k\to 0\right)\Rightarrow\left(\lim_{k\to\infty}x_{n_k}'=x_0\right),$$

а значит, $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k}')=f(x_0)$.

Отсюда и из (3.33) следует, что $\left|f(x_{n_k})-f(x_{n_k}')\right|\underset{k\to\infty}{\to}0$, а это противоречит тому, что при всех k будет $\left|f(x_{n_k})-f(x_{n_k}')\right|\geq\varepsilon$. Полученное противоречие и доказывает теорему.□

Упражнения к главе III

1. Пользуясь определением предела функции доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+5}{2x+1}=3$.

При каких x будет $\left|\dfrac{6x+5}{2x+1}-3\right|<0{,}001$?

2. Дана функция $y=\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2}$. Пользуясь определением предела функции, показать, что $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$. Каким должно быть M, чтобы было $(|x|>M)\Rightarrow(y<\varepsilon)$?

3. Дана функция $y=\dfrac{x+2}{3x-1}$. Если $x\to1$, то $y\to\dfrac{3}{2}$. Каким должно быть δ, чтобы было $(|x-1|<\delta)\Rightarrow\left(\left|y-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon\right)$?

Исследовать точки разрыва функций:

4. $y=x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x(x-1)}$;

5. $y=x\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x(1-x)}$;

6. $y=(x-1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x(x-1)}$;

7. $y=(x-1)\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x(x-1)}$;

8. $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x-1}}{2^{x^2}-1}$;

9. $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}\right)$;

10. $y=2^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}\right)}$;

11. $y=3^{\frac{x-2}{(1-x)x^2}}$;

12. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{1-x^2}$;

13. $y=2^{\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}}$;

14. $y=5^{\frac{1}{x-1}}-5^{\frac{1}{x}}$;

15. $y=\dfrac{10^{\frac{1}{x-1}}-1}{10^{\frac{1}{x+1}}-1}$;

16. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)$;

17. $y=3^{4^{\frac{x}{1-x}}}$;

18. $y=\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(x-2)^2}\right]$;

19. $y=\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{2-x}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]$;

20. $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2}\right)$

21. $y=(x+1)2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}$;

22. $y=\frac{1}{3^{\frac{x}{x-2}}-1}$;

23. $y=\frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$;

24. $y=\frac{2^{\operatorname{ctg} x}+1}{2^{\operatorname{ctg} x}-1}$;

25. $y=\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}}{2^{x^2}-1}$;

26. $y=(1+x)\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x^2}$;

27. $y=2^{\frac{1}{2(1-x)x^2}}$;

28. $y=\frac{2|x-1|}{x^2(1-x)}$.

Вычислить пределы:

29. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$;

30. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+x^2-6x+4}{x^3-3x^2+2x}$;

31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$;

32. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

Вычислить пределы:

33. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{6+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^3-3x+2}$;

34. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$;

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

36. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

37. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[7]{1+14x}}{\sqrt[4]{1+2x}+x-\sqrt[6]{1+x}}$;

38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$;

39.

40. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)x^{\frac{3}{2}}$;

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right);$$

41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; 42. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$;

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{a^3+x}-\sqrt[4]{a^4-2x}}{x}$;

44. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+20x^3-1}-\right.$
$\left.-\sqrt[3]{8x^3-6x^2+5}\right)$;

45. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+6x^2-1}-\sqrt[5]{32x^5-12x^4+x+6}\right)$.

Вычислить пределы:

46. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\frac{\pi}{4}-x}$;

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}}$;

48. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}^2x-1}{\cos 2x}$;

49. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$;

50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2x}$;

51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{x^2}$;

52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)+\cos(a-x)-2\cos x}{1-\cos x}$;

53. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$;

54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{x\arcsin^2\frac{x}{2}}$;

55. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

Вычислить пределы:

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^2}$;

57. $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{a}{2n}\right)$;

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{n}+3\sin^2\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^2}$;

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{n}+b\sin\dfrac{a}{n}\right)^n$;

60. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\operatorname{ctg}2x}$;

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\operatorname{tg}\left(a+\frac{b}{n}\right)}{\operatorname{tg}a}\right]^n$;

62. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\left(a+\dfrac{b}{n}\right)}{\sin a}\right]^n$;

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\left(\dfrac{n+1}{n-1}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^{\operatorname{tg}^2\left(\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$;

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^{\operatorname{tg}^2\left(\frac{n+1}{n+3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$;

65. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$;

66. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4x+e^{-x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

67. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}^2x}$;

68. $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{n}\right)$;

69. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$;

70. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{3}\right]^n$;

71. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\ln\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}$;

72. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln\left(2x^2+4x+1\right)-\ln\left(2x^2+5x-2\right)\right]$;

73. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}a}{\ln(x^2+\sqrt{1+x})}$;

74. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{2a+x}{a+x}$;

75. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2^x-\sqrt{2}}{\ln 2x}$;

76. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}{\cos x-\cos 2x}$;

77. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(2x-3)}{5^x-25}$;

78. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\ln\operatorname{ch}(2x-1)}{(9^x-3)^2}$;

79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^3+\sqrt{1+x^2}\right)}{\operatorname{ch}2x-\operatorname{ch}x}$;

80. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}-2\right)$, $a>0$.

81. Доказать, что если $x\to 0$, то

$$e^{ax}-e^{bx}\sim\sin ax-\sin bx.$$

82. Сравнить при $x\to 0$ функции $f(x)=10^{ax^2}-10^{bx^2}$ и $\varphi(x)=\operatorname{ch}ax-\operatorname{ch}bx$.

IV. Производная и дифференциал

1. Некоторые задачи, приводящие к понятию производной

Задача 1.1 «О скорости точки при неравномерном движении». Пусть точка M движется по прямой[1] траектории так, что пройденный ее путь есть известная функция времени: $s = f(t)$. Вычислим мгновенную скорость этой точки в момент t.

Пусть Δs – путь, пройденный точкой за время от момента t до момента $t + \Delta t$ (рис. 4.1). Очевидно, $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$. Тогда $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ есть средняя скорость точки на участке MM', на промежутке времени $[t, t + \Delta t]$. Пусть теперь $\Delta t \to 0$. Тогда $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, очевидно, стремится к мгновенной скорости точки M в момент t. Итак, искомая скорость равна

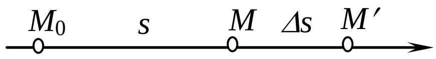


Рис. 4.1

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (4.1)$$

Пример 4.1. Рассмотрим свободное падение точки. В этом случае

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

а значит

$$\Delta s = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{g\left(2t\Delta t + (\Delta t)^2\right)}{2}.$$

Отсюда

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g\left(2t\Delta t + (\Delta t)^2\right)}{2\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g}{2}(2t + \Delta t) = gt.$$

Примечание. В школьном курсе физики, как известно, наоборот, из формулы $v = gt$ выводится формула $s = \dfrac{gt^2}{2}$.

Задача 1.2 «О плотности неоднородного стержня». Пусть имеется стержень некоторой длины l. Масса его участка OM зависит от положения точки M, т.е. $m = f(x)$. Считая функцию $f(x)$ известной, найдем плотность стержня в

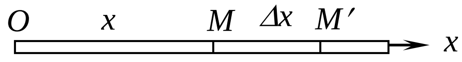


Рис.4.2

[1])Траекторию мы предполагаем прямолинейной в связи с тем, что для дуги произвольной формы у нас пока отсутствует строгое понятие длины кривой.

данной точке M. Пусть $\Delta m = f(x + \Delta x) - f(x)$ – масса участка MM', рис. 4.2. Тогда $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ есть средняя плотность участка MM'. Предположим теперь, что $\Delta x \to 0$. Тогда в пределе будем иметь искомую плотность в точке M

$$\gamma = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}.$$

Задача 1.3 «О силе тока». Пусть через сечение проводника за время от момента t_0 до произвольного момента времени t протекает количество электричества, равное $Q = f(t)$. Тогда за время $[t,\, t + \Delta t]$ через это сечение протекает количество электричества, равное $\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$. Величина $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ есть средняя сила тока в данном сечении на промежутке времени $[t,\, t + \Delta t]$.

Пусть теперь $\Delta t \to 0$. Тогда в пределе получим силу тока в данном сечении проводника в данный момент t

$$J = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Примечание. Рассмотренные задачи, несмотря на полное различие их физического содержание (вместо них можно было бы рассматривать задачи и с другим физическим смыслом), с математической точки зрения решаются одинаково. Они приводят к одному из важнейших понятий математического анализа – понятию производной.

2. Производная, ее геометрический смысл

Возьмем некоторую функцию $y = f(x)$ и произвольное $x_0 \in D_f$. Придадим величине x приращение Δx, такое, что $[x_0,\, x_0 + \Delta x] \in D_f$. Вычислим соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Пусть теперь $\Delta x \to 0$. Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует и не зависит от способа стремления Δx к нулю, называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f(x_0)$. Сама же функция $f(x)$ в этом случае называется дифференцируемой в точке x_0.

Итак, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (4.2)$$

Иными словами, производной функции в данной точке называется предел отношения приращения этой функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Пример 4.2. Вычислим производную функции $y = x^3$ в точке $x = 2$. Имеем

$$\Delta y = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Отсюда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 12.$$

Пример 4.3. Пусть $y = \sqrt[3]{x}$, а $x = 0$. Тогда

$$\Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{\Delta x},$$

а значит

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty.$$

Итак, функция $y = \sqrt[3]{\Delta x}$ в точке $x = 0$ не дифференцируема, поскольку предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ для неё в этой точке не существует.

Если в равенстве (4.2) заменить фиксированное x_0 на произвольное x, то получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

или

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Величина $y' = f'(x)$, вообще говоря, является функцией от x.

Выясним геометрический смысл производной. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть угловой коэффициент секущей MM', рис. 4.3. Если $\Delta x \to 0$, то точка M' приближается к точке M, и положение секущей стремится к положению касательной в точке M.

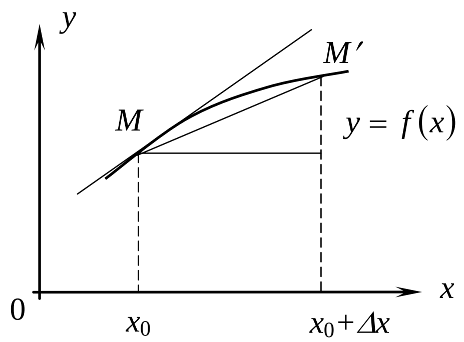


Рис.4.3

Итак, производная функции в данной точке геометрически представляет собой угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке с данной абсциссой x.

Обратимся снова к равенству (4.1). Оно означает теперь, что скорость точки есть производная пути как функции времени или, как говорят, производная пути по времени. Но скорость точки – это «быстрота» изменения пройденного ею пути. В связи с этим производную любой функции можно рассматривать как скорость изменения этой функции относительно ее аргумента. В этом и состоит физический смысл производной.

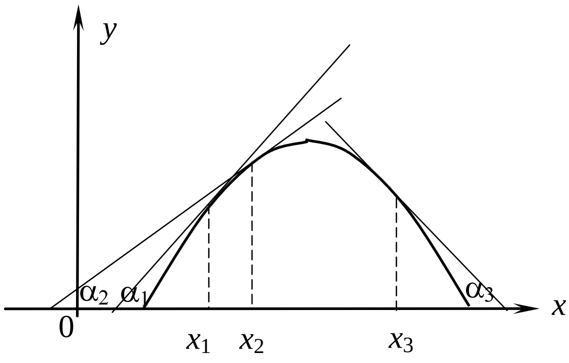


Рис.4.4

Рассмотрим функцию, график которой представлен на рис. 4.4. Геометрически очевидно, что $f'(x_2) > 0$ и $f'(x_1) > 0$, но при этом $f'(x_1) > f'(x_2)$ (поскольку углы α_1 и α_2 – острые, причем $\alpha_1 > \alpha_2$). В то же время $f'(x_3) < 0$, поскольку угол α_3 – тупой. Физически же это означает, что в точках x_1 и x_2 функция $f(x)$ возрастает, причем в точке x_1 быстрее, чем в точке x_2, а в точке x_3 эта функция убывает.

Итак, если производная функции положительная, то функция возрастает и тем быстрее, чем больше производная; если же производная отрицательная, то функция убывает, причем тем быстрее, чем больше модуль производной.

Ниже, в главе V эти утверждения будут несколько уточнены и доказаны более строго, без использования геометрических соображений.

3. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Получим сначала одну важную формулу. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Это означает, что существует предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается от своего предела на бесконечно малую величину, т. е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha, \tag{4.3}$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Следовательно,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\,\Delta x. \tag{4.4}$$

Переходя от (4.3) к (4.4), мы молча предположили, что Δx не обращается в нуль. Но если $\Delta x = 0$, то из (4.4) следует, что тогда $\Delta y = 0$, что, естественно, и должно быть. Таким образом, формула (4.4) верна при любом способе стремления Δx к нулю.

Теорема 4.1. Если функция дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в этой точке.

■В силу условия, $f'(x_0)$ есть конечное число. Но тогда, на основании (4.4), получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(x_0) + \alpha \right] \Delta x = 0,$$

что и доказывает теорему.□

Утверждение, обратное теореме 4.1, неверно, т. е. функция может быть непрерывной в данной точке, но не дифференцируемой. В частности (см. пример 4.3), функция $\sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$ непрерывна, но не дифференцируема. Геометрически это значит, что в точке O касательная к линии $y = \sqrt[3]{x}$ вертикальна.

Другие случаи нарушения дифференцируемости в точке непрерывности функции будут рассмотрены в главе V.

4. Производная степенной функции

Пусть $y = x^a$, где a – любое число. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\Delta x} x^a = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\frac{\Delta x}{x}} x^{a-1}.$$

На основании формулы (3.30), имеем окончательно

$$y' = ax^{a-1}.$$

Итак, производная степенной функции (с любым показателем) равна показателю степени, умноженному на основание в степени, на единицу меньшей первоначального показателя.

Пример 4.4. Пусть $y = x^3$. Тогда, в силу (4.5) $y' = 3x^2$. В частности, положив здесь $x = 2$, получим $y = 12$. Этот результат ранее был получен непосредственно (см. пример 4.2).

Пример 4.5. Пусть $y = \sqrt{x}$. Тогда $y' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пример 4.6. Пусть $y = \frac{1}{x}$. Тогда $y' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Пример 4.7. Пусть $y = x$. Тогда $y' = \left(x^1\right)' = 1 \cdot x^0 = 1$. Этот результат очевиден, так как если $y = x$, то $\Delta y = \Delta x$, а значит $y' = 1$.

5. Основные правила нахождения производной

Теорема 4.2. Производная постоянной величины тождественно равна нулю.

■Пусть $y = C$, где $C = const$. Тогда при любом Δx будет $\Delta y = 0$, а значит и $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.□

Этот результат очевиден, так как постоянная величина не изменяется, т. е. скорость ее изменения равна нулю.

Теорема 4.3. Производная суммы дифференцируемых функций равна сумме их производных.

■Пусть $y = u(x) + v(x)$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

т. е.

$$y' = u' + v',$$

что и требовалось доказать.□

Очевидно, данная теорема верна для любого конечного числа слагаемых.

Пример 4.8. Пусть $y = x^4 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - 2$.

Тогда $$y' = 4x^3 - \frac{1}{3} x^{-4/3} + 0 = 4x^3 - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Следствие теоремы 4.3. Если две функции при всех x различаются между собой на одно и то же число, то их производные тождественно равны между собой.

Теорема 4.4. Производная произведения дифференцируемых функций равна производной первого сомножителя, умноженной на второй сомножитель без изменения, плюс производная второго сомножителя, умноженная на первый сомножитель без изменения.

■Пусть $y = u(x)v(x)$. Тогда

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x).$$

Но так как

$$u(x+\Delta x) - u(x) = \Delta u,$$

то

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u,$$

и, аналогично,

$$\nu(x+\Delta x) = \nu(x) + \Delta\nu.$$

Поэтому

$$\Delta y = \left(u(x) + \Delta u\right)\left(\nu(x) + \Delta\nu\right) - u(x)\nu(x) = u\,\Delta\nu + \nu\Delta u + \Delta u\,\Delta\nu.$$

Отсюда

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\Delta\nu + \nu\Delta u + \Delta u\Delta\nu}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u\Delta\nu}{\Delta x} + \frac{\nu\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u\,\Delta\nu}{\Delta x}\right) =$$

$$= u\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\nu}{\Delta x}\right) + \nu\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\nu.$$

Поскольку функция дифференцируема, то она и непрерывна, а значит $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\nu = 0$. Поэтому

$$y' = u'\nu + \nu' u + u'\cdot 0$$

т. е.

$$y' = u'\nu + \nu' u\ .\square$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Действительно, пусть $y = Cf(x)$. Тогда, на основании теоремы 4.4,

$$y' = C'f(x) + Cf'(x) = 0\cdot f(x) + Cf'(x) = Cf'(x).$$

Пример 4.9. Пусть $y = \left(3x^2 + 4x\right)\left(\frac{5}{x} + \sqrt[3]{x}\right)$. Тогда

$$y' = (6x+4)\left(\frac{5}{x} + \sqrt[3]{x}\right) + \left(3x^2 + 4x\right)\left(-\frac{5}{x^2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right).$$

Теорема 4.5. Производная дроби с дифференцируемыми числителем и знаменателем равна новой дроби, числитель которой есть производная числителя исходной дроби, умноженная на знаменатель исходной дроби без изменения, минус числитель исходной дроби, умноженный на производную ее знаменателя, а знаменатель равен квадрату знаменателя исходной дроби.

■Пусть $y = \dfrac{u(x)}{\nu(x)}$. Тогда

$$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{\nu(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{\nu(x)} = \frac{u+\Delta u}{\nu+\Delta\nu} - \frac{u}{\nu} = \frac{(u+\Delta u)\nu - (\nu+\Delta\nu)u}{(\nu+\Delta\nu)\nu} = \frac{\nu\Delta u - u\Delta\nu}{(\nu+\Delta\nu)\nu}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\nu\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta\nu}{\Delta x}}{(\nu+\Delta\nu)\nu},$$

а значит

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\nu\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta\nu}{\Delta x}}{\nu(\nu+\Delta\nu)}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\nu\frac{\Delta u}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}u\frac{\Delta\nu}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\nu(\nu+\Delta\nu)}=\frac{\nu\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\nu}{\Delta x}}{\nu\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\nu+\Delta\nu)}.$$

Поскольку функция $\nu(x)$ дифференцируема, то она и непрерывна, а значит $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\nu=0$. Поэтому, окончательно

$$y'=\frac{u'\nu-u\nu'}{\nu^2}.\square \tag{4.6}$$

Пример 4.10. Пусть $y=\frac{x^2}{x^3+4}$. Тогда

$$y'=\frac{2x(x^3+4)-x^2 3x^2}{(x^3+4)^2}=\frac{8x-x^4}{(x^3+4)^2}.$$

6. Производная показательной и логарифмической функций

Пусть $y=a^x$. Тогда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}.$$

На основании формулы (3.28) имеем окончательно

$$y'=a^x\ln a.$$

В частности, если $a=e$, т. е. если $y=e^x$, то $y'=e^x$.

Пусть теперь $y=\ln x$. Тогда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\frac{(x+\Delta x)}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x},$$

а так как, в силу (3.27), при $\Delta x\to 0$ будет $\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\sim\frac{\Delta x}{x}$, то

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x},$$

т. е.

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Примечание. Пусть $y = \lg x$. Тогда (см. главу I) $y = M_1 \ln x$, где $M_1 = 0{,}43\ldots$, а значит $y' = \dfrac{M_1}{x}$. Аналогичное замечание, относится и к логарифмам с любым другим основанием, отличным от e.

7. Производные тригонометрических функций

Пусть $y = \sin x$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Аналогично, если $y = \cos x$, то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\lim_{x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

Точно так же можно вычислить производные функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Однако целесообразнее воспользоваться формулой (4.6). Имеем для $y = \operatorname{tg} x$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично, пусть $y = \operatorname{ctg} x$. Тогда

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

8. Производная обратной функции

Теорема 4.6. Пусть функция $y = f(x)$ определена и строго монотонна в некотором промежутке E и пусть в некоторой точке $x \in E$ существует производная $y_0 = f(x_0) \neq 0$. Тогда в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ обратная функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $x_0' = \varphi'(y_0)$, причем

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4.7}$$

■Положим $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Тогда из (4.4) находим

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{f'(x_0) + \alpha},$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно,

$$\varphi'(x_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{f'(x_0) + \alpha}.$$

Из монотонности функции $y = f(x)$ следует, что ($\Delta x \to 0$)$\Leftrightarrow$($\Delta y \to 0$). Поэтому

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f(x_0) + \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.\square$$

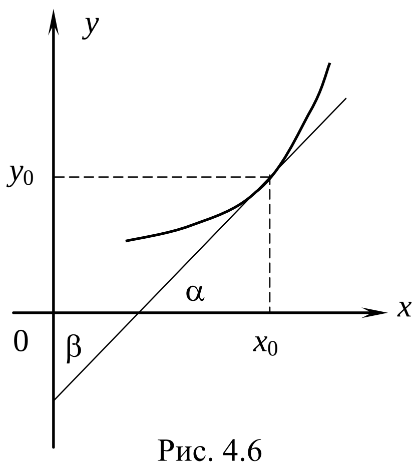


Рис. 4.6

Доказанную формулу записывают еще так

$$x_y' = \frac{1}{y_x'} \tag{4.8}$$

Примечание. Формула (4.7) имеет простой геометрический смысл (рис. 4.6). Действительно, очевидно, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, $\varphi'(y_0) = \operatorname{tg}\beta$, а так как $\beta = 90^\circ - \alpha$, то $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, откуда следует (4.7).

Пример 4.11. Пусть $y = \ln x$. Тогда $x = e^y$, и формула (4.8) дает

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x},$$

что совпадает с результатом, полученным ранее непосредственно.

9. Производные обратных тригонометрических функций

Пусть $y = \arcsin x$. Тогда $x = \sin y$, а значит

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

В данном случае именно $\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}$, так как функция $y = \arcsin x$ изменяется в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, рис. 4.7.

Точно так же можно найти производную функции $y = \arccos x$. Однако проще поступить иначе. Действительно, из тождества

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

имеем

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

а значит

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2}\right)' - (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

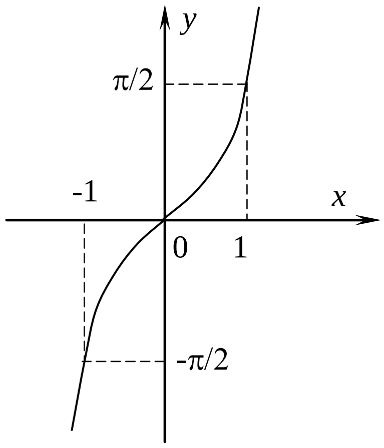


Рис. 4.7

Пусть теперь $y = \operatorname{arctg} x$. Тогда $x = \operatorname{tg} y$, а значит

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Наконец, в силу тождества

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},$$

находим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

10. Производные гиперболических и обратных гиперболических функций

Пусть $y = \operatorname{sh} x$. Тогда

$$y' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2},$$

$$(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{0 \cdot e^x - 1 \cdot e^x}{e^{2x}} = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x},$$

а поэтому

$$y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Аналогично, если $y = \operatorname{ch} x$, то

$$y' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{\left(e^x\right)' + \left(e^{-x}\right)'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Далее,

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Пусть теперь $y = \operatorname{Arsh} x$. Тогда $x = \operatorname{sh} y$, а значит

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Аналогично, если $y = \operatorname{Arch} x$, то $x = \operatorname{ch} y$, а значит

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{ch} y)'} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Легко видеть, что результаты этого параграфа еще раз подтверждают аналогию между тригонометрическими и гиперболическими функциями.

11. Таблица основных формул и правил нахождения производных

$(Const)' \equiv 0$		$(u \cdot v)' = u'v + uv'$	
$(u + v)' = u' + v'$		$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	
$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

	$(\operatorname{Arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$(\operatorname{Arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

12. Производная сложной функции

Теорема 4.7. Пусть функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, где $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда и сложная функция $F(x) = f\,[\varphi(x)]$ дифференцируема в точке x_0, причем

$$F'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0). \tag{4.9}$$

Пусть $\Delta u = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$, $\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)$. В силу (4.4), имеем

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha \Delta x, \tag{4.10}$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$. Следовательно,

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] =$$

$$= f'(u_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а значит и непрерывна в ней, так что ($\Delta x \to 0$) $\Leftrightarrow$ ($\Delta u \to 0$). Поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha = 0$, и получаем

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) + 0 \cdot u'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0).\square$$

Примечание. Функция $u = \varphi(x)$ не обязательно монотонна. Поэтому при некоторых $\Delta x \neq 0$ может быть $\Delta u = 0$. Однако формула (4.10), как отмечалось, верна и при $\Delta u = 0$.

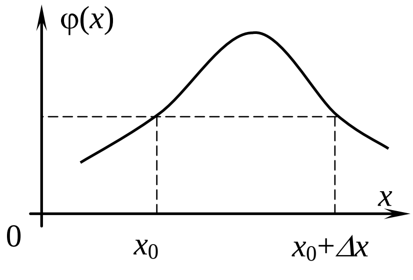


Рис. 4.8

Формулу (4.9) чаще записывают так

$$y'_x = y'_u\, u'_x. \tag{4.11}$$

Итак, производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную самого′ промежуточного аргумента.

Пример 4.12. Пусть $y = \sin 3x$. Это значит, что $y = \sin u$, где $u = 3x$, и формула (4.11) дает

$$y' = (\sin u)'_u (3x)'_x = \cos u \cdot 3 = 3\cos 3x.$$

Пример 4.13. Пусть $y = 10^{\operatorname{tg} x}$. Это значит, что $y = 10^u$, где $u = \operatorname{tg}x$, и поэтому

$$y' = 10^u \ln 10 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \ln 10 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 10^{\operatorname{tg} x}.$$

Пример 4.14. Пусть $y = (x^3 + 2)^{100}$. Это значит, что $y = u^{100}$, где $u = x^3 + 2$. Имеем

$$y' = 100 \cdot u^{99} \cdot 3x^2 = 300 \cdot \left(x^3 + 2\right)^{99} x^2.$$

Пусть теперь имеются два промежуточных аргумента, т. е. пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$. Тогда, по формуле (4.10),

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Но в данном случае u, в свою очередь, есть сложная функция аргумента x, а значит эта же формула (4.10) дает

$$u'_x = u'_v v'_x.$$

Поэтому окончательно

$$y'_x = y'_u\, u'_v v'_x.$$

Аналогично обстоит дело и в случае большего числа промежуточных аргументов.

Пример 4.15. Пусть $y = e^{\sqrt{\arcsin x}}$. Тогда

$$y = e^u,\ u = \sqrt{v},\ v = \arcsin x,$$

а значит

$$y' = e^u \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{e^{\sqrt{\arcsin x}}}{2\sqrt{\arcsin x}\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пример 4.16. Пусть $y = \operatorname{ch}\left[\ln^2(1 - x)\right]$. Мысленно вводя промежуточные аргументы, находим

$$y' = \operatorname{sh}\left[\ln^2(1 - x)\right] \cdot 2 \cdot \ln(1 - x) \cdot \frac{1}{1 - x}(-1) = -\frac{2}{1 - x} \cdot \ln(1 - x) \cdot \operatorname{sh}\left[\ln^2(1 - x)\right].$$

Примечание. Нахождение производной данной функции при помощи описанных выше формул и правил называется дифференцированием этой функции.

13. Дифференцирование неявных функций

Пусть задано уравнение, содержащее x и y. В общем виде его записывают так: $f(x,y) = 0$. Такое уравнение определяет, вообще говоря, некоторую неявную функцию $y = \varphi(x)$, подставляя которую в уравнение, мы, естественно, обращаем его в тождество, т.е. $f[x,\varphi(x)] \equiv 0$. Поэтому для нахождения y'_x надо дифференцировать уравнение $f(x,y) = 0$ именно как тождество, помня о том, что в нем y есть упомянутая выше функция $\varphi(x)$. В этом случае y играет роль промежуточного аргумента.

Пример 4.17. Возьмем уравнение $x^3 + \mathrm{tg} y = 2$. Дифференцируя его по только что сформулированному правилу, получаем

$$3x^2 + \frac{1}{\cos^2 y} y' = 0,$$

откуда

$$y' = -3x^2 \cos^2 y.$$

В данном случае, очевидно, от неявного задания легко перейти к явному. Имеем

$$\mathrm{tg} y = 2 - x^3,$$

откуда

$$y = \mathrm{arctg}\left(2 - x^3\right) + n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

а значит

$$y' = \frac{1}{1 + (2 - x^3)^2}(-3x^2) = -\frac{3x^2}{1 + (2 - x^3)^2},$$

что совпадает с предыдущим результатом, поскольку, в силу исходного уравнения, $\mathrm{tg} y = 2 - x^3$, а значит

$$\frac{1}{1 + (2 - x^3)^2} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} = \cos^2 y.$$

Пример 4.18. Пусть имеется функция, заданная уравнением

$$xy + e^x + \sin y = 0$$

(в этом случае переход к явному заданию, очевидно, невозможен). Тогда

$$y + xy' + e^x + \cos y \cdot y' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{y + e^x}{x + \cos y}.$$

Пример 4.19. Пусть $x = \varphi(y)$ – функция, обратная функции $y = f(x)$. Дифференцируя равенство $x = \varphi(y)$, как уравнение, определяющее неявную функцию, получим

$$1 = \varphi'(y)y',$$

откуда

$$y' = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

т. е.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Тем самым получена уже знакомая формула (4.8).

14. Логарифмическое дифференцирование

Возьмем функцию

$$y = \frac{\sqrt[3]{1+x^2} \cdot 2^{\sin x}(\mathrm{tg}x - 1)^5}{x^3 \ln^2 x}.$$

Непосредственное дифференцирование такой функции, хотя и возможно, но затруднительно из-за большого числа сомножителей. Здесь удобнее сначала прологарифмировать эту функцию. Получим тогда

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln\left(1+x^2\right) + \sin x \cdot \ln 2 + 5\ln(\mathrm{tg}x - 1) - 3\ln x - 2\ln(\ln x).$$

Дифференцируя теперь это равенство, как уравнение, задающее неявную функцию, находим

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{3}\frac{2x}{1+x^2} + \cos x \cdot \ln 2 + \frac{5}{\mathrm{tg}x - 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{x} - \frac{2}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда

$$y' = \left[\frac{2x}{3\left(1+x^2\right)} + \cos x \cdot \ln 2 + \frac{5}{(\mathrm{tg}x - 1)\cos^2 x} - \frac{3}{x} - \frac{2}{x\ln x}\right]y,$$

т. е.

$$y' = \left[\frac{2x}{3\left(1+x^2\right)} + \cos x \cdot \ln 2 + \frac{5}{(\mathrm{tg}x - 1)\cos^2 x} - \frac{3}{x} - \frac{2}{x\ln x}\right] *$$

$$* \frac{\sqrt[3]{1+x^2} \cdot 2^{\sin x}(\mathrm{tg}x - 1)^5}{x^3 \ln^2 x}.$$

Описанный прием называется логарифмическим дифференцированием. Он применим также к дифференцированию т. н. показательно-степенных функций, т. е. функций вида $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$. Такие функции нельзя отнести ни к степенным, ни к показательным, а значит нельзя воспользоваться соответствующими формулами таблицы производных[1].

Пример 4.20. Пусть $y = (\sin x)^{\cos x}$. Тогда

---

[1]) Впрочем, этой трудности можно избежать, если воспользоваться тем, что $[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)}$.

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x,$$

а значит

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x,$$

откуда

$$y' = \left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) y = (\mathrm{ctg} x \cdot \cos x - \sin x \cdot \ln \sin x) \cdot (\sin x)^{\cos x}.$$

Методом логарифмического дифференцирования легко получить и некоторые из уже известных формул. Пусть, например, $y = x^a$. Тогда

$$\ln y = a \ln x,$$

откуда

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{a}{x},$$

а значит

$$y' = \frac{a}{x} y = \frac{a}{x} x^a = a x^{a-1},$$

т.е. мы получим формулу для производной степенной функции, не используя предел (3.30).

Аналогично, пусть $y = u(x)\nu(x)$. Тогда

$$\ln y = \ln u + \ln \nu,$$

а значит

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{\nu} \cdot \nu',$$

откуда

$$y' = \left(\frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{\nu} \cdot \nu' \right) y = \left(\frac{u'}{u} + \frac{\nu'}{\nu} \right) \cdot u\nu = u'\nu + u\nu'.$$

Точно так же получается формула для производной дроби.

15. Геометрические и физические приложения производных

Пусть $f(x)$ – некоторая функция, а x_0 – некоторое число, принадлежащее D_f. Тогда, как мы видели, число $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0, рис. 4.9. Поэтому уравнение этой касательной (CM) записывается так

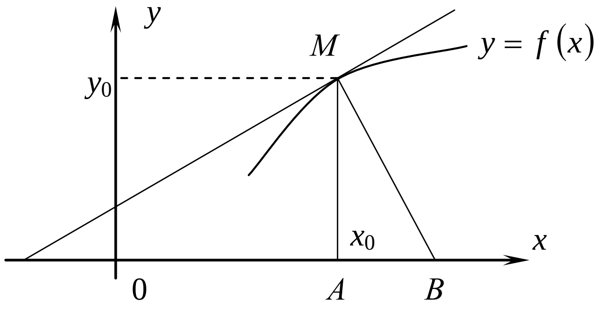


Рис. 4.9

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется нормалью к данной кривой в данной точке. Очевидно, ее угловой коэффициент равен $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$, а значит, уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Длина отрезка *CM* касательной от точки касания до точки пересечения с осью *Ox* называется длиной касательной данной кривой в данной точке *M*. Аналогично, длина отрезка *MB* нормали между точками пересечения с кривой и осью *Ox* называется длиной нормали данной кривой в данной точке *M*. Отрезки *AC* и *AB* называются соответственно подкасательной и поднормалью данной кривой в данной точке. Поскольку $AM = y_0$, а $\angle MCA = \angle AMB = \operatorname{arctg} f'(x_0)$, то длины всех четырех отрезков: *AC*, *AB*, *MC* и *MB* легко находятся из прямоугольных треугольников. Например,

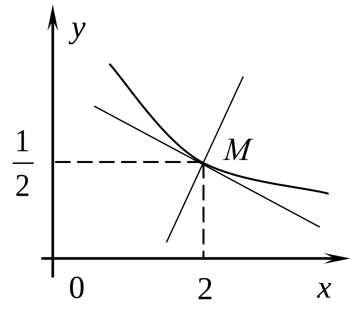


Рис. 4.10

$$AC = AM \cdot \operatorname{ctg}\angle MCA = \frac{AM}{\operatorname{tg}\angle MCA} = \frac{y_0}{y_0'},$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Пример 4.21. Составим уравнение касательной и нормали к линии $y = \dfrac{1}{x}$ в точке *M* (2, 1/2), рис. 4.10.

Имеем

$$y' = -\frac{1}{x^2},$$

а значит $y'(2) = -\dfrac{1}{4}$. Поэтому уравнение касательной:

$$y - \frac{1}{2} = -4(x - 2).$$

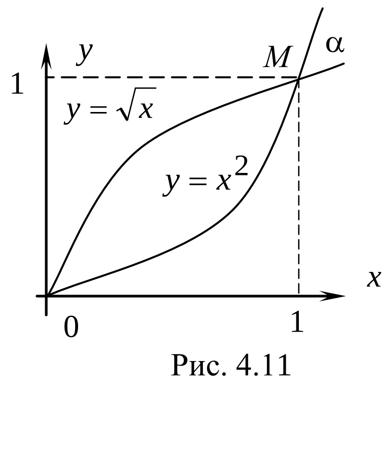


Рис. 4.11

Пример 4.22. Найдем угол, под которым пересекаются линии $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ в точке *M* (1,1), рис. 4.11. Из уравнений линий находим

$$y' = 2x\,,\; y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,,$$

а значит угловые коэффициенты касательных в точке $M\,(1{,}1)$ равны

$$k_1 = 2, \quad k_2 = \frac{1}{2},$$

отсюда для искомого угла α получаем

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2 - 1/2}{1 + 2 \cdot 1/2} = \frac{3}{4}.$$

Пример 4.23. К линии $y = 2x^2 + 4x - 1$ провести касательную, параллельную прямой $x + 2y - 3 = 0$.

В данном случае точка касания (x_0, y_0) заранее не известна, но зато известен угловой коэффициент касательной $k = -\frac{1}{2}$. Поэтому, находя $y' = 4x + 4$, полагаем

$$4x_0 + 4 = -\frac{1}{2},$$

откуда

$$x_0 + 1 = -\frac{1}{8},$$

а значит

$$x_0 = -\frac{9}{8},\; y_0 = \frac{81}{32} - \frac{9}{2} - 1 = -\frac{95}{32}.$$

Итак, уравнение искомой касательной:

$$y + \frac{95}{32} = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{9}{8}\right).$$

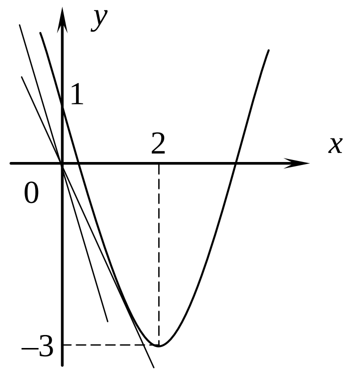


Рис. 4.12

Пример 4.24. К линии $y = x^2 - 4x + 1$ провести касательную из начала координат, рис. 4.12.

Пусть (x_0, y_0) – неизвестная точка касания. Тогда искомое уравнение касательной:

$$y - y_0 = (2x_0 - 4)(x - x_0).$$

Потребуем, чтобы касательная проходила через точку O. Получим

$$-y_0 = (2x_0 - 4)(-x_0),$$

т. е.

$$y_0 = 2x_0^2 - 4x_0,$$

или

$$x_0^2 - 4x_0 + 1 = 2x_0^2 - 4x_0,$$

отсюда

$$x_0^2 = 1,$$

а значит $x_0' = 1,\ \ x_0'' = -1$.

Получаем две точки касания $M_1(1,-2), M_2(-1,6)$. Уравнения касательных $y+2=-2(x-1),\ \ y-6=-6(x+1)$.

Пример 4.25. Точка движется так, что пройденный ею путь изменяется по закону $s = 2t + 3t + 1$. Найдем скорость этой точки в момент t = 2.

В произвольный момент скорость данной точки равна

$$v = s'(t) = 6t^2 + 3.$$

Следовательно, при t = 2 будет

$$v = 24 + 3 = 27.$$

16. Производные высших порядков

Пусть имеется дифференцируемая функция $y = f(x)$. Найдем ее производную $y' = f'(x)$. Предположим, что она также является дифференцируемой функцией. Тогда можно найти ее производную, т.е. производную производной. Ее называют производной 2-го порядка функции $y = f(x)$ и обозначают y'', или $f''(x)$. Прежнюю производную $y' = f'(x)$ можно называть в этом смысле производной 1-го порядка[*)].

Аналогично вводится понятие производной 3-го порядка как производной функции $y'' = f''(x)$ и т. д. Производные 3-го, 4-го, 5-го, … порядков обозначаются y''', y^{IV}, y^{V}, … , или, соответственно, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x)$. Если n – произвольное натуральное число, то производную n-го порядка функции $y = f(x)$ обозначают $y^{(n)}$, или $f^{(n)}(x)$.

Очевидно, что производная любого порядка находится из производной предыдущего порядка при помощи обычных правил дифференцирования.

Пример 4.26. Пусть $y = x^n$, где $n > 0$ и целое. Тогда

$$y' = nx^{n-1},\ y'' = n(n-1)x^{n-2},\ y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3},\dots,\ y^{(n-1)} =$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2x,$$
$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n! = const,\ y^{(n+1)} \equiv 0,\ y^{(n+2)} \equiv 0,\dots$$

Очевидно, и для любого многочлена n-ой степени все производные, начиная с производной $(n+1)$-го порядка, тождественно равны нулю.

Пример 4.27. Пусть $y = \ln x$. Тогда

[*)] В ряде случаев саму функцию $f(x)$ удобно рассматривать условно как производную этой функции нулевого порядка (см. например #17).

$$y'=\frac{1}{x},\ y''=-\frac{1}{x^2},\ y'''=\frac{1\cdot 2}{x^3},\ y^{IV}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4},\ldots,\ y^{(n)}=(-1)^n\frac{n-1}{x^n}.$$

Последнее равенство верно при любом $n\geq 1$. Правда, при этом мы (для n = 1) должны считать, что 0!=1, хотя выражение 0! кажется вообще лишенным смысла. Однако ниже мы познакомимся с таким обобщением понятия факториала, при котором выражение 0! не только приобретает смысл, но и окажется равным именно 1.

Заметим еще, что получение общего вида производной $y^{(n)}$, пригодного для любого n, как это имело место в последнем примере, возможно лишь для очень немногих функций простейшего вида. Для подавляющего же большинства функций в выражениях для y', y'', y''', … отсутствует какая-либо видимая закономерность.

Пример 4.28. Пусть теперь функция задана неявно. Возьмем, например, уравнение

$$x^3+y^2=1.$$

Если подставить в него $y=g(t)$, то мы получим тождество, дифференцируя которое, имеем

$$3x^2+2yy'=0, \tag{4.12}$$

откуда

$$y'=-\frac{3x^2}{2y}.$$

Дифференцируя теперь уравнение (4.12), получим

$$6x+2y'^2+2yy''=0, \tag{4.13}$$

откуда

$$y''=-\frac{6x+2y'^2}{2y}=-\frac{3x+y'^2}{y}.$$

Подставляя сюда ранее найденное выражение для y', находим окончательно

$$y''=-\frac{3x+\dfrac{9x^4}{4y^2}}{y}=-\frac{12xy^2+9x^4}{4y^3}.$$

Аналогично, дифференцируя равенство (4.13) и используя уже полученные выражения для y' и y'', находим y''' и т. д.

17. Формула Лейбница

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – функции, дифференцируемые нужное число раз.

Тогда
$(u\nu)' = u'\nu + u\nu'$, $(u\nu)'' = u''\nu + 2u'\nu' + u\nu''$, $(u\nu)''' = u'''\nu + 3u''\nu' + 3u'\nu'' + u\nu'''$ и т. д. Легко видеть, что правые части этих равенств напоминают разложения соответствующих степеней бинома $u + \nu$. Докажем, что это правило верно для любого натурального n, т. е. при любом n

$$(u\nu)^{(n)} = u^{(n)}\nu + nu^{(n-1)}\nu' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}\nu'' + \ldots +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))}{m!}u^{(n-m)}\nu^{m} + \ldots + u\nu^{(n)},$$

или, если воспользоваться известной формулой комбинаторной теории для сочетаний, то получим

$$(u\nu)^{(n)} = u^{(n)}\nu + C_n^1 u^{(n-1)}\nu' + C_n^2 u^{(n-2)}\nu'' + \ldots + C_n^n u\nu^{(n)},$$

или, еще короче,

$$(uv)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m)}. \tag{4.14}$$

Для доказательства применим метод математической индукции. Мы видели, что формула (4.14) верна при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$. Предположим, что она выполняется для некоторого n, и докажем, что тогда она верна и для производной (n+1)-го порядка. Отсюда и будет следовать, что формула (4.14) имеет место при всех n.

Имеем из (4.14)

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m+1)} v^{(m)} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m+1)}. \tag{4.15}$$

Приведем справа подобные члены. Первое слагаемое первой суммы, равное $u^{(n+1)}v$, и последнее слагаемое второй суммы, равное $uv^{(n+1)}$, не имеют подобных себе слагаемых. Следовательно, они будут соответственно первым и последним слагаемым правой части равенства (4.15). Если же $1 \le m \le n$, то произведение $u^{(n-m+1)}v^{(m)}$ имеет общий коэффициент, равный $C_n^m + C_n^{m-1}$. Но

$$C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n(n-1)...(n-(m-2))(n-(m-1))}{m!} + \frac{n(n-1)...(n-(m-2))}{(m-1)!} =$$
$$= \frac{n(n-1)...(n-(m-2))}{(m-1)!}\left[\frac{n-(m-1)}{m} + 1\right] = \frac{n(n-1)...(n-(m-2))}{(m-1)!}\cdot\frac{n+1}{m} =$$
$$= \frac{(n+1)n(n-1)...((n+1)-(m-1))}{m!} = C_{n+1}^m.$$

Итак, равенство (4.15) принимает вид

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + \sum_{m=1}^{n} C_{n+1}^{m} u^{(n-m+1)} v^{(m)} + uv^{(n+1)},$$

т. е.

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^{m} u^{((n+1)-m)} v^{(m)} .$$

Но эта формула получается из (4.14) путем замены n на $n+1$. Тем самым доказана справедливость формулы (4.14) для любого натурального n.

Формулу (4.14) называют формулой Лейбница.

Пример 4.29. Пусть $y = e^{ax}\left(x^2+1\right)$. Вычислим $y^{(15)}$.

Формула Лейбница дает

$$y^{(15)} = (e^{ax})^{(15)}(x^2+1) + 15(e^{ax})^{(14)}(x^2+1)' + \frac{15\cdot 14}{2}(e^{ax})^{(13)}(x^2+1)''$$

(все остальные слагаемые справа тождественно равны нулю, так как $(x^2+1)^{(m)} \equiv 0$ для всех $m = 3, 4, \ldots, 15$). Следовательно,

$$y^{(15)} = a^{15}e^{ax}\left(x^2+1\right) + 15a^{14}e^{ax}2x + \frac{15\cdot 14}{2}a^{13}e^{ax}\cdot 2 =$$

$$a^{13}e^{ax}\left[a^2\left(x^2+1\right) + 30ax + 210\right].$$

18. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0. Тогда, согласно формуле (4.4), приращение этой функции в точке x_0 имеет вид

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x .$$

Здесь $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$, а значит при $\Delta x\to 0$ будет $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$. В тоже время, если в точке x_0 будет $y' \neq 0$, то $y'\Delta x = O^*(\Delta x)$. Отсюда следует, что при $\Delta x\to 0$ будет $\Delta y \approx y'\Delta x$, т. е. при $\Delta x\to 0$ бесконечно малая $y'\Delta x$ есть главная часть бесконечно малой Δy.

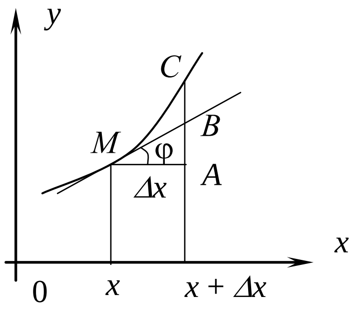


Рис. 4.13

Бесконечно малая $y'\Delta x$, являющаяся главной частью бесконечно малого приращения функции, вызванного бесконечно малым приращением аргумента Δx, называется дифференциалом функции $y = f(x)$ и обозначается dy или $df(x)$.

Выясним геометрический смысл дифференциала, рис. 4.13. Поскольку $y' = \mathrm{tg}\varphi$, то

$$dy = y'\Delta x = \Delta x\cdot \mathrm{tg}\,\varphi = AB .$$

Итак, геометрически дифференциал представляет собой бесконечно малое приращение ординаты касательной к графику данной функции в точке с данной абсциссой x. Иными словами, дифференциал – это приращение, которое имела бы функция при бесконечно малом приращении аргумента, если бы она, начиная с данного x, стала линейной.

Пример 4.30. Пусть $y = x^2$. Положим $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$. Тогда

$$\Delta y = 1{,}1^2 - 1^2 = 0{,}21;$$
$$dy = 2x_0 \Delta x = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}2.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y - dy}{dy} = \frac{0{,}01}{0{,}2} = 0{,}05.$$

Пусть теперь $\Delta x = 0{,}01$. Тогда

$$\Delta y = 1{,}01^2 - 1^2 = 2{,}01 \cdot 0{,}01 = 0{,}0201,$$
$$dy = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}02,$$

а значит

$$\frac{\Delta y - dy}{dy} = \frac{0{,}0001}{0{,}02} = 0{,}005.$$

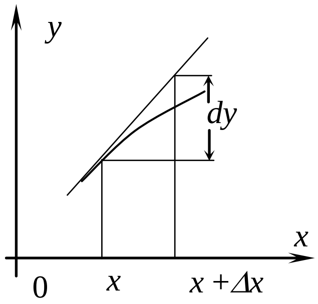


Рис.4.14

Если бы мы взяли Δx еще меньше, то и отношение $\dfrac{\Delta y - dy}{dy}$ уменьшилось бы. Это иллюстрирует тот факт, что если $\Delta x \to 0$, то $dy = O^*(\Delta x)$, а значит $\Delta y - dy = o(dy)$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y - dy}{dy} = 0$. Разумеется, это имеет место не только для функции $y = x^2$, но и для любой другой дифференцируемой функции.

Отметим, что в рассмотренном примере было $\Delta y > dy$ (при $\Delta x > 0$). Это связано с тем, что линия $y = x^2$ вогнута, в силу чего касательная к ней расположена под этой линией. В случае же выпуклой линии, рис. 4.14, (например, $y = \sqrt{x}$), очевидно, при $\Delta x > 0$ будет $\Delta y < dy$.

Результаты примера 4.30 можно сделать совсем наглядными, если функцию $y = x^2$ рассматривать как площадь квадрата со стороной x. Тогда $dy = 2x_0 \Delta x$ представляет собой сумму площадей двух одинаковых прямоугольников со сторонами x_0 и Δx. Эта величина отличается от истинного приращения площади квадрата, на величину равную $(\Delta x)^2$, которая является, очевидно, бесконечно малой 2-го порядка от-

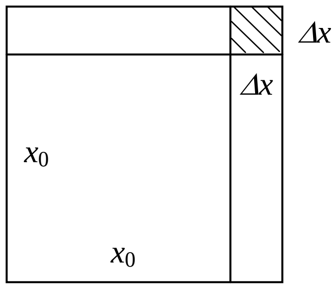


Рис. 4.15

носительно dy. Чем меньше Δx, тем с меньшей относительной погрешностью этой площадью можно пренебречь.

Возьмем снова произвольную функцию $y = f(x)$ и придадим аргументу x бесконечно малое приращение, которое по аналогии с обозначением dy обозначим не Δx, а dx, и назовем дифференциалом независимой переменной x. Тогда равенство, служащее определением дифференциала, примет вид

$$dy = y'dx. \tag{4.16}$$

Отсюда получим

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Итак, производная функции есть отношение ее дифференциала к дифференциалу независимой переменной. Вместе с тем отношение $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как новое обозначение производной. В связи с этим символ $\frac{d}{dx}$ (именно символ, а не дробь!) используется как обозначение действия дифференцирования.

Из формулы (4.16) следует, что нахождение дифференциала функции фактически сводится к нахождению ее производной. Поэтому нахождение дифференциала функции также называют дифференцированием этой функции (что и служит оправданием данного термина).

Пример 4.31. Пусть $y = 2^{\sqrt{x}}$. Тогда, очевидно, $dy = 2^{\sqrt{x}} \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Из таблицы производных вытекает соответствующая таблица дифференциалов.

1. $dc = 0$. 2. $d(u+v) = du + dv$. 3. $d(uv) = udv + vdu$. 4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$. 5. $d\left(x^\alpha\right) = \alpha x^{\alpha-1}dx$. 6. $d\left(a^x\right) = a^x \ln a dx$. 7. $d\left(e^x\right) = e^x dx$. 8. $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$. 9. $d(\sin x) = \cos x dx$. 10. $d(\cos x) = -\sin x dx$.	14. $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 15. $d(\mathrm{arctg}\, x) = \frac{dx}{1+x^2}$. 16. $d(\mathrm{arcctg}\, x) = -\frac{dx}{1+x^2}$. 17. $d(\mathrm{sh}\, x) = \mathrm{ch}\, x dx$. 18. $d(\mathrm{ch}\, x) = \mathrm{sh}\, x dx$. 19. $d(\mathrm{th}\, x) = \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}$. 20. $d(\mathrm{cth}\, x) = -\frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}$.

11. $d(\operatorname{tg} x)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$. 12. $d(\operatorname{ctg} x)=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$. 13. $d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.	21. $d(\operatorname{Arsh} x)=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. 22. $d(\operatorname{Arch} x)=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

19. Инвариантность дифференциала

Пусть $y = f(u)$, где $u=\varphi(x)$. В этом случае y есть сложная функция от x. Имеем

$$dy = y'_x dx. \tag{4.17}$$

При этом $y'_x = y'_u u'_x dx$. Но $y'_x dx = du$, а поэтому получаем

$$dy = y'_u du. \tag{4.18}$$

Равенства (4.17) и (4.18) одинаковы по форме. Это значит, что форма дифференциала не зависит от того, является ли переменная дифференцирования независимой переменной или же она, в свою очередь, есть функция другой переменой. Это свойство дифференциала называется его инвариантностью (т.е. неизменностью).

Перепишем равенства (4.17) и (4.18) так

$$\frac{dy}{dx} = y'_x, \qquad \frac{dy}{du} = y'_u.$$

Тогда формула $y'_x = y'_u u'_x$ принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Левую часть можно получить из правой, если попросту сократить на du. Таким образом, с дифференциалами можно в этом смысле обращаться как с обычными числами. В частности, формула для производной обратной функции может быть получена теперь так:

$$x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'_x}.$$

20. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Мы уже видели, что если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y = dy + o(\Delta x)$. Практически это означает, что при достаточно малых Δx можно положить

$$\Delta y \approx dy,$$

т. е.

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x,$$

откуда

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \qquad (4.19)$$

Эта формула служит для приближенного вычисления значений функции при значениях аргумента, близких к т.н. “табличным” значениям.

Позже, в главе V, будет доказано, что погрешность формулы (4.19) не превосходит по модулю величины $M\cdot(\Delta x)^2$, где $M=\max\limits_{[x_0,x_0+\Delta x]}|f''(x)|$. При малых Δx величина $|f''(x)|$ мало изменяется на отрезке $[x_0,x_0+\Delta x]$. Поэтому, как правило, можно полагать $M\approx|f''(x_0)|$, т.е.

$$|\Delta y-dy|\le M\cdot(\Delta x)^2. \qquad (4.20)$$

Пример 4.32. Вычислим приближенно $\mathrm{tg}45^\circ10'$. Для этого вводим функцию $y=\mathrm{tg}x$ и полагаем $x_0=45^\circ$, $\Delta x=10'=\dfrac{\pi}{180\cdot 6}=\dfrac{3{,}1416}{1080}=0{,}0029$. Формула (4.19) теперь дает

$$\mathrm{tg}45^\circ10'\approx\mathrm{tg}45^\circ+\frac{1}{\cos^2 45^\circ}\cdot\Delta x=1+\frac{0{,}0029}{1/2}=1{,}0058.$$

Оценим погрешность этого результата. Поскольку

$$(\mathrm{tg}x)''=\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)'=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

то

$$M=\frac{2\sin 45^\circ}{\cos^3 45^\circ}=4.$$

Следовательно,

$$\left|\mathrm{tg}\,45^\circ10'-1{,}0058\right|\le 4\cdot 0{,}0029^2<0{,}00005.$$

Таким образом, в полученном результате верны все четыре знака.

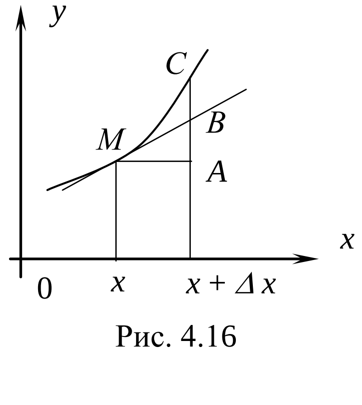


Рис. 4.16

Примечание. Мы уже отмечали, что если функция – линейная, то для нее приращение и дифференциал совпадают. Поэтому, полагая $\Delta y=dy$, т. е. пренебрегая отрезком $BC=o(\Delta x)$, мы исходим из того, что на малом отрезке график функции мало отличается от прямой, т. е. функция ведет себя почти как линейная (рис. 4.16). Таким образом, применение формулы (4.19) заключается в том, что произвольная функция “линеаризуется“ на малом отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

21. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая функция. Найдем ее дифференциал $dy = f'(x)\Delta x$. Вообще говоря, он также есть функция аргумента *x*. Будем считать эту функцию дифференцируемой и вычислим ее дифференциал, т. е. дифференциал дифференциала. Он называется дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ и обозначается $d^2 y$, или $d^2 f(x)$.

Поскольку Δx не зависит от *x*, то при дифференцировании по *x* будем считать, что $\Delta x = const$. Поэтому

$$d^2 y = d(dy) = d[f''(x)\Delta x] = [f'(x)\Delta x]'' \cdot \Delta x = \Delta x[f'(x)]' \cdot \Delta x = f''(x)(\Delta x)^2.$$

Аналогично вводится дифференциал 3-го порядка:

$$d^3 y = d(d^2 y) = d\left[f''(x)(\Delta x)^2\right] = \left[f''(x)(\Delta x)^2\right]' \cdot \Delta x = f'''(x)(\Delta x)^3,$$

и т.д. Вообще для любого натурального *n* дифференциал *n*-го порядка равен

$$d^n y = f^{(n)}(x)(\Delta x)^n.$$

Если $\Delta x \to 0$, а $f^{(n)}(x) \neq 0$, то $d^n y = O^*\left((\Delta x)^n\right)$. Обозначим, как и прежде Δx через dx. Тогда получим

$$d^2 y = f''(x)dx^2,\ \ d^3 y = f'''(x)dx^3, \ldots,\ \ d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Отсюда

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2},\ \ f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}, \ldots,\ \ f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Правые части можно рассматривать как новые обозначения производных высших порядков. В связи с этим символ $\dfrac{d^n}{dx^n}$ используют для обозначения действия *n*-кратного дифференцирования.

22. Параметрическое задание функций и линий

Пусть переменные *x* и *y* являются функциями некоторой третьей переменной *t*:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \tag{4.21}$$

Из первого равенства можно определить t как функцию от x:

$$t = \chi(x).$$

Здесь функция $\chi(t)$ обратна функции $\varphi(t)$. Но так как t – одно и то же в обоих равенствах (4.21), то, заменяя во втором равенстве t на $\chi(t)$, будем иметь $y = \psi[\chi(x)]$, т. е. $y = f(x)$.

Итак, равенства (4.21) определяют y как функцию от x. Такой способ задания функции называется параметрическим, а вспомогательная переменная t – параметром. Переход от параметрического задания функции к явному или неявному ее заданию называют исключением параметра. Одним из способов (но не единственным) исключения параметра является его нахождение из первого уравнения (4.21) с последующей подстановкой во второе уравнение.

Пример 4.33. Возьмем уравнения

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} + 1, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

Первое уравнение дает:

$$\sqrt{t} = x - 1,$$

т. е.

$$t = (x-1)^2.$$

Подставляя это во второе уравнение, получаем

$$y = \sin\left[2(x-1)^2\right].$$

Исключить параметр возможно далеко не всегда. Например, нельзя исключить t из уравнений

$$\begin{cases} x = t + e^t, \\ y = \ln t + \cos^2 t. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения уравнения (4.21) определяют, вообще говоря, некоторую линию. Уравнения (4.21) называют в этом случае параметрическими уравнениями этой линии. При каждом конкретном t мы получаем конкретные x и y, т. е. конкретную точку на кривой. Когда t принимает всевозможные значения, соответствующая точка пробегает всю кривую. При этом возможен случай, что одна и та же точка линии отвечает нескольким различным значениям t.

Пример 4.34. Возьмем уравнения

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = \dfrac{1}{3}\left(t^3 - t\right). \end{cases}$$

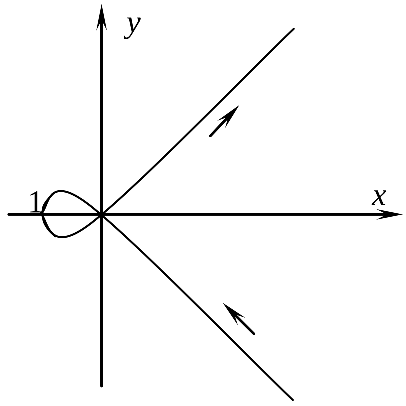


Рис. 4.17

Полагая $t = 0$, получим точку $(-1,0)$. При $t = 1$ имеем точку $(0,0)$. Значению $t = -1$ также отвечает точка $(0,0)$. Значения $t = 2$ и $t = -2$ дают соответственно точки $(3, 2)$ и $(3, -2)$. Вообще, беря два значения t, различающиеся только знаком, мы получим одно и то же значение x (поскольку функция $x = t^2 - 1$ – четная) и два одинаковых по величине и противоположных по знаку значения y (ввиду нечетности функции $y = \frac{1}{3}\left(t^3 - t\right)$). Следовательно, данная кривая симметрична относительно оси Ox. При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ соответствующая точка движется по кривой так, как показано на рисунке 4.17. При этом точка $(0,0)$, отвечающая различным значениям: $t = 1$ и $t = -1$, называется точкой самопересечения.

Введем параметрические уравнения некоторых важнейших линий.

1. <u>Окружность</u>. Возьмём окружность радиуса a с центром в начале координат. В качестве параметра t выберем полярный угол. Тогда

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$$

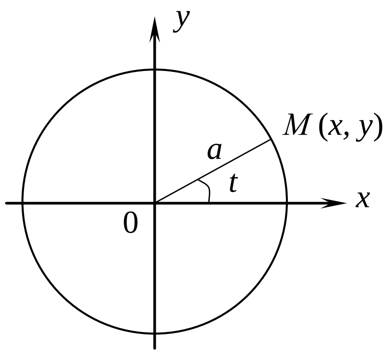


Рис. 4.18

Это и есть параметрические уравнения окружности. Исключим параметр t. Для этого здесь удобно возвести оба уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} x^2 = a^2\cos^2 t, \\ y^2 = a^2\sin^2 t \end{cases}$$

и сложить. Получим

$$x^2 + y^2 = a^2$$

– знакомое уравнение окружности.

2. <u>Эллипс</u>. Возьмем эллипс с полуосями a и b с центром в точке O, рис. 4.19. Его можно рассматривать как результат равномерной деформации окружности радиуса a вдоль оси Oy. При этом, как известно,

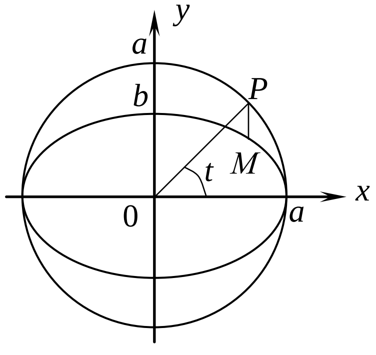


Рис. 4.19

$$y_M = \frac{b}{a}a\sin t = b\sin t,$$

а значит параметрические уравнения эллипса запишутся так

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin\ t. \end{cases}$$

При изменении t от нуля до 2π точка M описывает весь эллипс. С целью исключения параметра перепишем полученные уравнения так

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos t, \\ \dfrac{y}{b} = \sin t. \end{cases}$$

Возводя обе части в квадрат и складывая, получим известное уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. Гипербола. Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \\ y = b\operatorname{sh} t. \end{cases} \tag{4.22}$$

Перепишем их так:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \operatorname{ch} t, \\ \dfrac{y}{b} = \operatorname{sh} t \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \operatorname{ch}^2 t, \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \operatorname{sh}^2 t, \end{cases}$$

откуда, используя формулу $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, получаем

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, уравнения (4.22) изображают гиперболу с полуосями a и b. При $b = a$ получим уравнения равносторонней гиперболы

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \\ y = a\operatorname{sh} t, \end{cases}$$

аналогичные уравнениям окружности.

Полученные результаты ещё раз иллюстрируют аналогию между тригонометрическими и гиперболическими функциями и – параллельно – между эллипсом и гиперболой (в частности, между окружностью и равносторонней гиперболой).

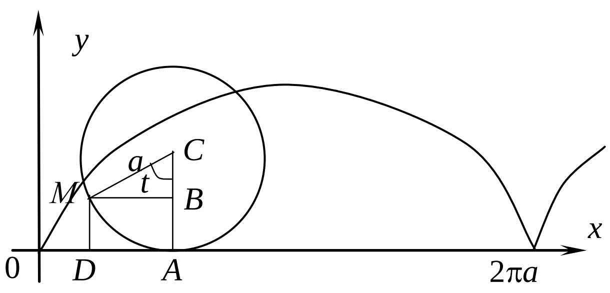


Рис. 4.20

Заметим, что в уравнениях

(4.22) параметр t уж не имеет смысла некоторого полярного угла, как в уравнениях окружности и эллипса. Однако можно придать параметру t некоторый другой геометрический смысл, при котором параметрические уравнения эллипса и гиперболы останутся прежними и который теперь уже будет одинаковым для обеих линий. Мы на этом останавливаться не будем.

4. Циклоида. Пусть окружность радиуса a катится без скольжения по некоторой прямой (мы её примем в качестве оси Ox). Траектория точки этой окружности называется циклоидой. В качестве t возьмём угол поворота того диаметра окружности, который в начале качения (т. е. когда точка M находилась в начале координат) был вертикальным, рис. 4.20. Тогда

$$x_M = OD = OA - AD = \overset{\cup}{AM} - MB = at - a\sin t,$$
$$y_M = AC - BC = a - a\cos t.$$

Итак, параметрические уравнения циклоиды:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

при этом первой арке циклоиды отвечает промежуток $[0, 2\pi]$ изменения t. В частности, если $t = 2\pi$, то $x = 2\pi a,\ y = 0$, что и должно было иметь место.

23. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем

$$t = \chi(x),$$

а поэтому

$$y = \psi[\chi(x)] = f(x).$$

Здесь $f(x)$ – сложная функция, а $t = \chi(x)$ – промежуточный аргумент. Следовательно,

$$y'_x = y'_t t'_x.$$

Но, по формуле для производной обратной функции,

$$t'_x = \frac{1}{x'_t},$$

а значит

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \tag{4.23}$$

т. е.

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Пример 4.35. Составим уравнение касательной к линии

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = \frac{1}{3}\left(t^3 - t\right) \end{cases}$$

в точке $(3,\ 2)$.

На основании формулы (4.23) имеем

$$y'_x = \frac{t^2 - \frac{1}{3}}{2t}.$$

Точке $(3,\ 2)$, как мы видели, отвечает значение параметра $t = 2$. Следовательно, угловой коэффициент искомой касательной равен

$$k = \frac{4 - \frac{1}{3}}{4} = \frac{11}{12},$$

а значит её уравнение:

$$y - 2 = \frac{11}{12}(x - 3).$$

Формулу (4.23) можно получить совсем просто, если воспользоваться следствием инвариантности дифференциала. Действительно,

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Воспользуемся этим приемом для нахождения производных высших порядков в случае параметрического задания функций. Имеем

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{\frac{d(y'_x)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Совершенно аналогично находятся y'''_{xxx}, $y^{IV}_{x^4}$ и т.д. Каждая очередная производная получается из производной предыдущего порядка путем дифференцирования её по t с последующим делением на x'_t.

Пример 4.36. Возьмём опять уравнения

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = \dfrac{1}{3}\left(t^3 - t\right). \end{cases}$$

Мы имеем

$$y'_x = \frac{t}{2} - \frac{1}{6t}.$$

Отсюда

$$y''_{xx} = \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6t^2}}{2t} = \frac{1}{4t} + \frac{1}{12t^3},$$

$$y'''_{xxx} = \frac{-\dfrac{1}{4t^2} - \dfrac{1}{4t^4}}{2t} = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right),$$

и т. д.

Задачи и упражнения к главе IV

1. Пользуясь только определением производной, вычислить $(\mathrm{tg}x)'$.

2. Пользуясь только определением производной, вычислить $\left(\sqrt[3]{x}\right)'$.

3. Показать, что функция $y = \sqrt{\ln(1 + x^2)}$ в точке $x = 0$ не дифференцируема. Найти $y'(+0)$ и $y'(-0)$.

4. Показать, что начало координат есть угловая точка линии $y = \left|2x - x^2\right|$ и найти угол между касательными к этой линии в этой точке.

5. Показать, что точка (2,0) есть угловая точка линии $y = \left|x^2 - 2x\right|$, и найти угол между касательными к этой линии в этой точке.

6. К линии $\dfrac{x^2}{30} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ провести нормаль, параллельную прямой $x + 2y + 17 = 0$.

7. К линии $\begin{cases} x = t - 1, \\ y = t^3 - 12t + 1 \end{cases}$ провести касательную, параллельную прямой $9x + y + 3 = 0$.

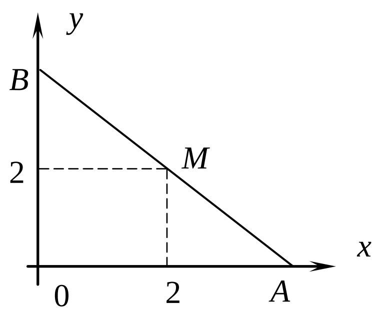


Рис. 4.21

8. Точки A и B одновременно выходят из начала координат и движутся по осям Ox и Oy соответственно, причем $v_A = 50$, $v_B = 10$. С ка-

кой скоростью они удаляются одна от другой?

9. Одна сторона имеет постоянную величину $a=10$, а другая – b – изменяется, возрастая со скоростью 4 *см/с*. С какой скоростью возрастает диагональ прямоугольника в тот момент, когда $b=30$ *см*?

10. Вдоль оси *Ox* со скоростью *v*=0,2 *см/с* движется точечный источник света *A*, от которого точка *M* (2,2) отбрасывает тень на оси *Oy*. С какой скоростью движется эта тень в тот момент, когда *OA*=3 *см* (рис. 4.21)?

11. К линии $y=\sqrt{2-x}$ провести касательную так, чтобы её отрезок, заключённый между осями координат, делился точкой касания пополам.

12. К линии $x^2+4y^2=16$ провести касательную так, чтобы её отрезок, заключенный между осями координат, делился точкой касания пополам.

13. К линии $y=x^2-3x+1$ провести касательную из точки $(4,1)$.

14. К линии $y=x^2-4x+1$ провести касательную из точки $(-1,1)$.

15. Показать, что отрезок любой касательной к линии $y=a\ln bx$ ($a=const$, $b=const$), заключённый между точкой касания и осью *Oy*, имеет постоянную проекцию на ось *Oy*.

16. Показать, что проекция ординаты любой точки линии $y=\mathrm{a}\cdot\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ на её нормаль есть постоянная величина, равная *a*.

17. Период колебания маятника равен $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ *c*, где *l* (*см*) – длина маятника. Как нужно изменить длину маятника *l*=20 *см*, чтобы период колебания уменьшился на 0,1 *c*? Воспользоваться тем, что $\Delta T\approx dT$.

18. Исходя из того, что $\Delta y\approx dy$, вычислить приближённо $\sqrt[3]{70}$. Оценить погрешность результата.

19. В круговом секторе радиус равен 100 *см*, а центральный угол – 60°. Как изменится площадь этого сектора, если радиус увеличить на 1 *см*? Воспользоваться тем, что $\Delta s\approx ds$.

20. Вычислить приближённо $\sqrt{\dfrac{2{,}03^2-1}{2{,}03^2+8}}$. Оценить погрешность результата.

21. Вычислить приближённо $\sqrt[3]{\dfrac{97}{103}}$. Оценить погрешность результата.

22. Заменяя приращение функции её дифференциалом, вычислить приближённо $\dfrac{3{,}1}{\sqrt{3{,}1^2+7}}$.

V. Применение производных к исследованию функций и линий

1. Случаи недифференцируемости функций, непрерывных в данной точке

В предыдущей главе было доказано, что если функция дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в этой точке. Обратное утверждение, как отмечалось, неверно, т.е. функция может быть непрерывной, но не дифференцируемой в данной точке. При этом возможны, в частности, следующие случаи.

1^0. Пусть в точке M график функции $y = f(x)$ имеет две различные касательные, рис. 5.1. Такую точку M называют угловой точкой. В этом случае, очевидно,

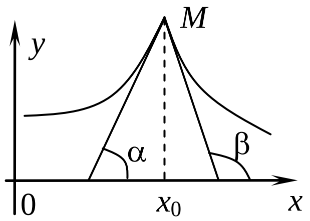


Рис.5.1.

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\,\alpha, \quad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\,\beta \ ^{*)},$$

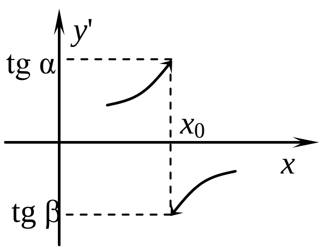


Рис.5.2

т. е. единого предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, не зависящего от способа стремления Δx к нулю в точке x_0 не существует (легко видеть, что в точке x_0 производная $f'(x)$ терпит разрыв 1-го рода в виде конечного скачка, рис. 5.2). Итак, в точке x_0 функция $f(x)$ не дифференцируема, хотя и непрерывна.

Примером может служить функция $y = e^{|x|}$ в точке $x = 0$, рис. 5.3.

2^0. Пусть в точке M линия $y = f(x)$ имеет единственную касательную, но эта касательная параллельна оси Oy, рис. 5.4. Такую точку M называют точкой возврата. В этом случае, очевидно, производные слева и справа равны соответственно $+\infty$ и $-\infty$ (или наоборот), т. е. производная в точке x_0 не существует. Очевидно в этой точке производная терпит разрыв 2-го рода в виде бесконечного скачка, рис. 5.5. Между тем, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

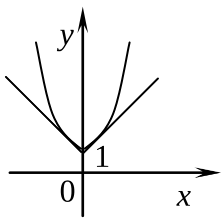


Рис.5.3

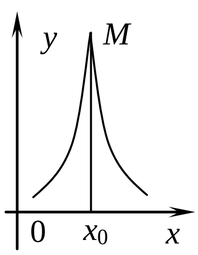


Рис.5.4

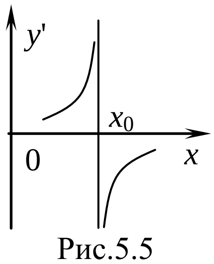


Рис.5.5

---

*) Эти пределы часто называют соответственно производной слева и производной справа и обозначают $f'(x_0 - 0)$ и $f'(x_0 + 0)$.

Пример 5.1. Пусть $y = \sqrt[3]{x^2}$. Имеем

$$y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

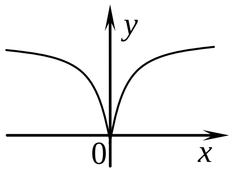


Рис.5.6

В точке $x = 0$ функция непрерывна, рис. 5.6, но не дифференцируема.

3^0. Пусть в точке M линия $y = f(x)$ имеет вертикальную касательную, которая в этой точке не только касается данной линии, но и пересекает её, рис. 5.7 (такую точку M называют точкой перегиба с вертикальной касательной). В этом случае производные слева и справа одновременно равны либо $+\infty$ (как на рис. 5.8), либо $-\infty$. В точке же x_0 производная $f'(x)$ терпит разрыв 2-го рода, хотя и не являющийся бесконечным скачком.

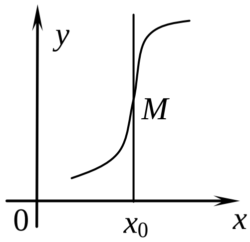


Рис.5.7

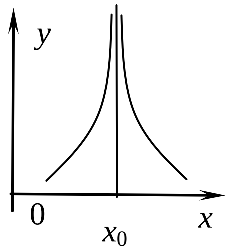


Рис.5.8

Пример 5.2. Пусть $y = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, а значит в точке $x = 0$ производная не существует, обращаясь в $+\infty$, рис. 5.9.

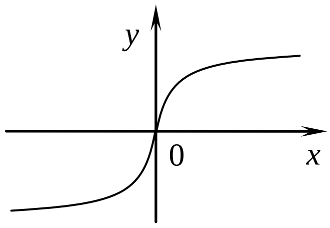


Рис.5.9

Примечание. Мы указали лишь наиболее типичные примеры нарушения дифференцируемости непрерывной функции. Возможен, например, случай, когда $f'(x_0 - 0) = +\infty$, а $f'(x_0 + 0)$ есть конечное число.

2. Теорема Ферма

Теорема 5.1. Если функция в некоторой внутренней точке промежутка принимает своё наибольшее или наименьшее в этом промежутке значение и если она дифференцируема в этой точке, то её производная в этой точке равна нулю.

■Пусть, для определённости, функция $f(x)$ в точке x_0 принимает наибольшее в промежутке $[a,b]$ значение. Тогда в отношении

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

числитель всегда отрицателен (если, конечно, $x_0 + \Delta x \in [a,b]$). Поэтому, если $\Delta x > 0$, то

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0.$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0 \tag{5.1}$$

(поскольку предел отрицательной величины не может быть положительным), т. е.

$$f'(x_0)\le 0. \tag{5.2}$$

Если же $\Delta x<0$, то

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0,$$

а значит

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0, \tag{5.3}$$

т. е.

$$f'(x_0)\ge 0^{*)}. \tag{5.4}$$

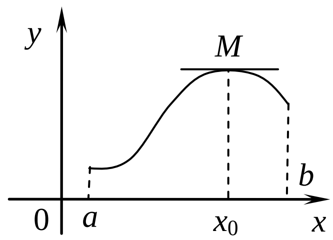


Рис.5.10

Но соотношения (5.2) и (5.4) могут одновременно иметь место тогда и только тогда, когда $f'(x_0)=0$.□

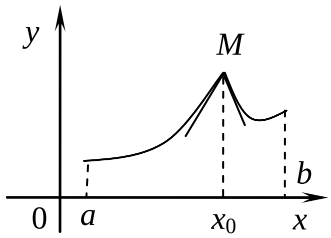


Рис.5.11

Доказанная теорема геометрически означает, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке M параллельна оси Ox, рис. 5.10.

Если же в точке x_0 функция $f(x)$ не дифференцируема, то условия теоремы Ферма и её утверждение не имеет места (см. рис. 5.11).

3. Теорема Ролля

Теорема 5.2. Если функция непрерывна на отрезке, дифференцируема во всех его внутренних точках и принимает на его концах одинаковые значения, то внутри отрезка существует по крайней мере одна точка, в которой производная этой функции равна нулю.

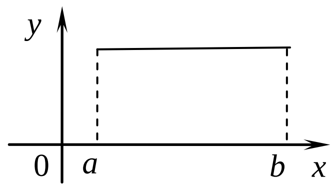


Рис.5.12

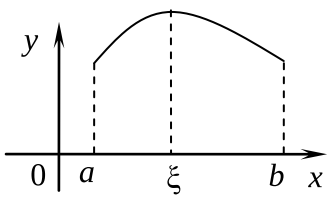


Рис.5.13

■Опуская из рассмотрения тот очевидный случай, когда $f(x)=const$ всюду на отрезке $[a,b]$, рис. 5.12, а значит $f'(x)\equiv 0$,

---

*) Переход от (5.1) к (5.2) и от (5.3) к (5.4) мы совершаем на основании дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0.

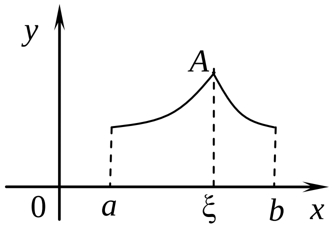


Рис.5.16

$\forall x \in [a,b]$, обратимся к рассмотрению общего случая. Поскольку $f(a) = f(b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a,b)$, в которой $f(x)$ принимает своё наибольшее или наименьшее на отрезке $[a,b]$ значение, рис. 5.13. Но тогда, на основании теоремы Ферма, $f'(\xi) = 0$.□

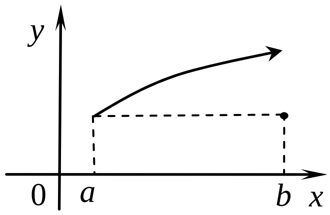


Рис.5.14

Примечание 1. Если функция $f(x)$ непрерывна не на отрезке $[a,b]$, а лишь в интервале (a,b) (см. рис. 5.14), то одно из условий теоремы Ролля не выполнено и утверждение этой теоремы может не иметь места. Таким образом, замкнутость промежутка непрерывности функции является необходимым требованием.

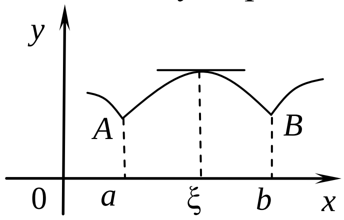


Рис.5.15

Примечание 2. Наоборот, требовать дифференцируемости функции $f(x)$ не в интервале (a,b), а на отрезке $[a,b]$, очевидно, не обязательно, так как точки A и B могут быть, например, угловыми точками графика, т.е. в точках $x=a$ и $x=b$ функция $f(x)$ может и не быть дифференцируемой, рис 5.15.

Примечание 3. Зато во всех внутренних точках отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ обязана быть дифференцируемой, так как в противном случае точка A может оказаться, например, угловой (рис. 5.16) и точки ξ, в которой $f'(\xi) = 0$, в интервале (a,b) может и не быть.

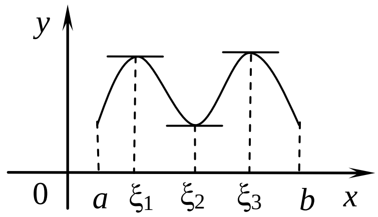


Рис.5.17

Примечание 4. Фигурирующих в теореме Ролля точек ξ, очевидно, может быть и несколько (рис. 5.17).

Примечание 5. Пусть $f(a) = f(b) = 0$ (в этом случае числа a и b называют корнями функции $f(x)$). Тогда из теоремы Ролля 5.2 получаем следующий её частный случай.

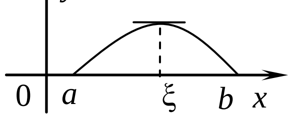


Рис.5.18

Теорема 5.2′. Между двумя корнями дифференцируемой функции лежит по крайней мере один корень её производной.

Пример 5.3. Пусть $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Это многочлен 4-ой степени, имеющий корни $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3$. Тогда $f'(x)$, являясь многочленом 3-ей степени, имеет 3 корня. В силу теоремы 5.2′ все эти корни вещественны и лежат (по одному) в интервалах $(0,1)$, $(1,2)$ и $(2,3)$.

4. Теорема Лагранжа и её следствия

Теорема 5.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках. Тогда внутри отрезка $[a,b]$ существует, по крайней мере, одна такая точка ξ, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

■Для доказательства введём вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\lambda x,$$

где λ – некоторое число. Подберём λ так, чтобы было $F(a)=F(b)$. Имеем

$$f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b,$$

откуда

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Итак, функция $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, а значит, существует, по крайней мере, одна такая точка $\xi\in(a,b)$, что $F'(\xi)=0$, т. е.

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

а значит

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (5.5)$$

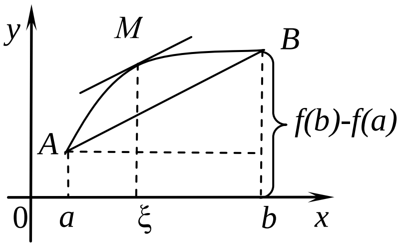


Рис.5.1

что и требовалось доказать.□

Доказанная теорема называется теоремой Лагранжа. Геометрически она выражает тот факт, что на дуге $\overset{\cup}{AB}$ найдётся по крайней мере одна такая точка *M*, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна хорде *AB*, рис. 5.19.

Примечание 1. Очевидно, что к теореме Лагранжа можно сделать примечания, аналогичные примечаниям 1-4 к теореме Ролля. Действительно, если, например, хотя бы в одной внутренней точке отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ не дифференцируема, рис. 5.20, то точка $\xi\in(a,b)$, для которой выполняется равенство (5.5), может и не существовать.

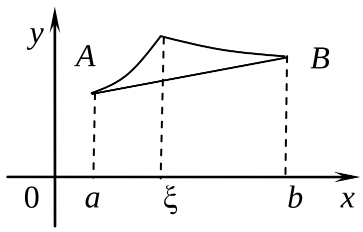


Рис.5.20

Примечание 2. При $f(b)=f(a)$ из равенства (5.5) следует, что

$f'(\xi)=0$, т. е. в этом случае теорема Лагранжа превращается в теорему Ролля.

Примечание 3. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция. Придадим данному x приращение Δx и применим к этому отрезку $[x, x+\Delta x]$ теорему Лагранжа, рис. 5.21. Получим

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(\xi),$$

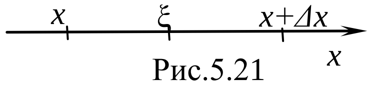


Рис.5.21

т. е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(\xi)$$

или

$$\Delta y=f'(\xi)\Delta x. \qquad (5.6)$$

Фактически это есть другая запись теоремы Лагранжа.

Из формулы (5.6) нетрудно получить неравенство (4.20), которое ранее было приведено без доказательства. Действительно, имеем теперь

$$\Delta y-dy=f'(\xi)\Delta x-f'(x)\Delta x=\left(f'(\xi)-f'(x)\right)\Delta x.$$

Предположим, что функция $f(x)$ имеет и непрерывную производную второго порядка. Тогда, применяя теорему Лагранжа к функции $f'(x)$ на отрезке $[x,\xi]$, рис. 5.22, получим

$$\Delta y-dy=f''(\eta)(\xi-x)\Delta x.$$

Отсюда

$$|\Delta y-dy|=|f''(\eta)||\xi-x||\Delta x|\le|f''(\eta)|\Delta x^2.$$

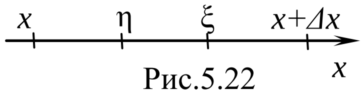


Рис.5.22

Пусть $M=\max\limits_{[x,x+\Delta x]}|f''(x)|$. Тогда окончательно

$$|\Delta y-dy|\le M\Delta x^2,$$

что и требовалось получить.

Таким образом, неравенство (4.20) оказалось следствием теоремы Лагранжа.

Из теоремы Лагранжа легко следует ещё один факт, который будет использован ниже. Предположим, что для функции $f(x)$ выполняется тождество

$$f'(x)\equiv 0.$$

Возьмём произвольные x_1 и x_2 и применим к отрезку $[x_1,x_2]$ теорему Лагранжа. Будем иметь

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi).$$

Но $f'(\xi)=0$, а значит $f(x_1)=f(x_2)$. Отсюда, ввиду произвольности чисел x_1 и x_2, следует, что вообще $f(x)\equiv const$. Доказанное утверждение обратно доказанному в главе IV, где мы доказали, что если $f(x) \equiv const$, то $f'(x) \equiv 0$.

5. Теорема Коши

Теорема 5.4. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы во всех его внутренних точках, причём $\varphi'(x)$ не имеет корней в интервале (a,b). Тогда существует, по крайней мере, одна такая точка $\xi \in (a,b)$, что

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

■Для доказательства введём вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda\varphi(x)$. Подберём λ так, чтобы было $F(a) = F(b)$, т. е.

$$f(a) - \lambda\varphi(a) = f(b) - \lambda\varphi(b).$$

Получим

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

При таком λ функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, а значит существует, по крайней мере, одна такая точка $\xi \in (a,b)$, что $F'(\xi) = 0$, т. е.

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(\xi) = 0,$$

откуда и следует, что

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.\square$$

Примечание 1. Легко видеть, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $\varphi(x) = x$.

Примечание 2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши называют дифференциальными теоремами о среднем (поскольку в каждой из них фигурирует некоторая внутренняя точка ξ отрезка $[a,b]$).

6. Возрастание и убывание функции на промежутке

Функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a,b]$ будет

$$(x_2 > x_1) \Rightarrow (f(x_2) > f(x_1)).$$

Столь же очевидным образом определяется убывание функции на промежутке.

Теорема 5.5. Если функция возрастает в некотором промежутке и дифференцируема в нём, то её производная в этом промежутке положительна и лишь в отдельных точках может обращаться в нуль.

■Пусть функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[a,b]$ и пусть $x_0 \in (a,b)$ – произвольная точка. Если $\Delta x > 0$, то и $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$. Если же $\Delta x < 0$, то и $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Следовательно, как при $\Delta x > 0$, так и при $\Delta x < 0$ будет

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Но тогда и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

т. е.

$$f'(x_0) \geq 0.$$

Докажем, что равенство $f'(x) = 0$ может иметь место только в отдельных точках интервала (a,b). Действительно, если бы это равенство выполнялось в некотором промежутке $[c,d] \subset [a,b]$, то, в силу следствия теоремы Лагранжа, в промежутке $[c,d]$ было бы $f(x) \equiv const$, что противоречило бы монотонному возрастанию функции $f(x)$ на всём промежутке $[a,b]$.□

Геометрически теорема 5.5 выражает тот факт, что касательная к графику возрастающей функции всюду в промежутке возрастания образует острый угол с осью Ox и лишь в отдельных точках может быть параллельна этой оси, рис. 5.23.

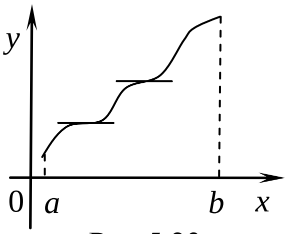


Рис.5.23

Пример 5.4. Для функции $y = x^3$, возрастающей на всей числовой оси, имеем

$$y' = 3x^2,$$

т. е. $y' > 0$ для всех x, кроме точки $x = 0$, в которой $y' = 0$, рис. 5.24.

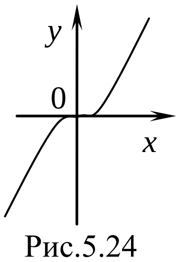


Рис.5.24

Теорема 5.6. Если во всех точках некоторого промежутка производная функции положительна, то функция в этом промежутке возрастает.

■Пусть $f'(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$. Возьмём произвольные точки $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$, такие, что $x_2 > x_1$ и докажем, что $f(x_2) > f(x_1)$.

По теореме Лагранжа имеем

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi). \tag{5.7}$$

Поскольку $\xi\in(x_1,x_2)$, то тем более $\xi\in[a,b]$, а значит $f'(\xi)>0$. Но $x_2-x_1>0$, а поэтому из (5.7) следует $f(x_2)-f(x_1)>0$.□

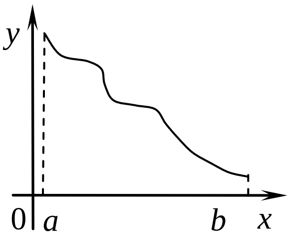


Рис.5.25

Теорема 5.7. Если функция убывает в некотором промежутке и дифференцируема всюду в нём, то её производная в этом промежутке отрицательна и лишь в отдельных точках может обращаться в нуль (рис. 5.25).

Теорема 5.8. Если во всех точках некоторого промежутка производная функции отрицательна, то функция в этом промежутке убывает.

Теоремы 5.6 и 5.7, очевидно, доказываются совершенно аналогично теоремам 5.5 и 5.6.

7. Экстремум функции

Если в некоторой точке x_0 функция $f(x)$ принимает значение, наибольшее по сравнению с её значениями в некоторой окрестности этой точки, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, рис. 5.26. Если же для всех x из некоторой окрестности точки x_0 будет $f(x)>f(x_0)$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум, рис. 5.27.

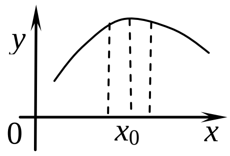


Рис.5.26

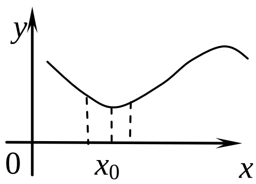


Рис.5.27

Максимум и минимум имеют общее название: экстремум.

Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум. Это значит, что существует такой промежуток, содержащий внутри себя точку x_0, что $f(x_0)$ является наибольшим или наименьшим значением функции $f(x)$ в этом промежутке. Но тогда возможны два случая:

1°. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда, на основании теоремы Ферма, $f'(x_0)=0$.

2°. Функция $f(x)$ в точке x_0 не дифференцируема. В этом случае $f'(x_0)$ не существует.

Случай 2° иллюстрируется, например, функцией $y=\sqrt[3]{x^2}$, которая в точке $x=0$ имеет минимум (рис. 5.28), но поскольку $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$, в этой точке производная не существует.

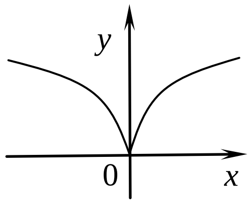


Рис.5.28

Итак, можно считать доказанным следующее утверждение (необходимый признак существования экстремума).

Теорема 5.9. Если в данной точке функция имеет экстремум, то её производная в этой точке либо обращается в нуль, либо не существует.

Обратное утверждение неверно, т. е. из равенства нулю производной или из её отсутствия, вообще говоря, не следует наличие экстремума (рис. 5.29).

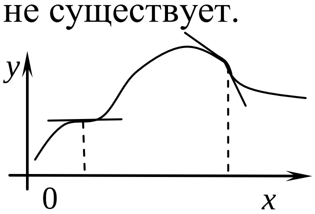


Рис.5.29

Для наличия экстремума функции $f(x)$ в точке x_0 нужно, чтобы при переходе через эту точку производная функции меняла знак: с «+» на «–» в случае максимума и с «–» на «+» в случае минимума (рис. 5.30, 5.31 и рис. 5.32, 5.33 соответственно).

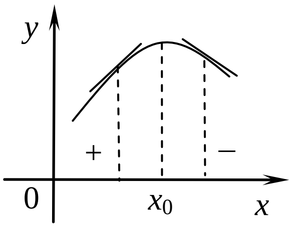


Рис.5.30

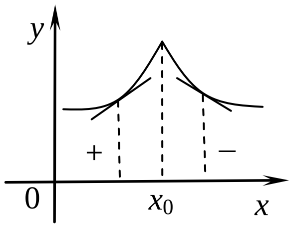


Рис.5.31

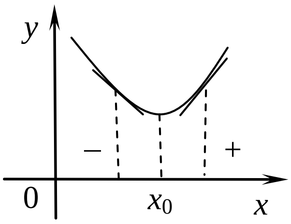


Рис.5.32

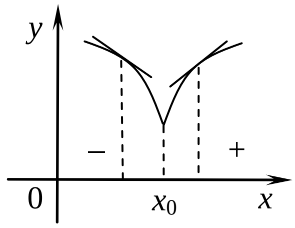


Рис.5.33

Если же при переходе через точку x_0 производная не меняет знака, то экстремума в этой точке нет. Если при этом будет $f'(x_0) = 0$, то соответствующую точку M графика функции называют точкой перегиба с горизонтальной касательной, рис. 5.34.

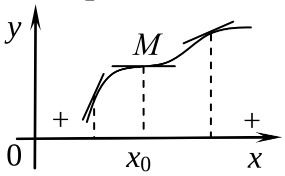


Рис.5.34

Итак, имеет место

Теорема 5.10. Для того, чтобы функция имела в данной точке экстремум, необходимо и достаточно, чтобы её производная при переходе через эту точку меняла знак.

Пример 5.5. Исследуем на экстремум функцию $y = \frac{3}{8}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1$. Имеем

$$y' = \frac{3}{2}x^3 - 6x^2 + 6x = \frac{3}{2}x\left(x^2 - 4x + 4\right) = \frac{3}{2}x(x-2)^2.$$

Итак, производная обращается в нуль в двух точках[*]: $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Это значит, что эти (и, очевидно, только эти) точки подозрительны на экстремум.

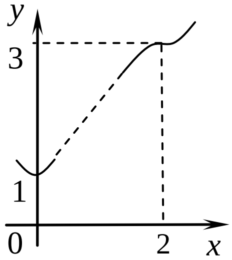


Рис.5.35

Поскольку $(x-2)^2 \geq 0$ при всех x, то величина y' при переходе через точку $x = 0$ меняет знак с «–» на «+», а значит в точке $x = 0$ имеет место минимум (при этом $y(0) = 1$). При переходе

[*] Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называют стационарными точками этой функции.

через точку $x=2$ знак величины y' не меняется, поскольку и слева и справа от этой точки будет $y'>0$. Следовательно, в точке $x=2$ функция не имеет экстремума, рис 5.35.

8. О наибольшем и наименьшем значениях функции на промежутке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a,b). Поскольку он является открытым промежутком, то наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ в нём могут и не достигаться. Однако имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.11. Если функция $f(x)$ в интервале (a,b) имеет единственный экстремум, то соответствующее значение функции является либо наибольшим, либо наименьшим значением $f(x)$ в интервале (a,b), в зависимости от того, будет ли этот экстремум максимумом или минимумом.

■Пусть, для определённости, экстремум является максимумом и достигается в точке x_0, рис. 5.36. Предположим, что существует точка $x_1 \in (a,b)$, такая, что $f(x_1) > f(x_0)$. Рассмотрим отрезок $[x_0, x_1] \subset (a,b)$. В силу 2-ой теоремы Вейерштрасса (см. раздел III), функция $f(x)$ принимает в некоторой точке $x_2 \in [x_0, x_1]$ своё наименьшее на отрезке $[x_0, x_1]$ значение. Очевидно, что точка x_2 не может совпадать ни с точкой x_0, ни, тем более, с точкой x_1. Следовательно, x_2 – внутренняя точка отрезка $[x_0, x_1]$. Но тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, что противоречит единственности экстремума этой функции в интервале (a,b). Тем самым доказано, что $f(x_0)$ есть наибольшее значение $f(x)$ в интервале (a,b).

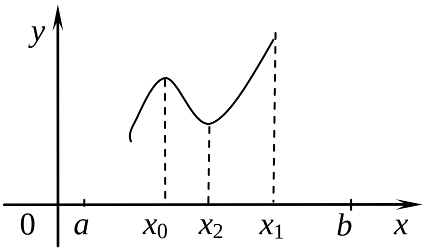


Рис.5.36

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. В этом случае функция достигает на этом отрезке и наибольшего и наименьшего значений. Если наибольшее или наименьшее значение достигается во внутренней точке отрезка, то эта точка является соответственно точкой максимума или точкой минимума. Но оно может достигаться и на одном из концов отрезка. Следовательно, для нахождения чисел $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$ и $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ надо вычислить значения $f(x)$ во всех экстремальных точках отрезка $[a,b]$, а также в точках a и b;

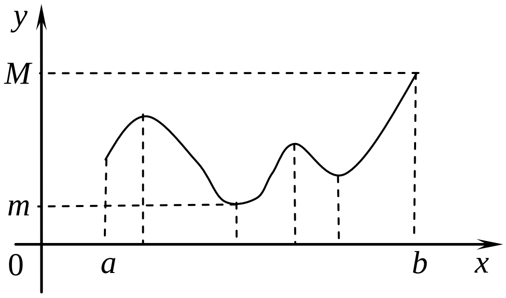


Рис.5.37

наибольшее и наименьшее из всех этих чисел будут соответственно числами M и m (см. рис. 5.37).

Пример 5.6. Найдём наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[-4,2]$. Имеем

$$y' = 6x^2 + 6x - 12.$$

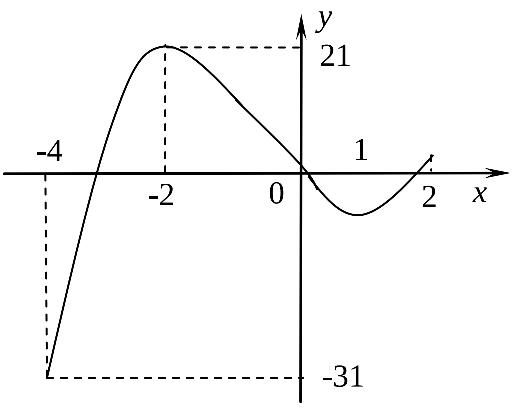


Рис.5.38

Поэтому, полагая $y' = 0$, получим уравнение

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

корни которого: $x_1 = 1,\ x_2 = -2$.

Находим:

$f(1) = -6,\ f(-2) = 21,\ f(-4) = -31,\ f(2) = 5.$

Следовательно,

$$\max_{[-4,2]} f(x) = 21,\ \min_{[-4,2]} f(x) = -31$$

(на рис. 5.38 для удобства на осях Ox и Oy взяты различные масштабы).

Примечание. Конкретизируя ситуацию, рассмотренную в теореме 5.11, укажем отдельные случаи, когда значение функции в стационарной точке заведомо является либо наибольшим, либо наименьшим её значением в заданном промежутке (конечном или бесконечном). Пусть, например, известно, что*)

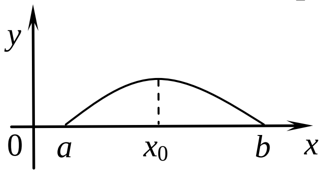


Рис.5.39

1. функция $f(x)$ обращается в нуль на концах промежутка $[a,b]$;

2. $f(x) > 0$ для всех $x \in [a,b]$;

3. всюду внутри промежутка $[a,b]$ функция $f(x)$ дифференцируема;

4. внутри промежутка $[a,b]$ существует единственная стационарная точка x_0 функции $f(x)$.

Тогда, очевидно, $f(x_0)$ есть наибольшее значение $f(x)$ в промежутке $[a,b]$, рис. 5.39.

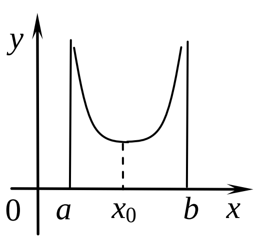


Рис.5.40

Другой аналогичный случай может быть, в частности, таким (рис. 5.40):

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty;$$

выполняются условия 3 и 4 из предыдущего случая. Тогда

*) Эта и подобная ей ситуация встречаются в большинстве задач прикладного характера на наибольшее и наименьшее значения в промежутке (см. следующий параграф).

$f(x_0)$ есть наименьшее значение $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

9. О решении задач на наибольшее и наименьшее значения

На практике часто встречаются задачи следующего рода. Даны две величины, определённым образом связанные между собой. Требуется найти значение одной из них, при котором вторая величина принимает наибольшее или наименьшее значение. Для этого составляют функцию, выражающую вторую величину через первую, и ищут её наибольшее (или наименьшее) значение в определённом промежутке, который диктуется условием задачи.

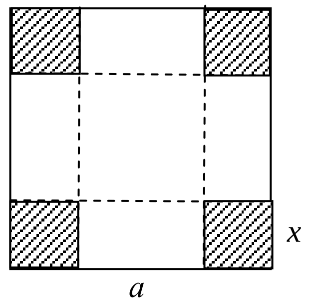


Рис.5.41

Пример 5.7. Из углов квадратного листа со стороной a требуется вырезать одинаковые квадраты, чтобы, согнув лист по пунктирным линиям, получить коробку наибольшей вместимости. Какой должна быть сторона x вырезаемого квадрата?

Легко видеть, что объём коробки равен

$$V(x)=(a-2x)^2 x .$$

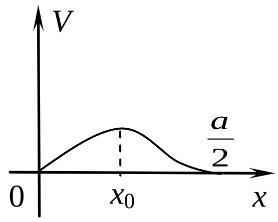


Рис.5.42

Требуется найти то значение $x\in\left[0,\frac{a}{2}\right]$, при котором величина $V(x)$ принимает наибольшее на отрезке $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ значение.

Поскольку $V(0)=V\left(\frac{a}{2}\right)=0$ и, кроме того, $V(x)>0\ \ \forall x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$, то искомое x есть внутренняя стационарная точка функции $V(x)$ (ср. с рис. 5.39). Имеем

$$V'(x)=\left(a^2x-4ax^2+4x^3\right)'=a^2-8ax+12x^2 .$$

Поэтому для стационарных точек получим

$$x=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2-12a^2}}{12}=\frac{4a\pm 2a}{12},$$

т. е. $x_1=\frac{a}{2}$, $x_2=\frac{a}{6}$. Очевидно, что x_1, удовлетворяя уравнению $V'(x)=0$, не является решением задачи, а значит искомое x равно $\frac{a}{6}$.

10. Выпуклость и вогнутость линий. Точки перегиба

Кривая является выпуклой, если она лежит ниже любой своей касательной, и вогнутой, если любая её касательная расположена под нею.

Теорема 5.12. Если $f''(x) > 0$ всюду на отрезке $[a,b]$, то линия $y = f(x)$ на этом отрезке вогнута.

■Возьмём произвольное $x_0 \in (a,b)$ и в точке $M(x_0, f(x_0))$ проведём касательную к линии $y = f(x)$, рис. 5.43. Её уравнение:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

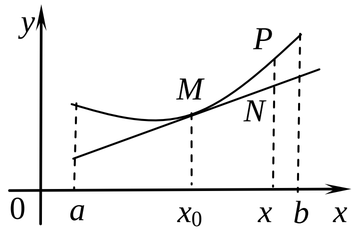


Рис.5.43

Возьмём теперь некоторое $x \in [a,b]$. Пусть, для определённости, $x > x_0$. Имеем

$$y_P - y_N = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0),$$

или, на основании теоремы Лагранжа,

$$y_P - y_N = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0).$$

Ещё раз применяя теорему Лагранжа, получим

$$y_P - y_N = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0). \tag{5.8}$$

Поскольку $\xi \in (x_0, x)$, а $x > x_0$, то $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$. Далее, $\eta \in (x_0, \xi)$, а значит тем более $\eta \in [a,b]$, так что $f''(\eta) > 0$. Таким образом, $y_P > y_N$, откуда и следует вогнутость линии $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.□

Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл. Условие $f''(x) > 0$ можно переписать так: $[f'(x)]' > 0$, а это значит, что $f'(x)$ на отрезке $[a,b]$ возрастает, а так как $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, то величина $\operatorname{tg}\alpha$, а значит и угол α, возрастает при возрастании *x*, т. е. касательная становится всё круче, что и свидетельствует о вогнутости линии, рис. 5.44.

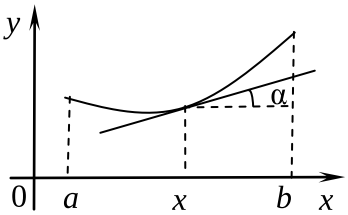


Рис.5.44

Теорема 5.13. Если кривая $y = f(x)$ вогнута на отрезке $[a,b]$, то величина $f''(x)$ на этом отрезке положительна и лишь в отдельных точках может обращаться в нуль.

■Возьмём произвольные числа $x_0 \in [a,b]$ и $x \in [a,b]$, рис. 5.45. Из равенства (5.8) следует, что и в случае $x > x_0$, и в случае $x < x_0$ будет $f''(\eta) > 0$. Пусть теперь $x \to x_0$. Тогда и $\eta \to x_0$, а значит $f''(\eta) \to f''(x_0)$.

Отсюда и из того, что $f''(x) > 0$ для всех x, вытекает, что $f''(x_0) \geq 0$, что и требовалось доказать. Действительно, если бы равенство $f''(x) = 0$ выполнялось не только в точке x_0, но и в некоторой её $\varepsilon-$окрестности, то, начиная с некоторого x, было бы $\eta \in C_\varepsilon(x_0)$, а значит $f''(\eta) = 0$, откуда, в силу (5.8), следовало бы, что $y_P = y_N$, а это противоречило бы предположению о вогнутости линии.□

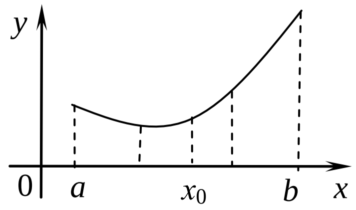


Рис.5.45

Примечание. Исходя из равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f''(x) = f''(x_0)$, мы молча предполагали, что функция $f''(x)$ в точке x_0 непрерывна. Это предположение не является обязательным и сделано для упрощения доказательства теоремы 5.13.

Совершенно аналогично доказываются следующие две теоремы.

Теорема 5.14. Если $f''(x) < 0$ всюду на отрезке $[a,b]$, то линия $y = f(x)$ на этом отрезке выпукла.

Теорема 5.15. Если кривая $y = f(x)$ выпукла на отрезке $[a,b]$, то величина $f''(x)$ на этом отрезке отрицательна и лишь в отдельных точках может обращаться в нуль.

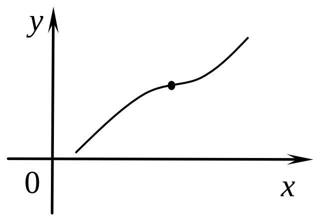


Рис.5.46

Точка кривой, отделяющая её выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба этой кривой, рис. 5.46.

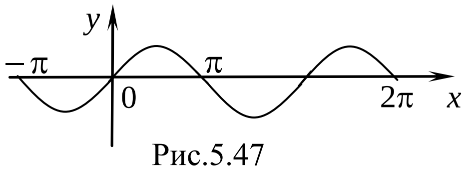


Рис.5.47

Например, линия $y = \sin x$ имеет бесчисленное множество точек перегиба: $(0,0), (\pi,0), (-\pi,0), (2\pi,0), \ldots$, рис. 5.47.

Теорема 5.16. Если точка $M(x_0, y_0)$ есть точка перегиба линии $y = f(x)$, то в точке x_0 величина $f''(x)$ либо равна нулю, либо не существует.

■Действительно, на основании теорем 5.13 и 5.15, величина $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, т.е. меняет знак величина $[f'(x)]'$, а это значит, что в точке x_0 величина $f'(x)$ имеет экстремум. Но тогда, на основании теоремы 5.9, величина $[f'(x)]' = f''(x)$ в точке x_0 либо обращается в нуль, либо не существует.□

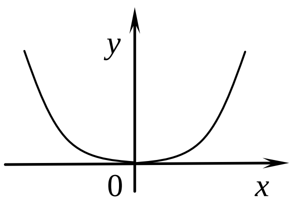


Рис.5.48

Если же величина $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует, то это ещё не свидетельствует о наличии точки перегиба.

Например, пусть $y = x^4$. Тогда $y'' = 12x^2$, т. е. $y''(0) = 0$. Однако в точке $(0,0)$ перегиба нет, т. к. и при $x < 0$, и при $x > 0$ будет $y'' > 0$, т. е. линия всюду вогнута, рис. 5.48.

Таким образом, для установления существования точки перегиба нужно убедиться, что при переходе через данную точку величина $f''(x)$ меняет знак.

Пример 5.8. Исследуем на выпуклость и вогнутость линию $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$. Имеем

$$y' = 3x^2 - 6x + 5,$$

откуда

$$y'' = 6x - 6 = 6(x-1).$$

Отсюда следует, что если $x = 1$, то $y'' = 0$, причём при переходе через точку $x = 1$ величина y'' меняет знак с «–» на «+». Таким образом, в промежутке $(-\infty, 1)$ кривая выпукла, а в интервале $(1, +\infty)$ – вогнута. Точка $(1,2)$ является, следовательно, точкой перегиба данной кривой.

11. Второе правило исследования функции на экстремум

Теорема 5.17. Пусть $f'(x_0) = 0$ и пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производную 2-го порядка, причём $f''(x_0) \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум или минимум, в зависимости от того, будет ли $f''(x_0) < 0$ или $f''(x_0) > 0$.

■Пусть, например, $f''(x_0) > 0$. Перепишем это так

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

а так как $f'(x_0) = 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0. \tag{5.9}$$

В силу леммы о сохранении знака функции, из (5.9) следует, что при достаточно малых $(x - x_0)$ будет и $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$. Поэтому, если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$, а значит и $f'(x) > 0$. Если же $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$, а значит и $f'(x) < 0$. Таким образом, при переходе через точку x_0 величина $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», так что в этой точке функция $f(x)$ имеет минимум.

Аналогично рассматривается случай, когда $f''(x_0) < 0$.□

Пример 5.9. Возьмём функцию $y = 2x^3 - 3x^2$. Имеем

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1),$$

т. е. стационарные точки: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$. Далее,

$$y'' = 12x - 6,$$

а значит

$$y''(0) = -6 < 0,\ y''(1) = 6 > 0,$$

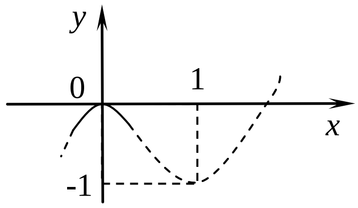


Рис.5.49

т. е. в точке $x = 0$ – максимум, а в точке $x = 1$ – минимум (рис. 5.49).

Примечание. Теорема 5.17 даёт правило исследования функции на экстремум, более «узкое» по сравнению с теоремой 5.10, так как в точке экстремума даже $f'(x)$ может не существовать, а тогда тем более не существует и $f''(x)$. В подобных случаях можно применять лишь первое правило. Кроме того, второе правило «отказывает» в тех случаях, когда одновременно $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$.

12. Нахождение асимптот линий

Если кривая при её продолжении на бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой, то эта прямая называется асимптотой данной линии.

1°. Горизонтальные асимптоты. Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой кривой $y = f(x)$ (рис. 5.50), если выполняется хотя бы одно из равенств

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

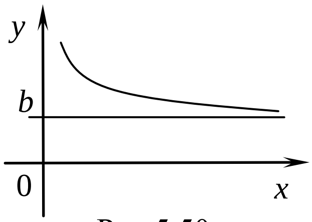


Рис.5.50

Пример 5.10. Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, то линия $y = \operatorname{arctg} x$ имеет две горизонтальные асимптоты: $y = -\dfrac{\pi}{2}$ и $y = \dfrac{\pi}{2}$, рис. 5.51.

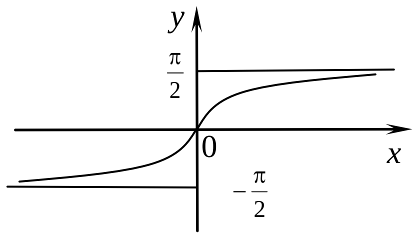


Рис.5.51

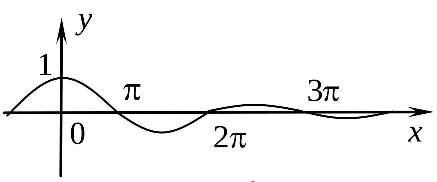


Рис.5.52

Пример 5.11. Ось Ox является горизонтальной асимптотой линии $y = \dfrac{\sin x}{x}$ (рис. 5.52), поскольку, очевидно,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

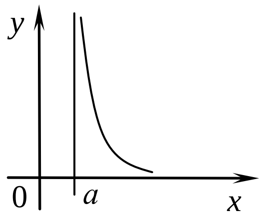


Рис.5.53

2°. <u>Вертикальные асимптоты</u>. Прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой линии $y=f(x)$ (рис. 5.53), если выполняется хотя бы одно из неравенств

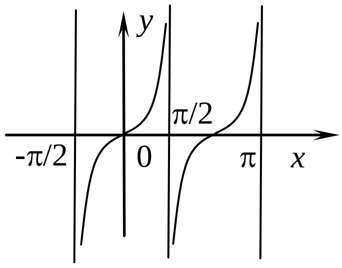


Рис.5.54

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a+0}f(x)=\infty.$$

Например, линия $y=\operatorname{tg}x$ (рис. 5.54) имеет бесчисленное множество вертикальных асимптот: $x=\pm\dfrac{\pi}{2},\ x=\pm\dfrac{3\pi}{2},\ldots$

3°. <u>Наклонные асимптоты</u>. Прямая $y=kx+b\ (k\neq 0)$ является наклонной асимптотой линии $y=f(x)$, если (см. рис. 5.55) $\lim\limits_{x\to\infty}MP=0$, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\left[kx+b-f(x)\right]=0. \qquad (5.10)$$

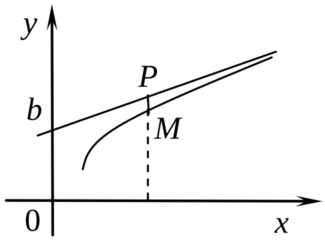


Рис.5.55

Из (5.10) следует, что тем более

$$\lim_{x\to\infty}\left[k+\frac{b}{x}-\frac{f(x)}{x}\right]=0,$$

откуда

$$k=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right],$$

т. е.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (5.11)$$

Теперь, когда число k известно, из равенства (5.10) получаем

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]. \qquad (5.12)$$

Существование пределов (5.11) и (5.12) есть необходимое и достаточное условие наличия наклонной асимптоты. Существование же одного только предела (5.11) ещё не означает наличия асимптоты, так как может не существовать предел (5.12).

Пример 5.12. Найдём асимптоты линии $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$, то горизонтальных асимптот нет. Вертикальной асимптотой является, очевидно, линия $x=2$, так как

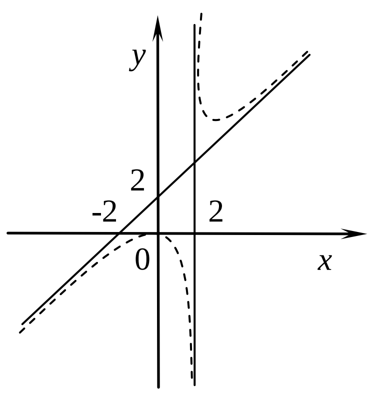


Рис.5.56

$$\lim_{x\to 2-0} y = -\infty,\ \lim_{x\to 2+0} y = +\infty.$$

Далее имеем

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-2} = 1.$$

Итак, если наклонная асимптота существует, то её угловой коэффициент равен 1. Наконец,

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2} = 2,$$

так что наклонная асимптота действительно имеется, и её уравнение: $y = x + 2$. При этом

$$\frac{x^2}{x-2} - (x+2) = \frac{x^2 - x^2 + 4}{x-2} = \frac{4}{x-2},$$

а значит при $x > 2$ кривая лежит выше наклонной асимптоты, а если $x < 2$, то под нею, рис. 5.56.

Пример 5.13. Возьмём теперь линию $y = x + \sqrt{x}$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty,$$

т. е. горизонтальная асимптота отсутствует. Далее, функция определена при всех $x \geq 0$, а значит отсутствует и вертикальная асимптота. Наконец,

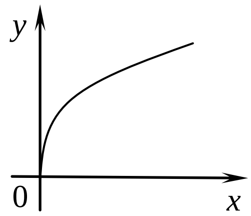


Рис.5.57

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x} - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Поскольку последний предел не существует, то наклонной асимптоты также нет.

Таким образом, рассматриваемая линия вообще не имеет асимптот, рис. 5.57.

13. Схема и пример полного исследования функции

Полное исследование функции включает в себя следующие этапы:

1°. Нахождение области определения функции.

2°. Исследование функции на чётность или нечётность, а также на периодичность.

3°. Нахождение корней функции и других характерных точек её графика (если таковые имеются).

4°. Нахождение асимптот графика.

5°. Нахождение экстремумов функции и промежутков её возрастания и убывания.
6°. Нахождение точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости графика.
7°. Завершение построения графика функции.

Пример 5.14. Исследуем функцию $y=\sqrt[3]{3x^2-x^3}$.
1°. Очевидно, что функция определена на всей числовой оси.
2°. Функция не является ни чётной, ни нечётной (а значит её график соответствующей симметрией не обладает), ни периодической.
3°. Функция обращается в нуль при $x=0$ и при $x=3$.
4°. Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$, то горизонтальная асимптота отсутствует. Отсутствие вертикальной асимптоты следует из того, что функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Наконец,
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{3x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x}=-1;$$
$$b=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{3x^2-x^3}+x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3x^2-x^3\right)+x^3}{\sqrt[3]{\left(3x^2-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{3x^2-x^3}+x^2}=\frac{3}{1-(-1)+1}=1.$$
Итак, существует наклонная асимптота $y=-x+1$.
5°. Имеем
$$y'=\frac{6x-3x^2}{3\sqrt[3]{\left(3x^2-x^3\right)^2}}=\frac{2x-x^2}{\sqrt[3]{\left(3x^2-x^3\right)^2}}=\frac{x(2-x)}{\sqrt[3]{x^4(3-x)^2}}.$$

Отсюда следует, что имеется одна стационарная точка: $x=2$, и, кроме того, в точках $x=0$ и $x=3$ производная не существует. Все эти точки подозрительны на экстремум.

Исследуем сначала точку $x=0$. Имеем
$$\lim_{x\to0}y'=\lim_{x\to0}\frac{O^*(x)}{O^*\left(x^{4/3}\right)}=\infty .$$

При этом, как нетрудно видеть,
$$\lim_{x\to-0}y'=-\infty,\ \lim_{x\to+0}y'=+\infty .$$
При переходе через точку $x=0$ производная меняет знак с «–» на «+». Следовательно, в точке $x=0$ – минимум, причём $y(0)=0$.

Поскольку поведение функции вблизи точки $x=0$ уже исследовано, то теперь в выражении для y' можно произвести сокращение на *x*. Получим

$$y' = \frac{2-x}{\sqrt[3]{x(3-x)^2}}. \qquad (5.13)$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 3-0} y' = -\infty, \quad \lim_{x\to 3+0} y' = -\infty,$$

т. е. при переходе через точку $x=3$ производная не меняет знака, т. е. в этой точке экстремума нет, а есть перегиб с вертикальной касательной.

С целью исследования точки $x=2$ найдём предварительно y''. Из (5.13) имеем

$$y' = \frac{2-x}{\sqrt[3]{9x-6x^2+x^3}},$$

а значит

$$y'' = \frac{-\sqrt[3]{9x-6x^2+x^3} - (2-x)\dfrac{9-12x+3x^2}{3\sqrt[3]{\left(9x-6x^2+x^3\right)^2}}}{\sqrt[3]{\left(9x-6x^2+x^3\right)^2}} = \frac{-\left(9x-6x^2+x^3\right)-(2-x)\left(3-4x+x^2\right)}{\sqrt[3]{\left(9x-6x^2+x^3\right)^4}} =$$

$$= -\frac{9x-6x^2+x^3+6-8x+2x^2-3x+4x^2-x^3}{\sqrt[3]{\left(9x-6x^2+x^3\right)^4}} = \frac{2x-6}{\sqrt[3]{\left(9x-6x^2+x^3\right)^4}} = \frac{2(x-3)}{\sqrt[3]{x^4(3-x)^8}}.$$

Отсюда следует, что $y''(2)<0$, а значит в точке $x=2$ функция имеет максимум; при этом $y(2)=\sqrt[3]{4}$.

6°. В точке $x=3$ величина y'' не существует, но мы уже видели, что соответствующая точка $(3,0)$ является точкой перегиба. Если же $x\neq 3$, то

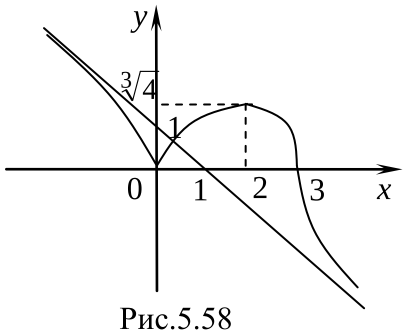


Рис.5.58

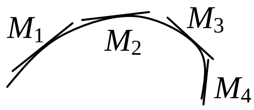
$$y'' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x-3)^5}},$$

т. е. величина y'' в нуль нигде не обращается, а значит других точек перегиба нет.

7°. На основании всех полученных сведений строим график функции, рис. 5.58.

14.Кривизна плоской кривой

Очевидно, чем сильнее искривлена кривая, тем быстрее вращается касательная к ней при движении точки M по кривой.



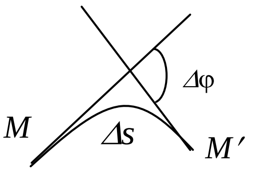
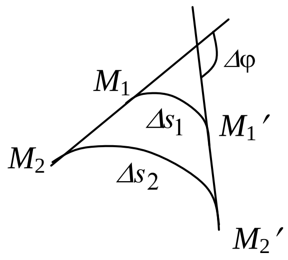


Рис.5.59

Угол $\Delta\varphi$ между касательными, проведёнными в начале и в конце дуги MM', называют углом смежности этой дуги, рис. 5.59. Этот угол сам по себе ещё не характеризует искривлённости дуги MM', так как существенна и длина того участка пути, по которому касательная повернулась на этот угол. Поэтому нужно рассматривать отношение $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$. Оно называется средней кривизной дуги $\overset{\cup}{MM'}$ (ср. со средней скоростью точки за данный промежуток времени).



Пусть теперь $\Delta s \to 0$. Предел

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

называют кривизной данной дуги в точке M. Очевидно,

$$K = \frac{d\varphi}{ds}. \tag{5.14}$$

Ниже это определение будет несколько уточнено.

1°. Пусть кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$. Перепишем (5.14) так

$$K = \frac{\dfrac{d\varphi}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}.$$

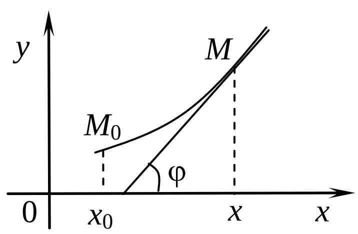


Рис.5.60

Поскольку $\operatorname{tg}\varphi = y'$, т. е. $\varphi = \operatorname{arctg} y'$, то

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

Кроме того, в главе VII будет показано, что

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}. \tag{5.15}$$

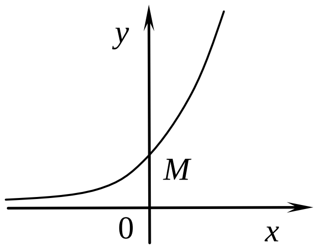
Поэтому получаем

$$K = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Если кривая – вогнутая, то $y'' \le 0$, а K, по определению, есть неотрицательная величина (как скорость вращения касательной, отнесённая к единице длины дуги). Поэтому в общем случае пишут так:

$$K = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}. \tag{5.16}$$

Это значит, что фактическим определением кривизны является не равенство (5.14), а равенство $K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$.

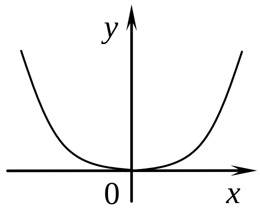


Пример 5.15. Найдём кривизну линии $y = e^x$ в точке $M(0,1)$. Имеем

$$K(x) = \frac{e^x}{\left(1 + e^{2x}\right)^{3/2}}.$$

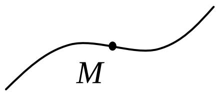
Отсюда

$$K(M) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$



Пример 5.16. Пусть $y = kx + b$. Тогда $y' = k$, $y'' \equiv 0$, а значит и $K \equiv 0$, т. е. кривизна прямой линии в любой её точке, как и естественно было ожидать, равна нулю.

Пример 5.17. Пусть $y = x^4$. Тогда $y'' = 12x^2$, т. е. $y''(0) = 0$, а значит и $K(0) = 0$, хотя линия в окрестности точки 0 и не является прямой.



Пример 5.18. Вывод предыдущего примера относится также к тем точкам перегиба, которые связаны с обращением величины y'' в нуль.

2°. Пусть кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Тогда

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ y''_{xx} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Подставляя это в (5.16), находим

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{\left\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\right\}^{3/2}}.$$

15. Радиус кривизны и центр кривизны

Возьмём сначала окружность радиуса *R*. Для её кривизны в произвольной точке *M* имеем

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{1}{R}.$$

Итак, кривизна окружности во всех её точках одинакова и обратна её радиусу, а значит и наоборот

$$R = \frac{1}{K}.$$

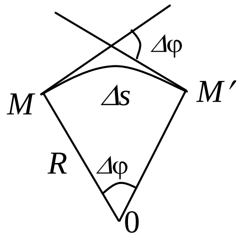


Рис.5.61

В связи с этим результатом величину $R = \dfrac{1}{K}$ для произвольной кривой называют радиусом кривизны этой кривой в данной точке, рис. 5.61. Из (5.16) следует тогда, что

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}.$$

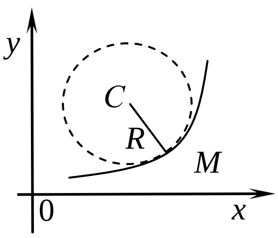


Рис.5.62

Проведём в точке *M* нормаль к кривой и отложим на ней в сторону вогнутости отрезок $MC = R$. Полученная таким способом точка *C* называется центром кривизны кривой в точке *M*, а окружность радиуса *R* с центром в точке *C* называют окружностью кривизны (или кругом кривизны) в точке *M*, рис. 5.62. Очевидно, что малый участок кривой вблизи точки *M* можно приближённо рассматривать как дугу соответствующей окружности кривизны.

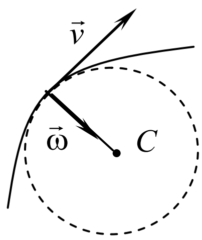


Рис.5.63

Последнее обстоятельство используется в механике. Предположим, что точка движется со скоростью $v = const$ по некоторой кривой, рис. 5.63. Тогда в каждый момент можно считать, что эта точка движется не по своей траектории, а по соответствующей окружности кривизны точки траектории. Поэтому её ускорение в каждый данный момент направлено по нормали к траектории в направлении центра кривизны (в связи с чем его называют нормальным, или центробежным), а его величина равна

$$\omega = \frac{v^2}{R},$$

где *R* – радиус кривизны траектории в данной точке.

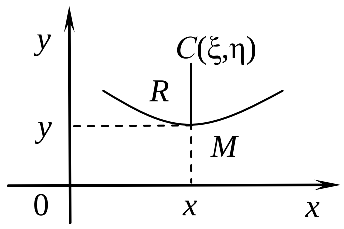


Рис.5.64

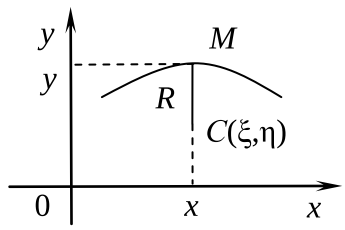
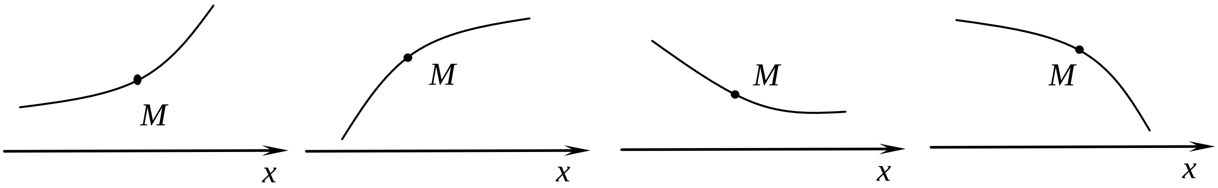


Рис.5.65

Выведем формулы для координат центра кривизны. Заметим, что если при данном *x* будет $y'' = 0$, то для соответствующей точки $M(x, y)$ кривой будет $R=\infty$, т. е. центр кривой уходит на бесконечность.

Далее, если в точке $M(x, y)$ будет $y'=0$, то, очевидно,



Сл.1. $y'>0,\ y''>0$ Сл.2. $y'>0,\ y''<0$ Сл.3. $y'<0,\ y''>0$ Сл.4. $y'<0,\ y''<0$

Рис.5.66

$\xi=x, \eta=y+R$ при $y''>0$ (рис. 5.64) или $\xi=x, \eta=y-R$ при $y''<0$ (рис. 5.65).

Оставляя в стороне все эти тривиальные случаи, отметим, что остальные случаи разбиваются на 4 группы:

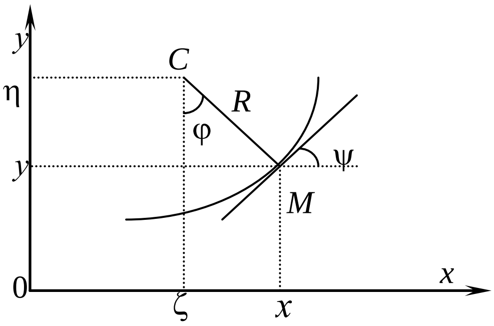


Рис.5.67

Обратимся к случаю 1. Имеем (см. рис. 5.67)

$$\xi=x-R\sin\varphi,\ \eta=y+R\cos\varphi. \qquad (5.17)$$

Но поскольку $\operatorname{tg}\varphi=y'$, то

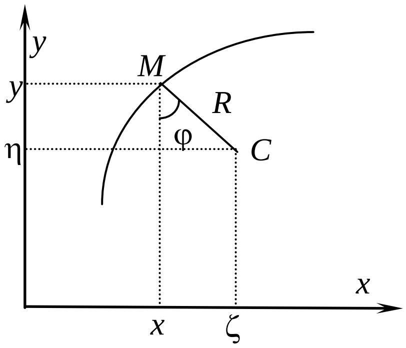


Рис.5.68

$$\sin\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Далее, в этом случае $R=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, а поэтому окончательно для случая 1 имеем

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\ \ \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \qquad (5.18)$$

Легко видеть, что в случае 2 (рис. 5.68) имеют место те же формулы. Аналогично проверяется их справедливость для случаев 3 и 4.

16. Эволюта, эвольвента и их свойства

Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется эволютой этой кривой. Если кривая (A) является эволютой кривой (B), то кривая (B) называется эвольвентой (или развёрткой) кривой (A), рис. 5.69.

Пусть кривая имеет уравнение $y = f(x)$. Тогда из (5.18) следует, что для любой точки эволюты будет

$$\xi = x - \frac{f'(x)\left\{1+[f'(x)]^2\right\}}{f''(x)},$$

$$\eta = f(x) + \frac{1+[f'(x)]^2}{f''(x)}.$$

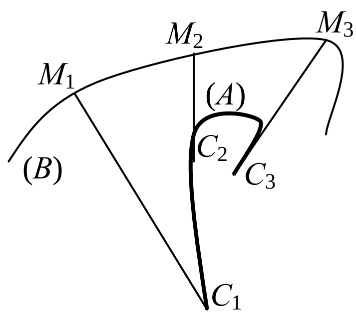


Рис.5.69

Это – параметрические уравнения эволюты (роль параметра играет x).

Пример 5.19. Найдём эволюту параболы $y = x^2$. Имеем

$$\xi = x - \frac{2x\left(1+4x^2\right)}{2},$$

$$\eta = x^2 + \frac{1+4x^2}{2},$$

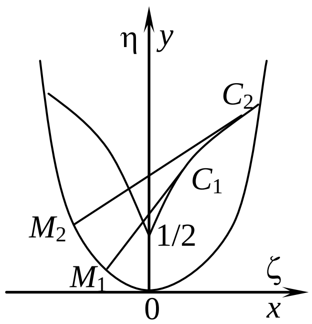


Рис.5.70

т. е.

$$\xi = -4x,^3$$

$$\eta = 3x^2 + \frac{1}{2}.$$

Исключая параметр x, находим

$$x = -\sqrt[3]{\frac{\xi}{4}}, \quad \eta = \frac{3}{\sqrt[3]{16}}\xi^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}.$$

Это – полукубическая парабола, рис. 5.70.

Теорема 5.18. Нормаль кривой является касательной к её эволюте в соответствующем центре кривизны.

■Проведём доказательство для случая 1 (см. рис. 5.66). Из равенства (5.17) имеем

$$d\xi = dx - dR\sin\varphi - R\cos\varphi d\varphi,\ d\eta = dy + dR\cos\varphi - R\sin\varphi d\varphi. \qquad (5.19)$$

Далее, формула (5.15) даёт:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \cos\varphi,$$

а значит,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \operatorname{tg}\varphi\cdot\cos\varphi = \sin\varphi.$$

Поэтому

$$R\cos\varphi d\varphi=\frac{ds}{d\varphi}\cdot\frac{dx}{ds}d\varphi=dx,\quad R\sin\varphi d\varphi=\frac{ds}{d\varphi}\cdot\frac{dy}{ds}d\varphi=dy.$$

В связи с этим, равенства (5.19) перепишутся так:

$$d\xi=dx-dR\sin\varphi-dx,\quad d\eta=dy+dR\cos\varphi-dy,$$

т. е.

$$d\xi=-dR\sin\varphi,\ d\eta=dR\cos\varphi. \qquad (5.20)$$

Отсюда

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-\mathrm{ctg}\,\varphi=-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi},$$

т. е.

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

откуда и следует утверждение теоремы.□

Легко проверить, что в случаях 2-4 доказательство проводится совершенно аналогично.

Теорема 5.19. Если на некотором участке кривой её радиус кривизны изменяется монотонно, то приращение дуги эволюты этой кривой равно изменению радиуса кривизны кривой на данном участке.

■Пусть, для определённости, величина R на данном участке M_1M_2 возрастает, рис. 5.71. Докажем, что $\overset{\smile}{C_1C_2}=M_2C_2-M_1C_1.$

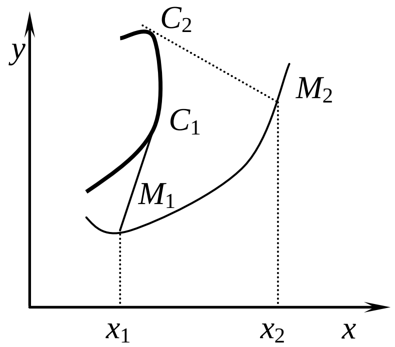


Рис.5.71

На основании формулы (5.15) имеем для длины дуги эволюты (отсчитываемой от некоторой точки)

$$\frac{d\sigma}{d\xi}=\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2},$$

откуда $$d\sigma^2=d\xi^2+d\eta^2,$$

или, в силу (5.20)

$$d\sigma^2=dR^2,$$

т. е.

$$d\sigma=\pm dR,$$

а значит,

$$\frac{d\sigma}{dx}=\pm\frac{dR}{dx}. \qquad (5.21)$$

Применим к функциям $\sigma(x)$ и $R(x)$ на отрезке $[x_1,x_2]$ теорему Коши:

$$\frac{\sigma(x_2)-\sigma(x_1)}{R(x_2)-R(x_1)}=\frac{\sigma'_x(\tau)}{R'_x(\tau)}.$$

На основании (5.21) получаем:

$$\frac{\sigma(x_2)-\sigma(x_1)}{R(x_2)-R(x_1)}=\pm 1,$$

а значит,

$$\sigma(x_2)-\sigma(x_1)=|R(x_2)-R(x_1)|,$$

что и требовалось доказать.□

Из доказанной теоремы вытекает простое правило механического построения эвольвенты. Пусть гибкая линейка согнута по форме эволюты C_0C_5 (рис. 5.72). Предположим, что нерастяжимая нить, одним концом укрепленная в точке C_0, огибает эту линейку. Если мы будем эту нить развертывать, оставляя ее все время натянутой, то конец нити опишет кривую M_5M_0 – эвольвенту. Отсюда происходит и название «эвольвента» – развертка. Отсюда, в свою очередь, следует, что всякая кривая имеет бесчисленное множество эвольвент.

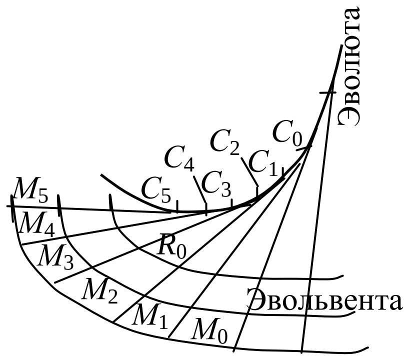


Рис.5.72

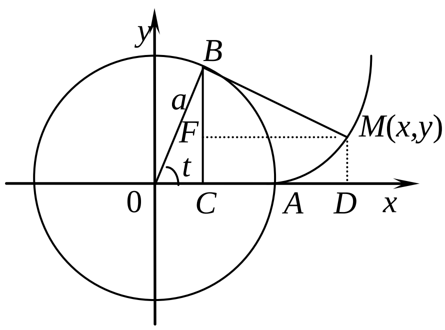


Рис.5.73

Пример 5.20. Возьмём окружность $x^2+y^2=a^2$ и найдём ту её эвольвенту, которая выходит из точки $A(a,0)$, рис. 5.73. Имеем

$$x_M=OC+CD=a\cos t+BM\sin t=a\cos t+\overset{\cup}{AB}\sin t=a\cos t+at\sin t;$$

$$y_M=BC-BF=a\sin t-BM\cos t=a\sin t-at\cos t.$$

Итак, параметрические уравнения искомой эвольвенты:

$$x=a(\cos t+t\sin t),$$

$$y=a(\sin t-t\cos t).$$

17. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$

Теорема 5.20. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ обращаются в нуль в точке $x=a$, и в некоторой окрестности этой точки удовлетворяет условиям теоремы Коши. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, и оба предела равны между собой.

■Пусть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$, где A – некоторое число (или $A=\infty$). Требуется доказать, что тогда и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=A$.

Возьмём произвольное x, близкое к a, и применим к отрезку $[a,x]$ теорему Коши. Получим

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

А так как по условию $f(a)=\varphi(a)=0$, то

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{5.22}$$

Пусть $x\to a$. Тогда и $\xi\to a$ (рис. 5.74), а значит $\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\to A$. Отсюда и из (5.22) следует, что

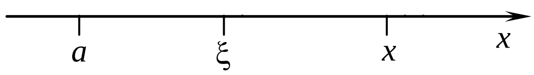


Рис.5.74

$$(x\to a)\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\to A\right),$$

что и требовалось доказать.□

Доказанное равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{5.23}$$

выражает собою правило Лопиталя, удобное для раскрытия неопределённостей вида $\dfrac{0}{0}$.

При доказательстве теоремы 5.20 предполагалось, что a – конечное число. Если же $x\to\infty$, то приведенное доказательство неприменимо. Докажем, что, тем не менее и в данном случае

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

■Положим $x=\dfrac{1}{t}$, где t – новая переменная. Тогда $(x\to\infty)\Rightarrow$ $(t\to 0)$, и, применяя правило (3.13), а также уже доказанное равенство (5.23), получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

что и требовалось доказать.□

Пример 5.21. Вычислим предел $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$. Непосредственная подстановка даёт $A=\frac{0}{0}$, выполнение условий теоремы 5.20 очевидно, а значит, можно применить правило Лопиталя. Получаем

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{c^x\ln c-d^x\ln d}=\frac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}=\frac{\ln\frac{a}{b}}{\ln\frac{c}{d}}.$$

Пример 5.22. Аналогично

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}=2\lim_{x\to\pi}\sin^2\frac{x}{2}=2.$$

Пример 5.23. Применяя правило Лопиталя (5.23), имеем

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^2 x}.$$

Поскольку вновь получена неопределённость вида $\frac{0}{0}$, то снова применим правило Лопиталя. Получим

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{6x\cos^2 x-3x^2 2\cos x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x}{2(x\cos x-x^2\sin x)}.$$

При последующем применении правила Лопиталя получим в знаменателе ещё более громоздкое выражение и т. д. Итак, применять правило Лопиталя в чистом виде здесь (как и во многих других примерах) нецелесообразно. Однако, заметив, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x=1$, получим

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{6x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

Примечание. В примерах 5.21-5.23 можно вообще обойтись без правила Лопиталя, а использовать только элементарные приёмы вычисления пределов, основанные на известных соотношениях эквивалентности. Например, в примере 5.23 имеем

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Вообще же при раскрытии неопределённостей следует разумно сочетать правило Лопиталя и элементарные приёмы вычисления пределов. Приведём примеры, когда одними лишь элементарными приёмами обойтись вообще нельзя.

Пример 5.24.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

Пример 5.25. Вычислим предел

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arsh} 2x-2\operatorname{Arsh} x}{x^3}.$$

Вначале применяем правило Лопиталя:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+4x^2}}{x^2\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}},$$

а так как $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+4x^2}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x^2}=1$, то

$$A=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+4x^2}}{x^2}.$$

Дальше уже проще воспользоваться тем, что

$$(\alpha\to 0)\Rightarrow\left(\sqrt[n]{1+\alpha}-1\sim\frac{\alpha}{n}\right).$$

Получим

$$A=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)-\left(\sqrt{1+4x^2}-1\right)}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{4x^2}{2}}{x^2}=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)=-1.$$

Сделаем ещё одно существенное замечание.

Пример 5.26. Имеем на основании правила Лопиталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2+3}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{2x}=1.$$

Здесь правило Лопиталя даёт заведомо неверный результат, так как неопределённость здесь отсутствует, и непосредственная подстановка даёт

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2+3}=\frac{3}{4}.$$

В данном случае равенства $f(a)=\varphi(a)=0$ не выполнены, т. е. не выполнены условия теоремы 5.20.

Итак, прежде чем применять правило Лопиталя, необходимо убедиться в наличии неопределённости.

18. Раскрытие неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$ по правилу Лопиталя

Теорема 5.21. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x=a$, кроме самой этой точки, причём всюду в этой окрестности будет $\varphi'(x)\neq 0$; пусть, далее, при $x\to a$ будет $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to\infty$. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, и оба предела равны между собой.

■Предположим, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A. \tag{5.24}$$

Докажем, что тогда и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A. \tag{5.25}$$

Возьмём вблизи точки $x=a$ две точки: $x=x_1$ и $x=x_2$, так, чтобы было $x_1<x_2<a$, рис. 5.75. На основании теоремы Коши имеем

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \tag{5.26}$$

где $\xi\in(x_1,x_2)$.

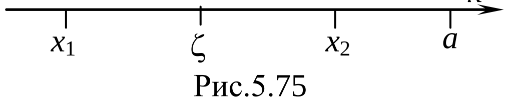


Рис.5.75

Из равенства (5.24) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$\left(|x-a|<\delta\right)\Rightarrow\left(\left|\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-A\right|<\varepsilon\right).$$

Будем считать, что $x_1\in C_\delta(a)$. Тогда и $\xi\in C_\delta(a)$, откуда следует, что $\left|\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}-A\right|<\varepsilon$, а значит, в силу (5.26),

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}-A\right|<\varepsilon,$$

т. е.

$$A-\varepsilon<\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}<A+\varepsilon,$$

или

$$A-\varepsilon<\frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}}{1-\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}}<A+\varepsilon. \tag{5.27}$$

Далее, поскольку $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, то при $x_1=const$ будет

$$\lim_{x_2\to a}\frac{1-\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}}=1.$$

Следовательно, существует такое $\delta_1(\varepsilon)>0$, что

$$\left(|x_2-a|<\delta_1\right)\Rightarrow\left(\left|\frac{1-\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}}-1\right|<\varepsilon\right),$$

т. е.

$$\left(|x_2-a|<\delta_1\right)\Rightarrow\left(1-\varepsilon<\frac{1-\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}}<1+\varepsilon\right). \tag{5.28}$$

Пусть $\delta_2=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда, перемножая почленно неравенства (5.27) и (5.28) (это возможно, поскольку члены в неравенстве (5.28) положительны), получим, что

$$(|x_2-a|<\delta_2)\Rightarrow\left((A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon)\right),$$

т. е.

$$\left(|x_2-a|<\delta_2\right)\Rightarrow\left(A-\left(\varepsilon+A\varepsilon-\varepsilon^2\right)<\frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)}<A+\left(\varepsilon+A\varepsilon+\varepsilon^2\right)\right).$$

Поскольку ε можно взять сколь угодно малым, то

$$\lim_{x_2 \to a} \frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)} = A.$$

Заменяя здесь x_2 на x, получим

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A. \tag{5.29}$$

Взяв теперь точки x_1 и x_2 так, чтобы было $a < x_2 < x_1$, точно так же докажем, что и

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A.$$

Отсюда и из (5.29) и следует равенство (5.25).□

Примечание 1. Доказательство теоремы 5.21 содержало немало деталей чисто технического характера, за которыми могла скрываться сущность доказательства. Поэтому приведём сокращённый вариант этого доказательства.

■Возьмём некоторое x_1, близкое к a, а между a и x_1 – произвольное x_2 (рис. 5.75).

Тогда

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

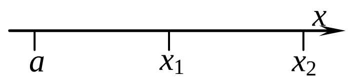


Рис.5.76

или

$$\frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)} \cdot \frac{\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)} - 1}{\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} - 1} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

т. е.

$$\frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)} = \frac{1 - \dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}} \cdot \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{5.30}$$

Взяв x_2 сколь угодно близким к a и не меняя x_1, мы сделаем величины $\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}$ и $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$ сколь угодно малыми, т.е. сделаем первый множитель справа в (5.30) сколь угодно близким к единице. Беря теперь x_1 сколь угодно близким к a, мы сделаем и ξ сколь угодно близким к a, так что

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

что и доказывает “правостороннюю” часть теоремы.□

Примечание 2. При доказательстве предполагалось, что $A<\infty$. Пусть теперь $A=\infty$, т.е. пусть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0<\infty$, причём в некоторой окрестности точки a будет $f'(x)\neq 0$ (поскольку в противном случае при условии, что $\varphi'(x)\neq 0$, не было бы $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}\to\infty$). Поэтому из уже доказанного следует, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)},$$

а значит,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Примечание 3. Так же, как и в случае неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$, легко убедиться в справедливости правила Лопиталя и для тех случаев, когда $x\to\infty$.

Пример 5.27. Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^n}$, где $a>1$, а n – натуральное число. Непосредственная подстановка даёт неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применяя n раз правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^2}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^n}{n!}=+\infty.$$

Очевидно, что и при любом (не обязательно целом) c также будет

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^c}=+\infty.$$

Действительно, пусть n – натуральное число, такое, что $c<n$. Тогда $x^c=x^n$, т. е. $\dfrac{a^x}{x^c}>\dfrac{a^x}{x^n}$, а так как $\dfrac{a^x}{x^n}\to+\infty$ при $x\to+\infty$, то тем более $\dfrac{a^x}{x^c}\to+\infty$.

Итак, показательная функция с любым основанием $a>1$ растёт при $x\to+\infty$ быстрее любой степенной функции со сколь угодно большим показателем.

Пример 5.28. Аналогично при любом $c > 0$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^c} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{cx^{c-1}} = \frac{1}{c} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^c} = 0,$$

т. е. логарифмическая функция при $x \to +\infty$ растёт медленнее любой степенной функции со сколь угодно малым положительным показателем.

Пример 5.29. Имеем

$$\lim_{x\to+0} x \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} (-x) = 0.$$

Пример 5.30. Правило Лопиталя даёт

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}.$$

Последний предел не существует, в то время как исходный предел существует и, очевидно, равен 1. Но противоречия с правилом Лопиталя здесь нет, так как оно утверждает лишь, что если предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ существует, то существует и равен ему предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, но этот последний предел может существовать и без существования первого.

19. Раскрытие показательно-степенных неопределённостей

Пусть требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ в одном из следующих трёх случаев:

1 . $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ (неопределённость типа 1^∞, уже рассматривавшаяся в главе 3);

2 . $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ (неопределённость вида 0^0);

3 . $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ (неопределённость вида ∞^0).

Во всех случаях поступаем одинаково. Обозначаем $[f(x)]^{\varphi(x)} = y$. Тогда $\ln(y) = \varphi(x) \cdot \ln f(x)$, а значит

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} \varphi(x) \ln f(x).$$

Легко видеть, что во всех трёх случаях справа имеем неопределённость вида $0\cdot\infty$, которую можно, следовательно, привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрывая эту неопределённость, например, по правилу Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)=A,$$

где A – некоторое число, а значит и $\lim\limits_{x\to a}\ln y=A$, т. е. $\ln\lim\limits_{x\to a}y=A$, откуда для искомого предела имеем

$$\lim_{x\to a}y=e^{A}.$$

Пример 5.31. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}(e^{-x}+3x)^{\frac{1}{x}}$. Непосредственная подстановка даёт неопределённость вида 1^{∞}. Полагаем $y=(e^{-x}+3x)^{\frac{1}{x}}$. Тогда

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln(e^{-x}+3x),$$

а значит,

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{-x}+3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-e^{-x}+3}{e^{-x}+3x}}{1}=\frac{-1+3}{1}=2,$$

откуда

$$\lim_{x\to 0}y=e^{2}.$$

20. Приближённое вычисление корней уравнений методом хорд и касательных

Пусть требуется решить уравнение

$$f(x)=0, \tag{5.31}$$

где $f(x)$ – произвольная функция. Геометрически решение такого уравнения означает нахождение точек пересечения линии $y=f(x)$ с осью Ox, рис. 5.77.

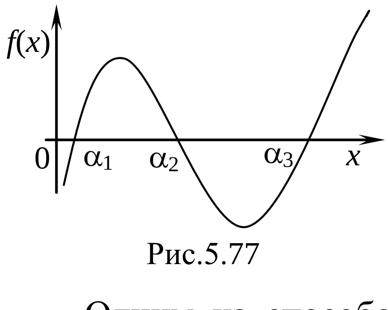


Рис.5.77

В связи с уравнением (5.31) могут возникнуть две следующие задачи.

1 . Определение числа всех корней и выяснение их примерного расположения.

2 . Нахождение одного или нескольких корней с данной степенью точности.

Одним из способов решения первой задачи является графический способ. Проиллюстрируем его на конкретном уравнении.

Пример 5.32. Возьмём уравнение $e^x + x = 0$. Перепишем его так:

$$e^x = -x\,.$$

Строим линии $y = e^x$ и $y = -x$. Они имеют единственную точку пересечения, рис. 5.78. Следовательно, данное уравнение имеет один единственный корень α, лежащий, как легко видеть, в интервале $(-1, 0)$.

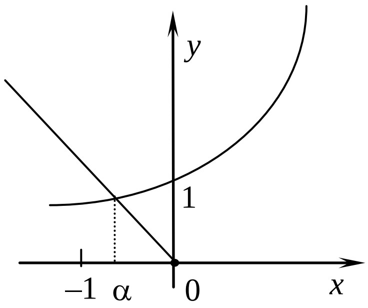


Рис.5.78

Возвратимся к уравнению общего вида (5.31). Пусть $[a, b]$ – такой отрезок, что $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, рис. 5.79. Тогда, если функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке, то, в силу 1-й теоремы Больцано–Коши, в интервале (a, b) уравнение (5.31) имеет по крайней мере один корень.

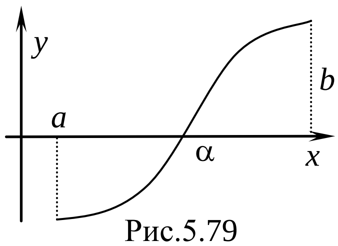


Рис.5.79

Однако, корней в интервале (a, b) может быть несколько, рис. 5.80. Гарантировать единственность корня можно, в частности, тогда, когда всюду в интервале (a, b) функция $f(x)$ монотонна, т. е. если величина $f'(x)$ не меняет знака на отрезке $[a, b]$.

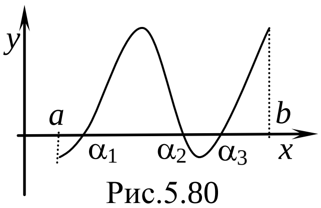


Рис.5.80

Корень уравнения называется изолированным, если известен интервал, в котором он лежит, и если известно, что других корней уравнения в этом интервале нет.

Очевидно, чем меньше интервал изоляции, тем точнее известен корень. Сузить интервал изоляции можно, например, методом проб. Проиллюстрируем этот приём на конкретном уравнении.

Пример 5.33. Возьмём уравнение

$$x^3 + 2x - 2 = 0\,. \qquad (5.32)$$

Имеем

$$f(0) = -2 < 0\,, \qquad f(1) = 1 > 0\,,$$

т. е. в интервале $(0,1)$ имеется по крайней мере один корень.

В то же время

$$f'(x) = 3x^2 + 2\,,$$

т. е. $f'(x) > 0\ \forall x$. Следовательно, уравнение (5.32) имеет один единственный вещественный корень, и он лежит в интервале $(0,1)$.

Возьмём в этом интервале произвольную точку, например, $x = \dfrac{1}{2}$.

Имеем

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{8} < 0 .$$

Следовательно, корень расположен в интервале $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Положим теперь $x = 0{,}7$. Имеем

$$f(0{,}7) = 0{,}343 + 1{,}4 - 2 = -0{,}257 < 0 ,$$

т. е. корень лежит в интервале $(0{,}7;1)$.

Взяв теперь $x = 0{,}8$ и учитывая, что

$$f(0{,}8) = 0{,}512 + 1{,}6 - 2 = 0{,}112 > 0 ,$$

заключаем, что искомый корень находится в интервале $(0{,}7;0{,}8)$, рис. 5.81.

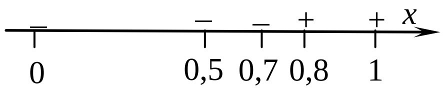


Рис.5.81

Продолжая этот процесс, можно найти корень с любой точностью. Однако описанный метод проб всё же весьма примитивен ввиду случайности выбора точек деления интервала изоляции, что приводит к весьма медленному сужению этого интервала.

Пусть дано уравнение (5.31) и пусть (a,b) – интервал изоляции его корня. При помощи метода проб этот интервал всегда можно сузить настолько, что в нём не будет ни экстремумов функции $f(x)$, ни точек перегиба её графика, т. е. $f'(x)$ в этом интервале не будет обращаться в нуль, а $f''(x)$ не будет менять в нём знака, рис. 5.82.

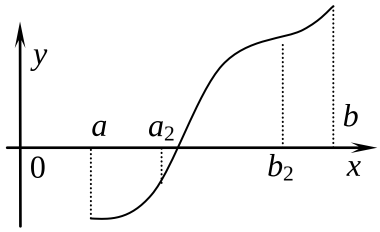
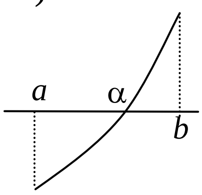


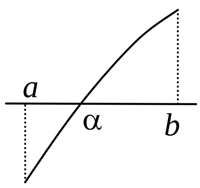
Рис.5.82

Будем считать, что это не имеет места с самого начала (рис. 5.83-5.86):



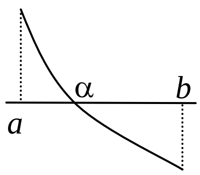
1. $f'(x) > 0, f''(x) \geq 0$

Рис.5.83



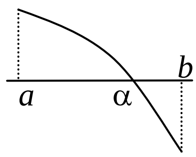
2. $f'(x) > 0, f''(x) \leq 0$

Рис.5.84



3. $f'(x) < 0, f''(x) \geq 0$

Рис.5.85



4. $f'(x) < 0, f''(x) \leq 0$

Рис.5.86

Рассмотрим сначала случай 1 (рис. 5.83). Применим для нахождения корня α метод, называемый методом хорд и касательных. Проведём хорду AB, рис. 5.87. Её уравнение:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} .$$

Положим здесь $y = 0$. Получим

$$-\frac{f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1' - a}{b - a},$$

откуда

$$x_1' - a = -\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)},$$

а значит,

$$x_1' = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}. \qquad (5.33)$$

Проведём теперь касательную в точке B, рис. 5.87. Её уравнение

$$y - f(b) = f'(b)(x-b).$$

Положив здесь $y=0$, получим

$$-f(b) = f'(b)(x_1''-b),$$

откуда

$$x_1'' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \qquad (5.34)$$

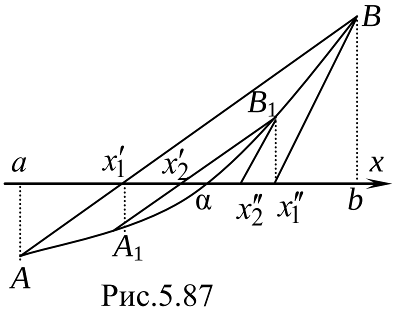


Рис.5.87

Полагая $b = x_0''$, $a = x_0'$, перепишем формулы (5.33) и (5.34) так:

$$x_1' = x_0' - \frac{(x_0''-x_0')f(x_0')}{f(x_0'')-f(x_0')},\ x_1'' = x_0'' - \frac{f(x_0'')}{f'(x_0'')} \qquad (5.35)$$

Проведём теперь хорду A_1B_1 и касательную в точке B_1. Получим числа x_2' и x_2''. Очевидно

$$x_2' = x_1' - \frac{(x_1''-x_1')\,f(x_1')}{f(x_1'') - f(x_1')},\ \ x_2'' = x_1'' - \frac{f(x_1'')}{f'(x_1'')},$$

и т. д. Следовательно, рабочие формулы процесса имеют вид

$$x_{n+1}' = x_n' - \frac{(x_n''-x_n')f(x_n')}{f(x_n'')-f(x_n')},\ x_{n+1}'' = x_n'' - \frac{f(x_n'')}{f'(x_n'')}. \qquad (5.36)$$

■Докажем, что последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ сходятся (соответственно слева и справа) к искомому корню α уравнения (5.31). Проверим сначала, что $x_n'' \underset{n\to\infty}{\to} \alpha+0$.

Пусть $L(x)$ – правая часть уравнения касательной в точке B, разрешённого относительно y, т. е. $L(x) = f'(b)(x-b)+f(b)$. Из вогнутости линии $y=f(x)$ следует, что если $a \le x \le b$, то $L(x) < f(x)$. Поэтому $(f(a)=0) \Rightarrow (L(a)<0)$. В то же время $L(b)=f(b)>0$. В силу монотонности функции $L(x)$, имеем: $\alpha < x_1'' < b$, т. е. $\alpha \le x_1'' < x_0''$. Повторяя те же рассуждения для отрезка $[\alpha, x_1'']$, получим, что $\alpha < x_2'' < x_1''$, и т. д. Итак,

$$\alpha < \ldots < x_n'' < \ldots < x_2'' < x_1'' < x_0''.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n''\}$ монотонно убывает и ограничена снизу числом α. Следовательно, она имеет предел $c \ge \alpha$. Докажем, что $c=\alpha$. Для этого во второй из формул (5.36) совершим предельный переход при $n\to\infty$. Учитывая непрерывность функций $f(x)$ и $f'(x)$ на отрезке $[a,b]$ (это следует из существования $f'(x)$ и $f''(x)$ на этом отрезке), получим

$$c=c-\frac{f(c)}{f'(c)},$$

т. е.

$$\frac{f(c)}{f'(c)}=0,$$

а так как $f'(c)<\infty$, то $f(c)=0$. Но это значит, что c – корень уравнения (5.31), т. е. что $c=\alpha$.

Докажем теперь, что $x'_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha-0$. Обозначим $l(x)$ правую часть уравнения хорды AB, разрешённого относительно y, то есть $l(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$. Если $a<x<b$, то в силу вогнутости линии $y=f(x)$, будет $l(x)>f(x)$. Следовательно, $(f(\alpha)=0)\Rightarrow(l(x)>0)$. В то же время $l(\alpha)=f(\alpha)<0$. На основании монотонности функции $l(x)$ заключаем, что $a<x_1<\alpha$, т.е. $x'_0<x'_1<\alpha$. Теперь, учитывая, что $f(x'_1)>0$, а $f(x''_1)>0$ (поскольку $x'_1<\alpha$, а $x''_1>\alpha$) и, повторяя те же рассуждения для отрезка $[x'_1,x''_1]$, получим, что $x'_1<x'_2<\alpha$ и т. д. Итак,

$$x'_0<x'_1<x'_2<....<x'_n<...<\alpha,$$

т. е. последовательность $\{x'_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом α. Поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n=c$, причём $c\le\alpha$. Покажем, что $c=\alpha$. Для этого, применив теорему Лагранжа, перепишем первую из формул (5.36) так

$$x'_{n+1}=x'_n-\frac{f(x'_n)}{f'(\xi_n)},$$

где $\xi_n\in(x'_n,x''_n)$. Перейдём здесь к пределу при $n\to\infty$. Получим

$$c=c-\frac{f(c)}{\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n)},$$

т. е.

$$\frac{f(c)}{\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n)}=0,$$

а так как величина $f'(\xi_n)$ ограничена, то $f(c)=0$, откуда и следует, что $c=\alpha$.□

Заметим, что по величине разности $x''_n-x'_n$ можно судить о точности найденного корня на каждом шаге.

Легко видеть, что то же самое имеет место и в случае 4. Обратимся теперь к случаям 2 и 3. Запишем уравнение хорды *AB* (рис. 5.88) так

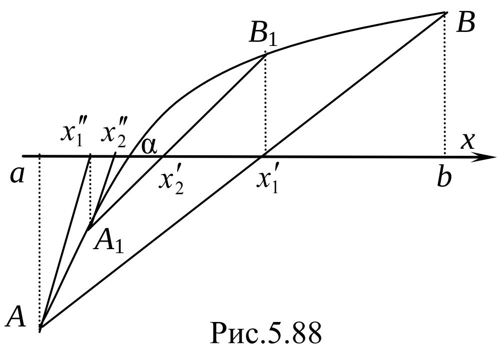


Рис.5.88

$$\frac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}=\frac{x-b}{a-b},$$

откуда при $y=0$

$$\frac{x_1'-b}{a-b}=\frac{-f(b)}{f(a)-f(b)},$$

а значит,

$$x_1'=b-\frac{(a-b)f(b)}{f(a)-f(b)}.$$

Аналогично, проводя касательную в точке *A*, получим

$$x_1''=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Полагая $b=x_0'$, $a=x_0''$, будем иметь

$$\begin{cases} x_1'=x_0'-\dfrac{(x_0''-x_0')f(x_0')}{f(x_0'')-f(x_0')}, \\ x_1''=x_0''-\dfrac{f(x_0'')}{f'(x_0'')}, \end{cases}$$

что совпадает с формулами (5.35) для случаев 1 и 4. Следовательно, и рабочие формулы в случае 2 и 3 совпадает с формулами (5.36) для случаев 1 и 4.

Таким образом, различие между случаями 1, 4 и случаями 2, 3 фактически проявляется лишь на первом шаге (если не считать того, что в случаях 2 и 3 точки x_n' приближаются к α справа, а не слева, а точки x_n'', наоборот, слева). Это различие состоит в том, что в случаях 2 и 3 касательная проводится не в точке *B*, а в точке *A*, т. е. в качестве x_0'' берётся не *b*, а *a*. Можно сформулировать на этот счёт следующее правило: в качестве x_0'' берётся тот конец отрезка $[a,b]$, в которой величины $f(x)$ и $f''(x)$ имеют одинаковые знаки. Несоблюдение этого правила может привести к тому, что x_1'' окажется не внутри, а вне отрезка $[a,b]$, т. е. мы можем на первом шаге не приближаться к искомому корню, а наоборот, удалиться от него, рис. 5.89.

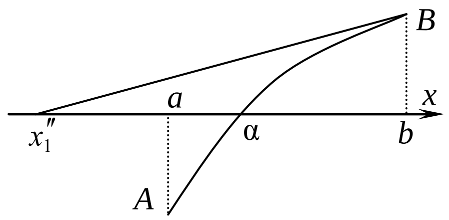


Рис.5.89

Пример 5.34. Возьмём то же уравнение (5.32), имеющее, как мы видели, единственный корень α в интервале $(0{,}1)$, и найдём его описанным способом с точностью до $0{,}01$.

Имеем

$$f'(x)=3x^2+2, \quad f''(x)=6x.$$

Таким образом, в интервале $(0{,}1)$ и $f'(x)$ и $f''(x)$ положительны, т. е. имеет место случай 1. Поэтому полагаем

$$x_0'=0, \quad x_0''=1.$$

Тогда

$$x_1'=0-\frac{(1-0)(-2)}{1-(-2)}=\frac{2}{3}=0{,}667;$$

$$x_1''=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}=0{,}800.$$

В данном случае $x_1''-x_1'=0{,}133$, а поэтому совершаем следующий шаг:

$$x_2'=0{,}667-\frac{(0{,}800-0{,}667)(0{,}667^3+2\cdot 0{,}667-2)}{(0{,}800^3+2\cdot 0{,}800-2)-(0{,}667^3+2\cdot 0{,}667-2)}=0{,}769;$$

$$x_2''=0{,}800-\frac{0{,}800^3+2\cdot 0{,}800-2}{3\cdot 0{,}800^2+2}=0{,}771.$$

Итак, с точностью до $0{,}01$ $x=0{,}77$.

Примечание. Вторая из формул (5.36) содержит только величины x_n'', т. е. эти величины не зависят от x_n'. Следовательно, можно вместо пары формул (5.36) пользоваться только одной формулой

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{5.37}$$

причём, как мы видели, будет $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$.

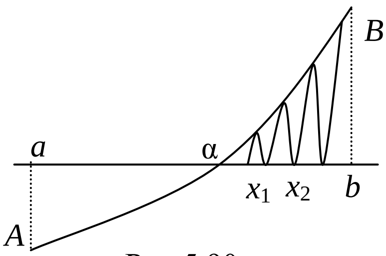


Рис.5.90

Метод, основанный на формуле (5.37), называют методом касательных или методом Ньютона.

21. Приближённое решение уравнений итерационным методом Пикара

Возьмём уравнение (5.31) и перепишем его произвольным образом в виде

$$x=\varphi(x). \tag{5.38}$$

Очевидно, это можно сделать бесчисленным множеством способов. Например, из уравнения (5.32) можно получить:

$$x=\sqrt[3]{2-2x},\ x=\frac{1}{2}\left(2-x^3\right),\ x=2-x^3-x,$$

и т. д.

Возьмём некоторое число x_0, вычислим $\varphi(x_0)$ и результат обозначим через x_1. Вычислим теперь $\varphi(x_1)$ и результат обозначим x_2 и т. д. В результате получим

$$x_1=\varphi(x_0), \tag{5.39}$$

$$x_2=\varphi(x_1), \tag{5.40}$$

$$x_3=\varphi(x_2),$$

и т. д. Рабочая формула процесса:

$$x_{n+1}=\varphi(x_n). \tag{5.41}$$

Предположим, что существует предел $\alpha=\lim\limits_{a\to\infty} x_n$. Тогда α – корень уравнения (5.38), а значит и уравнения (5.31).

Поскольку формула (5.41) носит рекуррентный характер, то в ней можно совершить предельный переход при $n\to\infty$. В результате получим

$$\alpha=\varphi(\alpha). \tag{5.42}$$

Итак, если процесс Пикара сходится, то он сходится к одному из корней уравнения (5.38).

Выясним теперь условия сходимости метода Пикара. Для этого из равенства (5.39) вычтем равенство (5.42). Получим

$$x_1-\alpha=\varphi(x_0)-\varphi(\alpha),$$

или, в силу теоремы Лагранжа,

$$x_1-\alpha=\varphi'(\xi)(x_0-\alpha), \tag{5.43}$$

где $\xi\in(\alpha,x_0)$. Положим, например, $x_0=b$, и пусть c – точка, симметричная точке b относительно точки a, рис. 5.91.

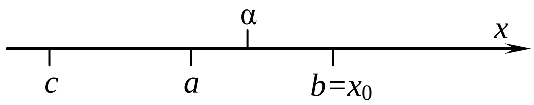


Рис.5.91

Предположим, что всюду на отрезке $[c,b]$ будет $|\varphi'(x)|\le q$, где $q<1$. Тогда, на основании (5.43)

$$|x_1-\alpha|\le q|x_0-\alpha|, \tag{5.44}$$

а так как $q<1$, то точка x_1 ближе к α, чем точка x_0.

Аналогично, вычитая равенство (5.42) из равенства (5.40), будем иметь

$$x_2-\alpha=\varphi'(\eta)(x_1-\alpha), \tag{5.45}$$

где $\eta\in(x,\alpha)$, а значит, тем более, $\eta\in[c,b]$. На основании (5.45) и (5.44),

$$|x_2-\alpha|\le q^2|x_0-\alpha|,$$

и т. д. Очевидно, что при любом натуральном n будет

$$|x_n - \alpha| \le q^n |x_0 - \alpha|, \qquad (5.46)$$

откуда, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.22. Если $|\varphi'(x)| \le q < 1, \forall x \in [c,b]$, то числа x_k, вычисляемые по методу Пикара, сходятся к корню уравнения. При этом каждое последующее приближение x_n даёт результат, более близкий к α, чем предыдущее x_{n-1}.

Из неравенства (5.46) следует, что чем меньше q, тем быстрее сходимость последовательности $\{x_n\}$ к α. Более того, зная q, можно, на основании (5.46), заранее оценить число шагов, необходимых для достижения требуемой точности.

Примечание 1. Если $\varphi'(\xi) < 0$, то может оказаться, что $x_1 \in (c, \alpha)$. Именно поэтому необходимо было ввести дополнительный отрезок $[c,\alpha]$. Если же $\varphi'(x) \ge 0$, $\forall x \in [a,b]$, то “переброс” точек x_n на отрезок $[c,\alpha]$ невозможен, и, следовательно, необходимости введения этого отрезка нет.

Если же вместо $x_0 = b$ положить $x_0 = a$, то, очевидно, отрезок $[a,b]$ надо продлить не влево, а вправо на такую же величину, рис. 5.92.

Примечание 2. Процесс Пикара обладает очень важным свойством самоисправляемости. Это значит, что если на каком-то шаге будет допущена ошибка в вычислениях, то сходимость от этого не нарушится, а может лишь несколько замедлиться. Действительно, ошибочно вычисленное значение x_n можно принять в качестве нового начального приближения (естественно, если оно не оказалось вне отрезка $[c,b]$).

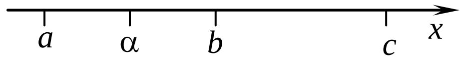


Рис.5.92

Разумеется, данным свойством обладает и ранее рассмотренный метод хорд и касательных, а также его частный случай – метод Ньютона.

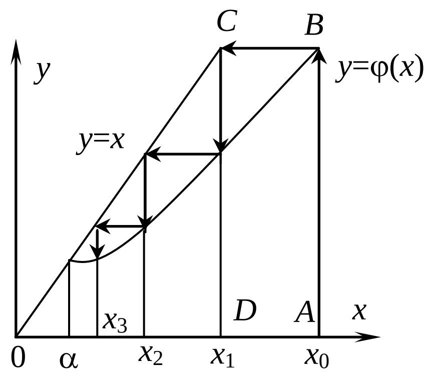


Рис.5.93

Выясним геометрический смысл метода Пикара. Из уравнения (5.38) следует, что корень α есть абсцисса точки пересечения линий $y = x$ и $y = \varphi(x)$.

Отложим на оси *Ox* отрезок $OA = x_0$, рис. 5.93. Так как $x_1 = \varphi(x_0)$, то для получения x_1 надо отложить на оси *Ox* отрезок $AB = \varphi(x_0)$. Но $AB = CD = OD$, т. е. $OD = x_1$. Аналогично строим на чертеже точки $x_2, x_3, \ldots$.

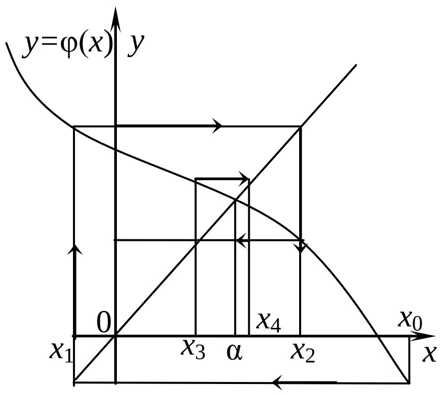


Рис.5.94

В изображённом на чертеже случае будет $0<\varphi'(x)<1$, а значит $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha+0$.

Пусть теперь на отрезке $[c,b]$ будет

$$-1<\varphi'(x)<0.$$

В этом случае, как следует из рис. 5.94, числа x_n стремятся к α с обеих сторон.

Предположим теперь, что $\varphi'(x)>1$. Тогда (рис. 5.95) числа x_n не приближаются к α, а наоборот, удаляются от корня, т. е. процесс расходится.

Аналогичная картина имеет место и тогда, когда $\varphi'(x)<-1$.

Возьмём опять конкретное уравнение (5.32). С изолированным корнем в интервале $(0,1)$. Приведём его к виду (5.38), например, так

$$x=1-\frac{x^3}{2}.$$

Тогда

$$\varphi'(x)=-\frac{3}{2}x^2,$$

а значит на отрезке $[-1,1]$ условие $|\varphi'(x)|\le q<1$ не выполняется.

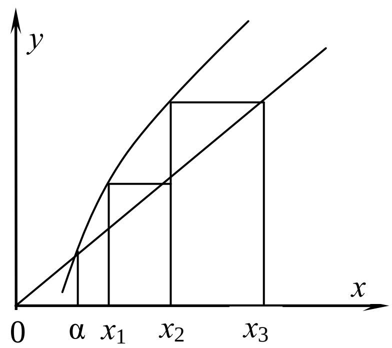


Рис.5.95

В связи с этим возникает вопрос: как привести конкретное уравнение вида (5.31) к виду (5.38) наиболее выгодным способом, т.е. так, чтобы величина $|\varphi'(x)|$ в требуемом промежутке была по возможности меньше единицы? Изложим по этому поводу один удобный метод. Начнём с конкретного уравнения (5.32). Перепишем его в виде

$$x=x+k(x^3+2x-2).$$

Здесь k – некоторое число, которое мы подберём наилучшим образом. Имеем

$$\varphi'(x)=1+k(3x^2+2).$$

Обозначим

$$3x^2+2=t,$$

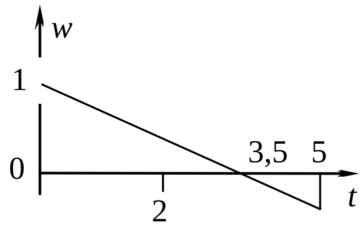


Рис.5.96

и рассмотрим величину $w=1+kt$. Если x изменяется на отрезке $[-1,1]$, то t изменяется от 2 до 5. Следовательно, нужно подобрать k так, чтобы величина $|w|$ была на отрезке $[2,5]$ как можно меньшей.

Считая равенство $w=1+kt$ уравнением прямой с угловым коэффициентом k, легко видеть из рис. 5.96, что наиболее выгодное значение k соответствует прямой, пересекающей ось Ox в точке $t=\frac{2+5}{2}=3{,}5$.

Следовательно,

$$k=-\frac{1}{3{,}5}=-\frac{2}{7},$$

и в этом случае

$$\max_{[2,5]}|w|=1-\frac{2}{7}\cdot 2=\frac{3}{7}.$$

Итак, исходное уравнение (5.32) следует переписывать в виде

$$x=x-\frac{2}{7}\left(x^3+2x-2\right),$$

т. е.

$$x=\frac{3}{7}x-\frac{2}{7}x^3+\frac{4}{7}.$$

При этом характеризующее скорость сходимости число q равно, как мы видели, $\frac{3}{7}$.

Положим $x_0=1$. Тогда

$$x_1=\frac{3}{7}-\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{5}{7}=0{,}714;$$

$$x_2=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\cdot\frac{125}{343}+\frac{4}{7}=0{,}773.$$

Вспоминая результат примера 5.34, мы видим, что уже на втором шаге получен тот же результат, но путём меньшего числа вычислений.

Обращаясь к уравнению общего вида (5.31), точно так же перепишем его следующим образом

$$x=x+k\cdot f(x). \tag{5.47}$$

Повторяя в общем виде только что приведенные рассуждения, получим

$$k=-\frac{2}{M+m},$$

где $M=\max\limits_{[c,b]} f'(x), m=\min\limits_{[c,b]} f'(x)$.

Примечание 3. Описанный метод неприменим в том случае, когда числа M и m имеют разные знаки, т. е. когда при изменении x от c до b величина $f'(x)$ меняет знак, рис. 5.97. Следовательно, надо, чтобы функция $f(x)$ на отрезке $[c,b]$ была монотонной. Этого всегда можно добиться методом проб.

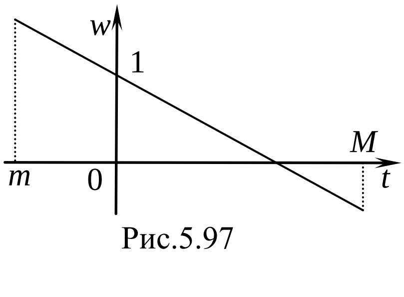


Рис.5.97

Примечание 4. Уравнение (5.31) можно заменить не только уравнением вида (5.47), но и уравнением

$$x = x + k(x)\cdot f(x),$$

где $k(x)$ – монотонная функция, не обращающаяся в нуль на отрезке $[c,b]$.

В частности, полагая $k(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$, получим

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Рабочая формула метода Пикара в этом случае запишется так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

что совпадает с формулой (5.37). Таким образом, метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода Пикара.

22. Формула Тейлора

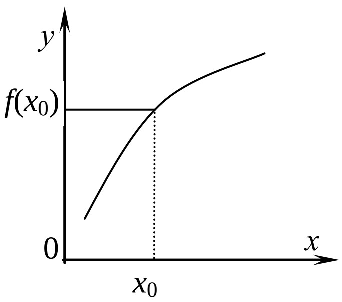


Рис.5.98

Пусть $f(x)$ – произвольная функция, для которой в данной точке x_0 известны значения её производных: $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... , $f^{(n)}(x_0)$. Будем приближённо искать эту функцию в виде некоторого многочлена $P_n(x)$, где n – степень этого многочлена.

Пусть сначала $n=0$, т. е. положим $f(x) = P_0(x)$, рис. 5.98. В данном случае наиболее естественно взять $P_0(x) = f(x_0)$. Итак, в этом случае будет $P_0(x) = f(x_0)$. При этом, очевидно, если $x \to x_0$, то $f(x) - P_0(x) = O^*(x - x_0)$.

Пусть теперь $n=1$, т. е. заменим $f(x)$ многочленом 1-й степени. В этом случае в качестве графика многочлена $P_1(x)$ естественно взять касательную к линии $y = f(x)$ в точке M_0. Уравнение этой касательной:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (5.48)$$

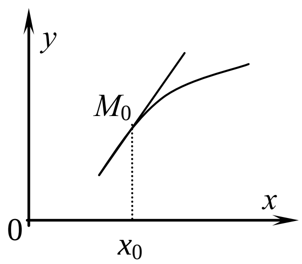


Рис.5.99

Таким образом, положив $f(x) \approx P_1(x)$, мы будем иметь

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (5.49)$$

В данном случае будет $f(x_0) = P_1(x_0),\ f'(x_0) = P_1'(x_0)$. Здесь уже при $x \to x_0$ будет $f(x) - P_1(x) = O(x - x_0)$.

Пусть $n = 2$. Потребуем теперь, чтобы для равенства $f(x) \approx P_2(x)$ было

$$f(x_0) = P_2(x_0),\ f'(x_0) = P_2'(x_0),\ f''(x_0) = P_2''(x_0)$$

(последнее, на основании формулы (5.16), означает, что в точке M_0 линии $y=f(x)$ и $y=P_2(x)$ имеют не только общую касательную, но и общую окружность кривизны). Легко получить, что

$$P_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2,$$

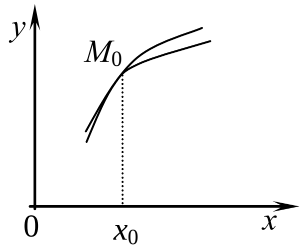


Рис.5.100

а значит, равенство $f(x)\approx P_2(x)$ запишется так:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2,$$

причём точность этого равенства, как усматривается из рис. 5.100, значительно выше, чем у выражения (5.48).

Взяв теперь $n=3$, мы потребуем, чтобы было

$f(x_0)=f_3(x_0),\ f'(x_0)=P_3'(x_0),\ f''(x_0)=P_3''(x_0),\ f'''(x_0)=P_3'''(x_0)$, и т. д.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ дифференцируема *n* раз, и потребуем, чтобы в равенстве $f(x)=P_n(x)$ было

$$P_n(x_0)=f(x_0),\ P_n'(x_0)=f'(x_0),$$
$$P_n''(x_0)=f''(x_0),\ldots,P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0). \qquad (5.49)$$

Будем искать $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ldots+a_n(x-x_n)^n. \qquad (5.50)$$

При $x=x_0$ имеем отсюда

$$a_0=P_n(x_0),$$

т. е., на основании (5.49),

$$a_0=f(x_0).$$

Далее, дифференцируя равенство (5.50), имеем

$$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1}, \qquad (5.51)$$

откуда

$$P_n'(x_0)=a_1,$$

или, на основании (5.49),

$$a_1=f'(x_0).$$

Аналогично, дифференцируя (5.51), получим

$$P_n''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-x_0)+\ldots+(n-1)n\cdot a_n(x-x_0)^{n-2},$$

откуда $P_n''(x_0)=2!a_2$, а значит, на основании (5.49),

$$a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}.$$

Продолжая этот процесс, будем иметь

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Таким образом, многочлен степени $\le n$, удовлетворяющий условиям (5.49), имеет вид

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (5.52)$$

Оценим теперь порядок точности равенства $f(x) \approx P_n(x)$. Для этого обозначим $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Тогда условия (5.49) запишутся так

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \quad (5.53)$$

Применив n раз правило Лопиталя и последовательно используя равенство (5.53), находим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{r''(x)_n}{(n-1)n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} =$$

$$= \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

откуда следует, что $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$, т. е. что при $x \to x_0$ будет

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n),$$

где $P_n(x)$ даётся формулой (5.52).

Итак, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5.22. Если функция $f(x)$ определена в некотором промежутке (a, b) и в точке x_0 имеет непрерывные производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, то в этом промежутке выполняется равенство

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) +$$

$$+ o((x - x_0)^n). \quad (5.54)$$

Эту формулу называют формулой Тейлора, а величину $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ - остаточным членом формулы Тейлора в форме Пеано.

При $x_0 = 0$ формула (5.54) принимает вид

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (5.55)$$

Этот частный случай формулы Тейлора называют рядом Маклорена.

Примечание. Нетрудно доказать и утверждение, обратное теореме 5.22. Именно, если функция $f(x)$ в точке x_0 дифференцируема n раз и если $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$, где $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ – некоторый многочлен, то коэффициенты этого многочлена даются формулой

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \ (k=0,1,2,\ldots,n),$$

т. е. $P_n(x)$ совпадает с многочленом (5.52).

Пример 5.35. Пусть $f(x)=e^x$, а $x_0=0$. Поскольку $f^{(k)}(x)=e^x \ \forall k$, то

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=1,$$

а значит, в силу (5.55)

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n). \qquad (5.56)$$

Пример 5.36. Пусть $f(x)=\sin x$. Тогда

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^{(4)}(x)=\sin x,\ f^{(5)}(x)=\cos x,\ldots,$$

а значит

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=0,\ f^{(5)}(0)=1,\ldots$$

откуда

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right). \qquad (5.57)$$

Пример 5.37. Совершенно аналогично на основании той же формулы (5.53) будем иметь

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right), \qquad (5.58)$$

и т. д.

В дальнейшем мы получим целый ряд применений формул (5.56)-(5.58) и других подобных формул. Отметим сейчас лишь то, что они позволяют находить приближённые значения соответствующих функций при разных *x*. Например, при $x=\frac{1}{2}$ находим из (5.56)

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2 2!}+\frac{1}{2^3 3!}+\ldots+\frac{1}{2^n n!},$$

причём точность этого равенства, очевидно, тем выше, чем больше *n*.

Задачи и упражнения к главе V

1. Вокруг прямоугольника со сторонами *2p* и *2q* описать эллипс наименьшей площади.

2. Найти асимптоты линии $y=xe^{-\frac{1}{x}}$.

3. Найти окружность кривизны линии $y=1-(x-1)^2$ в её вершине.

4. Составить уравнение окружности кривизны линии $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ в точке $(1,1)$.

5. Найти окружность кривизны линии $y=2x-x^2$ в её вершине.

6. Найти вершину (точку экстремальной кривизны) линии $y=\frac{x^2}{2}-\ln x$.

При помощи правила Лопиталя вычислить пределы:

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

При помощи формулы Тейлора 3-го порядка вычислить приближённо:

12. $\ln 1{,}1$ 13. $\frac{1}{\sqrt[3]{1{,}2}}$; 14. $\frac{1}{\sqrt{1{,}1}}$.

Построить графики функций:

15. $y=e^{\operatorname{arctg} x}$; 16. $y=e^{\operatorname{arcctg} x}$; 17. $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$;

18. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1-x}{1+x}$; 19. $y=\frac{3-x^2}{x+2}$; 20. $y=\frac{1}{5x\sqrt{1-x}}$;

21. $y=\sqrt{\frac{x^3-2}{3x}}$; 22. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$; 23. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$;

24. $y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^4}{20}$; 25. $y=e^{\frac{1}{2x}}+x$; 26. $y=e^{2x-x^2}$;

27. $y=e^{\frac{1}{4(1-x^2)}}$; 28. $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$; 29. $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$;

30. $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; 31. $y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$; 32. $y=x+\operatorname{arcctg} x$;

33. $y=x^2-\sqrt{x^5}$; 34. $y=\frac{e^x}{2x}$; 35. $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$;

36. $y=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 37. $y=\frac{1+\ln x}{x}$; 38. $y=\sqrt{x}e^{-x}$;

39. $y=\frac{x}{2}+1+\frac{7}{2x}-\frac{3}{2x}$; 40. $y=x-\frac{8}{x^4}$; 41. $y=x+\frac{1}{x^2}$;

42. $y=\frac{10\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$; 43. $y=\frac{x\sqrt{1-x}}{1+x}$; 44. $y=\sqrt[3]{4x^3-12x}$;

45. $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$; 46. $y=x\sqrt{1-x}$; 47. $y=x\sqrt{x-x^2}$;

48. $y=x\sqrt{2-x^2}$; 49. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; 50. $y=x+\sqrt{1-x}$;

51. $y=x-2\ln x$; 52. $y=\sqrt{e^x-1}$; 53. $y=x+2\sqrt{-x}$;

54. $y=x\arccos\frac{1}{x}$; 55. $y=\frac{1}{1+e^x}$; 56. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

57. $y=x^2\ln x$; 58. $y=\frac{e^x}{1+e^x}$; 59. $y=\frac{x^2}{\ln x}$;

60. $y=\frac{1}{x\sqrt{1-x}}$; 61. $y=\frac{5\sqrt{x}}{x+2}$; 62. $y=x\,\mathrm{arctg}\,x-1$;

63. $y=x\,\mathrm{arcctg}\,x$; 64. $y=\frac{x^3}{x-1}$.

Найти приближённо корни уравнений (предварительно убедившись в их единственности):

65. $x^3-2x^2+3x-5=0$; 66. $e^x=2(x-1)^2$; 67. $5x^3-x^2-x-6=0$;

68. $x^3-2x^2-4x-7=0$; 69. $2^x=4x\ (x\neq4)$; 70. $x\cdot\lg x=1$;

71. $x^3-2x-5=0$; 72. $x\cdot\ln x-14=0$; 73. $x+e^x=0$.

74. Найти меньший корень уравнения $4x-5\ln x=5$.

75. Найти больший корень уравнения $4x-5\ln x=5$.

76. Найти положительный корень уравнения $x^3-5x^2-15x-7=0$.

77. Найти наибольший корень уравнения $x^3-3x+1=0$.

78. Найти наименьший корень уравнения $2x^3-x^2-7x+5=0$.

79. Найти средний корень уравнения $2x^3-x^2-7x+5=0$.

80. Найти наибольший корень уравнения $2x^3-x^2-7x+5=0$.

81. Найти больший корень уравнения $x^4-x-1=0$.

82. Найти наименьший корень уравнения $x^3-6x+2=0$.

83. Найти средний корень уравнения $x^3-6x+2=0$.

84. Найти наибольший корень уравнения $x^3-6x+2=0$.

85. Найти меньший корень уравнения $x^4-x-1=0$.

86. Найти корни уравнения $\cos x=x^2$.

87. Найти меньший корень уравнения $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$.

VI. Неопределенный интеграл и необходимые сведения из алгебры

1.Первообразная функция

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$. Например, функция $\sin x$ является первообразной функции $\cos x$, функция x^3+x есть первообразная функции $3x^2+1$ и т. д. Если дана функция $F(x)$, то соответствующая ей функция $f(x)$ находится путем дифференцирования. Следовательно, нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ есть действие, обратное действию дифференцирования. Его называют интегрированием функции $f(x)$.

При помощи таблицы производных легко составить соответствующую таблицу первообразных. Например, если $f(x)=x^a$, то, очевидно $F(x)=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$. При этом, однако, предполагается, что $a\neq -1$. Если же $a=-1$, т. е. если $f(x)=\dfrac{1}{x}$, то $F(x)=\ln x$. Но последняя формула имеет смысл лишь при x>0. Если же x<0, то $F(x)=\ln(-x)$. Действительно,

$$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}.$$

Итак, если $f(x)=\dfrac{1}{x}$, то

$$F(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0,\end{cases}$$

т. е.

$$F(x)=\ln|x|.$$

Аналогично, “обращая” остальные формулы дифференцирования, получим остальные простейшие случаи нахождения первообразных. В итоге будем иметь
следующую таблицу.

Исходные функции	Первообразные
$x^a(a\neq 1)$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$

e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Arsh} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arch} x$

Пусть, например, $f(x)=2x-3$. Тогда $F(x)=x^2-3x$. Но в то же время данная функция $f(x)$ имеет и другие первообразные: x^2+3x+1, x^2-3x-4, $x^2-3x+\frac{1}{2}$ и т. д.

Вообще, если $F(x)$ – первообразная функция $f(x)$, то и любая функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, которая является первообразной функции $f(x)$. Действительно, при любом $C=const$ будет

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x).$$

Обратно, пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные одной и той же функции $f(x)$. Тогда $F_1'(x)=f(x)$ и $F_2'(x)=f(x)$, а значит $F_1'(x)-F_2'(x)=0$, т. е. $[F_1(x)-F_2(x)]'=0$. Но, как мы видели в главе **V** (следствие теоремы Лагранжа), это означает, что

$$F_1(x) - F_2(x) = Const,$$

а значит

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Пример 6.1. Легко видеть, что $F_1(x) = \sin^2 x$ и $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ – первообразные одной и той же функции $f(x) = \sin 2x$. Действительно:

$$F_1'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x, \quad F_2'(x) = -\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2 = \sin 2x.$$

Поэтому

$$F_1(x) - F_2(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = \sin^2 x + \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2} = \frac{1}{2} = const.$$

Итак, если функция имеет хотя бы одну первообразную (таковыми, как мы увидим в главе VII, являются, в частности, все непрерывные в рассматриваемом промежутке функции), то она имеет бесконечное множество первообразных, различающихся между собой на постоянную величину. Таким образом, интегрирование, в отличие от дифференцирования, не является однозначным действием. Говорят, что первообразная находится по данной функции с точностью до произвольной постоянной.

2. Неопределенный интеграл и простейшие формулы интегрирования

Таким образом, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то любая функция *F(x)+C*, где *C* – произвольная постоянная, также есть ее первообразная.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается $\int f(x)dx$. Итак, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{6.1}$$

где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная. Функция $f(x)$ в равенстве (6.1) называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Из формулы (6.1) имеем

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x), \tag{6.2}$$

что естественно, так как действия дифференцирования и интегрирования взаимно обратны.

Заменяя $f(x)$ в формуле (6.1) на $f'(x)$, получим

$$\int f'(x)dx = f(x) + C. \tag{6.3}$$

Эту формулу можно считать обратной формуле (6.2).

Далее, имеем

$$d\int f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]' dx,$$

а значит, в силу (6.2),

$$d\int f(x)dx = f(x)dx,$$

так что символ d уничтожает символ $\int$. Обратная формула:

$$\int df(x) = \int f'(x)dx,$$

т. е., в силу (6.3),

$$\int df(x) = f(x) + C.$$

Из формулы (6.1) и из таблицы первообразных получаем следующие простейшие формулы интегрирования:

1°. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ \ (a \neq 1).$

Например:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C,\ \int \sqrt{x}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C,$$

и т. д.

2°. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3°. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$. В частности, $\int e^x dx = e^x + C$.

4°. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

5°. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

7°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

8°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. Но, в то же время, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$. Убедимся, что обе формулы равносильны.

Действительно, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

а значит

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) + C = \arcsin x + \left(C - \frac{\pi}{2}\right),$$

что совпадает с первой из формул, если заменить $C - \frac{\pi}{2}$ на C, что законно, поскольку C – произвольная постоянная. Откуда

9°. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, или, что то же самое, $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg} x + C$.

10°. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$.

11°. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$.

12°. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

13°. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

14°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arsh} x + C$, или, что одно и то же,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

15°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arch} x + C$, т. е. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$.

Формулы 14° и 15° можно объединить в одну

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$$

3. Свойства неопределенных интегралов

Теорема 6.1. Интеграл суммы конечного числа функций равен сумме их интегралов, т. е.

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+...+\int f_n(x)dx.$$

Для доказательства достаточно продифференцировать обе части последнего соотношения и воспользоваться правилом дифференцирования суммы (теорема 5.2.), а также формулой 6.2.

Теорема 6.2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е.

$$\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx.$$

Для доказательства достаточно продифференцировать обе части этого равенства и воспользоваться соответствующим свойством производной.

Пример 6.1. На основании теорем 6.1 и 6.2 находим

$$\int\left(\operatorname{tg}^2 x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx=\int \operatorname{tg}^2 x dx+3\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx+3\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx+3\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\operatorname{tg}x-x+3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\operatorname{tg}x-x+6\sqrt{x}+C.$$

Теорема 6.3. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)=F[\varphi(x)]+C$, какой бы ни была дифференцируемая функция $\varphi(x)$.

■Действительно, производная левой части подлежащего доказательству равенства равна

$$\left[\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)\right]'=\left[\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx\right]'=f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

а производная правой части равна

$$\{F[\varphi(x)]+C\}'=\{F[\varphi(x)]\}'=F'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

т. е. производные обеих частей доказываемого равенства совпадают.□

Пример 6.2.

$$\int\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x d(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Пример 6.3.

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Пример 6.4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\,.$$

Пример 6.5.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}} = \ln\left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right] + C = \ln\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + C =$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \ln a + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C,$$

и совершенно аналогично

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C\,.$$

Пример 6.6.

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int (\sin x)^3 d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C\,.$$

Пример 6.7.

$$\int x\sqrt{2 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int \left(2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(2 - x^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\left(2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(2 - x^2\right)^3} + C\,.$$

Пример 6.8.

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} + C = \ln|\sin x| + C\,.$$

Пример 6.9.

$$\int \frac{x\, dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{1 + \left(x^2\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right) + C\,.$$

Пример 6.10.

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, d(2x)\right] = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C\,.$$

Пример 6.11.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 6.12.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Примечание. Результаты примеров 6.3. - 6.5. обобщают формулы 8^o, 9^o, 14^o и 15^o, а поэтому их полезно запомнить вместо этих формул. Результаты примеров 6.11. и 6.12. также стоит помнить.

4. Интегрирование по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ произвольные дифференцируемые функции. Тогда

$$d(uv) = udv + vdu$$

откуда

$$udv = d(uv) - vdu$$

а значит

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (6.4)$$

Эту формулу называют формулой интегрирования по частям. Ее применение целесообразно, в частности, тогда, когда интеграл $\int vdu$ проще интеграла $\int udv$.

Пример 6.13. Вычислим интеграл $\int xe^x dx$. Для этого положим

$$u = x, dv = e^x dx.$$

Тогда

$$du = dx, v = e^x,$$

а значит, в силу (6.4),

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Примечание. Если бы мы положили $u = e^x$, $dv = xdx$, то получили бы

$$du = e^x dx,\ v = \frac{1}{2}x^2,$$

а значит

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx,$$

т. е. новый интеграл оказался бы сложнее первоначального.

Пример 6.14. Возьмем интеграл $I = \int x^2 \cos x dx$. Полагая

$$x^2 = u, \ \cos x dx = dv,$$

откуда следует, что

$$du = 2x dx, \ v = \sin x,$$

будем иметь

$$I = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx.$$

Очевидно, что новый интеграл вычисляется аналогично. Полагая $u = x, dv = \sin x dx$, откуда $du = dx, v = -\cos x$, будем иметь

$$I = x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x dx\right) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Легко видеть, что путем “n-разового” интегрирования по частям аналогично могут быть вычислены любые интегралы вида $\int P_n(x)\cos ax dx, \int P_n(x)\sin ax dx$ и $\int P_n(x)e^{ax} dx$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

Пример 6.15. Для вычисления интеграла $I = \int \arcsin x dx$ полагаем

$$u = \arcsin x, \ dv = dx.$$

Тогда

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ v = x,$$

а значит

$$I = x\arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1-x^2\right) =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 6.16. Дважды интегрируя по частям, получим

$$\int e^x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = e^x, dv = \sin x dx \\ du = e^x dx, v = -\cos x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^x, \ \ dv = \cos x dx \\ du = e^x dx, \ \ v = \sin x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

т. е., обозначая вычисляемый интеграл через I, будем иметь

$$I = e^x(\sin x - \cos x) - I,$$

откуда

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Очевидно, подобным способом можно вычислить любой интеграл вида

$$\int e^{ax}\sin bx dx \text{ или } \int e^{ax}\cos bx dx.$$

5. Интегрирование путем замены переменной

Рассмотрим интеграл $\int f(x)dx$. Введем новую переменную t формулой

$$t = \varphi(x), \tag{6.5}$$

где t – некоторая дифференцируемая функция. Тогда $x = \psi(t), dx = \psi'(t)dt$, а значит

$$f(x)dx = f[\psi(t)]\psi'(t)dt.$$

Докажем, что

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)}. \tag{6.6}$$

Для доказательства достаточно убедиться, что производные обеих частей этого равенства совпадают, т. е. что производная правой части равна $f(x)$.

■Используя (6.2), а также формулу для производной обратной функции, имеем

$$\left\{\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\Bigg|_{t=\varphi(x)}\right\}'_x = \left\{\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\Bigg|_{t=\varphi(x)}\right\}''_t t_x =$$

$$= f[\psi(t)]\psi'(t)t'_x\Bigg|_{t=\varphi(x)} = f[\psi(t)]\psi'(t)\frac{1}{\psi'(t)}\Bigg|_{t=\varphi(x)} = f[\psi(t)]\Bigg|_{t=\varphi(x)} = f(x),$$

что и требовалось доказать.□

Пример 6.17. Вычислим интеграл $I = \int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$. Для этого положим $\sqrt{x} = t$, откуда $x = t^2$, а значит $dx = 2tdt$. Формула (6.6) дает

$$I = \int \frac{t}{t^2+1}2tdt\Bigg|_{t=\sqrt{x}}.$$

Но

$$\int \frac{t}{t^2+1} 2t dt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = 2\left(t - \operatorname{arctg} t\right) + C,$$

а значит

$$I = 2\left(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right) + C.$$

Описанный метод называют методом замены переменной, или методом подстановки.

Иногда замену переменной производят не по формуле вида (6.5), а сразу по формуле вида $x = \varphi(t)$. Укажем некоторые важные подстановки такого вида.

1°. Пусть интеграл содержит радикал вида $\sqrt{a^2 - x^2}$. В этом случае удобна замена
$x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$). Действительно, положив $x = a\sin t$, получим

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t,$$

т. е. радикал исчезнет.

Пример 6.18. Вычислим интеграл $I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$. Полагая $x = 2\sin t$, придем к интегралу

$$\int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t} 2\cos t dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt = -\operatorname{ctg} t + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$I = -\left(\frac{\cos t}{\sin t} + t\right) + C = -\left(\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + t\right) + C =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}} + \arcsin\frac{x}{2}\right) + C = -\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + \arcsin\frac{x}{2}\right) + C.$$

2°. Пусть под интегралом содержится радикал вида $\sqrt{a^2 + x^2}$. В этом случае удобны замены $x = a\operatorname{tg} t$ (или $x = a\operatorname{ctg} t$) и $x = a\operatorname{sh} t$.

Действительно, положив $x = a\operatorname{tg} t$, будем иметь

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\operatorname{tg}^2 t} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{a}{\cos t}.$$

Аналогично, если $x = a\operatorname{sh} t$, то $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\operatorname{sh}^2 t} = a\operatorname{ch} t$.

Пример 6.19. Вычислим интеграл $I = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$. Полагая $x = \operatorname{tg} t$, получим

$$I=\int\frac{\frac{1}{\cos t}}{tg^4t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{\cos^4 t dt}{\sin^4 t\cos^3 t}=\int\frac{\cos t}{\sin^4 t}dt=\int(\sin t)^{-4}d(\sin t)=$$

$$=\frac{(\sin t)^{-3}}{-3}+C=\frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 t}+C=-\frac{1}{3}\left(1+\operatorname{ctg}^2 t\right)^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3x^3}+C.$$

Аналогично, полагая $x=a\operatorname{sh}t$, будем иметь

$$I=\int\frac{\operatorname{ch}t}{\operatorname{sh}^4 t}\operatorname{ch}t dt=\int\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}^4 t}dt=-\int(\operatorname{cth}t)^2 d(\operatorname{cth}t)=-\frac{1}{3}\operatorname{cth}^3 t+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{\left(1+\operatorname{sh}^2 t\right)^3}}{3\operatorname{sh}^3 t}+C=-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}+C.$$

3°. Пусть подынтегральная функция содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$. В этом случае удобно положить $x=\frac{a}{\sin t}$ (или $x=\frac{a}{\cos t}$) и $x=a\operatorname{ch}t$. Действительно эти подстановки дают соответственно

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}=a\operatorname{ctg}t;$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\operatorname{ch}^2 t-a^2}=a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}=a\operatorname{sh}t.$$

Пример 6.20. В интеграле $I=\int\sqrt{x^2-1}dx$ положим $x=\operatorname{ch}t$. Получим

$$I=\int\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}\cdot\operatorname{sh}t dt=\int\operatorname{sh}^2 t dt=\frac{1}{2}\int(\operatorname{ch}2t-1)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t-t\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t-t)+C=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}\cdot\operatorname{ch}t-t\right)+C=$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1}\cdot x-\operatorname{Arch}x\right)+C=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]+C.$$

6. Таблица основных интегралов

Приведем окончательную таблицу интегралов, которые полезно помнить при интегрировании.

1. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $(a \neq 1)$.	9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.
2. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.	10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.
3. $\int e^x dx = e^x + C$.	11. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln \left\| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right\| + C$.
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln \|x\| + C$.	12. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln \left\| \operatorname{tg} \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2} \right) \right\| + C$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.	13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.	14. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.
7. $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.	15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.	16. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.
	17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C$.

7. Комплексные числа и действия с ними

Комплексным числом называется пара вещественных чисел a и b, рассматриваемая как единый “комплекс”, записываемый в виде $c = a + bi$. Для этого “комплекса” вводятся арифметические действия по правилам, которые формулируются ниже.

Числа a и b называются соответственно вещественной и мнимой частью комплексного числа $c = a + bi$. Это записывают так:

$$a = \operatorname{Re} c,\ b = \operatorname{Im} c.$$

Если a=0, то вместо $c = 0 + bi$ пишут просто $c = bi$ и говорят, что в этом случае c– чисто мнимое число. Если b=0, то пишут, что c=a, и говорят, что в этом случае комплексное число превращается в вещественное. Следовательно, множество всех вещественных чисел можно рассматривать как подмножество множества всех комплексных чисел.

Если a=b=0, т. е. если $c = 0 + 0i$, то пишут, что c=0.

Комплексные числа $c_1 = a_1 + b_1 i$ и $c_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными, если. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ Иными словами,

$$c_1 = c_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} c_1 = \operatorname{Re} c_2,$$

$$\operatorname{Im} c_1 = \operatorname{Im} c_2.$$

Комплексное число $a - bi$ называется сопряженным по отношения к числу $c = a + bi$ и обозначается $\bar{c}$. Очевидно, равенство $\bar{c} = c$ есть необходимое и достаточное условие вещественности числа c.

Число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется модулем комплексного числа $c = a + bi$ и обозначается $|c|$. Очевидно, что всегда $|\bar{c}| = |c|$. Если c – вещественное, т. е. $c = a + 0 \cdot i$, то

$$|c| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Таким образом, в этом случае модуль комплексного числа превращается в абсолютную величину вещественного числа.

Суммой комплексных чисел $c_1 = a_1 + b_1 i$ и $c_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число, обозначаемое $c_1 + c_2$ и равное

$$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i \qquad , \tag{6.7}$$

т. е. при сложении комплексных чисел складываются (по определению!) отдельно их вещественные и мнимые части.

Из (6.7), в частности, следует, что

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a + 0 \cdot i = 2a,$$

т. е.

$$c + \bar{c} = 2 \operatorname{Re} c \tag{6.8}$$

Далее, на основании правила (6.7), можно написать, что

$$a + bi = (a - 0 \cdot i) + (0 + bi).$$

Этот факт оправдывает то, что любое комплексное число записывается именно в виде суммы слагаемых a и bi.

Лемма 6.1. Сопряженное суммы комплексных чисел равно сумме чисел, сопряженных каждому слагаемому, т. е.

$$\overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2} \tag{6.9}$$

Это сразу следует из (6.7).

Разностью комплексных чисел c_1 и c_2 называется такое число c, что $c_2 + c = c_1$. Отсюда и из (6.7) следует, что если $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$, то

$$c_1 - c_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i.$$

Произведением комплексных чисел $c_1 = a_1 + b_1 i$ и $c_2 = a_2 + b_2 i$ называется число

$$c_1 c_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 a_2 + b_1 b_2) \cdot i. \tag{6.10}$$

В частности, если m – вещественное число, то

$$m(a + bi) = (m + 0 \cdot i)(a + bi) = (ma + 0 \cdot b) + (mb + 0 \cdot a) \cdot i = ma + mbi.$$

Из формулы (6.10) следует, что комплексные числа можно перемножать по правилу перемножения двучленов и при этом полагать, что $i^2 = -1$. Действительно, это правило дает

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2=$$
$$(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot i\,.$$

Поэтому, в частности,

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2,$$

т. е.

$$c\bar{c}=\left|\bar{c}\right|^2.$$

Если $c=bi$, то $c^2=b^2i^2=-b^2$, т. е. $c^2<0$. Поскольку квадрат любого действительного числа не может быть отрицательным, то именно поэтому числа вида bi называют мнимыми, т. е. “воображаемыми”.

В частности, поскольку равенство $i^2=-1$ позволяет условно написать, что $i=\sqrt{-1}$, то число i называют мнимой единицей.

Далее, из равенства $i^2=-1$ следует, что

$$i^3=i^2i=-i;\ \ i^4=i^3i=-ii=1;\ \ i^5=i^4i=i \text{ и т. д.}$$

Лемма 6.2. Сопряженное произведение комплексных чисел равно произведению Чисел, сопряженных каждому из сомножителей, т. е.

$$\overline{c_1c_2}=\overline{c_1}\cdot\overline{c_2} \tag{6.11}$$

Это непосредственно вытекает из (6.10).

Поскольку (6.11) верно для любого числа сомножителей, то

$$\overline{c^n}=(\bar{c})^n. \tag{6.12}$$

Теорема 6.4. Если $P(c)$ – многочлен с вещественными коэффициентами, то

$$\overline{P(c)}=P(\bar{c}). \tag{6.13}$$

■Действительно, пусть

$$P(c)=P_0c^n+P_1c^{n-1}+\ldots+P_{n-1}c+P_n\,.$$

Тогда, используя (6.9), (6.11), (6.12) и вещественность чисел $P_0,P_1,\ldots,P_n$, получим

$$\overline{P(c)}=\overline{P_0c^n+P_1c^{n-1}+\ldots+P_{n-1}c+P_n}=\overline{P_0c^n}+\overline{P_1c^{n-1}}+\ldots+\overline{P_{n-1}c}+\overline{P_n}=$$
$$=\overline{P_0}\,\overline{c^n}+\overline{P_1}\,\overline{c^{n-1}}+\ldots+\overline{P_{n-1}}\,\bar{c}+\overline{P_n}=P_0(\bar{c})^n+P_1(\bar{c})^{n-1}+\ldots+P_{n-1}\bar{c}+P_n=P(\bar{c}),$$

что и требовалось доказать. □

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Число $z=x+yi$ называется частным чисел $c_1=a_1+b_1i$ и $c_2=a_2+b_2i$, если $c_2z=c_1$, т. е., если

$$(a_2+b_2i)(x+yi)=a_1+b_1i\,.$$

Используя (6.9) и приравнивая отдельно вещественные и мнимые части, получим

$$\begin{cases} a_2x - b_2y = a_1, \\ b_2x + a_2y = b_1, \end{cases}$$

а значит

$$x = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \qquad (6.14)$$

Отсюда следует, что деление комплексных чисел можно производить, умножая числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю. Действительно,

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2i}{a_2^2 + b_2^2},$$

что равносильно (6.14).

Пример 6.21. $\frac{4+3i}{5-2i} = \frac{(4+3i)(5+2i)}{25+4} = \frac{(20-6)+(8+15)i}{29} = \frac{14}{29} + \frac{23}{29}i$.

Пример 6.22. $\frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$.

8. Геометрическая форма комплексных чисел

Поскольку комплексное число есть пара двух вещественных чисел, то его можно изображать в виде точки на плоскости. Эту плоскость называют комплексной плоскостью. Числа a и b играют роль координат точки c в этой плоскости, рис. 6.1. Точки c и $\bar{c}$, очевидно, симметричны относительно оси Ox. Если b=0,т. е., если $c=a$, то эта точка лежит на оси Ox. Если же a=0, т. е. $c=bi$, то точка принадлежит оси Oy. Иными словами, оси Ox и Oy есть геометрические изображения множества всех вещественных и всех чисто мнимых чисел, соответственно. В связи с этим ось Ox называют вещественной, а ось Oy – мнимой осью комплексной плоскости.

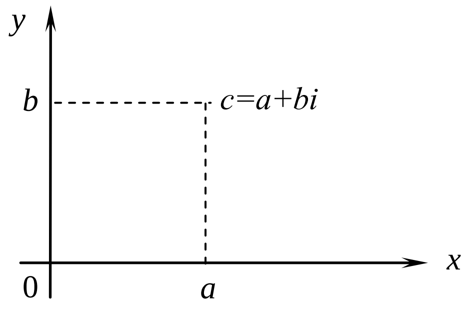


Рис.6.1

Запишем теперь выражение $c=a+bi$ так

$$c = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

Это позволяет изображать комплексное число в виде вектора комплексной плоскости, рис. 6.2. Числа $a = \mathrm{Re}\, c$ и $b = \mathrm{Im}\, c$ играют роль проекций вектора c на оси Ox и Oy, а 1 и i можно рассматривать как “орты” этих осей (последнее является еще одной мотивировкой термина “мнимая единица”).

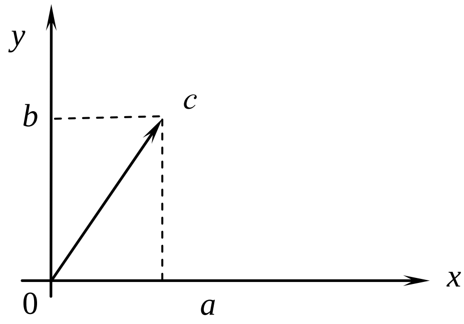


Рис.6.2

Векторная трактовка комплексных чисел позволяет придать модулю комплексного числа простой геометрический смысл. Число $|c|$, очевидно, есть не что иное, как длина вектора c.

Правило (6.7) сложения комплексных чисел также становится теперь естественным, если вспомнить, что при сложении векторов складываются их одноименные проекции.

Полученное ранее равенство (6.8) становится совершенно очевидным с геометрической точки зрения (см. рис. 6.3).

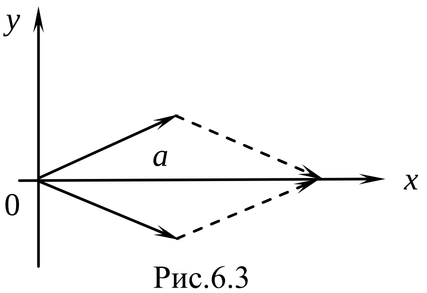


Рис.6.3

Рассматривая комплексные числа как векторы, заключаем, что вычитание комплексных чисел можно производить как вычитание векторов. Очевидно, что величина $|c_1 - c_2|$ равна расстоянию между точками c_1 и c_2, рис. 6.4.

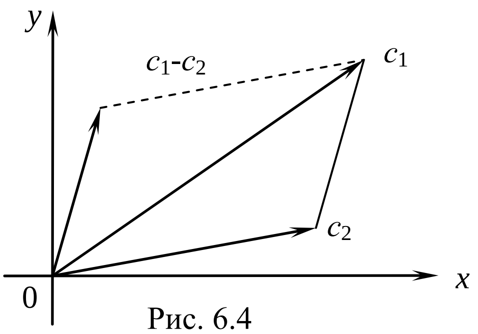


Рис. 6.4

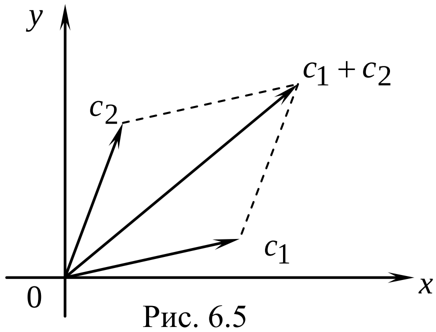


Рис. 6.5

Таким образом, модуль разности комплексных чисел геометрически представляет собой расстояние между соответствующими точками комплексной плоскости. Далее, из известного свойства треугольника, получаем (см. рис. 6.5), что для любых c_1 и c_2

$$|c_1 + c_2| \le |c_1| + |c_2|.$$

При этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c_2 = mc_1$, где m – вещественное положительное число.

9. Тригонометрическая форма комплексных чисел

Угол φ между вектором c и осью Ox называется аргументом комплексного числа c и обозначается $\operatorname{Arg} c$. Определяется он с точностью до 2π. Поэтому вводят в рассмотрение т. н. главное значение аргумента, которое обозначается $\arg c$ и изменяется в промежутке $[-\pi, \pi]$.

Таким образом,

$$\operatorname{Arg} c = \arg c + 2\pi n.$$

Далее, имеем

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi, \tag{6.15}$$

а значит

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,.$$

Правая часть этого равенства и есть тригонометрическая форма комплексного числа (выражение $a+bi$ называется алгебраической формой этого числа).

Из (6.15) находим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}\,.$$

Это равенство вместе с равенством $r=\sqrt{a^2+b^2}$ служит средством перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической его форме. Очевидно, этот переход означает не что иное, как переход в комплексной плоскости от декартовых координат к полярным.

Пример 6.23. Представим в тригонометрической форме число $c=\sqrt{3}+i$.

Имеем

$$r=\sqrt{3+1}=2\,,\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6},$$

а значит

$$c=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Пусть даны два комплексных числа:

$$c_1=r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)\ \text{и}\ c_2=r_2\left(\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\right)$$

Тогда, на основании правила (6.10) и замечания к нему,

$$c_1c_2=r_1r_2\left[\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)+i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right],$$

т. е.

$$c_1c_2=r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right]. \qquad (6.16)$$

Итак, при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Очевидно, это правило верно и при большем числе сомножителей.

В частности, если перемножаются n одинаковых сомножителей, то получим т. н. формулу Муавра:

$$r\left[\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right). \qquad (6.17)$$

Кроме того, из (6.18), и из определения частного комплексных чисел находим

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]\,.$$

Рассмотрим теперь извлечение корня из комплексного числа. Пусть требуется вычислить, например, $\sqrt[5]{4+4i}$.

Имеем $4+4i=\sqrt{32}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$. Положим $\sqrt[5]{4+4i} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда формула Муавра дает

$$r^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) = \sqrt{32}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ),$$

откуда

$$r^5 = \sqrt{32},\ \cos 5\varphi = \cos 45^\circ,\ \sin 5\varphi = \sin 45^\circ,$$

а значит

$$r=\sqrt{2},\ 5\varphi = 45^\circ + 360^\circ \cdot n.$$

Из последнего соотношения находим

$$\varphi = 9^\circ + 72^\circ \cdot n.$$

Поэтому

$$\varphi_1 = 9^\circ,\ \varphi_2 = 9^\circ + 72^\circ = 81^\circ,$$

$$\varphi_4 = 9^\circ + 216^\circ = 225^\circ,\ \varphi_5 = 9^\circ + 288^\circ = 297^\circ.$$

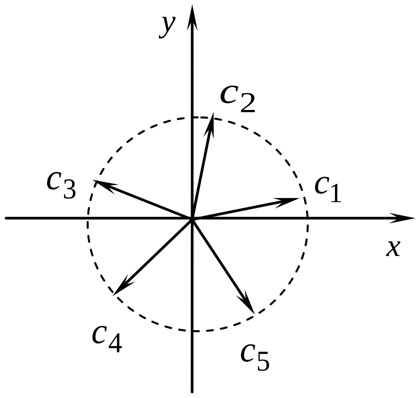


Рис. 6.6

В соответствии с этим получаем 5 различных значений корня:

$$c_1 = \sqrt{2}\left(\cos 9^\circ + i\sin 9^\circ\right),\ c_2 = \sqrt{2}\left(\cos 81^\circ + i\sin 81^\circ\right),$$

$$c_3 = \sqrt{2}\left(\cos 153^\circ + i\sin 153^\circ\right),$$

$$c_4 = \sqrt{2}\left(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1-i,$$

$$c_5 = \sqrt{2}\left(\cos 297^\circ + i\sin 297^\circ\right).$$

Приведенное решение фактически содержит в себе описание метода вычисления $\sqrt[n]{c}$, при произвольных c и n.

10. Последовательность комплексных чисел и ее предел

Пусть заданы две последовательности вещественных чисел $\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n, ...;$ $\{y_n\} = y_1, y_2, ..., y_n, ...$ По ним можно построить последовательность комплексных чисел

$$\{x_n + iy_n\} = x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_n + iy_n, ...$$

Число $c = a + bi$ называется пределом последовательности $r_n = \{x_n + iy_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - c| = 0. \qquad (6.18)$$

В этом случае пишут, что $c = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

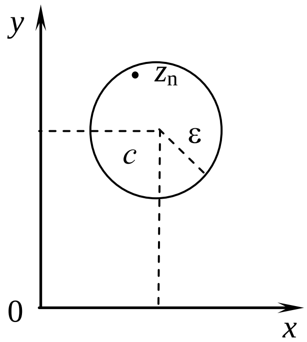


Рис.6.7

Геометрически равенство (6.20) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при любом $n \geq N$ точка z_n находится в ε – окрестности точки

c.

Перепишем (6.18) так

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}=0.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$.

Итак, равенство $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=c$ равносильно одновременному выполнению двух равенств:

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re} z_n=\operatorname{Re} c,\ \lim_{n\to\infty}\operatorname{Im} z_n=\operatorname{Im} c.$$

Пусть теперь

$$z_n=r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n),\ c=\rho(\cos\psi+i\sin\psi).$$

Поскольку $r_n=\sqrt{x_n^2+y_n^2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2+\lim\limits_{n\to\infty} y_n^2}=\sqrt{a^2+b^2}=\rho$.

Аналогично, поскольку $\operatorname{tg}\varphi_n=\dfrac{y_n}{x_n}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\varphi_n=\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\psi,$$

откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\psi.$$

При этом предполагается, что $\varphi_n=\arg z_n$, $\psi=\arg c$, а x_n и y_n не стремятся одновременно к нулю.

Итак, если $c\neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} z_n=c \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|z_n|=|c|;\ \lim_{n\to\infty}\arg z_n=\arg c.$$ [*)]

11. Комплексная степень числа *e*

Известно, что для любого вещественного a будет

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a.$$

Заменим здесь a на комплексное число $c=a+bi$ и положим по определению, что

$$e^c=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n, \tag{6.19}$$

[*)] Второе из этих равенств верно, если условиться равенства $\arg c=\pi$ и $\arg c=-\pi$ считать равносильными.

т. е.

$$e^{a+bi}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n.$$

Для вычисления стоящего справа предела положим

$$1+\frac{a+bi}{n}=r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n).$$

Тогда

$$\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n=r_n^n(\cos n\varphi_n+i\sin n\varphi_n),$$

а значит, по доказанному выше,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n=\left(\lim_{n\to\infty}r_n^n\right)\left[\cos\left(\lim_{n\to\infty}n\varphi_n\right)+i\sin\left(\lim_{n\to\infty}n\varphi_n\right)\right]. \qquad (6.20)$$

Но, поскольку $1+\frac{a+bi}{n}=\left(1+\frac{a}{n}\right)+\frac{b}{n}i$, то

$$r_n=\sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}},$$

а значит

$$\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2a}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e^a.$$

Здесь мы молча предполагали, что $a\neq 0$, в силу чего $\frac{a^2+b^2}{n^2}=0\left(\frac{2a}{n}\right)$ при $n\to\infty$. Но если $a=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}r_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=1=e^0,$$

т. е. полученный выше результат верен и для $a=0$.

Далее,

$$\operatorname{tg}\varphi_n=\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}=\frac{b}{n+a},$$

т. е. при $n\to\infty$ будет $\operatorname{tg}\varphi_n\approx\frac{b}{n}$, а значит и $\varphi_n\approx\frac{b}{n}$, т. е.

$$\varphi_n = \frac{b}{n} + \frac{\alpha_n}{n},$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Но тогда

$$n\varphi_n = b + \alpha_n,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} n\varphi_n = b.$$

Подставляя оба результата в (6.20), получим

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b). \tag{6.21}$$

Итак, равенство (6.19), являющееся определением комплексной степени числа *e*, приводит к формуле (6.21), по которой величина находится очень просто. При $a = 0$ имеем из (6.21)

$$e^{bi} = \cos b + i\sin b. \tag{6.22}$$

Из (6.21) и (6.22) следует, в частности, что

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}. \tag{6.23}$$

Покажем, что если c_1 и c_2 произвольные комплексные числа, то

$$e^{c_1} \cdot e^{c_2} = e^{c_1+c_2}.$$

■Действительно, пусть $c_1 = a_1 + b_1 i,\ c_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда, в силу (6.21), (6.16), (6.22) и (6.23),

$$\begin{aligned} e^{c_1} \cdot e^{c_2} &= \left[e^{a_1}(\cos b_1 + i\sin b_1)\right] \cdot \left[e^{a_2}(\cos b_2 + i\sin b_2)\right] = \\ &= e^{a_1+a_2}\left[\cos(b_1+b_2) + i\sin(b_1+b_2)\right] = e^{a_1+a_2} \cdot e^{(b_1+b_2)i} = \\ &= e^{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i} = e^{(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)} = e^{c_1+c_2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.□

Далее, поскольку $|\cos b + i\sin b| = \sqrt{\cos^2 b + i\sin^2 b} = 1$, то из (6.21) следует, что

$$\left|e^{a+bi}\right| = e^a,$$

т. е.

$$\left|e^c\right| = e^{\operatorname{Re} c}.$$

Аналогично из (6.21) имеем

$$\operatorname{Arg} e^{a+bi} = b,$$

т. е.

$$\operatorname{Arg} e^c = \operatorname{Im} c.$$

Здесь под $\operatorname{Arg} e^c$ подразумевается одно из значений аргумента числа e^c.

Заменим в (6.21) *b* на –*b*. Получим

$$e^{a-bi}=e^{a}(\cos b-i\sin b).$$

Но это можно переписать так

$$e^{\overline{a+bi}}=\overline{e^{a}(\cos b+i\sin b)}$$

или

$$e^{\overline{a+bi}}=\overline{e^{a+bi}},$$

т. е.

$$e^{\bar{c}}=\overline{e^{c}}.$$

Пример 6.24. По формуле (6.21) имеем

$$e^{2+\frac{\pi}{4}i}=e^{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{e^{2}}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Пример 6.25. Аналогично

$$e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

т. е. комплексная степень числа e может быть и вещественным числом.

Из результата последнего примера следует, что три важнейших константы математики: π, e, и i связаны простой зависимостью

$$e^{\pi i}=-1.$$

12. Понятие о комплекснозначных функциях

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – вещественные функции, заданные в некоторой области E.

Построим по ним функцию

$$f(x)=u(x)+iv(x).$$

Она называется комплекснозначной функцией, заданной в области E. На нее переносятся все основные определения и теоремы, рассмотренные ранее для вещественных функций. Например, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0\in E$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Но это равенство, в силу доказанного выше, распадается на два равенства

$$\lim_{x\to x_0} u(x)=u(x_0),\quad \lim_{x\to x_0} v(x)=v(x_0).$$

Таким образом, комплекснозначная функция непрерывна в данной точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна ее вещественная и мнимая части.

Производная функции $f(x)=u(x)+iv(x)$ определяется обычной формулой:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

откуда легко следует, что

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x). \qquad (6.24)$$

Следовательно, дифференцируемость комплекснозначной функции равносильна дифференцируемости ее вещественной и мнимой частей.

Если a – вещественное число, то $\left(e^{ax}\right)' = ae^{ax}$. Докажем, что для любого c будет

$$\left(e^{cx}\right)' = ce^{cx},$$

т. е.

$$\left[e^{(a+bi)x}\right]' = (a+bi)e^{(a+bi)x}. \qquad (6.25)$$

Имеем

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax+bxi} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx.$$

Отсюда, на основании (6.24), находим

$$\left[e^{(a+bi)x}\right]' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx + i\left(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx\right) =$$
$$= e^{ax}[a(\cos bx + i\sin bx) + bi(\cos bx + i\sin bx)] = e^{ax}(a+bi)(\cos bx + i\sin bx) =$$
$$= (a+bi)e^{(a+bi)x},$$

что и требовалось доказать. □

Интеграл функции $f(x) = u(x) + iv(x)$ определяется формулой

$$\int f(x)dx = \int u(x)dx + i\int v(x)dx.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\operatorname{Re}\int f(x)dx = \int \operatorname{Re} f(x)dx, \quad \operatorname{Im}\int f(x)dx = \int \operatorname{Im} f(x)dx. \qquad (6.26)$$

Формула (6.25) позволяет написать соответствующую формулу интегрирования

$$\int e^{(a+bi)x}dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + C. \qquad (6.27)$$

Эта формула оказывается полезной при вычислении некоторых интегралов.

Пример 6.24. Пусть требуется вычислить интеграл $\int e^{ax}\sin bx dx$.

Имеем

$$e^{ax}\sin bx dx = \operatorname{Im}\left[e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\right] = \operatorname{Im} e^{ax+bxi} = \operatorname{Im} e^{(a+bi)x},$$

а значит, в силу второй из формул (6.26) и формулы (6.27)

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \operatorname{Im}\int e^{(a+bi)x}dx = \operatorname{Im}\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = \operatorname{Im}\frac{e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)}{a+bi} =$$
$$= e^{ax}\operatorname{Im}\frac{(\cos bx + i\sin bx)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\operatorname{Im}[(a-bi)(\cos bx + i\sin bx)] =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

Описанный метод удобен и для вычисления интегралов более общего вида:
$\int P(x)e^{ax}\sin bx dx$ или $\int P(x)e^{ax}\cos bx dx$, где $P(x)$ – некоторый многочлен. Например,

$$\int P(x)e^{ax}\cos bx dx = \mathrm{Re}\int P(x)e^{(a+bi)x}dx,$$

а последний интеграл вычисляется путем n–кратного интегрирования по частям, где n – степень многочлена.

13. Показательная форма и логарифм комплексного числа

Возьмем комплексное число $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. На основании формулы (6.22) перепишем его так

$$c = re^{\varphi i}.$$

Это – так называемая показательная форма комплексного числа. Ее можно представить и в таком виде

$$c = |c|e^{i\arg c}.$$

Если последнее равенство формально прологарифмировать по основанию e, то получим

$$\ln c = \ln|c| + i\arg c. \qquad (6.28)$$

Например,

$$\ln(-3) = \ln|-3| + \pi i = \ln 3 + \pi i,$$

$$\ln(2+2i) = \ln 8 + \frac{\pi}{4}i = 3\ln 2 + \frac{\pi}{4}i,$$

и т. д.

Таким образом, формула (6.28) обобщает понятие логарифма не только на отрицательные вещественные, но даже и на комплексные числа. Если же c – вещественное положительное число, то $|c| = c$, $\arg c = 0$, и формула (6.28) дает $\ln c$ в обычном понимании логарифма.

Примечание. Поскольку $\mathrm{Arg}\, c$ определяется не однозначно, а с точностью до $2\pi n$, то и логарифм комплексного числа есть многозначная функция. По определению, логарифм комплексного числа дается формулой

$$\mathrm{Ln}\, c = \ln|c| + i\mathrm{Arg}\, c.$$

Взяв вместо аргумента его главное значение $\arg c$, получим т. н. главное значение логарифма, определяемое формулой (6.28).
Очевидно,

$$\operatorname{Ln} c = \ln|c| + i(\arg c + 2\pi n),$$
т. е.
$$\operatorname{Ln} c = \ln c + 2\pi n.$$

14. Формулы Эйлера

Заменив в формуле (6.22) b на x и на $-x$, получим
$$e^{xi} = \cos x + i\sin x,\ e^{-xi} = \cos x - i\sin x.$$
Разрешая эти равенства относительно $\cos x$ и $\sin x$, будем иметь :
$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2},\ \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Эти формулы называют формулами Эйлера. Они, в частности, дают новую иллюстрацию аналогии между тригонометрическими и гиперболическими функциями. Очевидно, их можно переписать так
$$\cos x = \operatorname{ch} xi,\ \sin x = \frac{\operatorname{sh} xi}{i}.$$

Пример 6.25. Применим формулы Эйлера к вычислению сумм
$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi.$$
Имеем
$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i} + \frac{e^{2\varphi i} - e^{-2\varphi i}}{2i} + \ldots + \frac{e^{n\varphi i} - e^{-n\varphi i}}{2i} =$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\left(e^{\varphi i} + e^{2\varphi i} + \ldots + e^{n\varphi i}\right) - \left(e^{-\varphi i} + e^{-2\varphi i} + \ldots + e^{-n\varphi i}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{(n+1)\varphi i} - e^{\varphi i}}{e^{\varphi i} - 1} - \frac{e^{-(n+1)\varphi i} - e^{-\varphi i}}{e^{-\varphi i} - 1}\right] =$$
$$= \frac{e^{n\varphi i} - 1 - e^{(n+1)\varphi i} + e^{\varphi i} - e^{-n\varphi i} + 1 + e^{-(n+1)\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i\left(1 - e^{\varphi i} - e^{-\varphi i} + 1\right)} =$$
$$= \frac{\dfrac{e^{n\varphi i} - e^{-n\varphi i}}{2i} + \dfrac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i} - \dfrac{e^{(n+1)\varphi i} - e^{-(n+1)\varphi i}}{2i}}{2 - 2\dfrac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2}} = \frac{\sin n\varphi + \sin\varphi - \sin(n+1)\varphi}{2 - 2\cos\varphi} =$$
$$= \frac{2\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}\cos\dfrac{(n-1)\varphi}{2} - 2\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}\cos\dfrac{(n+1)\varphi}{2}}{4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}} =$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\left[\cos\frac{(n-1)\varphi}{2}-\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}\right]}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cdot 2\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Окончательно

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cdot\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

15. Разложение многочлена на множители

Рассмотрим произвольный многочлен

$$P(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n,$$

коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_n$ которого, вообще говоря, комплексные. На основании т.н. основной теоремы алгебры он имеет по крайней мере один корень x_1 (вещественный или комплексный). В этом случае он делится без остатка на $x-x_1$, а значит

$$P(x)=(x-x_1)P_1(x),$$

где $P_1(x)$ – многочлен (n–1)–й степени. Он также имеет по крайней мере один корень x_2, а значит

$$P_1(x)=(x-x_2)P_2(x),$$

так что

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)P_2(x).$$

Отсюда следует, что x_2 одновременно является корнем и многочлена $P(x)$.

Многочлен $P_2(x)$ (n–2)–й степени имеет корень x_3, откуда следует, что

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)P_3(x),$$

а значит x_3 есть корень и многочлена $P(x)$, и т.д. Наконец, многочлен $P_{n-1}(x)$ 1–й степени имеет корень x_n, а значит, окончательно,

$$P(x)=p_0(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n). \qquad (6.29)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни многочлена $P(x)$. Если они попарно различны, их называют простыми. Если же среди них имеется k одинаковых, то их общее значение называется k – кратным корнем многочлена $\text{P}(x)$.

Иными словами, x^* – k–кратный корень многочлена $P(x)$, если $P(x)$ представим в виде

$$P(x) = (x - x^*)^k \widetilde{P}(x),$$

где $\widetilde{P}(x^*) \neq 0$ (если бы было $\widetilde{P}(x^*) = 0$, то кратность корня x^*, очевидно, была бы большей, чем k).

Теорема 6.5. Если x^* – k–кратный корень многочлена $P(x)$, то он одновременно является (k–1) – кратным корнем его производной $P'(x)$.

■Действительно, пусть

$$P(x) = (x - x^*)^k \widetilde{P}(x).$$

Тогда

$$P'(x) = k(x - x^*)^{k-1} \widetilde{P}(x) + (x - x^*)^k \widetilde{P}'(x) =$$
$$= (x - x^*)^{k-1} \left[k\widetilde{P}(x) + (x - x^*)\widetilde{P}'(x)\right],$$

т. е.

$$P'(x) = (x - x^*)^{k-1} \breve{P}(x), \qquad (6.30)$$

где

$$\breve{P}(x) = k\widetilde{P}(x) + (x - x^*)\widetilde{P}'(x).$$

Поскольку $\breve{P}(x^*) = k\widetilde{P}(x^*)$, а $\widetilde{P}(x^*) \neq 0$, то $\breve{P}(x^*) \neq 0$. Но тогда из (6.30) и следует, что x^* – (k–1) – кратный корень многочлена $P(x)$.

Простой корень многочлена можно рассматривать как частный случай кратного (с кратностью, равной 1). Поэтому будем считать, что многочлен $P(x)$ имеет корни $x_1, x_2, ..., x_n$, кратности которых равны соответственно $k_1, k_2, ..., k_m$. Тогда, объединяя в (6.29) одинаковые сомножители, получим

$$P(x) = p_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x - x_m)^{k_m}.$$

Представим теперь, что все коэффициенты многочлена $P(x)$ – вещественные.

Теорема 6.6. Если $c = a + bi$ – корень многочлена с вещественными коэффициентами, то и $\bar{c} = a - bi$ является его корнем.

■Действительно, пусть $P(c) = 0$. Тогда и $\overline{P(c)} = 0$, или, на основании (6.15), $P(\bar{c}) = 0$, что и требовалось доказать.□

Из доказанной теоремы следует, что комплексные корни принадлежат многочлену парами, т. е. многочлен (с вещественными коэффициентами!) может иметь лишь четное число комплексных корней: 0, 2, 4 и т. д.

Пусть $a \pm bi$ – пара взаимно сопряженных корней многочлена $P(x)$. Ей отвечает в (6.31) выражение

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) - bi][(x - a) + bi] =$$
$$= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).$$

Итак, паре взаимно сопряженных комплексных корней в разложении многочлена соответствует квадратный трехчлен вида x^2+gx+h с комплексными корнями. Если $a \pm bi$ – пара корней l–й кратности, то ей отвечает в (6.29) выражение $(x^2+gx+h)^l$.

Таким образом, в самом общем случае многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами можно разложить на множители следующим образом:

$$P(x)=p_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}(x^2+g_1x+h_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+g_sx+h_s)^{l_s}. \quad (6.31)$$

Здесь $x_1, x_2,\ldots, x_r$ – вещественные корни многочлена с кратностями $k_1, k_2,\ldots, k_r$, а остальные s множителей отвечают парам взаимно сопряженных комплексных корней кратностей $l_1, l_2,\ldots, l_s$ соответственно. При этом, очевидно, $k_1+k_2+\ldots+k_r+2l_1+2l_2+\ldots+2l_s=n$, где n – степень многочлена.

Пример 6.26. Пусть многочлен $P(x)$ – имеет корни

$$x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1,\ x_4=-2,\ x_5=3+i,$$
$$x_6=3-i,\ x_7=3+i,\ x_8=3-i,\ x_9=2i,\ x_{10}=-2i.$$

Тогда

$$P(x)=p_0(x-1)^3(x+2)(x^2-6x+10)(x^2+4).$$

Число p_0 здесь, разумеется, произвольно.

16. Рациональные дроби и их разложение на простейшие

Дробно–рациональной функцией, или просто рациональной дробью, называют выражение вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Если степень числителя ниже степени знаменателя (это записывают так: $\deg P(x) < \deg Q(x)$), то дробь называют правильной. Если же $\deg P(x) \ge \deg Q(x)$, дробь называют неправильной.

Очевидно, что всякая неправильная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ путем непосредственного деления $P(x)$ на $Q(x)$ может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=N(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}, \quad (6.32)$$

где $R(x)$ – остаток от деления. Например,

$$
\begin{array}{r|l}
-\;3x^4+x^3-x^2+2x+3 & x^2-2x+4 \\ \cline{2-2}
-\;3x^4-6x^3+12x^2 \qquad\qquad & 3x^2+7x+1 \\ \cline{1-1}
-\;7x^3-13x^2+2x \quad & \\
7x^3-14x^2+28x \quad & \\ \cline{1-1}
-\;x^2-26x+3 & \\
x^2-2x+4 & \\ \cline{1-1}
-24x-1, &
\end{array}
$$

так что

$$\frac{3x^4+x^3-x^2+2x+3}{x^2-2x+4}=3x^2+7x+1-\frac{24x+1}{x^2-2x+4}.$$

Многочлен $N(x)$ в равенстве (6.32) называется целой частью неправильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Его степень равна разности степеней числителя и знаменателя. Поскольку дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$, очевидно, правильная, то из (6.32) следует, что всякая неправильная дробь может быть сведена к правильной путем выделения целой части.

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь. Будем считать, что $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих корней, так как в противном случае $P(x)$ и $Q(x)$ имели бы общие множители, и дробь можно было бы на них сократить.

Пусть, далее, $\tilde{x}-k$–кратный корень многочлена $Q(x)$. Тогда $Q(x)=(x-\tilde{x})^k Q_1(\mathrm{x})$, причем $Q_1(\tilde{x})\neq 0$. Докажем, что в этом случае дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{(x-\tilde{x})^k Q_1(x)}=\frac{A_0}{(x-\tilde{x})^k}+\frac{P_1(x)}{(x\text{-}\tilde{x})^{k\text{-}1}Q_1(x)},$$

где $A_0\neq 0$ – некоторое число, а второе слагаемое справа есть правильная дробь.

■Для доказательства напишем тождество

$$\frac{P(x)}{(x-\tilde{x})^k Q_1(x)}=\frac{A_0}{(x-\tilde{x})^k}+\frac{P(x)-A_0Q_1(x)}{(x-\tilde{x})^k Q_1(x)}.$$

Здесь A_0 – произвольное число. Подберем его так, чтобы многочлен

$P(x) - A_0 Q_1(x)$ делился на $x - \widetilde{x}$. Для этого положим $P(\widetilde{x}) - A_0 Q_1(\widetilde{x}) = 0$, откуда $A_0 = \dfrac{P(\widetilde{x})}{Q_1(\widetilde{x})}$. Поскольку $P(\widetilde{x}) \neq 0$, то A_0 отлично от нуля и находится однозначно.

При этом значении A_0 получим

$$P(x) - A_0 Q_1(x) = (x - \widetilde{x}) P_1(x).$$

Сокращая дробь $\dfrac{P(x) - A_0 Q_1(x)}{(x - \widetilde{x})^k Q_1(x)}$ на $(x - \widetilde{x})$, представим ее в виде $\dfrac{P_1(x)}{(x - \widetilde{x})^{k-1} Q_1(x)}$. До сокращения эта дробь была правильной, так как степени многочленов $P(x)$ и $Q_1(x)$ ниже степени знаменателя. После сокращения эта дробь также останется правильной, что и требовалось доказать.□

Применяя доказанное только что утверждение к дроби $\dfrac{P_1(x)}{(x - \widetilde{x})^{k-1} Q_1(x)}$, получим

$$\frac{P_1(x)}{(x - \widetilde{x})^{k-1} Q_1(x)} = \frac{A_1}{(x - \widetilde{x})^{k-1}} + \frac{P_1(x)}{(x - \widetilde{x})^{k-2} Q_1(x)},$$

где второе слагаемое справа есть правильная дробь, и т. д. Окончательно будем иметь

$$\frac{P(x)}{(x - \widetilde{x})^k Q_1(x)} = \frac{A_0}{(x - \widetilde{x})^k} + \frac{A_1}{(x - \widetilde{x})^{k-1}} + \frac{A_2}{(x - \widetilde{x})^{k-2}} + \ldots + \frac{A_k}{x - \widetilde{x}} + \frac{P_k(x)}{Q_1(x)},$$

где $\dfrac{P(x)}{Q_1(x)}$ – правильная дробь. Если $Q_1(x)$ имеет другие вещественные корни, то к ней также можно применить доказанное только что утверждение. Итак, если $Q(x)$ имеет корни: корень x_1 кратности k_1, корень x_2 кратности k_2, …, корень x_n кратности k_n, то есть, если $Q(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{k_m}$, а $P(x)$ – любой несократимый с $Q(x)$ многочлен, такой, что $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{A_0}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{A_1}{(x - x_1)^{k_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_{k_1 - 1}}{x - x_1} \right] +$$

$$+ \left[\frac{B_0}{(x - x_2)^{k_2}} + \frac{B_1}{(x - x_2)^{k_2 - 1}} + \ldots + \frac{B_{k_2 - 1}}{x - x_2} \right] +$$

$$+\ldots+\left[\frac{F_0}{(x-x_m)^{k_m}}+\frac{F_1}{(x-x_m)^{k_m-1}}+\ldots+\frac{F_{k_m-1}}{x-x_m}\right].$$

Обратимся теперь к случаю, когда знаменатель правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ имеет комплексные корни, т. е. пусть $Q(x)=(x^2+px+q)^l Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ не делится на x^2+px+q. Докажем, что в этом случае дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^l Q_1(x)}=\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^l}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{l-1}Q_1(x)}, \tag{6.33}$$

где второе слагаемое справа есть правильная дробь.

■Запишем тождество

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^l Q_1(x)}=\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^l}+\frac{P(x)-(M_0x+N_0)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^l Q_1(x)}.$$

Здесь M_0 и N_0 – произвольные числа. Подберем их так, чтобы многочлен $P(x)-(M_0x+N_0)Q_1(x)$ делился на x^2+px+q. Это будет в том случае, если корни трехчлена x^2+px+q (обозначим их $a+bi$ и $a-bi$) будут в то же время корнями многочлена $P(x)-(M_0x+N_0)Q_1(x)$. Действительно, в этом случае $P(x)-(M_0x+N_0)Q_1(x)$ делится на разности $x-(a+bi)$ и $x-(a-bi)$, а значит и на их произведение, равное x^2+px+q. Итак, положим

$$P(a+bi)-[M_0(a+bi)+N_0]Q_1(a+bi)=0,$$

откуда

$$M_0(a+bi)+N_0=\frac{P(a+bi)}{Q_1(a+bi)}.$$

Правая часть есть некоторое комплексное число $\mu+\nu i$, т. е.

$$M_0(a+bi)+N_0=\mu+\nu i,$$

а значит

$$\begin{cases} M_0a+N_0=\mu, \\ M_0b=\nu, \end{cases}$$

откуда

$$M_0=\frac{\nu}{b},\ N_0=\mu-\frac{a\nu}{b}.$$

Итак, если взять именно эти значения M_0 и N_0, то дробь $\frac{P(x)-(M_0x+N_0)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^l Q_1(x)}$ сократится на x^2+px+q, и мы придем к равенству (6.32).

Применяя те же рассуждения к правильной дроби $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{l-1}Q_1(x)}$, получим

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{l-1}Q_1(x)} = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{l-1}} + \frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^{l-2}Q_1(x)},$$

и т. д. Следовательно

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^{l}Q_1(x)} = \frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^{l}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{l-1}} + \ldots +$$

$$+\frac{M_{l-1}x+N_{l-1}}{x^2+px+q} + \frac{P_l(x)}{Q_1(x)},$$

причем если $Q_1(x)$ имеет другие комплексные корни, то правильная дробь $\frac{P_l(x)}{Q_1(x)}$ может быть разложена подобным же образом.

Объединяя случаи вещественных и комплексных корней, можно считать доказанным следующее утверждение.

Теорема 6.7. Любая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где многочлен $Q(x)$ имеет вид (6.31), может быть, и притом единственным образом, представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{k_1-1}}{x-x_1} + \frac{B_0}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{B_1}{(x-x_2)^{k_2-1}} +$$

$$+\ldots+\frac{B_{k_2-1}}{x-x_2} + \ldots + \frac{F_0}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{F_1}{(x-x_2)^{k_2-1}} + \ldots + \frac{F_{k_2-1}}{x-x_2} + \frac{M_0x+N_0}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} +$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}} + \ldots + \frac{M_{l_1-1}x+N_{l_1-1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{R_0x+S_0}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} +$$

$$+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2-1}} + \ldots + \frac{R_{l_2-1}x+S_{l_2-1}}{x^2+p_2x+q_2} + \ldots + \frac{V_0x+W_0}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}} +$$

$$\frac{V_1x+W_1}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_2-1}} + \ldots + \frac{V_{l_s-1}x+W_{l_s-1}}{x^2+p_sx+q_s}.$$

Дроби, стоящие в правой части, можно разделить на 4 группы:

1°. дробь вида $\frac{A}{x-a}$;

2°. дробь вида $\frac{A}{(x-a)^k}$, где $k \geq 2$;

3°. дробь вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4°. дробь вида $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}$, где $l \ge 2$.

Эти дроби называют простейшими дробями соответственно 1, 2, 3 и 4 типов. Поэтому теорему 6.7 можно переформулировать так.

Теорема 6.7. Любая правильная рациональная дробь единственным образом может быть разложена на конечное число простейших дробей 1, 2, 3 и 4 типов.

Заметим, что выражение “простейшая дробь” значит, что такая дробь не может быть разложена на еще более простые дроби.

Пример 6.27. Разложим на простейшие дробь $\dfrac{3x^3+12x^2+18x+10}{(x+1)^2\cdot(x^2+2x+2)}$.

Имеем

$$\frac{3x^3+12x^2+18x+10}{(x+1)^2\cdot(x^2+2x+2)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}. \quad (6.33)$$

Отсюда

$$3x^3+12x^2+18x+10=A(x^2+2x+2)+B(x+1)(x^2+2x+2)+$$
$$(Cx+D)(x^2+2x+2),$$

т. е.

$$Ax^2+2Ax+2A+Bx^3+2Bx^2+2Bx+Bx^2+2Bx+2B+Cx^3+2Cx^2+Cx+$$
$$+Dx^2+2Dx+D=3x^3+12x^2+18x+10.$$

Поскольку (6.33) должно быть тождеством, то и последнее равенство есть тождество. Поэтому приравниваем в нем коэффициенты при одинаковых степенях x. Получим

$$\begin{cases} B+C=3, \\ A+3B+2C+D=12, \\ 2A+4B+C+2D=18, \\ 2A+2B+D=10. \end{cases}$$

Умножим 2-е уравнение на 2 и из результата вычтем 3-е уравнение. Будем иметь

$$2B+3C=6.$$

Решая это уравнение совместно с 1-м, находим $C=0,\ B=3$.

Теперь 2-е и 4-е уравнения дают

$$\begin{cases} A+D=3, \\ 2A+D=4, \end{cases}$$

отсюда

$$A = 1,\ D = 2.$$

Подставим это в (6.33), получим окончательно

$$\frac{3x^3 + 12x^2 + 18x + 10}{(x+1)^2 + (x^2 + 2x + 2)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x^2 + 2x + 2}.$$

Описанный метод нахождения чисел A, B, C и D называется методом неопределенных коэффициентов.

Пример 6.28. На основании теоремы 6.7 имеем

$$\frac{x+5}{(x-2)^3 (x+3)^2 (x^2 + 4x + 5)^2} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} +$$

$$+ \frac{D}{(x+3)^2} + \frac{E}{x+3} + \frac{Fx+G}{(x^2 + 4x + 5)^2} + \frac{Kx+L}{x^2 + 4x + 5}.$$

Неизвестные числа A, B, …, L могут быть найдены тем же методом.

17. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотрим сначала интегрирование простейших дробей всех 4-х типов. Имеем

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

Интегрирование простейших дробей 3-го и 4-го типов целесообразнее рассмотреть на конкретных примерах. Для дроби 3-го типа имеем

$$\int \frac{3x-1}{x^2 2x + 5} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) - 4}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + 2x + 5)}{x^2 + 2x + 5} dx - 4 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 4} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) - 2 \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Аналогично поступим и с простейшей дробью 4-го типа:

$$\int \frac{3x-1}{(x^2 + 2x + 5)^3} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)^{-4}}{(x^2 + 2x + 5)^3} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{d\left(x^2 + 2x + 5\right)}{\left(x^2 + 2x + 5\right)^3} - 4 \int \frac{d(x+1)}{\left[(x+1)^2 + 4\right]^3} = \frac{3}{2} I_1 - 4 I_2.$$

Очевидно,

$$I_1 = -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 5)^2} + C.$$

Для вычисления интеграла I_2 положим $x + 1 = 2 \operatorname{tg} t$. Получим

$$I_2=\int\frac{1}{2^6(\operatorname{tg}^2t+1)^3}\cdot\frac{2dt}{\cos^2t}=\frac{1}{32}\int\frac{dt}{\frac{1}{\cos^6t}\cos^2t}=\frac{1}{32}\int\cos^4tdt=$$

$$=\frac{1}{128}\int(\cos 2t+1)^2dt=\frac{1}{128}\int(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)dt=$$

$$=\frac{1}{128}\int\left(1+2\cos 2t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt=\frac{1}{128}\left(\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)+C=$$

$$=\frac{1}{128}\left[\frac{3}{2}t+2\sin t\cos t+\frac{1}{2}\sin t\cos t(\cos^2t-\sin^2t)\right]+C=$$

$$=\frac{1}{128}\left[\frac{3}{2}t+2\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}\left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2t}-\frac{\operatorname{tg}^2t}{1+\operatorname{tg}^2t}\right)\right]+$$

$$+C=\frac{1}{128}\left[\frac{3}{2}t+\frac{2\operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}^2t}+\frac{\operatorname{tg}t(1-\operatorname{tg}^2t)}{2(1+\operatorname{tg}^2t)^2}\right]+C=$$

$$=\frac{1}{128}\left\{\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{1+\frac{(x+1)^2}{4}}+\frac{\frac{x+1}{2}\left[1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right]}{2\left[1+\frac{(x+1)^2}{4}\right]^2}\right\}+C=$$

$$=\frac{1}{128}\left[\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+\frac{4(x+1)}{x^2+2x+5}+\frac{(x+1)(3-2x-x^2)}{(x^2+2x+5)^2}\right]+C.$$

Окончательно

$$\int\frac{3x-1}{(x^2+2x+5)^3}dx=\frac{-3}{4(x^2+2x+5)^2}-$$

$$-\frac{1}{32}\left[\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+\frac{4(x+1)}{x^2+2x+5}+\frac{(x+1)(3-2x-x^2)}{(x^2+2x+5)^2}\right]+C.$$

Пусть теперь требуется вычислить интеграл $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – вообще говоря, неправильная рациональная дробь. На основании (6.29) находим

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int N(x)dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx.$$

Для вычисления интеграла $\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$ раскладываем правильную дробь

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби и интегрируем каждую из них.

Итак, интегрирование всякой рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и простейших дробей различных типов.

Пример 6.29. Вычислим интеграл $\int \dfrac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

Подынтегральная дробь – правильная. Имеем

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$

откуда

$$A(x^2+1)+B(x^2+1)(x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+1)=3x^2+2x+1.$$

т. е.

$$Ax^2+A+Bx^3+Bx^2+Bx+B+Cx^3+2Cx^2+Cx+Dx^2+2Dx+D=$$
$$=3x^2+2x+1.$$

Получим

$$\begin{cases} B+C=0, \\ A+B+2C+D=3, \\ B+C+2D=2, \\ A+B+D=1, \end{cases}$$

т. е.

$$C=1, B=-1, D=1, A=1.$$

Итак

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Значит

$$\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=-\frac{1}{x+1}-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C.$$

Примечание. Существуют достаточно широкие классы интегралов, вычисление которых, после соответствующих подстановок, сводится к интегрированию рациональных дробей. Однако в прикладных задачах такие интегралы встречаются сравнительно редко. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь одной группы таких интегралов.

18. Интегрирование рациональных тригонометрических выражений

Под $R(a,b,...,l)$ будем подразумевать выражение, в которое величины $a,b,\ldots,l$ входят рационально, т. е. над ними в этом выражении производятся только рациональные действия. Иными словами, такое выражение представляет собой многочлен или рациональную дробь.

Рассмотрим интеграл вида $\int R(a,b,...,l)dx$. Положим $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда

$$x=2\operatorname{arctg}t,$$

значит

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Далее

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}=2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

поэтому

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2},\frac{1-t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2},$$

т. е.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ – некоторое новое рациональное выражение, а значит интеграл $\int R_1(t)dt$ может быть вычислен.

Итак, подстановка $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ позволяет вычислить любой интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, в связи с чем ее называют универсальной тригонометрической подстановкой.

Пример 6.30. Вычислим интеграл $\int\frac{dx}{3+2\sin x}$. Полагая $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим

$$\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{4t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{3+3t^2+4t}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{4}{3}t+1}=$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{d\left(t+\frac{2}{3}\right)}{\left(t+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{t}+\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C=$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+2}{\sqrt{5}} + C = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}} + C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка нередко приводит к излишним, громоздким вычислениям, и иногда ее можно заменить более простой подстановкой. Отметим несколько подобных случаев.

1°. Подынтегральная функция не меняется при одновременной замене $\sin x$ и $\cos x$ соответственно на $-\sin x$ и $-\cos x$, т.е.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).^{*)} \qquad (6.34)$$

Поскольку $\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$, то

$$R(\sin x, \cos x) = R(\operatorname{tg} x \cdot \cos x, \cos x).$$

Правая часть на основании (6.34), не меняется при замене $\cos x$ на $-\cos x$, а значит она содержит $\cos x$ только в четных степенях, т.е.

$$R(\operatorname{tg} x \cdot \cos x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) = R_1\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) = R_2(\operatorname{tg} x).$$

Итак, в этом случае

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_2(\operatorname{tg} x)dx,$$

и, положив $\operatorname{tg} x = t$, получим интеграл

$$\int R_2(t)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_3(t)dt.$$

который можно вычислять без принципиальных затруднений.

Пример 6.33. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$. Поскольку $\operatorname{tg} x = t$, будет иметь

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+t} = \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}.$$

Но

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+\mathrm{t}^2},$$

откуда

$$A + At^2 + Bt + C + Bt^2 + Ct = 1,$$

а значит

---

*) В частности, это относится ко всем интегралам вида $\int R(\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)dx$.

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B+C=0, \\ A+C=1, \end{cases}$$

так что

$$A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}.$$

И

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2(1+t)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-t+1}{1+t^2}.$$

В результате находим

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{2}\int\frac{-t+1}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg} x|-\frac{1}{4}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)+\frac{1}{2}x+C=\frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg} x|+\frac{1}{2}\ln|\cos x|+\frac{1}{2}x+C.$$

2°. Подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$, т. е.

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x).$$

В этом случае выражение $\dfrac{R(\sin x,\cos x)}{\sin x}$ вообще не меняется при замене $\sin x$ на $-\sin x$, а значит она содержит $\sin x$ только в четных степенях, т. е.

$$\frac{R(\sin x,\cos x)}{\sin x}=R_2(\sin^2 x,\cos x).$$

Следовательно

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_1(\sin^2 x,\cos x)\sin x\,dx,$$

и, положив $\cos x=t$, получим интеграл

$$-\int R_2(1-t^2,t)dt=\int R_3(t)dt.$$

Пример 6.32. Возьмем интеграл $I=\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$. Полагая $\cos x=t$, находим

$$\mathrm{I}=-\int\frac{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}{2+t}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int\frac{1-t^2}{2+t}dt=\int\left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}-2t+3\ln|t+2|+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

3°. Совершенно аналогично, если подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, то удобна подстановка $t=\sin x$.

19. Об интегралах, не выражающихся в конечном виде через элементарные функции

Мы видели, что, каким бы громоздким аналитическим выражением не была задана дифференцируемая функция, мы можем без всяких принципиальных трудностей найти ее производную при помощи правил и формул дифференцирования. Для интегралов же, оказывается, это не имеет места. Например, интеграл $\int e^{-x^2}dx$ не может быть вычислен в нашем прежнем понимании. Это вовсе не значит, что функции, производная которой равна e^{-x^2}, нет. Такая функция существует, но не может быть выражена через конечное число элементарных функций. Это совершенно аналогично тому, как, например, число $\sqrt{2}$ существует, но не может быть записано в виде конечной десятичной дроби.

Позже в главе XVII будет доказано, что

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots,$$

а значит[*)]

$$\int e^{-x^2}dx=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\ldots\right)+C\,.$$

Невозможность выразить интеграл $\int e^{-x^2}dx$ через конечное число элементарных функций означает всего лишь, что имеющегося запаса основных элементарных функций для этого недостаточно. Предположим, например, что в математике не существовало бы тригонометрических функций. Тогда об интеграле $\int\frac{dx}{1+x^2}$ говорили бы, что он не выражается в конечном виде через элементарные функции, так как он равен $\operatorname{arctg}x$, а этой функции среди элементарных не было бы. Для преобразования этого интеграла в элементарную функцию пришлось бы пополнить запас основных элементарных функций тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями. Но тогда можно было бы указать другие не вычисляющиеся в конечном виде интегралы, например, $\int x\operatorname{tg}xdx$, так что пришлось бы еще расширять группу основных элементарных функций, и т. д.

Интегралов, не являющихся элементарными функциями, имеется бесконечное множество. Вот лишь некоторые из них:

[*)] Законность почленного интегрирования сумм бесконечного числа слагаемых подобного вида также будет доказана.

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx, \int \frac{e^x}{x}dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \sin(x^2)dx, \int \sqrt{x^3+1}dx.$$

Задачи и упражнения к главе VI

Вычислить интегралы:

1. $\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x dx$;

2. $\int \frac{(x+\cos^2 x)dx}{1+\cos x}$;

3. $\int x^2 \ln \sqrt{1-x} dx$;

4. $\int e^{2x}\sqrt[3]{1+e^x}dx$;

5. $\int e^{\arccos x} dx$;

6. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$;

7. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$;

8. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$;

9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$;

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

11. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^6}dx$;

12. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$;

13. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$;

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$;

15. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

16. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8-1}}$;

17. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Вычислить:

18. $(5+2i)(3-i)$;

19. $(2+3i)(3-2i)$;

20. $\frac{1+i}{1-i}$;

21. $(1+i)^2$;

22. $(1+i)^3$;

23. $\frac{4+3i}{1-2i}$;

24. $\frac{2+3i}{i}$.

Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

25. $1+i\sqrt{3}$;

26. $1-i$;

27. $-\sqrt{3}-i$;

28. $-2i$;

29. 2;

30. i.

Построить в комплексной плоскости области:

31. $|z| < 3$;

32. $|z| \le 2, \frac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi$;

33. $2 \le |z| \le 4$;

34. $-\pi \le \arg z \le -\frac{\pi}{2}$.

При помощи формулы Муавра вычислить:

35. $(1+i)^{10}$;

36. $(\sqrt{3}+i)^5$;

37. $(1-i\sqrt{3})^6$;

38. $(1-i)^8$.

39. Вычисляя $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3$ по формуле Муавра и непосредственно, выразить $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

40. Вычисляя $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$ по формуле Муавра и непосредственно, выразить $\sin 4\varphi$ и $\cos 4\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Найти все значения следующих корней:

41. $\sqrt[3]{-2+2i}$;

42. $\sqrt{i}$;

43. $\sqrt[4]{i}$;

44. $\sqrt[3]{1}$;

45. $\sqrt[5]{1}$;

46. $\sqrt[3]{i}$;

47. $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$.

Решить двумя способами уравнения:

48. $x^3 + 8 = 0$;

49. $x^4 + 4 = 0$.

Вычислить:

50. $\ln i$;

51. $\ln(2-2i)$;

52. $\ln(-2)$;

53. $\ln(1+i)$.

Пользуясь формулами Эйлера вычислить:

54. $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$;

55. $\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$.

Вводя комплексную степень числа e, вычислить интегралы:

56. $\int e^{ax}\cos bx dx$;

57. $\int e^{ax}\sin bx dx$.

Вычислить:

58. $\int \frac{\ln(x^2+1)}{x^3} dx$;

59. $\int x\ln(4+x^4) dx$;

60. $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1)\sin^2 x}$;

61. $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 2}$;

62. $\int \frac{dx}{3+\cos^2 x}$;

63. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$;

64. $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\operatorname{tg}^2 4x}$;

65. $\int \frac{dx}{\sin x(2-\cos x)}$.