8 | Mathematikdidaktik Grundschule

Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2018

hg. von Anna Susanne Steinweg

University of Bamberg Press

https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf

8 Mathematikdidaktik Grundschule

Mathematikdidaktik Grundschule

hg. von Anna Susanne Steinweg
(Didaktik der Mathematik und Informatik)

Band 8

University
of Bamberg
Press
2018

Inhalte im Fokus - Mathematische Strategien entwickeln

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2018

hg. von Anna Susanne Steinweg

University of Bamberg Press
2018

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Informationen sind im Internet über http://dnb.d-nb.de/ abrufbar.

Herstellung und Druck: Digital Print Group, Nürnberg
Umschlaggestaltung: University of Bamberg Press, Larissa Günther
Umschlagfoto: © A. Steinweg

ISSN: 2193-2905
ISBN: 978-3-86309-607-6 (Druckausgabe)
eISBN: 978-3-86309-608-3 (Online-Ausgabe)
URN: urn:nbn:de:bvb:473-opus4-532339
DOI: http://dx.doi.org/10.20378/irbo-53233

Inhaltsverzeichnis

Hauptvorträge

... aus den Arbeitsgruppen

Vorwort

In dem hier vorliegenden achten Band der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule“ sind die Ergebnisse der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der GDM zusammengefasst. Die Tagung fand vom 9. bis 11. November 2018 in Bad Salzdetfurth (Niedersachsen) statt. Das diesjährige Tagungsthema „Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln“ wurde mit großem Interesse unter verschiedenen Blickwinkeln diskutiert.

Das Thema Sicherung einer mathematischen Grundbildung in der Grundschule ist in der wissenschaftlichen, bildungspolitischen und praxisorientierten Diskussion allgegenwärtig. Mathematische Bildung von Schülerinnen und Schülern in der Grundschule basiert im Kern auf der Fähigkeit, mathematische Strategien zu entwickeln, um spezifische mathematische Frage- und Problemstellungen zu bewältigen. Im Gegensatz zu einem eher mechanischen Verständnis von Mathematik trägt die Förderung mathematischer Strategieentwicklung bei Kindern dazu bei, aktiv inhaltliche Vorstellungen aufzubauen und kreativ mathematische Beziehungen zu nutzen. Hierzu ist es relevant, dass die Lehrperson einerseits adäquate Aufgabenformate anbietet, andererseits die Lern- und Lösungsprozesse der Schülerinnen und Schüler bei der Entwicklung von Strategien kompetenzorientiert begleitet.

Vor diesem Hintergrund ist es interessant, die verschiedenen Inhaltsbereiche der Grundschule zu betrachten und Wege für eine aktive Auseinandersetzung mit Mathematik zu beleuchten. Insbesondere wurde die besondere Bedeutung der Strategien in den Inhaltsbereichen thematisiert. Die Tagung leistete einen Beitrag dazu, aktuelle Forschung vorzustellen, Ergebnisse zu diskutieren und Anregungen weiterzugeben.

In den Hauptvorträgen wurden verschiedene Aspekte zur Entwicklung und Nutzung mathematischer Strategien in den Blick genommen. So ging Lieven Verschaffel (Leuven/Belgien) in seinem Vortrag beispielhaft auf die Bedeutung der Analyse und Entwicklung von „Strategiekompetenz“ für das Verstehen und Lernen elementarer Arithmetik ein. Christiane Benz beleuchtete die Relevanz von Strukturwahrnehmung für Zahlvorstellungen und Strategieentwicklung für arithmetische Lernprozesse im Elementar- und Primarbereich. Simone Reinhold griff das Tagungsthema am Beispiel der Vorstellungen von geometrischen Abbildungen auf und ging auf Herausforderungen und Chancen ein. Am Beispiel des Umgangs mit Größen und Messinstrumenten stellten Marianne Grassmann und Roland Rink theoretische Überlegungen und praktische Ansätze zur Nutzung und Entwicklungen von Strategien vor und zur Diskussion.

Auch in diesem Jahr haben wieder viele Kolleginnen und Kollegen ihre Arbeiten aus der aktuellen mathematikdidaktischen Grundschulforschung im Rahmen der Arbeitsgruppen vorgestellt und somit neue Denkanstöße geboten. Der Sprecherrat bedankt sich dafür herzlich bei allen Vortragenden. Unser Dank gilt auch den Koordinatorinnen und Koordinatoren der Arbeitsgruppen. Durch ihr kontinuierliches Engagement ist es möglich, dass u. a. auch Nachwuchsforscherinnen und -forscher Gelegenheit zur Präsentation und Diskussion ihrer Projekte bekommen.

Elke Binner

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger

Prof. Dr. Christof Schreiber

Prof. Dr. Sebastian Wartha

Webseite des Arbeitskreises http://didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/

Den Blick schärfen: Grundlage für arithmetische Kompetenzen

von Christiane Benz

Der Aufbau tragfähiger Vorstellungen von Zahlen und Operationen sowie die Entwicklung von Rechenstrategien stellen zentrale arithmetische Inhalte der Primarstufe dar. Im Artikel wird die Relevanz von strukturierendem Sehen für Zahlvorstellung und Strategieentwicklung bei arithmetischen Lernprozessen beleuchtet. Dabei werden die individuelle Wahrnehmung und Deutung von Strukturen sowie daraus folgende verschiedene Strategien aus theoretischer und empirischer Perspektive analysiert. Darauf aufbauend werden Konsequenzen für die Gestaltung arithmetischer Lernumgebungen im Elementar- und Primarbereich gezogen und die Rolle eines strukturierenden Sehens für erfolgreiches Mathematiklernen wird skizziert.

Schlüsselwörter: Strukturierendes Sehen, Zahlvorstellung, Anzahlbestimmungsstrategien, Rechenstrategien

1 Bedeutung arithmetischer Strategien

In diesem Kapitel stehen arithmetische Strategien im Übergang vom Elementar- zum Primarbereich im Fokus. Der Arithmetikunterricht zeichnet sich in den bildungspolitischen (KMK Standards, 2005) und aktuellen mathematikdidaktischen Publikationen dadurch aus, dass nicht allein das Erreichen eines korrekten Resultates, und auch nicht das Beherrschen bzw. das schnelle Ausführen von Verfahren im Vordergrund stehen, sondern vor allem die Prozesse, die Strategien, die zu einem korrekten Resultat führen können.

Dieser Fokus ist im arithmetischen Bereich nicht neu. Schon Kühnel stellt dies bereits 1922 in seinen Vorträgen über neuzeitlichen Rechenunterricht ausführlich dar:

> Ein selbstständiges Suchen, Finden und Verstehen mehrerer Lösungswege, das müssen wir an die Stelle der alten Normalverfahren setzen. Es ist wirklich ein Zauberstab, dieses Wörtchen: Wer kann es anders? (Kühnel, 1922, S. 58)

Durch diese Frage stehen die Strategien und nicht das Ergebnis im Mittelpunkt. Prozesse stehen allerdings nicht nur beim Thematisieren unterschiedlicher Strategien im Vordergrund. Freudenthal weist - bereits vor 35 Jahren – auf die Bedeutung von Prozessen als Kern der Mathematik hin:

> Mathematik ist keine Menge von Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung, die man

> sich handelnd erwirbt, und vor allem die Haltung, keiner Autorität zu glauben, sondern immer wieder ‚warum' zu fragen." Eine Geisteshaltung lernt man aber nicht, indem einer einem schnell erzählt, wie er sich zu benehmen hat. Man lernt sie im Tätigsein, indem man Probleme löst. (Freudenthal, 1982, S. 140)

Um auf die Frage „warum" antworten zu können, sind bei arithmetischen Inhalten im Elementar- und Primarbereich Zahl- und Operationsvorstellungen sowie weitere Fähigkeiten des Beschreibens und Begründen der eigenen Vorgehensweise bzw. Strategie[1] notwendig. Strategieeinsatz kann deshalb nicht losgelöst von Zahl- und Operationsvorstellungen betrachtet werden.

2 Zählen – eine erste arithmetische Strategie

Wenn Fachkräfte im Elementarbereich nach zu fördernden mathematischen Kompetenzen befragt werden, wird *Zählen* am häufigsten genannt. Und Zählaktivitäten sind auch die am häufigsten genannten Anlässe für mathematische Bildung in KiTa-Alltag (Benz 2012, 224). Dies ist nicht erstaunlich, stellen doch Zählkompetenzen eine ganz elementare und offensichtliche mathematische Aktivitäten dar, die im Elementarbereich eine lange Tradition haben. Die Bedeutung der Zählkompetenzen wird dadurch bestätigt, dass sie Bestandteile in aktuellen Zahlbegriffsentwicklungsmodellen (Fritz, Ehlert & Balzer, 2013) sind. Des Weiteren wurden in Studien zur Vorhersage für spätere arithmetische Kompetenzen *flexible Zählkompetenzen* als Prädiktoren für arithmetische Kompetenz am Ende Klasse 2 identifiziert (vgl. Dornheim, 2008). Insofern kann eindeutig festgestellt werden, dass Zählen eine erste bedeutende Strategie von Kindern darstellt, um die Anzahlen von Mengen zu bestimmen. Um mit Zählstrategien die Anzahl einer Menge korrekt angeben zu können, müssen die Kinder bereits die Zahlwortreihe sicher können und Zählprinzipien berücksichtigen (Gelman & Gallistel, 1978).

[1] Der Begriff Strategien wird in diesem Artikel synonym zu Vorgehensweise verwendet. Für eine differenzierte Betrachtung bezüglich der begrifflichen Schärfung sei auf Hess (2012) verwiesen.

3 Voraussetzungen für nicht-zählende Strategien

Nichts desto trotz stellt gerade diese erste und zu Beginn durchaus erfolgversprechende Strategie oft eine Hürde sowohl beim Aufbau von Zahlvorstellungen als auch beim Erwerb von Rechenstrategien dar. Rein zählende Anzahlbestimmungen in größeren Zahlenräumen und verfestigtes zählendes Rechnen wird als ein Symptom und Hauptproblem bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen identifiziert (Gaidoschik, 2010; Rechtsteiner, 2013; Schulz, 2014; Wartha & Schulz, 2012). Beim Rechnen im Zahlenraum bis 100 wird sehr schnell deutlich, dass Zählstrategien, bei denen jedes Element bzw. jeder Schritt in der Zahlwortreihe einzeln gezählt wird, keine effektiven Strategien mehr darstellen können. Insofern ist es Aufgabe des Mathematikunterrichts Kinder darin zu unterstützen, dass sie nicht-zählende Strategien entwickeln können.

Um sich von Zählstrategien lösen zu können, also um nicht nur in Einerschritten operieren zu müssen (vgl. Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser-Opitz & Wittich, 2014), benötigen Kinder eine Vorstellung von Zahlen, die aus größeren Einheiten bestehen, ein Teil-Ganzes-Verständnis (Gerster, 2009; Resnick, 1992). Werden Zahlen durch Mengen veranschaulicht, ist es also notwendig, dass Mengen zunehmend nicht nur als viele einzelne Elemente wahrgenommen werden, sondern auch als Zerlegung in Teilmengen bzw. als Kombination aus verschiedenen Teilmengen. Dafür müssen die Mengen bereits auf *visueller Ebene* strukturiert bzw. gegliedert werden. So besteht die Menge 5 dann beispielsweise nicht mehr nur aus einzelnen Elementen, sondern aus den Teilmengen 4 und 1 oder aus den Mengen 3 und 2. Die Bedeutung der Strukturierungsfähigkeit bzw. Gliederungsfähigkeit auf der visuellen Ebene für die arithmetische Entwicklung bestätigen auch die Ergebnisse von Dornheim (2008), bei denen *schnelles Erfassen strukturierter dargestellter Anzahlen* ebenfalls als Prädiktor für einen späteren Erfolg im Arithmetikunterricht identifiziert wurde.

Eine darauf aufbauende mentale Vorstellung von Zahlen in Form einer Teil-Ganzes-Vorstellung, bei der Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt bzw. in andere Zahlen zerlegt werden können, stellt eine wichtige Voraussetzung für spätere nicht-zählende Rechenstrategien dar. Aus diesem Grund wird in allen Zahlbegriffsentwicklungsmodellen der Teil-Ganzes-Vorstellung von Zahlen eine bedeutende Rolle zugeschrieben (Fritz, Ehlert & Balzer, 2013; Krajewski & Ennemoser, 2013).

4 Bedeutung von strukturierender Wahrnehmung

Der Zusammenhang von Strukturierungsfähigkeit und Aufbau nicht-zählender Strategien wird durch die Unterscheidung verschiedener Prozesse beim Identifizieren der Anzahl von Mengen weiter verdeutlicht.

4.1 Wahrnehmung und Bestimmung – zwei Prozesse

Sollen die Anzahl von Mengen identifiziert werden, können zwei Prozesse unterschieden werden (Steffe & Cobb, 1998; Benz, 2014).

1. Der Prozess der Wahrnehmung der Menge
2. Der Prozess der Anzahlbestimmung

Verschiedene Prozesse der Mengenwahrnehmung können zu verschiedenen Prozessen der Anzahlbestimmung führen.

Bei den Prozessen der Mengen*wahrnehmung* kann unterschieden werden in

- Wahrnehmung einzelner Elemente,
- Wahrnehmung als Ganzes (in Form einer Figur oder Gestalt)
- strukturierende Wahrnehmung, bei der Teilmengen gebildet und wahrgenommen werden.

Werden Mengen vorrangig als eine Ansammlung vieler einzelner Elemente wahrgenommen, und die Anzahl der einzelnen Elemente soll bestimmt werden, stehen dafür nur Zählprozesse zur Verfügung. Bei Mengen bis zu 4 Elemente können Kinder und Erwachsene die Anzahl auch gleich nennen. Das simultane Bestimmen der Anzahl bei der Wahrnehmung wird als Simultanerfassung oder perceptual subitizing bezeichnet (Clements 1999; Clements & Sarama 2014). In diesem Fall fallen die Prozesse der Wahrnehmung und Anzahlbestimmung zusammen. Bloechle et al. (2018) konnten beim Subitizing von Mengen mit bis zu 4 zufällig angeordneten Elementen die kognitiven Aktivitäten beobachten, die sie auch bei der Wahrnehmung bekannter Figuren (Würfelbilder) mit gleicher Anzahl beobachteten.

Werden Mengen als bekannte Figur wahrgenommen, weil beispielsweise die Menge in Form von Würfelbildern dargestellt ist, kann anhand der Kenntnis der Figur die Anzahl wiedererkannt werden. Trotz dieser Kenntnis können auch zählende Strategien (zur Überprüfung) für die Anzahlbestimmung angewendet werden. Es kann allerdings auch lediglich der Name der Figur gekannt werden, ohne dass man sich der Anzahl der Elemente des Bildes bewusst ist (von Glasersfeld, 1987). Es kann aber auch sein, dass bei Kenntnis von Bild und Figur auch Teilstrukturen wahrgenommen und genutzt werden.

Das Wahrnehmen und Hineindeuten von Strukturen in Mengendarstellungen eröffnet eine Vielzahl von Möglichkeiten der Anzahlbestimmung:

Werden bei Mengen Strukturen wahrgenommen bzw. hineingedeutet und wird somit die Menge in kleinere Teilmengen zerlegt bzw. einzelne Objekte zu Einheiten zusammengesetzt, kann man von *strukturierender Mengenwahrnehmung* sprechen. Hess (2012) bezeichnet die Fähigkeit, Strukturen in Mengendarstellungen wahrzunehmen bzw. zu deuten als die visuelle Gliederungsfähigkeit. Häsel-Weide et al. (2014) bezeichnen dies als struktur-fokussierende Deutungen und Söbbeke (2005) als visuelle Strukturierungsfähigkeit. Strukturieren oder gliedern die Kinder eine Menge in Teilmengen und erfassen die Teilmengen simultan, ergeben sich verschiedene Vorgehensweisen für die Anzahlbestimmung (vgl. Abb1.) (Benz, 2014; Schöner & Benz, 2017; Schöner & Benz, 2018):

Sie können, obwohl sie die Menge in Teilmengen strukturiert bzw. gegliedert haben, *alle* einzelnen Elemente aller Teilmengen *einzeln zählen* und würden somit die Zählstrategie *Alleszählen* anwenden. Nehmen sie zumindest eine Teilmenge ihrer strukturierten Menge simultan wahr, steht ihnen auch die Strategie des *Weiterzählen*s zur Verfügung.

Nehmen sie alle Teilmengen simultan wahr, stehen ihnen neben Zählstrategien auch nicht-zählende Strategien zur Verfügung wie beispielweise Zerlegungsstrategien, indem sie die Anzahl schrittweise aus der wahrgenommen Anzahl der Teilmenge berechnen. Auch weitere nicht-zählende Strategien sind möglich, beispielsweise operative oder heuristische Strategien, wenn Kinder z.B. eine Ergänzungsstrategie anwenden und begründen: „Das sind 5 Eier, weil da fehlt eins und sonst wären es 6".

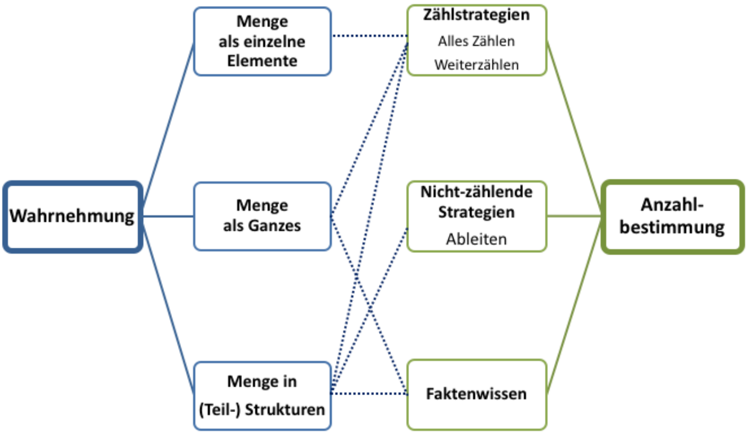


Abb. 1 Verschiedene Anzahlbestimmungsstrategien bei strukturierender Mengenwahrnehmung

Beim strukturierenden Sehen der Menge können Teilmengen direkt mit den entsprechenden Anzahlen verknüpft werden und die Summe der wahrgenommenen Anzahlen kann automatisiert anhand von Faktenwissen abgerufen werden. Dies wird meist als Quasi-Simultanerfassung (Hasemann & Gasteiger, 2014), strukturierte Simultanerfassung (Schöner 2017), conceptual subitizing (Clements & Sarama, 2014) oder automatisierte „Quasi-Simultan-Komposition" (Hess, 2012) bezeichnet.[2]

Die oben beschriebenen Strategien der Anzahlbestimmung entsprechen den Strategien beim Lösen additiver und subtraktiver Operationen. Strukturierende Mengenwahrnehmung eröffnet somit die Mög-

[2] Für eine differenzierte Auseinandersetzung der unterschiedlichen Verwendung der Begriffe sei auf Schöner (2017) und Schöner & Benz (2018) verwiesen.

lichkeit, dass mit Kindern auf visueller Ebene bereits Operationsvorstellungen und nicht-zählende Strategien thematisiert werden können, die später beim Operieren mit Zahlen dann als Rechenstrategien angewendet werden können. Werden die Strategien bei der Anzahlbestimmung mit Zahlen und Operationszeichen notiert, entspricht dies der Notation von Rechenwegen. Anzahlbestimmungsprozesse, bei denen strukturierende Wahrnehmung und Deutung der Menge ermöglicht werden, können zum einen zum Erwerb einer tragfähigen Zahlvorstellung (Teil-Ganzes-Vorstellung) und zum anderen auch zum Kennenlernen nicht-zählender Strategien beitragen. Sowohl die Teil-Ganzes Vorstellung als auch die Kenntnis nicht-zählender Strategien sind später wichtige Grundlagen für den Aufbau von Rechenstrategien.

4.2 Einblicke gewinnen in strukturierende Wahrnehmung und Deutung

Zahlreiche Studien belegen die Bedeutung von strukturierender Wahrnehmung. Die vorliegenden Studien zur Erforschung von Strukturen im arithmetischen Bereich können grob zusammengefasst werden:

- Die Strukturierungsfähigkeit bzw. struktur-fokussierende Deutungen von Anschauungsmaterialien (Häsel-Weide et al., 2014) haben einen positiven Einfluss auf die *Zahlvorstellung* und *Strategieentwicklung* (Häsel-Weide et al., 2014; van Nes 2006; Young-Loveridge, 2002).
- Es kann allgemein eine Beziehung zwischen Wahrnehmen von Strukturen und mathematischen bzw. arithmetischen Fähigkeiten festgestellt werden (Lüken, 2010, 2012; Lüken, Peter-Koop & Kollhoff, 2014; Mulligan & Mitchelmore, 2009, 2013; Mulligan, Mitchelmore, English & Crevensten, 2013).

Da die Wahrnehmung bzw. das Deuten von Strukturen bei Mengendarstellungen sowie deren Nutzung für die Anzahlbestimmung für Beobachtende nicht sichtbar ist, wurden bislang folgende Methoden genutzt, um die Wahrnehmung und Deutung von Strukturen von Kindern zu untersuchen.

- Verbale Erklärungen zur Wahrnehmung (vgl. Benz 2014;. Gasteiger, 2010; Lüken, 2012)
- Eigenproduktionen von Mengendarstellungen, bei denen man die Anzahl gut erkennen soll (evtl. mit zugehörigen Erklärungen) (Benz, 2014; Gervasoni, 2015; Lüken, 2012)
- Markierungen in und Übersetzung von Anzahldarstellungen (Häsel-Weide, 2016; Häsel-Weide et al., 2014)
- Reproduktion (kurz) gezeigter Mengendarstellungen (Lüken, 2012; Mulligan & Mitchelmore, 2009).
- Rückschlüsse anhand der Ergebnisse bei der Anzahlbestimmung bei kurz präsentierten Mengendarstellungen (ILeA Plus A).

Untersuchungen im Elementarbereich zeigen, dass Kinder bereits vor dem Schuleintritt Strukturen in Anzahldarstellungen wahrnehmen und nutzen können. Dazu wurden 189 Kinder im Alter von 3-6 Jahren anhand materialgestützter diagnostischer Aufgaben befragt (Benz, 2014). Die folgende Aufgabenstellung wurde aus der Studie von Gasteiger (2010) übernommen. Das Erkenntnisinteresse bei dieser Aufgabe zielte darauf ab, ob Kinder bei strukturierten oder bei eher unstrukturierten Mengendarstellungen von vier, fünf und sechs Punkten leichter erkennen können, wie viele Punkte dargestellt sind.

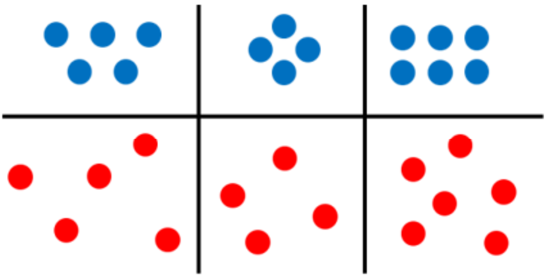


Abb. 2 Strukturierte (blau – obere Reihe) und eher unstrukturierte (rot – untere Reihe) Punktedarstellung nach Gasteiger (2010)

Zuerst wurden die Kinder gefragt, ob sie den roten Punktekarten eine passende blaue Punktekarte zuordnen können. 147 von 189 Kindern ordneten hier nach gleicher Anzahl zu. Von den 147 Kindern, die nach gleicher Anzahl sortiert hatten, wählten 75% die strukturierte

Darstellung als leichter zu erkennenden Anzahl, während 16% die unstrukturierte Darstellung wählten und 9% keiner Darstellung den Vorzug gaben. Bei vielen Kindern wird in ihrer Erklärung deutlich, dass sie Strukturen wahrgenommen haben. Manche Kinder erklären auch, wie sie die wahrgenommenen Strukturen für die Bestimmung nutzen. Bei der Analyse der Antworten der Kinder wurde deutlich, dass viele Kinder in den Darstellungen der Menge 4 und 6 Würfelbilder gesehen haben. So kann auch die Wahrnehmung eines bekannten Bildes dazu geführt haben, dass diese Bilder als „leicht zu erkennen“ bezeichnet wurden.

Verbale Beschreibungen zu Strukturwahrnehmung und -nutzung sind abhängig von der verbalen Ausdrucksfähigkeit der Kinder.

Dies ist ebenso bei Eigenproduktionen mit Erklärungen der Fall.

Werden Darstellungen mit eigenen Strukturierungen ohne zusätzliche Erklärungen von Kindern gefordert, so dass jemand anderes *leicht bzw. schnell sehen* oder *auf einen Blick erkennen* kann, kann die Ausführung der Aufgabe sprachfrei erfolgen. Anhand der für den Beobachtenden sichtbaren räumlichen Strukturierungen kann versucht werden Rückschlüsse auf zu ziehen. Bei dieser Aufgaben hat die verbale Ausdrucksfähigkeit der Kinder keinen Einfluss auf die Aufgabenbearbeitung. Jedoch ist hier ein Verständnis gefordert, was mit der verbalen Aufforderung *auf einen Blick erkennen* oder *leicht bzw. schnell sehen* gemeint ist.

Werden Markierungen in bzw. Übersetzungen von Anzahldarstellungen analysiert, wird eine Strukturdeutung und -nutzung vorausgesetzt bzw. durch die verbale Aufgabenstellungen angeregt; Bei dieser Erhebungsmethode wird untersucht, *welche* Strukturen genutzt werden. Sprachliche Fähigkeiten fließen bei der Möglichkeit über Reproduktionen Erkenntnisse zu gewinnen nicht in die Ergebnisse mit ein. Allerdings muss hier die Rolle des Gedächtnisses berücksichtigt werden.

Auch bei kurz präsentierten Mengendarstellungen, die nachgelegt werden sollen oder bei denen die Gesamtanzahl der Menge genannt werden soll, kann die Gedächtnisleistung einen Einfluss haben.

Ist die Anzahl der Gesamtmenge gefordert und wird die Anzahl der wahrgenommenen Teilmengen nicht sofort gewusst, müssen die wahrgenommen Teilmengen mental rekonstruiert werden und dann die Anzahl der Gesamtmenge bestimmt werden. Bei der Normierung der Online-Diagnose ILeA plus A bei Schulanfängern (Kooperationsprojekt der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe, Universität Bielefeld und LISUM Brandenburg) konnten von 2977 Kindern zu Beginn des ers-ten Schuljahres 85% eine Menge mit 6 Elementen korrekt bestim-men, wenn sie lange gezeigt wurde (Abb. 3-links). Wurde eine Menge von 6 Elementen nur kurz gezeigt (Abb. 3-rechts), wurde die korrekte Anzahl von 41% der 2959 Kinder, die diese Aufgabe bearbeitet hatten, angegeben.

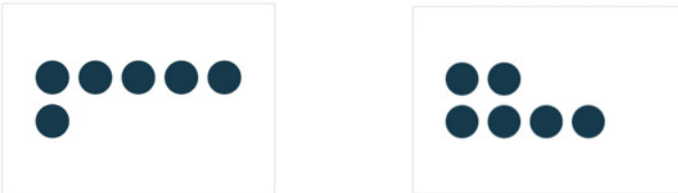


Abb. 3 links lange Präsentationszeit, rechts kurze Präsentationszeit - ILEA plus A

Die lange Präsentationszeit ermöglicht zählende Strategien, die viele Kinder in dieser Untersuchung bereits anwenden können. Um bei der kurzen Präsentationsdauer die Anzahl bestimmen zu können, ist eine strukturierende Wahrnehmung notwendig, so dass die Menge entweder sofort gewusst oder bei entsprechender Gedächtnisleistung später mental rekonstruiert werden kann, um die Anzahl bestimmen zu können. Dies kann eine Begründung für die geringere Lösungshäufigkeit sein.

Da Wahrnehmungsprozesse immer individuell und nicht direkt beobachtbar sind, stellen Augenbewegungsanalysen weitere Erhebungsmöglichkeiten dar, um Einblicke in Wahrnehmungsprozesse zu gewinnen. Dies geschieht über den Einsatz eines Eye-tracking Gerätes (Lindmeier & Heinze, 2016; Schindler, Lilienthal, Schindler & Bader, 2018; Schöner & Benz, 2018).

In einer aktuellen Studie mit 5-6 jährigen Kindern werden die Blickbewegungen bei der Mengenwahrnehmung und Anzahlbestimmung aufgezeichnet (Schöner & Benz, 2017; Schöner & Benz, 2018; Sprenger & Benz, 2018). Allein aufgrund der Blickbewegungsdaten können zunächst nur in wenigen Fällen und auch nur hypothetische Rückschlüsse für die Strukturdeutung bzw. -wahrnehmung gezogen werden. Für die Interpretation der Daten sind auch hier ebenfalls weitere Beobachtungen und Erklärungen der Kinder notwendig. Es konnte beobachtet werden, dass Kinder häufig in ihren Erklärungen Zählprozesse beschreiben, obwohl sowohl die Eye-tracking Daten als auch die Beobachtungen klar darauf hindeuten, dass sie Strukturen wahrgenommen hatten und die Anzahlen nicht zählend bestimmt hatten (Sprenger & Benz, 2018). Eine mögliche Erklärung für dieses Vorgehen kann im Fehlen der Begrifflichkeiten für strukturierendes Sehen und für das Nutzen der wahrgenommenen Strukturen bzw. der wahrgenommenen Teilmengen liegen. Stattdessen wird auf bekannte Bestimmungsstrategien und vor allem bewährte Erklärungsstrategien in Form des Zählens, zurückgegriffen bei denen allen Beteiligten klar ist, wie darüber kommuniziert werden kann.

Die beschriebenen Erhebungs-Methoden (mit Ausnahme von Eyetracking) werden auch als didaktische Methoden zur Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen eingesetzt. Aus diesem Grund müssen die fehlende sprachliche Mittel nicht nur beim Erheben der strukturierenden Wahrnehmung und ihrer Nutzung für die Anzahlbestimmung berücksichtigt werden, sondern auch bei der Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen. Da „Sprache“ vor allem Mittel des Lernens und Verstehens darstellt, muss sie (unabhängig von den Problemen der Forschung) deshalb in den Fokus rücken. Für die Gestaltung und von Lehr-Lern-Prozessen müssen deshalb geeignete Kommunikationsmittel und sprachliche Beschreibungen entwickelt werden, um über strukturierendes Sehen und die daraus resultierenden unterschiedlichen Strategien zur Bestimmungen von Mengen kommunizieren zu können.

5 Fördermöglichkeiten des strukturierenden Sehens

Im Rahmen von Spiel- und Lernumgebungen am Übergang vom Elementar- in den Primarbereich kann beim Erkunden von Strukturen von Mengendarstellungen gemeinsam über strukturierendes Sehen kommuniziert werden. Verschiedene Strukturierungen können beschrieben werden und am Material gezeigt bzw. visualisiert werden.

Ebenso kann eine strukturierte Darstellung beim Darstellen von Mengen angeregt werden. Impulse wie „Wie kannst du leicht sehen, wie viele es sind?“ bzw. „Wie kannst du schnell sehen, wie viele es sind?“ können dazu dienen, dass eine Strukturierung vorgenommen wird, so dass nicht mehr jedes Element einer Menge einzeln gezählt wird. Mit der Frage „Warum?“ kann die Strukturdeutung von Mengendarstellungen thematisiert werden und die Reflexion über Anzahlbestimmungen angeregt werden. Hierbei können auch gemeinsame Kommunikationswege in Form von sprachlichen Beschreibungen, Markierungen, Notationen ausgehandelt werden. Es können Bezeichnungen für das „strukturierende Sehen“ und den Einsatz von Faktenwissen mit den Kindern erarbeitet werden. Das „Sehen“ von Teilmengen sowie verschiedene Strategien zur Anzahlbestimmung der Gesamtmenge kann neben zählenden Strategien hierbei etabliert werden.

Dabei stehen weniger die Ergebnisse eines strukturierenden Sehens im Vordergrund, als vielmehr die verschiedenen Strukturdeutungen (vgl. Häsel-Weide et al., 2014; Rathgeb-Schnierer, 2007) und die Möglichkeiten für die Anzahlbestimmung, die sich daraus ergeben. Es stehen die Prozesse und nicht die Produkte im Fokus. Die Frage lautet also weniger „wie viele sind es“ als „Warum?“, „Kannst du erklären, wie du es gesehen hast?“. Die Fokussierung auf strukturierendes Sehen trägt somit zu einer Prozessorientierung des Mathematikunterrichts bei.

6 Strukturierendes Sehen als Grundlage für weitere mathematische Inhalte

Ohne eine Wahrnehmung von Strukturen ist bei Anzahldarstellungen von größeren Zahlen eine nicht-zählende Zahlauffassung nicht möglich. Auch hier ist eine Kenntnis der Strukturen notwendig, um sie zu nutzen zu können.

Nicht nur bei Anzahlbestimmungen und Darstellung additiver und subtraktiver Operationen ist eine strukturierende Wahrnehmung in Anzahldarstellungen hilfreich. Vor allem das Hineindeuten von

Strukturen in Punktefeldern stellt die Grundlage für eine Veranschaulichung der multiplikativer Strukturen sowie für die Veranschaulichung des Kommutativgesetzes und des Distributivgesetzes bei der Multiplikation dar.

In rechteckigen Punktemuster kann neben der Deutung von Multiplikationstermen auch die Deutung weiterer verschiedener Terme mit der Frage „Was siehst du?“ angeregt werden. In einem 5x5 Punktefeld, kann somit die Aufgabe 4x5+5, oder 1+2+3+4+5+4+3+2+1 oder 1+3+5+7+9+“gesehen“ werden (Steinweg 2013).

7 Abschließende Bemerkungen

Die kurze Betrachtung weiterer arithmetischer Inhalte zeigt, dass, das der Prozess des strukturierenden Sehens bei der Verdeutlichung verschiedener arithmetischer und algebraischer Inhalte sich förderlich auswirken kann. Dass strukturierendes Sehen auch räumliche Fähigkeiten mit einschließt, soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben (Metzger, 1975).

Einleitend zu diesem Artikel wurden zwei Mathematikdidaktiker zitiert, die schon früh die Prozesse in den Mittelpunkt des Mathematikunterrichts gestellt haben. Ihre Forderung hat nichts an Aktualität verloren, wie neuere Forschungsergebnisse zeigen. Für alle am Mathematiklernen Beteiligten - sowohl im Elementarbereich, als auch im Primarbereich - ist es somit eine lohnende Herausforderung sich auf den Prozess des strukturierenden Sehens einzulassen um beim Kommunizieren über wahrgenommene Strukturen gemeinsam mathematische Strategien und Inhalte zu erarbeiten.

Literatur

Benz, C. (2012). Attitudes of kindergarten educators about math. *Journal für Mathematikdidaktik* 33 (2), 203-232.

Benz, C. (2014). Identifying Quantities of Representations – Children’s Constructions to Compose Collections from Parts or Decompose Collections into Parts. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel (Hrsg.), *Early Mathematics Learning – Selected Papers of the POEM Conference 2012* (S. 189-203). New York: Springer.

Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung. Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Heidelberg: Springer.

Bloechle, J., Huber. J.F., Klein, E., Bahnmueller, J., Rennig. J., Moeller, K., & Huber, S. (2018). Spatial Arrangement and Set Size Influence the Coding of Non-symbolic Quantities in the Intraparietal Sulcus. *Frontiers in Human Neuroscience, 12* (article 54). doi:10.3389/fnhum.2018.00054

Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics*, 5, 400–405.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2nd Edition). New York: Taylor & Francis.

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten*. Berlin: Logos Verlag

Freudenthal, H. (1982). Mathematik – Eine Geisteshaltung. *Grundschule*, 4, 140–142.

Fritz, A., Ehlert, A., & Balzer, M. (2013). Development of mathematical concepts as basis for an elaborated mathematical understanding. *South African Journal of Childhood Education* 3(1), 38- 67.

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht: Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Frankfurt/Main: Peter Lang.

Gasteiger, H. (2010). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte: Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes*. Münster, u.a.: Waxmann Verlag.

Gasteiger, H. (2016). Frühe mathematische Bildung – sachgerecht, kindgemäß, anschlussfähig. In: S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 9-26). Springer, Spektrum: Wiesbaden

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The Child's Understandig of Number*. Cambridge: Harvard University Press.

Gerster, H.-D. (2009). Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In A. Fritz, G. Ricken, & S. Schmidt (Hrsg.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 248–268). Weinheim: Beltz.

Gervasoni, A. (2015). Extending Mathematical Understanding: Intervention. Ballarat, Australia: BHS publishing

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik* (3. Auflage). Berlin, Heidelberg: Springer.

Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen. Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E., & Wittich, C. (2014). *Ablösung vom zählenden Rechnen – Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen*. Seelze: Klett, Kallmeyer.

Hess, K. (2012). *Kinder brauchen Strategien: Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen*. Seelze: Klett, Kallmeyer

Krajewski, K. & Ennemoser, M. (2013). Entwicklung und Diagnostik der Zahl-Größen-Verknüpfung zwischen 3 und 8 Jahren. In. M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen. Tests & Trends Bd. 11* (S. 225–240). Göttingen: Hogrefe.

Kultusministerkonferenz (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München: Luchterhand. auch digital verfügbar unter: www.kmk-org.de

Lindmeier, A. & Heinze, A. (2016). Strategien bei der Anzahlerfassung in strukturierten Zahldarstellungen – eine vergleichende Eye-Tracking Studie. In Institut für Mathematik und Informatik der PH Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. 1381–1384). Münster: WTM.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht: Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann.

Lüken, M., Peter-Koop, A. & Kollhoff, S. (2014). Influence of early repeating patterning ability on school mathematics learning. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, D. Allan (Hrsg.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education,* PME. (S. 137-144). Vancouver: Canada.

Metzger, W. (1975). *Gesetze des Sehens* (3. neu bearbeitete Aufl.). Frankfurt a. M.: Kramer.

Mulligan, J. T., Mitchelmore, M., English, L. & Crevensten, N. (2013). Reconceptualizing Early Mathematics Learning: The Fundamental Role of Pattern and Structure. In L. English & J. T. Mulligan (Hrsg.), *Reconceptualizing Early Mathematics* (S. 47–66). Heidelberg: Springer.

Rathgeb-Schnierer, E. (2007). Rechenschwache Kinder arbeiten mit Zahlbildern im Zehnerfeld. In A. Filler & S. Kaufmann (Hrsg.), Kinder fördern – Kinder fordern. Festschrift für Jens Holger Lorenz zum 60. Geburtstag. (s. 103-116). Hildesheim: Franzbecker.

Rechtsteiner-Merz, Ch. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen*. Münster: Waxmann.

Resnick, L. B. (1992). From Protoquantities to Operators: Building Mathematical Competences on a Foundation of Everyday Knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam & R. Hattrup (Hrsg.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (S. 373–429). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schindler, M., Lilienthal J., Schindler, F., & Bader, E. (2018). Vorgehensweisen bei der Anzahlerfassung am 100er Feld und 100er Rahmen. Eine Eye-Tracking Studie bei Kindern mit und ohne Rechenschwierigkeiten. In *Fach-*

gruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2018 (S. 1592-1600). Münster: WTM-Verlag.

Schöner, P. & Benz, C. (2017). "Two, three and two more equals seven" – Preschoolers' perception and use of structures in sets. In T. Dooley, & G. Gueude (Hrsg.), *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1893-1900). Dublin, Ireland: European Society for Research in Mathematics Education.

Schöner, P. & Benz, C. (2018). The contribution of eye-tracking for revealing visual structuring processes of children when determining quantities. In C. Benz, A. S. Steinweg, H. Gasteiger, P. Schöner, H. Vollmuth, & J. Zöllner (Hrsg.), *Early Mathematics Learning – Selected Papers of the POEM Conference 2016* (S. 123-144). New York: Springer.

Schöner, P. (2017) Prozesse bei der (strukturierten) Mengenwahrnehmung und Anzahlbestimmung. In Steinweg, A. S. (Hrsg.). *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 7: Sprache und Mathematik*, S. 105-108. Bamberg: University of Bamberg Press (UBP)

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften: Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Heidelberg: Springer.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern: Epistemologische Grundlage und empirische Fallstudie zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim: Franzbecker.

Sprenger, P. & Benz. C. (2018). Perceiving and using structures when determining the cardinality of sets – a case study. Conference paper: *A Mathematics Education Perspective on early Mathematics Learning – POEM 2018 Kristiansand*, Norway 28-30 May.

Steffe, L. P., & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.

Steinweg, A.S. (2013). *Algebra in der Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Von Glasersfeld, E. (1987). *Wissen, Sprache und Wirklichkeit*. Braunschweig: Vieweg.

Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen*. Berlin: Cornelsen Verlag.

Prof. Dr. Christiane Benz
Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Institut für Mathematik und Informatik
Bismarckstr. 10
76133 Karlsruhe
benz@ph-karlsruhe.de

„Ich mache das am liebsten immer ganz genau - mein Schulweg ist 452,478 m lang.“: Bemerkungen zum Umgang mit Größen und Messinstrumenten im Mathematikunterricht

von Marianne Grassmann und Roland Rink

„Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so deutlich zu erkennen, wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen“ soll Gauß einmal gesagt haben. Dies kann ganz sicher auf den Umgang mit Größen, speziell das Messen übertragen werden. Im Vortrag wollen wir zunächst den mathematischen Hintergrund des Themenbereiches umreißen, um deutlich zu machen, dass es sich um einen mathematischen Gegenstand und nicht „nur“ um Sachrechnen handelt. Dabei wird es auch um Fragen gehen, was Größen eigentlich sind, was Messen bedeutet u.a. Es schließt sich die Frage an, welche Folgen dies für den Unterricht haben sollte, was vor dem dargestellten Hintergrund den Kindern deutlich werden muss. Schließlich wird auf spezifischen Denk- und Arbeitsweisen, die in diesem Themengebiet eine Rolle spielen, eingegangen.

Schlüsselwörter: Größenbegriff, Größenvorstellungen, Messen, Messkompetenz, Schätzen, Näherungswerte

1 Größen – eine Begriffsklärung

Nach einer ersten Annäherung soll der Größenbegriff mathematisch geklärt werden.

1.1 Zum Größenbegriff: eine erste Annäherung

Häufig ist zu hören „Größen sind benannte Zahlen“. Dann ist doch leicht zu entscheiden, bei welcher der folgenden Angaben (vgl. Krauter o. J.) es sich um Größen handelt – oder?

- 17 €
- 3m
- 13:15 Uhr
- 3° Kelvin
- 178 ü NN
- +17
- 3,1415....
- 6 h 27 min
- 27 l
- 2/3
- 15° C

Vergegenwärtigen wir uns, welche Anforderungen wir an Größen stellen, wozu sie genutzt werden sollen, was mit ihnen gemacht werden kann:

Größen sollen es ermöglichen, quantitative Eigenschaften von Objekten und Vorgängen zu erfassen (messen). Vor dem Hintergrund dieser Forderung ist die obige „Erklärung“ zu überdenken.
Mit Kindern hat es sich bewährt, den Größenbegriff auf die folgende Weise einzuführen: Wenn man eine Tafel Schokolade (Abb. 1) betrachtet, so hat sie verschiedene Eigenschaften:


Abb. 1 Eine Tafel Schokolade

- Sie ist braun.
- Sie schmeckt süß.
- Sie wird in der Sonne weich.
- Sie ist an der langen Kante 16 cm lang.
- Sie wiegt 100 Gramm

Alle Eigenschaften von Gegenständen, die ich in Zahlen angeben kann, sind Größen. (vgl. Franke & Ruwisch 2010, S. 179 f.) Darüber hinaus müssen Größen aber auch noch andere Bedingungen erfüllen:

- Größen (einer Art) sollen verglichen, addiert, subtrahiert und vervielfacht werden können.

Vor diesem Hintergrund sind Gleichungen der folgenden Art 1l = 1kg, die man leider vielfach in Klassenzimmern auf Merkplakaten lesen kann, schlichtweg falsch, zumal lediglich ein Liter Wasser bei einer Temperatur von 4°C eine Masse von 1 kg hat.
Zusammenfassend lässt sich an dieser Stelle schon einmal festhalten, dass es sich nicht bei allen obigen Angaben um Größen handelt, dass also offensichtlich nicht alle „benannten Zahlen“ Größen sind.
Die Angabe 13:15 Uhr bezeichnet beispielsweise einen Zeitpunkt. 13:15 Uhr addiert mit 22:30 Uhr ist eine Operation, die keinen Sinn macht. Die Zeitspanne zwischen 13:15 Uhr und 22:30 Uhr ist aber sehr wohl eine Größe.
Aus mathematischer Sicht besteht zwischen dem Größen- und dem Zahlbegriff eine Strukturgleichheit. Strehl (1979) zeigt, dass Zahlen und Größen strukturell gesehen das Gleiche sind. Insofern sind beispielsweise auch die Angaben „+17“ und „3,1415“ Größen.

1.2 Mathematische Begriffsklärung

Mit Blick auf das Unterrichtsfach, das wir vertreten, wenden wir uns zunächst der mathematischen Klärung des Begriffs zu, bevor wir über Konsequenzen und Schwerpunkte für den Unterricht nachdenken.

Größenbereiche sind aus mathematischer Sicht eine algebraische Struktur. (vgl. Kirsch 1987, S. 50 ff.)

Unter einem **Größenbereich** versteht man eine Menge **G** von Elementen A, B, C ... mit folgenden Eigenschaften:

In **G** ist eine Addition (+) definiert (zwei Elementen A und B aus **G** wird ein eindeutig bestimmtes Element aus G – ihre Summe A+B zugeordnet) und eine Relation <, die es ermöglicht, zwei Elemente aus **G** zu vergleichen, erklärt. Für alle A, B, C aus **G** gelten folgende Eigenschaften:

- $(A+B)+C= A + (B + C)$
- $A + B = B + A$
- Stets gilt entweder $A<B$ oder $A = B$ oder $B < A$
- Die Gleichung $A + X = B$ ist genau dann lösbar, wenn $A < B$

Schauen wir uns die Definition an, so erkennen wir uns bekannte Eigenschaften, die auch bei den natürlichen Zahlen gelten, aber es existiert z.B. keine „Nullgröße“, kein neutrales Element der Addition. Es kann keine Multiplikation, aber eine Vervielfachung definiert werden.

Definition:

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ versteht man unter dem ***n-fachen*** der Größe A also die Größe $nA = A + A + A+ \ldots + A$ (n Summanden).

Auch hier gelten bekannte Gesetze. Für alle $m, n \in \mathbf{N}$ und alle A, B aus **G** gilt:

- $(m+n)A = mA + nA$
- $(n \cdot m)A = n(mA) = m(nA)$
- $n(A+B) = nA + nB$
- $mA < nA$ gdw $m < n$
- $nA < nB$ gdw $A < B$

Mit Blick auf die weitere Schulzeit (Bruchrechnung) sind insbesondere Größenbereiche mit Teilbarkeitseigenschaft interessant.

G hat die Teilbarkeitseigenschaft, wenn für alle $n \in \mathbf{N}$ und alle $A \in \mathbf{G}$ stets genau eine Größe $X \in \mathbf{G}$ existiert, so dass $nX = A$.

Unter $\frac{1}{n}A$ (dem n-ten Teil von A) versteht man die Größe X mit

$nX = A$

In einem Größenbereich mit Teilbarkeitseigenschaft, können Größen "gerecht verteilt" werden.
Jetzt kann (in Größenbereichen mit Teilbarkeitseigenschaft) auch das $\frac{m}{n}$- fache einer Größe definiert werden.
Zur Vervielfachung von Größen gibt es zwei Umkehrungen, die zu den beiden Grundvorstellungen der Division führen:

- Wie viele $\frac{1}{4}$ Liter Gläser kann man mit 2 Liter Saft füllen?
  $2\,\text{l} : \frac{1}{4}\,\text{l} = 8$
- 2 Liter Saft sollen an 8 Personen verteilt werden. Wie viel Saft erhält jede Person? $2\,\text{l} : 8 = \frac{1}{4}\,\text{l}$

Multiplikation und Division von Größen eines Größenbereichs **G** können innerhalb eines Größenbereichs nicht erklärt werden. Wenn eine Multiplikation z.B. geometrisch oder physikalisch sinnvoll ist, führt sie aus dem jeweiligen Größenbereich heraus, sind die Ergebnisse Elemente eines "neuen" Größenbereiches.
All das sollte eine Lehrperson u. E. (mindestens) aus fachlicher Sicht über Größen wissen.
Mit Blick auf die Schule ist der Größenbegriff wie der Begriff der natürlichen Zahl das Ergebnis eines Abstraktionsprozesses. Ausgehend von konkreten Repräsentanten für Größen wird über eine Äquivalenzklassenbildung der abstrakte Größenbegriff gewonnen. Das bedeutet, dass Schülerinnen und Schülerinnen im Umgang mit unterschiedlichen Repräsentanten erleben müssen, dass sie trotz unterschiedlicher Erscheinung gleiche Eigenschaften aufweisen. Zum Beispiel zwei Objekte unterschiedlicher Größe gleich schwer sein können, also Repräsentanten des gleichen Gewichts sind. Analog sollte man auch die Äquivalenzrelation mithilfe von Repräsentanten in den anderen Größenbereichen erlebbar machen.
Aber was ergibt sich aus dieser Forderung für die Schule, für die Arbeit mit Größen im Mathematikunterricht?

2 Größen und Messen im Unterricht

Im Unterricht wird mit Repräsentanten von Größen gearbeitet. Die Kinder erleben aber, dass unterschiedliche Objekte ein- und dieselbe Größe repräsentieren. So kann jedes Kind individuelle Stützpunktvorstellungen ausbilden.

2.1 Anforderungen der Bildungsstandards

In den Bildungsstandards sind zwei Kompetenzschwerpunkte formuliert, über die Schülerinnen und Schüler am Ende ihrer Grundschulzeit verfügen sollen. Allgemein sollen sie

- **Größenvorstellungen besitzen**

Dazu gehört, dass die Schülerinnen und Schüler Standardeinheiten und Repräsentanten für Standardeinheiten kennen; Größen vergleichen, messen und schätzen, unterschiedliche Schreibweisen (umwandeln), einfache Bruchzahlen im Zusammenhang mit Größen kennen und verstehen können.

- **Und mit Größen in Sachsituationen umgehen können**

Dazu gehört, dass die Schülerinnen und Schüler mit geeigneten Einheiten und unterschiedlichen Messinstrumenten sachgerecht messen, Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt zum Lösen von Sachproblemen heranziehen; angemessen mit Näherungswerten umgehen und Größen begründet schätzen können.

Wenden wir uns dem ersten Schwerpunkt genauer zu.

2.1 Größenvorstellungen entwickeln

Was bedeutet das? Warum sind Größenvorstellungen wichtig? Entwickeln sich Größenvorstellungen nicht beim Messen und Rechnen mit Größen von selbst?

2.2.1 *Begriffe und Probleme*

Zunächst einige Beispiele, die Probleme verdeutlichen. Im Unterricht erhalten wir von Kindern z. B. Antworten wie in Abbildung 2.

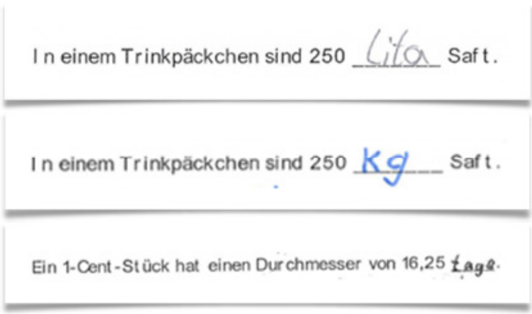


Abb. 2 Kinderantworten

Aber auch in Zeitungen müssen wir immer mal wieder Meldungen der folgenden Art lesen:

Die Deutschen essen 18 Millionen Eier im Jahr,
das sind 226 Stück pro Kopf (Berliner Zeitung 24.07.98).

Sollten bei solchen Angaben nicht bei jedem die Alarmglocken schrillen?

Größenvorstellungen sind notwendig, um Zahlenangaben, die uns täglich überfluten, aber auch Ergebnisse von Sachaufgaben kritisch zu hinterfragen und zu prüfen. Dazu sind Stützpunktvorstellungen von ausgewählten Größen notwendig, auf die jederzeit zurückgegriffen werden kann.

Unter Stützpunktvorstellungen verstehen wir, dass die Kinder über (individuell durchaus unterschiedliche) Beispiele für Repräsentanten von Größen (nicht unbedingt Einheitsgrößen) verfügen, die ihnen erlauben, Größen zu schätzen und Größenangaben kritisch zu hinterfragen.

Bezogen auf den Mathematikunterricht bedeutet das, dass Kinder beim Messen und Schätzen in jedem Größenbereich zu selbst ausgewählten Repräsentanten individuelle Festwerte ermitteln, diese beim Schätzen, Vermuten und auch Kontrollieren von Ergebnissen nutzen und sich einprägen. Sukzessive sollten sich daraus Stützpunktvorstellungen als ein Instrumentarium entwickeln, welches beim Ermitteln von Näherungswerten (Schätzwerte) bedeutsam und notwendig ist. Stützpunktvorstellungen können nur im Zusammenhang mit dem Messen entstehen, wenn nicht beim Raten stehen geblieben werden soll. Nicht in jedem Fall ist eine unmittelbare Größenerfahrung möglich. Es gibt viele Größen, die man sich nur mittelbar „vorstellen“ kann. Besonders bei Gewichten[1] wird das deutlich. Wie können sich Kinder das Gewicht 1 t vorstellen? Dies geht nur mittelbar, indem z.B. die Frage gestellt und beantwortet wird, wie viele Kinder auf eine Waage gestellt werden müssten, um einen Kleinwagen von 1t Gewicht aufzuwiegen. Reichen da die Kinder unserer Klasse? Müssen wir die Lehrerin noch dazu nehmen, oder Kinder aus der Parallelklasse?

---

[1] Aus physikalischer Sicht wäre der Begriff „Masse“ an dieser Stelle natürlich korrekt. In der Alltagssprache wird aber mit dem Begriff „Gewicht“ das gemeint, was der Physiker unter Masse versteht. Und da wir auch in der Grundschule von Gewicht sprechen, nutzen wir den Begriff auch hier im Beitrag.

Die Entwicklung von Stützpunktwissen muss natürlich an Aufgaben erfolgen, deren Inhalte den Kindern für einen Schätzvorgang sinnvoll erscheinen und motivierend sind.

2.2.2 *Zum Zusammenhang von Größen und Zahlvorstellungen*

Wie oben beschrieben gibt es auf mathematischer Ebene einen engen Zusammenhang zwischen dem Zahl- und dem Größenbegriff. Aber auch im menschlichen Denken sind Zahlen und Größen eng miteinander verbunden. So werden Zahlen häufig in Form von Längenbeziehungen repräsentiert. Das wird auch durch unsere Sprache deutlich: Die 18 ist *näher* an der 20 als die 15. In diesem Zusammenhang stellen wir uns die 15 und die 20 nicht als Gegenstände, sondern als Punkte auf einem mentalen Zahlenstrahl vor und können dann Abstände betrachten. „Es sind also geometrische Längenbeziehungen, die unser Denken bestimmen und die Zahlen als Geisteshaltung ermöglichen." (Lorenz 2011, S. 5)

Wir machen in unserem Denken also aus Zahlbeziehungen Längenbeziehungen, um sie unserer Vorstellung zugänglich zu machen.

2.2.3 *Aufgabenformate zur Entwicklung von Größen-vorstellungen*

Größen- und Zahlvorstellungen sind eng miteinander verbunden. Insofern kann man festhalten, dass sie sich auf die gleiche Weise ausbilden. In der Didaktik wird die Auffassung vertreten, dass Vorstellungen vor allem verinnerlichte Handlungen sind. Es gibt zahlreiche Vorschläge, wie zum Beispiel Schülerinnen und Schüler mit schwach ausgeprägten Zahlvorstellungen dabei unterstützt werden können, diese Vorstellungen aufzubauen. Alle diese Vorschläge sehen das Handeln als wesentliches Instrument. (vgl. z.B. Schipper 2009; Wartha & Schulz 2012) Auch für den Auf- und Ausbau von Größenvorstellungen sind aus unserer Sicht die Ideen besonders wertvoll, die das „Tun" und das darüber sprechen ins Zentrum stellen.

Kann das stimmen? Fehler finden und korrigieren.

- Der größte Schüler unserer Klasse ist 152 cm groß und wiegt 360 g.
- Peter ist 146 dm groß und wiegt 38 kg.
- Ulrike hat ein Brüderchen bekommen, das war bei der Geburt 52 mm groß und 3450 kg schwer.
- Und nun erfinden alle "Kann das stimmen - Geschichten".

Stationen zum Schätzen

- Das **Gewicht** von Objekten, die die Kinder kennen (sichtbar zum Anfassen) schätzen und zur Kontrolle wiegen.
- **Verpackte Gegenstände -** welche sind gleich schwer? (Hier wird der häufig anzutreffenden Vorstellung, dass größere Gegenstände auch die schwereren sind, entgegengewirkt.)
- **Was ist schwerer**? Ein Apfel oder das Mathebuch? Ein 1 Ct-Stück oder ein A4-Blatt?

In diesem Zusammenhang wird deutlich, wie schwierig es ist, Gewichte mithilfe der „Handwaage“ zu schätzen, denn gefühlt wird der Druck und der ist abhängig von der Auflagefläche. So kann es dazu kommen, dass ein Blatt „nichts“ wiegt, aber zumindest als viel leichter empfunden wird als ein 1Ct-Stück, obwohl es umgekehrt ist.

Vorstellungen in unterschiedlichen Größenbereichen miteinander verknüpfen

- Wie lange benötige ich zu Fuß, mit dem Fahrrad, um eine Strecke von 1 km zurückzulegen?
- Wie lange dauert es, meinen Namen zu schreiben, bis 20 zu zählen, einmal um den Schulhof zu laufen (zu gehen), eine Seite in meinem Lieblingsbuch zu lesen?

Unser Stützpunktwissen halten wir dann in einer Ausstellung fest.

Eng im Zusammenhang mit den Stützpunktvorstellungen steht das Schätzen. Schätzen erfordert **Erfahrungen im Umgang mit Größen und Erfahrungen im Messen**, sonst wird es **Raten.**

Schätzen bedeutet, die Größe (z.B. das Gewicht) eines Gegenstandes durch Vergleich mit bekannten Größen annähernd zu bestimmen. Z.B.: mein Fahrrad ist schwerer als meine Schultasche (5 kg), aber leichter als ich (25 kg), also kann ein Kinderfahrrad nicht 100 kg wiegen. Größenvorstellungen können also nur im Zusammenhang mit dem Messen ausgebildet werden - was bedeutet Messen?

3 Messen

3.1 Zum Begriff des Messens

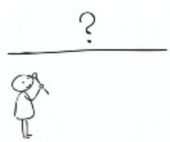
Die Beschaffung von Daten aus der Realität kann ganz unterschiedlich realisiert werden. Dabei ist das Messen nur eine Möglichkeit, diese Daten zu erhalten. Beim Messen wird mit Hilfe von Messinstrumenten ein direkter Vergleich mit einer festgelegten Einheit durchgeführt. Messungen sind durch diesen Messprozess naturgemäß einer Ungenauigkeit unterworfen. So ist beispielsweise die kleinste Maßeinheit auf dem Messbecher die Einheit Milliliter und damit wird der Wert beim Ablesen praktisch in diese Größeneinheit gerundet.

Kurz gesagt bedeutet Messen festzustellen, wie oft ein Repräsentant einer als Einheit dienenden Größe in einem Repräsentanten einer anderen Größe gleicher Art enthalten ist.

Eine weitere Möglichkeit, Größen zu erhalten, stellt das Schätzen dar. Beim Schätzen findet – anders als beim Raten – ein gedanklicher Vergleich mit bekannten Repräsentanten von Größen statt. Diese bekannten Repräsentanten können in Abhängigkeit von den jeweiligen Stützpunktvorstellungen der Inhalt einer Milchpackung oder die Breite einer Tür sein. Insofern ist das Schätzen eine Art von gedanklichem Messen. Legt man beim Schätzen zusätzlich ein mögliches Maximum und Minimum des Schätzwertes fest, so wird an dieser Stelle vom Abschätzen gesprochen: „Der Schrank ist höher als die Tür, aber nicht so hoch wie das Zimmer.“

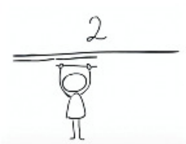
Das Messen umfasst in allen Größenbereichen drei zentrale Kernideen (Tab. 1; vgl. Ruwisch 2015, S. 32), die wiederum als Prozess zu verstehen sind und im Weiteren näher erläutert werden.

Auswählen einer passenden Einheit



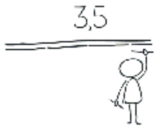
Gilt es ein Objekt zu vermessen, muss – abhängig vom Objekt – das passende Messgerät mit der dazu passenden Einheit gewählt werden. Die Länge des Klassenraums wird man also eher mit dem Tafellineal und weniger mit dem Geodreieck ausmessen. Und als Einheit bieten sich Meter und Zentimeter statt Kilometer und (Hekto-)Meter oder mm an. Das Gewicht des Schulranzens wird eher mit der Personenwaage als mit der Briefwaage ermittelt.

Das mehrfache und sachgerechte Verwenden dieser Einheit



Länge, Fassungsvermögen und Zeit eines Repräsentanten lassen sich über die mehrfache Verwendung eines Messobjekts ermitteln. Bezogen auf das obige Beispiel bedeutet dies, dass das Tafellineal am besten an einer Seite des Klassenraumes angelegt wird, damit auch wirklich die kürzeste Strecke ausgemessen wird. Das Tafellineal muss jeweils mit seinem einen Ende genau an dem Punkt angelegt werden, an dem das vorherige Messen endete. Es muss dann mitgezählt werden, wie oft das Lineal angelegt wurde.

Das systematische Zerlegen in Untereinheiten



Wird das auszumessende Objekt nicht hinreichend durch die auszumessende Einheit erfasst, so muss diese untergliedert werden. Stellt man fest, dass nach mehrmaligem Aneinanderlegen das Tafellineal nicht ausreicht, um die Länge des Klassenraums auszumessen, weil eine kleine Lücke bleibt, muss noch eine kleinere Einheit dazu genommen werden. Passen würde die 10er-Stange der Cuisenairestäbe oder die 10er-Stange des Dienes Materials.

Tab. 1 Kernideen des Messens

3.2 Messen in unterschiedlichen Größenbereichen

Das oben beschriebene Prinzip des Messens wird in der Literatur nicht ohne Grund häufig am Beispiel des Größenbereiches Längen beschrieben. Denn gerade bei Längen ist dieses Prinzip so schön anschaulich. Aber was bedeutet Messen eigentlich in den anderen Größenbereichen?

Im Größenbereich **Zeitspannen** können nur Vorgänge gemessen werden, die gerade in dem Moment, in dem gemessen werden soll, ablaufen. Ein schönes Beispiel ist der Hundertmeterlauf. Mit dem Startschuss startet man die Stoppuhr (analog und nicht digital). Mit jeder Sekunde streicht der Zeiger über einen Bereich auf der Skala. Die kann sich wie das nacheinander Umdrehen von lauter kleinen Sanduhren mit einer Durchlaufzeit von einer Sekunde vorstellen. Kommt der Läufer ins Ziel, bevor die letzte Sanduhr durchgelaufen ist, hätte vor Ende des Laufes die nächst kleinere Sanduhr/Einheit gewählt werden müssen.

Der Messbegriff lässt sich für die Größe **Gewicht** schön an einer Balkenwaage erläutern. Das zu wiegende Objekt liegt auf der einen Seite und es werden so lange gleich schwere Wägestücke auf die andere Seite gestellt, bis ein Gleichgewicht herrscht. Kommt dies nicht zu Stande, muss ein Repräsentant der „Einheitsgröße" verkleinert werden.

Im Größenbereich **Volumen** lässt sich das Prinzip des Messens mit Messbechern am besten veranschaulichen. Ein Eimer soll mit Wasser gefüllt werden. Man füllt nacheinander jeweils 1 Liter mit dem Messbecher in den Eimer. Ist der Eimer am Ende noch nicht ganz voll, würde aber überlaufen, wenn man einen weiteren Liter hinzugießt, dann wählt man einen kleineren Messbecher, also die nächstkleinere

Einheit, was in diesem Fall nicht automatisch zur dezimalen Teilung führen muss.

Nicht in allen Größenbereichen können Messvorgänge so anschaulich beschrieben werden. So muss man zum Beispiel im Größenbereich **Geldwerte** darauf achten, dass man sich hier zunächst auf den Vergleich von verschiedenen Kollektionen von Scheinen und Münzen konzentriert. Die Kinder sollen in die Lage versetzt werden, zwischen Anzahl von Scheinen und Münzen und dem nominellen Wert zu unterscheiden.

Besondere Schwierigkeiten entstehen dann, wenn man die Relation wertgleich an konkreten Repräsentanten, die man käuflichen erwerben kann, festmachen möchte. So kann die Frage gestellt werden, warum 1 kg Bananen weniger wert ist ein 1 kg Äpfel. In der Auseinandersetzung mit dem Wertbegriff spielen noch viele weitere politische und ökonomischen Aspekte eine Rolle, die nicht alle im Mathematikunterricht thematisiert werden können.

Ähnlich schwierig ist das Messen von **Flächeninhalten**, da nur ausgewählte Flächen explizit mit Meterquadraten oder Ähnlichem ausgelegt/ausgemessen werden können. In der Regel wird im weiteren Verlauf des Unterrichts Flächeninhalt immer indirekt gemessen, indem z. B. bei Rechtecken die beiden Seitenlängen gemessen und der Flächeninhalt berechnet wird.

3.3 Zum Aufbau von Messkompetenz

Um Messkompetenzen zu entwickeln, brauchen Schülerinnen und Schüler ausreichend Lerngelegenheiten. So führt schon die Frage danach, welches Messinstrument man für welche Situation auswählt, zu reichhaltigen Diskussionen. Allein das Sortieren von Messgeräten aus dem Größenbereich Zeitspannen führt die Kinder unweigerlich zu der Erkenntnis, dass beispielsweise nur Sand- oder Stoppuhren dazu geeignet sind, Zeitspannen zu messen. Bei anderen Uhren muss man sich Anfangszeitunkt und Endpunkt des zu messenden Vorgangs merken und die Zeitspanne errechnen.

Nührenbörger (2002) hat Kinder Lineale zeichnen lassen, um herauszufinden, ob die Kinder in der Lage sind, die Zeichen auf der Messskala als Veranschaulichung des Messprozesses, des wiederholten Abtragens einer Einheit und ihrer Untereinheit zu verstehen. Dieser

Ansatz lässt sich auf andere Messgeräte übertragen und man stellt fest, dass Kinder ein und derselben Lerngruppe höchst unterschiedliche Erfahrungen mit verschiedenen Messinstrumenten gesammelt haben können (Abb. 3).

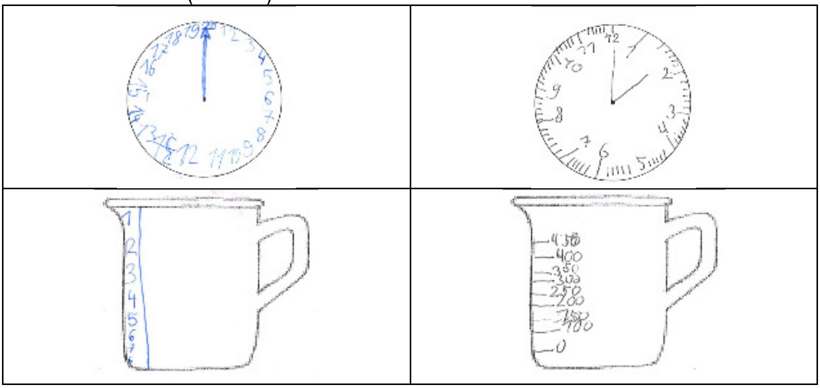


Abb. 3 Zwei Viertklässler Yaden (links) und Lukas (rechts) zeichnen Messgeräte

Aber auch die Frage, wie genau gemessen werden kann und muss, kann reichhaltig im Unterricht diskutiert werden. Warum ist es nicht sinnvoll, vielleicht auch gar nicht möglich, die Länge des Schulweges so genau zu messen? Welches Messinstrument könnte Paula genutzt haben? Dies sind nur einige Fragen/Probleme, auf die auch die Kinder bei Diskussionen um die Genauigkeit von Messergebnissen kommen können. Die Frage, wie genau Ergebnisse von Rechnungen mit Näherungswerten angegeben werden können, spielt bis zur Klasse 4 eine untergeordnete Rolle.

3.4 Auf der Suche nach historischen Maßen

Auch wenn wir der Meinung sind, dass die didaktische Stufenfolge bei der Behandlung der Größen im Mathematikunterricht der Grundschule nicht eng zu befolgen ist (vgl. 4), haben aus unserer Sicht historische und dabei dann auch körpereigene Maße ihre Berechtigung.

Denken Sie doch einmal über folgende Fragen nach:

- Warum hat ein Fußballtor die Ausmaße 2,44 m x 7,32 m und warum ist der 11 m Punkt 10,97 m vom Tor entfernt?
- Errungenschaft unseres dezimalen Maßsystems können deutlich gemacht werden. Betrachtet man das historische Längenmaß "Rute", so findet man dafür mindestens 16 unterschiedli-

che Längen (meist zwischen 3 und 5 m). Der Stab beim Stabhochsprung ist eine “16-Fuß-Rute” lang.

- Der Hambacher Forst war ursprünglich 4.000 Hektar, jetzt ist er noch 200 Hektar groß – wie kann ich mir das vorstellen?

Finden wir in unserer Umgebung Beispiele für „alte“ ungewöhnliche Maßeinheiten? Was bedeuten sie?

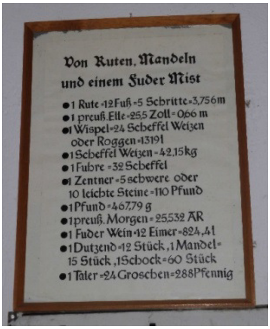


Abb. 4 In der Wassermühle Worin und Festung auf dem Petersberg in Erfurt entdeckt

4 Bemerkungen zur didaktischen Stufenfolge

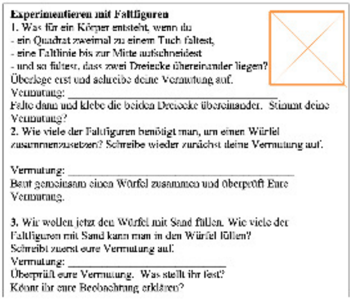
Kinder kommen in ihrer alltäglichen Umwelt ständig mit Größen in Berührung und bringen damit Vorstellungen zu Größen mit. Dass sich Größenvorstellungen von selbst entwickeln, ist jedoch ein Irrtum. Auch wenn Kinder mit verschiedenen Größen in Berührung kommen, bedeutet das nicht, dass sie über gesicherte Vorstellungen zu Repräsentanten von Größen verfügen, die sie sicher z.B. zum Schätzen einsetzen können. Zum (Vor)Wissen von Kindern zu Größen gibt es deutlich weniger Untersuchungen als zum arithmetischen Wissen von Schulanfängern. In diesen wenigen Untersuchungen (vgl. z. B. Lafrenz & Eichler 2004) wird deutlich, wie unterschiedlich vorhandenes Wissen ist und dass es nicht wenige Kinder gibt, denen elementare Erfahrungen zum Umgang mit Größen fehlen, denen es ermöglicht werden muss, derartige Erfahrungen im Unterricht zu erwerben. Das häufig beim Umgang mit Längen festzustellende Wissen und die anzutreffenden Erfahrungen können nicht auf andere Größenbereiche übertragen werden.

Wichtig ist, wie bei allen Inhalten des Mathematikunterrichts, dass Wissen und Vorstellungen der Kinder erkundet und im Unterricht daran angeknüpft wird.

Die didaktische Stufenfolge (vgl. Radatz & Schipper, 1983) ist nicht in dem Sinne umzusetzen, dass eine Stufe nach der anderen absolviert wird, der Unterricht ist nicht streng daran auszurichten, vielmehr ist das (Vor)Wissen der Kinder zu beachten, sind Unterschiede/Spezifika der einzelnen Größenbereiche zu berücksichtigen. Trotzdem ergeben sich Anregungen für Kinder, die keine oder wenige Erfahrungen im Umgang mit Größen außerhalb des Größenbereiches Längen haben (auch Invarianz, z.B. bei Massen - Verformung von Knetkugeln).
Auch historische und körpereigene Maße haben aus unserer Sicht ihre Berechtigung, indem z.B. der Frage nachgegangen wird: Wie wurde im alten Ägypten, im Mittelalter usw. gemessen? Und körpereigene Maße können bei der Ausbildung von Stützpunktvorstellungen eine wichtige Rolle spielen, z.B.: Daumenbreite: 1cm; Handspanne: 10 cm; Armspanne: ungefähr meine Körpergröße.

5 Experimentieren als typische Arbeitsweise im Inhaltsbereich „Größen und Messen"

Das Beispiel in Abbildung 5 verbindet die Leitideen Raum & Form und Größen & Messen miteinander.



Experimentieren mit Faltfiguren

1. Was für ein Körper entsteht, wenn du
- ein Quadrat zweimal zu einem Tuch faltest,
- eine Faltlinie bis zur Mitte aufschneidest
- und so faltest, dass zwei Dreiecke übereinander liegen?

Überlege erst und schreibe deine Vermutung auf.
Vermutung: ____________________
Falte dann und klebe die beiden Dreiecke übereinander. Stimmt deine Vermutung?

2. Wie viele der Faltfiguren benötigt man, um einen Würfel zusammenzusetzen? Schreibe wieder zunächst deine Vermutung auf.

Vermutung: ____________________
Baut gemeinsam einen Würfel zusammen und überprüft Eure Vermutung.

3. Wir wollen jetzt den Würfel mit Sand füllen. Wie viele der Faltfiguren mit Sand kann man in den Würfel füllen?
Schreibt zuerst eure Vermutung auf.
Vermutung: ____________________
Überprüft eure Vermutung. Was stellt ihr fest?
Könnt ihr eure Beobachtung erklären?

Abb. 5 Ein Experiment zum Rauminhalt

Hier noch Bemerkungen zu Beobachtungen, die während der Bearbeitung dieses Auftrags in 4. Klassen gemacht wurden. Es wurde häufig geschätzt, dass 8 (6) Faltfiguren notwendig sind, um einen Würfel herzustellen (8 Ecken, 6 Flächen). Die größere Herausforderung war, zu schätzen, wie viele Faltfiguren voll Sand in den Würfel passen. Erwartungsgemäß wurden meist 4 gefüllte Faltfiguren geschätzt. Auch bei Erwachsenen war die Überraschung groß als festgestellt wurde, dass der Sand aus 6 gefüllten Faltfiguren in den Würfel passt. Aber wir haben auch Kinder angetroffen, die folgende Einsicht formulierten: "Innen ist noch ein Körper, der muss vier Seiten(flächen) haben und jede Seite ist so groß wie die "Grundfläche" der Faltfiguren – und da passt mehr Sand rein als in eine Faltfigur."

6 Fazit – Beitrag zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen

Mit dem letzten Beispiel ist bereits angedeutet, zur Entwicklung welcher wichtigen mathematischen Kompetenzen im Themengebiet Größen und Messen ein Beitrag geleistet werden kann. Es kann nicht häufig genug betont werden, dass der Schwerpunkt in diesem Themengebiet auf der Entwicklung von Größenvorstellungen, dem aktiven Umgang mit Größen (und natürlich auf dem Lösen (echter) Anwendungsaufgaben) liegen muss, wenn Kinder kompetent im Umgang mit Größen werden sollen. Das schließt den Aufbau eines gesicherten Größenbegriffs ein; Kinder müssen wissen, was man unter einer Länge, einem Gewicht, einem Volumen, einem Flächeninhalt versteht. Bei der Begriffsbildung ist der Abstraktionsprozess sorgfältig zu gestalten. Gemeinsamkeiten und vor allem Unterschiede zwischen den einzelnen Größenbereichen sind zu beachten und den Kindern nachvollziehbar zu verdeutlichen.

Im Zusammenhang mit dem Messen ist darauf zu achten, dass die Kinder genügend Gelegenheiten erhalten, Stützpunktvorstellungen in allen Größenbereichen zu erwerben. Diese sind wesentliche Voraussetzungen für das Schätzen und kritischem Hinterfragen von Zahlenangaben, die einem tagtäglich begegnen.

Literatur

Eichler, K.P., Grassmann, M., Mirwald, E., & Nitsch, B. (2014). Mathematikunterricht (3. Aufl). *Kompetent im Unterricht der Grundschule, Bd. 5.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengeheren.

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens* (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Grassmann, M., Klunter, M., Köhler, E., Mirwald, E., & Raudies, M. (2005). *Kinder wissen viel – auch über die Größe Geld?- Teil 1. Potsdamer Studien zur Grundschulforschung, Heft 32,* Potsdam: Universitätsverlag.

Kirsch, A. (1987). *Mathematik wirklich verstehen.* Köln: Aulis Verlag Deubner & CO KG.

Krauter, S. *Größen im Mathematikunterricht*. Abgerufen von https://www.ph-ludwigsburg.de/fileadmin/subsites/2e-imix-t-01/user_files/personal/krauter/kurse/WS_05_06/Pruefungsseminar/Groessen.pdf

Lafrenz, H., & Eichler, K.P. (2004). Vorerfahrungen von Schulanfängern zum Vergleichen und Messen von Längen und Flächeninhalten. *Grundschulunterricht*, Heft 7/8, 42–47.

Lorenz, J. H. (2011). Länge – Größe und Denkformat. *Grundschule Mathematik*, Heft 5, 4–6.

Mirwald, E., & Nitsch, B. (2013). Experimentelles – ein interessanter Zugang zum Thema ‚Größen und Messen'. *Grundschule*, Heft 2, 15–19.

Nührenbörger, M. (2002). *Denk- und Lernwege von Kindern im Kontext von Längen. Theoretische Grundlegung und Fallstudien kindlicher Längenkonzepte im Laufe des 2. Schuljahres*. Hildesheim: Franzbecker.

Radatz, H., & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Ruwisch, S. (2015). Messen verstehen. Einsichten in die Kernideen des Messens ermöglichen. *Grundschule Mathematik*, Heft 47, 32–35.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Strehl, R. (1979). *Grundprobleme des Sachrechnens*. Freiburg: Herder.

Walter, G., Heuvel – Panhuizen, van den M., Granzer, D., & Köller, O. (Hrsg.) (2012). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (6. Auflage). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Wartha, S., & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen. Grundvorstellungen aufbauen - Zahlen und Rechnen bis 100*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Prof. (i.R.) Dr. Marianne Grassmann
marianne.grassmann@staff.hu-berlin.de

Dr. Roland Rink
TU Braunschweig
Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik
Bienroder Weg 97
38106 Braunschweig
r.rink@tu-braunschweig.de

Geometrische Abbildungen in der Vorstellung: Relevanz und (individuelle) Strategien von Grundschulkindern

von Simone Reinhold

Ein Abriss zu Aspekten von Raumvorstellung geht im Beitrag mit Ausführungen zur Relevanz räumlich-visueller Fähigkeiten einher und nimmt insbesondere das mentale Drehen, Zerlegen oder Zusammenfügen in den Blick. Ausgehend von der Frage nach „geometrischen Strategien" zur Bewältigung herausfordernder geometrischer Anforderungen wird zudem Einblick in Studien mit Kindern zum Einsatz von individuellen Strategien bei der Bearbeitung von Aufgaben zum Spiegeln und Drehen von Würfelbauwerken gegeben.

Schlüsselwörter: Raumvorstellung, Strategien, Vor- und Grundschulkinder, Drehen, Spiegeln

1 Räumlich-visuelle Fähigkeiten

Die Diskussion um unterschiedliche Modelle zur Differenzierung verschiedener Bereiche der Raumvorstellung nimmt häufig faktorenanalytische Modelle zum Ausgangspunkt, die eine psychometrische Perspektive einnehmen (1.1). Welche Relevanz der Raumvorstellung zukommt, wird auch deutlich, wenn wir den Unterricht in der Grundschule betrachten (1.2). Im Hinblick auf die Anforderungen der Grundschulgeometrie sind allerdings Erweiterungen der psychometrischen Raumvorstellungskonzepte notwendig, die stärker auf die beim Individuum ablaufenden (kognitiven) Prozesse ausgerichtet sind (1.3).

1.1 Psychometrische Annäherungen

Ergebnisse aus Arbeiten von Thurstone (1938; 1950), die Lohman (1979) in einer Re-Analyse weitreichend bestätigte, werden in der mathematikdidaktischen Literatur intensiv rezipiert und diskutiert (Maier, 1999; Franke & Reinhold, 2016). Thurstone (1950) identifiziert insgesamt sieben Teilbereiche des räumlich-visuellen Denkens. Seine Differenzierung räumlicher Fähigkeiten lässt erkennen, dass mit den Bereichen P, C_1, C_2 und „visual memory" eher die visuelle Wahrnehmung angesprochen wird. Die ebenfalls unter räumlich-visuellen Fähigkeiten subsummierten Bereiche *Räumliche Beziehungen* (S_1, „spatial relations"), *Räumliche Veranschaulichung* (S_2, „visualization“) und *Räumliche Orientierung* (S3, „spatial orientation“) berühren hingegen stärker die Fähigkeit zur Vorstellung im Raum.

So beschreibt Thurstone (1950, S. 518) mit S1 („spatial relations”) die „ability to recognize the identity of an object when it is seen from different angles”. Der innere Zusammenhang, d. h. die räumlichen Beziehungen von Teilen eines räumlichen Arrangements zu anderen Teilen oder zur Gesamtkonfiguration bleiben dabei erhalten. Der Bereich S2 („visualization“) spricht die Vorstellung einer Dynamik *innerhalb* einer Konfiguration an („movement within the configuration“; Thurstone, 1950, S. 2). Sofern die Versuchsperson Teil der gegebenen Situation ist und sich mental oder real im Raum zurechtfinden muss, ist der von Thurstone als S3 identifizierte Bereich „spatial orientation“ angesprochen, der auch das Hineinversetzen in andere Perspektiven umfasst (Franke & Reinhold, 2016, S. 61ff.).

1.2 Überlegungen zur Relevanz von Raumvorstellung

1.2.1 *Grundlegende Aspekte und fächerübergreifende Sicht*

Raumvorstellung wird bereits von Thurstone (1938) als elementarer Bestandteil menschlicher Intelligenz angesehen (vgl. Reinhold, 2007, S. 63ff). Vor diesem Hintergrund und angesichts der umfassenden Bedeutung von Raumvorstellung für unser tägliches Leben (Maier, 1999, S. 147ff) gilt die Ausbildung von Raumvorstellung heute als übergreifendes Ziel für die Arbeit mit Kindern im Grundschulalter. So müssen im Zuge des Schriftspracherwerbs spiegelverkehrte Buchstaben diskriminiert und in Korrespondenz mit Phonemen gebracht werden. Schwierigkeiten beim Schriftspracherwerb werden auch in Verbindung mit schwachen Leistungen beim mentalen Rotieren gebracht (Rüsseler et al., 2005). Die Erschließung von „Räumen, Naturgrundlagen und Lebenssituationen“ im Sachunterricht (GDSU, 2013) erfordert ebenfalls ein hohes Maß an Raumvorstellung und erwartet beispielsweise, dass Kinder eine einfache Landkarte räumlich interpretieren oder sich in der Schulumgebung zurechtfinden. Personen, die über ausgeprägte Raumvorstellung verfügen, haben zudem offenbar einen erfolgreichen Zugang zu den im Sachunterricht angesprochenen naturwissenschaftlichen Disziplinen (Wai et al., 2009).

1.2.2 *Raumvorstellung im Geometrieunterricht*

Vor allem für ältere Schüler ist empirisch belegt, dass Raumvorstellung dem Geometrieverständnis zuträglich ist (Battista, 1990). Aber auch für die Grundschule zählt die Förderung der Raumvorstellung seit geraumer Zeit zu den zentralen Lernzielen des Geometrieunterrichts (Besuden, 1973; Wollring, 2012).

Battista (2007) stellt fest, dass geometrisches Denken fast immer auch von räumlichem Denken begleitet wird und betont, dass die Begriffsbildung eng mit der Fähigkeit zusammenhängt, geometrische Eigenschaften zu analysieren und sich räumliche Beziehungen letztlich auch vorstellen zu können. So finden sich in eigenen Untersuchungen zum Verständnis geometrischer Objektbegriffe (Reinhold & Wöller, 2016; Livy et al., 2018) explizite Hinweise darauf, dass Grundschulkinder Raumvorstellung einsetzen, wenn sie selbst Repräsentanten herstellen. Verständnis für die Spezifizierung von Begriffen ergibt sich auch über die Vorstellung dreh-, achsen- oder ebenensymmetrischer Abbildungen (*zwei* Symmetrieachsen im Rechteck, aber *vier* Symmetrieachsen im Quadrat; jeweils *drei* Rotationsachsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten in Quader und Würfel, aber mehr Drehdeckabbildungen bei Rotationen des Würfels). Erfahrungen mit der Antizipation von Kongruenzabbildungen stehen zudem im Zusammenhang mit Schwierigkeiten beim Ausführen elementarer Konstruktionsaufgaben (Hartmann, 2002).

So ranken sich auch im Geometrieunterricht der Grundschule vielfältige Aktivitäten um das Ausführen bzw. Erkennen elementarer geometrischer Kongruenzabbildungen – etwa beim Arbeiten mit Bandornamenten oder in der Auseinandersetzung mit flächigen Mustern, die achsen- oder drehsymmetrische Abbildungen beinhalten (Franke & Reinhold, 2016). Einerseits zielen diese handlungsorientierten Zugänge darauf ab, die Entwicklung der Raumvorstellung zu *fördern*. Andererseits muss hier die Fähigkeit zur Raumvorstellung jeweils auch schon im Ansatz *vorliegen*.

1.2.3 *Räumlich-visuelle und mathematische Fähigkeiten*

In der aktuellen mathematikdidaktischen Diskussion steht kaum noch in Frage, dass räumlich-visuelle Fähigkeiten – sowohl in Bezug auf die *Wahrnehmung* als auch im Hinblick auf die *Vorstellung* räumlicher Begebenheiten und Veränderungen – eine zentrale Rolle für den Erwerb früher mathematischer Fähigkeiten spielen (vgl. Grüßing, 2012, S. 125ff; Franke & Reinhold, 2016, S. 81ff).

Zahlreiche Studien der vergangenen Jahre legen enge Zusammenhänge zwischen der *räumlichen Wahrnehmung* und mathematischen Fähigkeiten nahe – beispielsweise in Bezug auf Darstellungen zu Teil-Ganzes-Beziehungen und dem Teil-Ganzes-Verständnis von Zahlen (Beutler, 2013). Als grundlegend anzusehen ist diesbezüglich die Fähigkeit, ein Arrangement mental (und im Idealfall flexibel) strukturieren bzw. Strukturen in ein Arrangement unter Einbezug von entsprechendem Vorwissen hineindeuten zu können (Merschmeyer-Brüwer, 2001; Söbbeke, 2005). So sind die frühe Fähigkeit zur Muster- und Strukturerkennung und spätere Leistungen im Mathematikunterricht offenbar eng verbunden (Lüken, 2012). Schließlich werden auch Probleme beim Rechnenlernen immer wieder mit der Muster- und Strukturerkennung bzw. mit Defiziten im Bereich der visuellen Wahrnehmung in Verbindung gebracht (Lorenz, 1998).

Im Hinblick auf die Relevanz räumlicher *Vorstellungen* für den Erwerb mathematischer Fähigkeiten erkennen bereits Guay & McDaniel (1977), dass leistungsstärkere Grundschulkinder über besseres Raumvorstellungsvermögen verfügen als leistungsschwächere Kinder. Grüßing (2012; 2015) greift diese und zahlreiche entsprechende Studien für eine Studie mit Kindern im 4. Schuljahr auf und stellt fest, dass sich die erwarteten Zusammenhänge vor allem in Bezug auf die Fähigkeit zur mentalen Rotation sowie auf die Fähigkeit zur räumlichen Veranschaulichung (Linn & Petersen, 1985) nachweisen lassen. Zudem liegen inzwischen Befunde vor, die einen Zusammenhang zwischen konkreten (mental begleiteten) Handlungen im Raum und dem Erwerb mathematischer Kompetenz belegen. Exemplarisch verwiesen sei dazu auf Studien, die zeigen, dass frühe konstruktive Fähigkeiten entscheidenden Einfluss auf das Lernen von Mathematik haben (Verdine et al., 2014; Wolfgang et al., 2001).

Aktuelle Forschungsinteressen berühren vor diesem Hintergrund nun eher Details dieses Zusammenhangs: Warum bestehen und worin genau liegen die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen mathematischen und räumlich-visuellen Fähigkeiten? Die Bearbeitung dieser Frage setzt eine intensive Auseinandersetzung mit individuellen Prozessen bei der Bearbeitung räumlich-visueller Anforderungen voraus.

1.3 Raumvorstellung mit dem Blick auf das Individuum

Thurstone (1938, S. 8) verweist selbst darauf, dass Probanden bei gleichem Testergebnis teilweise unterschiedliche Vorgehensweisen einsetzen. So stellt sich auch aus mathematikdidaktischer Sicht die Frage nach strategischer Diversität, die mit einem speziellen Interesse an den individuellen Denkweisen einzelner Kinder verbunden ist und einen Beitrag dazu leisten kann, Geometrieunterricht letztlich auf der Basis substanzieller diagnostischer Begleitung adaptiv zu gestalten. Analysen von Vorgehensweisen, die Kinder in der Begegnung mit herausfordernden räumlich-visuellen Anforderungen einsetzen, werden von dieser Warte aus unumgänglich – und tragen möglicherweise dazu bei, die umrissene Forschungslücke zu schließen.

1.3.1 *Die strategische Perspektive auf die Raumvorstellung*

Barrat widmete sich bereits in den 1950er Jahren der Frage, welche Strategien erwachsene Probanden beim Lösen verschiedener Raumvorstellungstests einsetzen (Barrat, 1953). Bei einem Test, in dem ebene Figuren zu rotieren waren, erläuterten einige Personen, dass sie die gesamte Figur drehen (*whole approach*). Andere Personen drehten lediglich Teile der Vorlage und prüften dann anhand von Details, ob Vorlage und Vergleichsfigur identisch waren (*part approach*). Strategien zur Räumlichen Orientierung zeichneten sich dadurch aus, dass die Probanden sich entweder in eine Situation hineinversetzen oder aber lediglich Elemente der räumlichen Situation in anderer Ausrichtung vorstellen. Auch Schultz (1991) unterscheidet individuelle Vorgehensweisen bei der Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben: Neben Vorgehensweisen, in denen ein Objekt gedanklich bewegt wird (*move object*), beschreiben einzelne Probanden eine gedankliche Bewegung der eigenen Person um ein Objekt (*move self*). Eine davon abzugrenzende analytische Strategie (*key features*) zeichnet sich Schultz zufolge dadurch aus, dass besondere Eigenschaften der gegebenen Figur gesucht werden bzw. deren Abwesenheit oder Lageveränderung konstatiert wird.

Vergleichbare Elemente von Raumvorstellungsstrategien zeigen sich (teilweise mit leicht unterschiedlicher Denomination) immer wieder in der ausgesprochen umfänglichen Forschungslandschaft zum Einsatz von Raumvorstellungsstrategien (Reinhold, 2007, S. 252-299). So gelangt auch Maresch (2014) in der Analyse einschlägiger Untersuchungen zu einer Darstellung komplementärer Begriffspaare, mit denen Strategieelemente in Dichotomien erfasst werden: *Holistische* vs. *analytische* Strategie, *Räumliches Denken* vs. *Flächiges Denken*, *Bewegungen von Objekten* vs. *Bewegungen der Probanden*, *verifizierende* vs. *falsifizierende Strategieelemente* werden dabei in Begriffspaaren von „Gegenspielern“ kontrastiert. Offen und jeweils abhängig von individuellen Präferenzen, Kompetenzen, Repertoire oder Aufgabentyp bleibt jedoch auch mit diesem Modell, inwieweit die nicht trennscharfen Aspekte jeweils ineinandergreifen (Maresch, 2014, S. 10). Zu bedenken ist zudem, dass Dimensionen des Handelns und Sprechens insbesondere für Kinder im Grundschulalter ein zentrales Element von Strategien für die Lösung von Raumvorstellungsaufgaben darstellen.

1.3.2 *Raumvorstellungsstrategien von Vor- und Grundschulkindern*

In empirischen Studien wird inzwischen vielfach untersucht, auf welche Weise (Vorschul-)Kinder oder Jugendliche ihre räumlichen Fähigkeiten artikulieren. Untersucht wird dabei beispielsweise, welche kognitiven Prozesse und Strategien Kinder einsetzen, wenn sie Zeichnungen anfertigen oder interpretieren, mit ebenen Figuren legen, mit räumlichen Objekten konstruieren oder (Würfel-)Bauwerke erfassen (Franke & Reinhold, 2016, S. 76). Gefordert ist hier, dass die Kinder Objekte bzw. ebene Figuren „mental reversibel zerlegen, vergrößern, verkleinern oder sonstwie zum Zwecke des mentalen Sehens reversibel verändern“ (Wollring, 1996, S. 476) Dementsprechend erweitert Wollring (2012, S. 9) den für die geometriedidaktische Praxis relevanten Raumvorstellungsbegriff um die Komponenten Handeln („diese Fähigkeit in Handlungen an konkretem Material äußern zu können“) und Sprache („diese Fähigkeit in Sprache fassen zu können“).

Jüngere Studien im deutschsprachigen Raum, die unmittelbar an die unter 1.3.1 dargestellten Befunde zu Strategien bei der Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben anknüpfen, gehen vielfach von der durch Schultz (1991) angeregten Differenzierung aus. So identifizieren Ruwisch und Lüthje (2013) Strategien von Vorschulkindern bei der Bearbeitung verschiedenartiger Raumvorstellungsaufgaben. Dabei stellen sie eine erhebliche Bandbreite von Strategien fest und dokumentieren, dass die Kinder mitunter auch in Abhängigkeit von der jeweiligen Aufgabe Strategieelemente miteinander kombinieren, die eigentlich als dichotom angesehen werden (z. B. Kombination analytischer Überlegungen mit eher holistischen Strategieanteilen). Studien von Niedermeyer (2014) zur räumlichen Perspektivübernahme unter Symmetriebedingungen und Plath (2014), die Raumvorstellungsstrategien von Kindern im 4. Schuljahr analysiert, setzen hier an. Von geometriedidaktischem Interesse geprägt ist auch eine Studie von Grüßing (2002), die zwischen räumlich-visuellen und verbalanalytischen Strategien unterscheidet, welche teilweise ebenfalls ineinandergreifen: Typisch für erfolgreiche Raumvorsteller sei deren Fähigkeit, räumlich-visuelle Strategien durch sprachliche Analysen und logisch-schlussfolgerndes Denken zu unterstützen.

2 Zwischenbilanz: Was sind „geometrische Strategien"?

„Mathematisches Denken" findet dort statt, wo wir mit Kindern Mathematik treiben – also dort, wo mathematische Grundtätigkeiten (Winter, 1975) angesprochen werden. „Mathematisches Denken in der Geometrie" wird im Idealfall also dort beansprucht, wo Kinder Gelegenheit haben, sich mit grundlegenden Ideen der Geometrie (Franke & Reinhold, 2016, S. 9-16) zu befassen, und in herausfordernden Situationen geometrische Phänomene explorieren, Gefundenes ordnen, sowie schließlich auch sprachlich formulieren, was entdeckt wurde. Daran lässt sich der bislang ungeklärte Begriff der „geometrischen Strategie" anknüpfen:

Strategien benötigen die Kinder, wenn es keinen vorgefertigten Lösungsweg gibt. Ein unbefriedigender Zustand, eine Fragestellung, eine unvollständige Information oder unvereinbar scheinende Positionen stellen uns vor eine Hürde, die Auslöser für eine Reihe konkreter oder gedanklicher Operationen ist (Hussy, 1998). Somit kann man unter einer Strategie zur Bearbeitung einer geometrischen Herausforderung vereinfacht ein „mehr oder weniger umfangreiches Gefüge handlungsleitender kognitiver Operationen (verstehen), das dem Individuum prinzipiell bewusst sein und von diesem kontrolliert werden kann“ (Reinhold, 2007, S. 246). „Geometrische Strategien“, die Kinder in herausfordernden Situationen entwickeln und nutzen,

- beziehen sich also vorwiegend auf Inhalte der euklidischen Geometrie,
- umfassen kognitive Strategien beim Erfassen, Vorstellen oder (gedanklichen) Verändern einer geometrischen Ausgangssituation,
- beinhalten (kognitiv geleitete) Vorgehensweisen (Bauen, Legen, Falten, Schneiden, Spannen, Zeichnen, Programmieren) beim Erstellen geometrischer Produkte und
- berücksichtigen den (handelnden) Umgang mit räumlichen Repräsentanten oder zweidimensionalen Darstellungen sowie körperlich-motorische bzw. sprachliche Artikulationen oder digitale Darstellungen im Ausdruck von Begriffsverständnis oder Raumvorstellung.

3 Individuelle Strategien beim Bauen, Drehen und Spiegeln

Eigene Studien zu Strategien bei der Bearbeitung von Aufgaben mit besonderen Herausforderungen an die Raumvorstellung rekonstruieren kognitive Prozesse im Zusammenhang mit der Erstellung von Würfelbauwerken unter besonderer Berücksichtigung von Anforderungen zur Ebenensymmetrie (3.1) bzw. zur Drehsymmetrie (3.2). Die Einbettung wesentlicher Teile dieser Studien erfolgt über das laufende Projekt *(Y)CUBES: (Young) Children Using Blocks to Express Spatial Strategies* (Reinhold et al, 2013; Reinhold, 2015a; 2017; i. V.), in dem individuelle Bauaktivitäten von Vor- und Grundschulkindern in diagnostischen Einzelinterviews analysiert werden: Welche Strategieelemente sind bei der konkreten Konstruktion dreidimensionaler Würfelbauwerke durch Vor- und Grundschulkinder zu erkennen? In welchem Zusammenhang stehen die Baustrategien zu arithmetischen Konzepten, die die Kinder beispielsweise bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Anzahlbestimmung, beim Vervielfachen bzw. multiplikativen Zerlegen, zum Vertauschen von Summanden/Faktoren zeigen?

3.1 Spiegelungen von Würfelbauwerken

Aktivitäten mit kleinen Spiegeln wie die Verdopplung einer Plättchenmenge, die vor einem aufrecht stehenden Spiegel liegt, stellen ein gängiges Aufgabenformat dar, bei dem „eine *geometrische* Verkörperung der *arithmetischen* Operation des Verdoppelns (Wittmann & Müller, 1994, S. 94, Hervorhebung i. O.) erfolgt. Ebenenspiegelungen von Würfelbauwerken an einer vertikal ausgerichteten Spiegelebene bieten vergleichbare Gelegenheiten zur Förderung des Symmetrieverständnisses (Merschmeyer-Brüwer, 2009). Mit dem Spiel MULTi-CUBi (Reinhold, 2015b) wurde daran anknüpfend die Anforderung entwickelt, Würfelbauwerke *auf* einer horizontal liegenden Spiegelfläche zu konstruieren. Das auf der Spiegeloberfläche erstellte Bauwerk und sein Spiegelbild verschmelzen dabei zu einem Gesamtgefüge, das einer gezeichneten Bauvorlage entsprechen soll.

Im Erfassen der bei dieser Anforderung eingesetzten Strategien wird ein empirisch begründetes und im Projekt fortwährend adaptiertes Modell zu Elementen von Konstruktionsstrategien genutzt, das die Bauprozesse über die Aspekte *Würfel nehmen*, *Würfel verwenden*, *Würfel/Segmente legen*, Aspekte der *begleitenden Motorik* oder *verbale Kommentare* sowie über die *Qualität der Konstruktionskoordination* charakterisiert (Reinhold et al., 2013; Reinhold, 2015a, S. 65ff).

Ist die Konstruktionskoordination bei der Erstellung eines Würfelbauwerks auf dem Spiegel in ausgeprägter Weise durch lokale Annäherungen gekennzeichnet, geht dies häufig damit einher, dass die Kinder *einzelne* Würfel greifen und verbauen. Räumliche Relationen einzelner Segmente zueinander werden dabei ebenso eingeschränkt berücksichtigt wie die konsequente Verdopplung von Würfelanzahlen in einzelnen Segmenten des Bauwerks (Abb. 1).

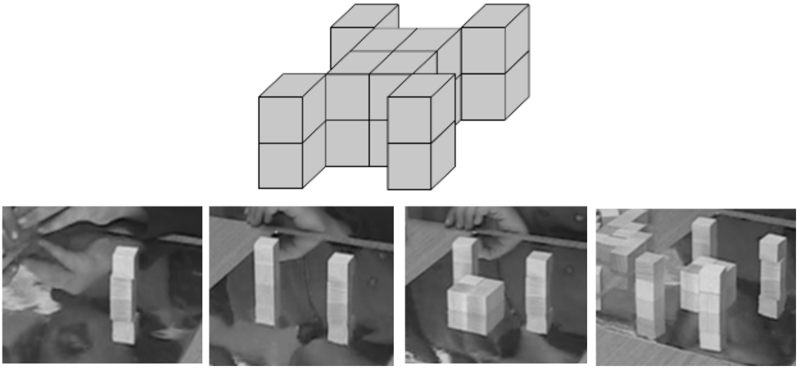


Abb. 1 Bauvorlage und individuelle Bausequenz zur Rekonstruktion auf dem Spiegel – lokale Annäherung ohne konsequente Berücksichtigung der Verdopplung

3.2 Drehungen von Würfelbauwerken

Strategien bei der Bearbeitung von Aufgaben zur mentalen Rotation konkreter Würfelmehrlinge in einer konstruktiven Arbeitsumgebung umfassen ebenfalls ein breites Spektrum differenzierbarer Komponenten (Reinhold, 2007; i. V.). Neben komparativ zu lösenden Aufgaben, bei denen Fotos oder konkrete Figuren zu vergleichen sind, die sich hinsichtlich ihrer Ausrichtung unterscheiden, werden hier verleimte Würfelmehrlinge angeboten. Diese sollen zum Nachbau aus Einzelwürfeln mental in statisch stabile Lage gedreht werden (Abb. 2).

Gesamtbetrachtungen der Figuren werden dabei ebenso wie strukturanalysierende Überlegungen vielfach durch gegenständliche Assoziationen (Tiere, Körperteile etc.) begleitet. Handbewegungen in gedachter Kipprichtung unterstützen zudem offensichtlich die Vorstellung der eigentlichen Drehung im Raum (vgl. auch Grüßing, 2002, S. 34). Die gedankliche Rotation einer *gesamten* Figur im Sinne einer rein holistischen Vorgehensweise stellt bei den meisten Grundschulkindern eher die Ausnahme dar. Häufiger werden hingegen additiv-sequenziell geprägte Strategien beobachtet. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass für die Rotation einer Figur lediglich einzelne Segmente mit der entsprechenden Vorlage abgestimmt werden. Anders als bei der integrativ-simultanen Koordination, bei der erkannte

Struktureinheiten wieder in einen Zusammenhang mit der Gesamtfigur gebracht werden, stoßen die Kinder hier in der Berücksichtigung sämtlicher räumlicher Relationen innerhalb eines zu rotierenden Würfelmehrlings an Grenzen und gelangen zu fehlerhaften Rekonstruktionen (Abb. 2).

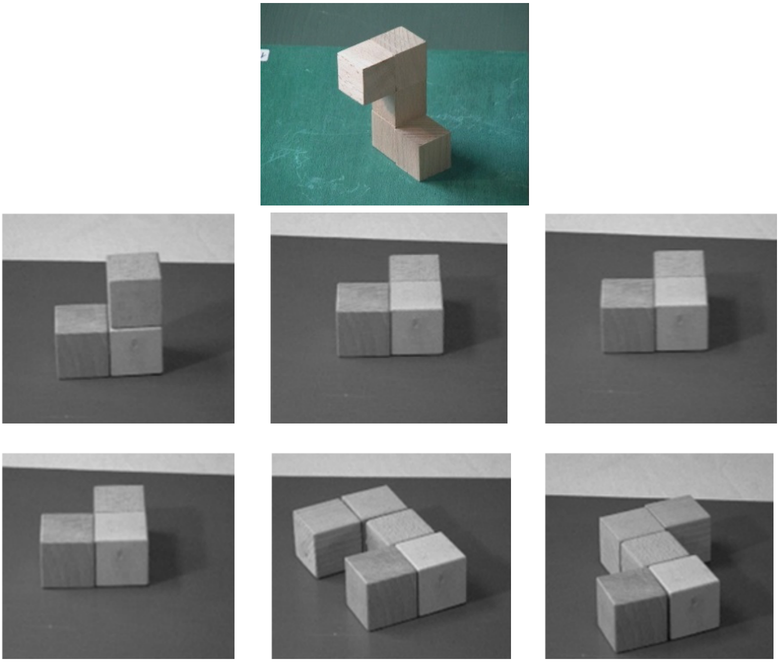


Abb. 2 Bauvorlage und Bausequenz zur Rekonstruktion in räumlich gedrehter Lage – lokale Annäherung mit Fokussierung auf Segmente im Sinne additiv-sequenzieller Vorgehensweise mit dem Ergebnis der Verflachung

Im Kern – aber sicher nicht abschließend und ausschließlich – sind mit „geometrischen Strategien" im Verständnis dieses Beitrags also Strategien bei der Bearbeitung von Anforderungen mit besonderen Herausforderungen an die Raumvorstellung angesprochen (vgl. 1.3.1 und 1.3.2). In Entsprechung zu „arithmetischen Strategien", die Kinder flexibel und adäquat einsetzen können sollen, zählen achsen-, ebenen- und drehsymmetrische Kongruenzabbildungen sicher zu den grundlegenden Operationen der Geometrie – wie wir die dabei eingesetzten Strategien erfassen und im Unterricht thematisieren (sollten), ist aber sicher noch nicht abschließend geklärt. Vor allem bedarf es einer Fortsetzung und Vertiefung der Analysen zu den qualitativen Zusammenhängen zwischen den hier skizzierten individuellen Zugängen von Kindern zum Spiegeln und Drehen und korrespondierenden arithmetischen Anforderungen.

Literatur

Barrat, E. S. (1953). An analysis of verbal reports of solving spatial problems as an aid in defining spatial factors. *The Journal of Psychology, 36*, 17–25.

Battista, M. T. (1990). Spatial visualisation and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 47–60.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 843-908). Charlotte, NC: Information Age.

Beutler, B. (2013). Zerlegen und Zusammensetzen. Fähigkeiten von Vorschulkindern beim Umstrukturieren von Bauwerken unter Berücksichtigung von Teil-Ganzes-Beziehungen. *Mathematica didactica*, 36 (2013), 242-271.

Besuden, H. (1973). Die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens in der Grundschule. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1973* (S. 45–49). Hannover: Schroedel.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule.* Heidelberg; Berlin: Springer Spektrum.

GDSU, Gesellschaft für Didaktik des Sachunterrichts (Hrsg.) (2013). *Perspektivrahmen Sachunterricht*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Grüßing, M. (2002). Wieviel Raumvorstellung braucht man für Raumvorstellungsaufgaben? Strategien von Grundschulkindern bei der Bewältigung räumlich-geometrischer Anforderungen. *ZDM, 34*(2), 37-45.

Grüßing, M. (2012). *Räumliche Fähigkeiten und Mathematikleistung: Eine empirische Studie mit Kindern im 4. Schuljahr*. Münster: Waxmann.

Grüßing, M. (2015). „Ich denk mich da immer so rein und dann sehe ich da so" – Räumliche Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter* (S. 39-54). Bamberg: UBP.

Guay, R. B. & McDaniel, E. D. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education, 8*(3), 211–215.

Hartmann, J. (2002). Schülervorstellungen und Schülerfehler im Bereich Drehungen – eine mehrperspektivische Betrachtung. *ZDM*, 34(2), 46-50.

Hussy, W. (1998). *Denken und Problemlösen*. Stuttgart: Kohlhammer.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta-analysis. *Child Development, 56*(6), 1479-1498.

Livy, S., Downton, A., Reinhold, S., & Wöller, S. (2018). Insights into a Year 4 Student's Spatial Reasoning and Conceptual Knowledge of Rectangular Prisms. In J. Hunter, P. Perger, & L. Darragh (Hrsg.), *Making waves, opening spaces* (S. 487-494). Auckland: MERGA.

Lohman, D. F. (1979). *Spatial Ability: A Review and Reanalysis of the Correlational Literature*. Technical Report No. 8. Stanford.

Lorenz, J. H. (1998). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht: Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann.

Maier, P. H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen*. Donauwörth: Auer.

Maresch, G. J. (2014). Strategien für die Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben. *Informationsblätter der Geometrie (IBDG)*, 33, 7-12.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2001). *Räumliche Strukturierungsprozesse bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen*. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2009). Räumliche Anschauungen entwickeln und geometrische Strukturen bilden. In A. Peter-Koop, G. Lilitakis & B. Spindeler (Hrsg.), *Lernumgebungen: Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 100-126). Offenburg: Mildenberger.

Niedermeyer, I. (2014). *Räumliche Perspektivübernahme am Schulanfang - Eine Interviewstudie zum Einfluss der Symmetrie*. Münster: Waxmann.

Plath, M. (2014). *Räumliches Vorstellungsvermögen im vierten Schuljahr. Eine Interviewstudie zu Lösungsstrategien und möglichen Einflussbedingungen auf den Strategieeinsatz*. Hildesheim: Franzbecker.

Reinhold, S. (2007). *Mentale Rotation von Würfelkonfigurationen – theoretischer Abriss, mathematikdidaktische Perspektiven und Analysen zu Strategien von Grundschulkindern in einer konstruktiven Arbeitsumgebung.* Hannover: LU. http://edok01.tib.uni-hannover.de/edoks/e01dh07/527630160.zip.

Reinhold, S. (2015a). Baustrategien von Vor- und Grundschulkindern: Zur Artikulation räumlicher Vorstellungen in konstruktiven Arbeitsumgebungen. In M. Ludwig, A. Filler, & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen: Ziele und Visionen 2020* (S. 67–85). Wiesbaden: Springer.

Reinhold, S. (2015b). *MULTiCUBi: Würfelbauwerke auf dem Spiegel.* Seelze: Friedrich.

Reinhold, S. (2017). Bauen und Konstruieren mit Einheitswürfeln - Elemente individueller Baustrategien und geometrische Lernumgebungen in der Kooperation von Kita und Grundschule. In C. Streit, S. Schuler, & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 75-90). Heidelberg: Springer Spektrum.

Reinhold, S. (i. V.). Mentales visuelles Operieren beim Drehen und Spiegeln von Würfelbauwerken: Herausfordernde Situationen zur räumlichen Geometrie in der Grundschule. In F. Heinrich (Hrsg.), *Aktivitäten von Grundschulkindern an und mit räumlichen Objekten*. Offenburg: Mildenberger.

Reinhold, S., & Wöller, S. (2016). Third graders' block-building: How do they express their knowledge of cubes and cuboids? In C. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi (Hrsg.), *Mathematics Education: How to Solve it?* (Vol. 4, pp. 123-130). Szeged, Hungary: PME.

Reinhold, S.; Beutler, B., & Merschmeyer-Brüwer, C. (2013). Preschoolers count and construct: spatial structuring and its relation to building strategies in enumeration-construction tasks. In A. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Kiel: PME, 2013.

Ruwisch, S., & Lüthje, T. (2013). „Das muss man umdrehen und dann passt es“: Strategien von Vorschulkindern beim Bearbeiten von Aufgaben zum räumlichen Vorstellungsvermögen. *Mathematica didactica,* 36, 156–192.

Rüsseler, J., Scholz, J., Jordan, K., & Quaiser-Pohl, C. (2005). Mental Rotation of letters, pictures, and three-dimensional objects in German dyslexic children. *Child Neuropsychology, 11,* 497-512.

Schultz, K. (1991). The contribution of solution strategy to spatial performance. *Canadian Journal of Psychology, 45,* 474–491.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern: Epistemologische Grundlage und empirische Fallstudie zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel.* Hildesheim: Franzbecker.

Thurstone, L. L. (1938). *Primary mental abilities.* Chicago Nachdruck von 1969: University of Chicago Press.

Thurstone, L. L. (1950). Some primary mental abilities in visual thinking. Chicago: University of Chicago Press, 1950 (Psychometric Laboratory Research Report No. 59).

Verdine, B. N., Golinkow, R. R., Hirsh-Pasek, K., & Newcombe, N. S. (2014). Finding the missing piece: blocks, puzzles, and shapes fuel school readiness. *Trends in Neuroscience and Education, 7*(1), 7-13.

Wai, J., Lubinski, D., Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology, 101,* 817 – 835

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht? *ZDM, 1975*(3), 106–116.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (1994). *Das Zahlenbuch: Mathematik im 1. Schuljahr. Lehrerband.* Leipzig: Klett.

Wolfgang, C. H., Stannard, L. L., & Jones, I. (2001) Block play performance among preschoolers as a predictor of later school achievement in mathematics. *Journal of Research in Childhood Education, 15*(2), 173-180.

Wollring, B. (1996). Räumliche Strukturen in unangeleiteten Zeichnungen von Grundschülern. In K.-P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1996* (S. 476-479). Hildesheim: Franzbecker.

Wollring, B. (2012). Raumvorstellung entwickeln – Eine zentrale Forderung für mathematische Bildung. *Fördermagazin,* 2/2012, 8-1.

Prof. Dr. Simone Reinhold
Universität Leipzig
Erziehungswissenschaftliche Fakultät
Grundschuldidaktik Mathematik
Marschnerstr. 31
04109 Leipzig
simone.reinhold@uni-leipzig.de

Analyzing and stimulating strategy competence in elementary arithmetic: The case of subtraction by addition

by Lieven Verschaffel, Gwen Verguts, Greet Peters, Pol Ghesquière, Bert De Smedt, and Joke Torbeyns

During the past two decades we investigated elementary school children's use of a highly valued strategy for doing symbolic multi-digit subtraction among mathematics educators namely the subtraction-by-addition strategy, In the present paper, we give a brief and narrative overview of the empirical studies that we have been doing on children's strategy competences with respect to subtraction-by-addition, using a variety of research methods and techniques. For this overview we use the research methodology being applied as the main structuring principle. First, we will review our initial studies wherein we used verbal reports to reveal children's solution strategies. Second, we report studies wherein we relied on the systematic analysis of children's reaction time data while solving subtractions. Finally, studies using the choice/no-choice paradigm are reported. Taken as a whole, while there is only very little evidence for subtraction-by-addition use when relying on verbal report studies, when turning to the other research methods, there is ample evidence that elementary school children do apply this valuable subtraction strategy frequently, efficiently, and flexibly. We end this paper with some theoretical, methodological, and educational implications of the research being reviewed.

Keywords: Elementary arithmetic, Multi-digit subtraction, Adaptive expertise, Verbal reports, Reaction times, Choice/no-choice Method

1 Introduction

Current reform movements in elementary mathematics education stress that instruction should no longer focus on solving school mathematics exercises quickly and accurately by means of the school-taught standard strategies (i.e., routine expertise). In contrast, mathematical tasks should be solved efficiently, flexibly, and creatively with a variety of meaningfully acquired strategies (i.e., adaptive expertise). Consequently, more attention should be paid to the insightful, varied, and flexible use of strategies when teaching children how to solve mathematical problems (Baroody & Dowker, 2003; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007; Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009).

One subdomain of the elementary mathematics curriculum that has attracted a lot of attention of researchers interested in the development of adaptive expertise in children, is the solution of symbolically presented multi-digit subtractions. Several studies have shown that children develop various strategies to mentally solve multi-digit subtractions (e.g., Beishuizen, 1993; Blöte, Klein, & Beishuizen, 2000; Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema, & Empson, 1998; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2009a). One way to classify these mental subtraction strategies is by looking at the operation that underlies the effectuation of the strategy. This can be either subtraction or addition. (For other ways of classifying mental subtraction strategies, see for example Peltenburg, van den Heuvel-Panhuizen, & Robitzsch, 2012). In this way, two types of strategies can be distinguished: (1) direct subtraction (DS) strategies, in which the subtrahend is directly taken away from the minuend (e.g., 75 – 43 = . by “75 – 40 = 35, 35 – 3 = 32”), and (2) subtraction-by-addition (SBA) strategies, in which one determines how much needs to be added to the subtrahend to get to the minuend (e.g., 75 – 43 = . by “43 + 30 = 73 and 73 + 2 = 75, so the answer is 30 + 2 = 32”). This SBA strategy is considered to be particularly efficient by mathematics educators on subtractions with a relatively large subtrahend (S) compared to the difference (D) (e.g., 81 – 79 = ., where S and D are 79 and 2, respectively), because in this case the solution process through a SBA strategy requires fewer and/or smaller calculation steps than a DS strategy (e.g., Torbeyns et al., 2009a). In contrast, DS is assumed to be more efficient than SBA for subtractions wherein the subtrahend is relatively small compared to the difference (e.g., 81 – 2, where S and D are 2 and 79, respectively).

In the present paper, we give a brief and narrative overview of the empirical studies that have been done at our research center over the past two decades on children’s use of this SBA strategy, using a variety of research methods and techniques. For this overview we use the research methodology being applied as the main structuring principle. First, we will review our initial studies wherein we used verbal reports to reveal children’s solution strategies. Second, we report studies wherein we relied on the systematic analysis of children’s reaction time data while solving subtractions. Finally, studies using the choice/no-choice paradigm are reported. We end this paper with some theoretical, methodological, and educational implications of the research being reviewed.

2 Verbal report studies

We began our quest for the SBA strategy in children by means of studies that used verbal reports as their main data-gathering technique.

Flemish elementary school children are confronted, from second grade on, with symbolically presented multi-digit subtractions of the form a – b = ? that they are supposed to solve mentally by means of the DS (DS) strategy, with little or no instructional attention to the SBA strategy. Against this background, our major question was if we would find traces of the availability and use of the SBA strategy in Flemish elementary school children's verbal strategy reports.

To address this question, we analysed, in a first study (Torbeyns et al., 2009a), second- to fourth-graders' DS and SBA use on symbolic two-digit subtractions in the number domain up to 100. We included 71 second-, 71 third-, and 53 fourth-graders, who all had received traditional instruction in two-digit mental addition and subtraction as outlined above. We divided them into three mathematics achievement groups on the basis of a general mathematics achievement test. Like all other textbooks that were – and still are - in use in Flanders, the textbook used in these schools only paid explicit and systematic attention to the DS strategy, and an interview with the teachers of these children confirmed that they had not provided systematic instruction and practice in the SBA strategy.

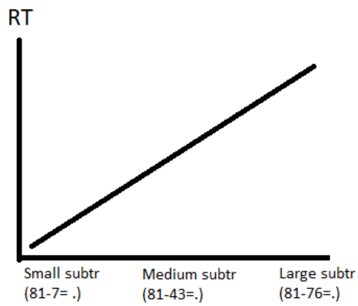
All children in the study of Torbeyns et al. (2009a) individually completed two tasks designed to evaluate their strategy competencies in the domain of subtraction up to 100: a Spontaneous Strategy use Task (SST) and a Variability on Demand Task (VDT). The SST consisted of different types of two-digit subtractions, including several problems with a relatively large subtrahend (e.g., 41 – 39 = ?), which are assumed to maximally trigger the SBA strategy. Children were instructed to mentally solve each item as accurately and as fast as possible with their preferential strategy. They were asked to verbally report both the answer and the strategy used immediately after solving each item. The VDT consisted of the same types of two-digit subtractions as the SST. Children were now instructed to mentally solve each item with at least two different strategies. Again they had to verbally report each strategy immediately after they solved the subtraction. If a child immediately solved a subtraction by means of SBA, the interviewer asked the child if (s)he could solve the same subtraction by means of a second strategy, and afterwards moved to the next subtraction. If the child began by solving the subtraction with a strategy different from SBA, the experimenter kept asking for another possible strategy until the child either reported the SBA strategy, stated that (s)he did not know any other strategy, or had reported five alternative solution strategies.

The study resulted in three main findings. First, the analysis of children's strategies in the SST revealed that less than 10% of the second- and third-graders, and only 15% of the fourth-graders spontaneously reported the SBA strategy at least once to answer the small-difference subtractions. Thus, children hardly reported the use of the SBA strategy, even on subtractions where this strategy is considered extremely efficient. Second, all children reported various strategies for solving the two small-difference subtractions from the VDT. But only a minority of them reported SBA as an alternative strategy to solve these subtractions. This suggests that SBA was not included in the strategy repertoire of most children. Actually, only 5% of the second-graders, 15% of the third-graders, and 20% of the fourth-graders mentioned the SBA strategy at least once as a possible alternative solution strategy. Third, despite the low overall occurrence of SBA in the two tasks and in the three age groups, there tended to be differences in the frequency with which SBA was spontaneously reported (in the SST) or mentioned as an alternative solution method (in the VDT) between the different age and mathematical achievement groups. High achievers and older children tended to report the SBA strategy more frequently on small-difference subtractions than low achievers and younger children.

In sum, this study of Torbeyns et al. (2009a) revealed that most Flemish elementary school children did not report the SBA strategy on symbolic multi-digit subtractions, even not on subtractions such as 41 – 39 = . that are assumed to maximally elicit this strategy. Furthermore, when being explicitly asked to generate alternative solution strategies for such types of subtractions, only a small minority of the children came up with SBA as an alternative subtraction strategy.

These results were confirmed by those of several other studies using similar verbal report methods, both from our own research team (De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2010; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2009b), and from various other teams (Blöte, Van der Burg, & Klein, 2001; Heinze, Marschick, & Lipowsky, 2009; Selter, 2001; Selter, Prediger, Nührenbörger, & Hussmann, 2012).

However, while the above-mentioned verbal report studies suggested that the SBA strategy was not included in most elementary school children's strategy repertoire, some anecdotal evidence obtained during the study of Torbeyns et al. (2009a) reported above, as well as some of the other verbal report studies realized in our center, made us doubt about the validity of this finding. More specifically, in the study of De Smedt et al. (2010), wherein we also asked children to report verbally on how they had solved a series of symbolically presented multi-digit subtractions, we noticed a remarkable inconsistency between children's verbal reports about the strategy they had used, on the one hand, and the time they needed to solve these problems, on the other hand. As in the study of Torbeyns et al. (2009a), the vast majority of the third-graders in the study of De Smedt et al. (2010) only reported the use of the DS strategy. Based on a rational task analysis, one might predict that this consistent use of DS on all types of subtractions (i.e., those with a relatively small, medium, and large subtrahend) should have led to an increase in these children's reaction times from subtractions with relatively small subtrahends (e.g., 81 – 7 = .) over subtractions with medium-sized subtrahends (e.g., 81 – 43 = .) to subtractions with a relatively large subtrahend (e.g., 81 – 79 = .), because subtracting a larger subtrahend requires more and/or larger calculation steps (Groen & Poll, 1973; Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière & Verschaffel, 2010) (see Figure 1a). However, a closer look at the collected reaction times revealed that children's reaction time patterns were not in line with this prediction, as not only subtractions with relatively small subtrahends but also subtractions with relatively large subtrahends were solved faster than subtractions with medium-sized subtrahends (see Figure 1b). These reaction time data thus suggested that children applied various strategies, and that, more specifically, the SBA strategy might have been used more frequently than reported by the children.



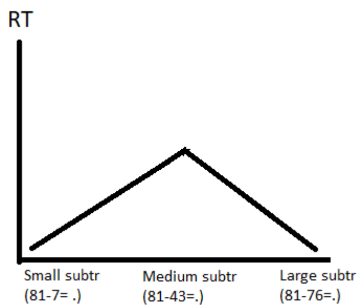


Figure 1a and 1b. Expected reaction time pattern for subtractions with a relatively small, medium, and large subtrahend when always applying DS (Figure 1a) and when switching between SBA and DS depending on the relative size of the subtrahend (Figure 1b).

Taking into account the available theoretical insights as well as the existing research evidence on the validity of verbal reports as data, one can come up with several factors that might lead to an underestimation of SBA use in such interview studies. First, as argued by Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, and Verschaffel (2013), especially on subtractions with a small difference between the two given numbers, the SBA strategy can be executed very quickly and quasi-automatically. It is plausible that children had difficulties in explaining how they arrived at their answer, because they may not have been aware of the steps they performed while doing SBA or may have found it too hard to verbalize this untaught strategy. Consequently, they may have reported a strategy they were more familiar with and knew how to verbalize (e.g. Ashcraft & Kirk, 2001). Second, children may have hidden the use of the SBA strategy because they thought it was not valued or even not allowed to use other strategies than the one(s) taught in their mathematics lessons (e.g., Yackel & Cobb, 1996). We therefore ran a next series of studies that used non-verbal methods to analyze children's use of SBA. More specifically, we collected reaction time data and used regression-based approaches to make inferences about children's strategy use.

3 Reaction time studies

After having done similar studies with adults (Peters et al., 2010), Peters et al. (2013), examined the use of the SBA strategy of fourth- to sixth-grade elementary school children by means of the above-mentioned reaction time analytic approach. Starting from Groen and Poll's (1973) pioneering work on fitting linear regression models to people's reaction times for various kinds of counting-based strategies for single-digit arithmetic, Peters et al. calculated three linear regression models for the reaction times of symbolic multi-digit subtractions. These regression models represented three different strategy use patterns:

1. If children only used the DS strategy (DS-Model), reaction times should be best predicted by the size of the subtrahend (S), because it takes longer to subtract a larger number from

the minuend (e.g., 83 – 79 = .) than to subtract a smaller number from that minuend (e.g., 83 – 4 = .).

2. If children always used the SBA strategy (SBA-Model), reaction times should be best predicted by the size of the difference (D), because it takes more time to determine how much needs to be added to get at a given number when the difference between both numbers is large (e.g., "How much needs to be added to 4 to have 83?") than when it is small (e.g., "How much needs to be added to 79 to have 83?").

3. If children switched between both strategies depending on the relative size of the subtrahend (Switch-Model), reaction times should be best predicted by *the minimum of* subtrahend and difference (min[D, S]): For problems with the subtrahend smaller than the difference (e.g., 83 – 4 = . and 84 – 38 = .), reaction times are expected to increase with the size of the subtrahend, because these problems can be easily solved by means of DS. In contrast, for problems with the difference smaller than the subtrahend (e.g., 83 – 79 = . and 84 – 46 = .), reaction times are expected to increase with the size of the difference, because these problems can be solved easily by means of SBA.

Seventy-two fourth- to sixth-grade children had to mentally solve a series of 32 symbolically presented two-digit subtractions divided in four problem types, based on the combination of the magnitude of the subtrahend (S) compared to the difference (D) (i.e., S > D or S < D) and the numerical distance between S and D (i.e., small or large). This resulted in the following problem types: (a) large-distance S < D problems (e.g., 83 – 4 = .); (b) large-distance S > D problems (e.g., 77 – 68 = .); (c) small-distance S < D problems (e.g., 92 – 44 =); and (d) small-distance S > D problems (e.g., 32 – 17 = .). The task was administered individually on a computer that allowed precise reaction time registration.

Multilevel regression analyses showed that the model in which children switched between DS and SBA based on the relative size of the subtrahend (Switch-Model) provided the best fit to the data. So, in contrast with the findings from the verbal report studies, the results of this reaction time study led to the conclusion that SBA belonged to the strategy repertoire of Flemish elementary school children and that they applied this strategy, together with DS, flexibly to solve two-digit subtraction problems by switching between both strategies depending on the relative size of the subtrahend. More specifically, the regression analyses on the reaction time data suggested that the DS strategy was used when the subtrahend was relatively small, whereas the SBA strategy was used when the subtrahend was relatively large.

These findings were replicated in other studies at our center, using different sets of subtractions (Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2012) and different samples of children, including children with mathematical learning disabilities (Peters, De Smedt, Torbeyns, Verschaffel, & Ghesquière, 2014).

However, as extensively discussed by Peters et al. (2010), this regression-based analytic approach with reaction times as the main type of data is not without its methodological problems either. For instance, it does not allow to accurately determine the kind of strategy being applied by an individual or a group on an individual item; it only allows for the identification of overall strategy patterns for the item set as a whole. Moreover, underlying the analytic method are some theoretical assumptions about the relationship between the strategy being used to solve a problem and its solution time that might be valid for simple counting tasks (as the ones used by Groen & Poll, 1973) but may be less valid for strategies for doing multi-digit mental subtraction.

Given the methodological concerns related to the reaction time studies (Peters et al., 2010), we decided to apply still another research method that we had already used successfully in several previous studies - both with adults and children and with various kinds of mathematical tasks - but that so far had not been used yet in research with children doing symbolic multi-digit subtraction, namely the choice/no-choice method (Lemaire & Siegler, 1995; Siegler & Lemaire, 1997). In contrast to more classical studies on people's strategy competencies, this method requires assessing each participant in two different types of conditions. First, a choice condition, wherein they can choose which strategy they apply on each item. Second, two or more no-choice conditions, wherein they are forced to solve all items with a given strategy. Compared to classical studies involving only a choice condition (as in the studies reviewed in the section: verbal report studies), the no-choice conditions prevent researchers from getting biased efficiency data for the strategies being involved in the study. Moreover, the choice/no-choice method allows them to analyze the flexibility of participants' strategy choices based on their individual strategy efficiency competencies by comparing their strategy choices in the choice condition with the individual strategy efficiency data collected in the no-choice conditions.

4 Choice/no choice studies

Torbeyns, Peters, De Smedt, Ghesquière, and Verschaffel (2018) investigated 68 sixth-graders of varying mathematics ability. The participating children were offered three parallel series of 10 multi-digit subtractions up to 1000, which were divided in two problem types: subtractions with a relatively large subtrahend (LS) (e.g., 614 - 596 = 18), and subtractions with a relatively small subtrahend (SS) (e.g., 734 - 47 = 687). These subtractions were individually administered to the children in one choice and two no-choice conditions. In the choice condition, they could choose between DS and SBA on each subtraction. In the no-choice DS condition, children had to solve the subtractions via a DS strategy. Likewise, in the no-choice SBA condition, all subtractions had to be solved via SBA. In each condition, children were instructed to solve all subtractions as accurately and as fast as possible, and to verbally report the applied strategy immediately after solving each subtraction. The analysis of the data of the choice and no-choice conditions resulted in the following findings.

First, as far as children's strategy repertoire and distribution is concerned, we found that, in the choice condition, SBA was used at least once by most children.

Second, SBA was also used more frequently on the subtractions in the choice condition than DS.

Third, the subtraction items were solved more accurately when the SBA strategy had to be used compared to the required use of the DS strategy. This was particularly the case for LS subtractions whereas for the SS subtractions there was no difference in accuracy. Turning to strategy speed, the subtraction items were solved more quickly when the SBA strategy had to be used compared to the required use of the DS strategy, and this was again particularly the case for LS subtractions whereas for the SS subtractions there was no difference in speed.

Fourth, we found two types of evidence for children's flexible use of the SBA strategy. First, despite instruction focusing on only DS, children took into account numerical characteristics during the choice process, since we found that children more frequently selected SBA on LS subtractions compared to SS subtractions. Second, children took into account their individual strategy efficiency competencies during the strategy selection process in the choice condition. More specifically, they flexibly fitted their strategy choices to their individual strategy speed competencies: The larger the speed difference between the no-choice SBA and the no-choice DS condition in favour of the SBA strategy, the more frequently children reported that latter strategy in the choice condition.

In sum, this choice/no-choice study not only revealed that the SBA strategy belonged to the strategy repertoire of most elementary school children, but also that they applied it frequently, efficiently, and flexibly. Moreover, we observed hardly any differences among children of varying mathematical achievement levels, indicating that even below-average to low achievers knew the SBA strategy and were able to frequently, efficiently, and flexibly apply it on multi-digit subtractions.

However, one should not forget that the choice/no-choice method requires that all strategies under investigation are explicitly explained and demonstrated to the participants at the beginning of the experiment. This characteristic of this research method might have enhanced children's use of the untaught SBA strategy and might have stimulated some reflections about its flexible use vis-à-vis various types of subtractions. Moreover, these positive results for the SBA strategy might also be due to the fact that this study involved sixth-graders as participants and three-digit subtractions, whereas the other studies involved (also) younger elementary school children and subtractions with only two digits.

Therefore, we recently replicated the above study with younger elementary school children up to Grade 4. The results showed that the above results about the frequent, efficient and flexible use of the SBA strategy on symbolic multi-digit subtractions also applies for Flemish fifth and fourth graders (Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2017; Torbeyns, Verguts, De Smedt, & Verschaffel, 2018).

In sum, just as the results of the reaction time studies, the findings of the choice/no-choice studies disconfirm those of the initial verbal report studies with children, and rather indicate that many elementary school children – even the mathematically weaker and younger ones - apply the untaught SBA strategy and do so remarkably frequently, efficiently, and flexibly.

5 Conclusion and discussion

In this paper we have reported on a long-term research program in our research center on elementary school children's flexible use of multi-digit mental subtraction strategies, and more specifically on children's use of the SBA strategy. We have presented three types of studies, namely verbal report studies, reaction time studies, and studies applying the choice/no-choice paradigm. Taken as a whole, this research has shown that there is only very little evidence for SBA use when relying on verbal reports obtained in a choice condition only. However, when turning to other research methods, there is ample evidence from our reaction time studies hat elementary school children do apply this alternative subtraction strategy frequently and flexibly. Moreover, our studies using the choice/no-choice method reveal that elementary school children do not only frequently and flexibly apply the SBA strategy, but also do so with superior computational efficiency compared to DS. Importantly, these findings also hold for younger children and for mathematically weaker ones.

From a more general theoretical perspective, given the exclusive focus on DS in current mathematics instruction, the findings from our reaction time and choice/no-choice studies can be considered as a striking illustration of the active and constructive nature of children's mathematics learning, and of their potential to develop adaptive expertise in elementary mathematics.

From a methodological perspective, our review nicely documents the difficulty of obtaining reliable and valid empirical data on children's strategy use in the domain of elementary mathematics. Each research method or analytic technique has its own advantages and disadvantages that should be taken into account when interpreting the outcomes of a study and comparing the results of different studies. As such, this review can be considered as a strong plea for the methodological principle of triangulation (i.e., the use of more than one research method to understand the phenomenon under investigation).

From an educational perspective, our findings challenge current mathematics instruction that is capitalizing on the routine mastery of only DS, and involves a plea for more instructional attention to SBA as a valuable - and may-be even *more* valuable - alternative strategy in this domain (cf. Peltenburg et al., 2012; Selter et al., 2012). However, our studies are among the first to analyse the frequency, efficiency, and flexibility of the SBA strategy compared to DS. Also, the research evidence on the efficacy and educational value of a teaching approach for multi-digit subtraction wherein the SBA strategy plays a (much) more prominent role, is very scarce. Before drastic changes in current mathematics instruction can be recommended, future research is needed. Future ascertaining studies can help to replicate and refine our findings in still younger age groups and in children of the lowest mathematics achievement levels (including children with mathematical learning difficulties). Moreover, future intervention studies may offer building blocks for optimizing current elementary mathematics instruction in the domain of symbolic multi-digit subtraction.

References

Ashcraft, M. H., & Kirk, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of Experimental Psychology: General, 130,* 224–237. doi: 10.1037//0096-3445.130.2.224

Baroody, A. J., & Dowker, A. (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education, 24,* 294-323. doi: 10.2307/749464

Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction, 10,* 221-247. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(99)00028-6

Blöte, A. W., Van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Student's flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93,* 627–638. doi:10.1037/0022-0663.93.3.627

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 3-20. doi: 10.2307/749715

De Smedt, B., Torbeyns, J., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and Instruction, 20*(3), 205-215. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.02.020

Groen, G. J., & Poll, M. (1973). Subtraction and the solution of open sentence problems. *Journal of Experimental Child Psychology, 16,* 292-302. https://doi.org/10.1016/0022-0965(73)90168-9

Heinze, A., Marschick, F., & Lipowsky, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. ZDM Mathematics Education, 41, 591-604. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0205-5

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). Adding it up. *Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press. https://doi.org/10.17226/9822

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General, 124,* 83-97. http://dx.doi.org/10.1037/0096-3445.124.1.83

Peltenburg, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2012). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100. A proof of the didactical potential of an ignored procedure.

Educational Studies in Mathematics, 79, 351-369. doi: 10.1007/s10649-011-9351-0

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Adults' use of subtraction by addition. *Acta Psychologica, 135,* 323-329. doi: 10.1016/j.actpsy.2010.08.007.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2012). Children's use of subtraction by addition on large single-digit subtractions. *Educational Studies in Mathematics, 79,* 335-349. https://www.jstor.org/stable/41413117

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2013). Children's use of addition to solve two-digit subtraction problems. *British Journal of Psychology, 104,* 495-511. doi: 10.1111/bjop.12003.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2014). Subtraction by addition in children with mathematical learning disabilities. *Learning and Instruction, 30,* 1–8. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.11.001

Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics, 47,* 145-173. https://doi.org/10.1023/A:1014521221809

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hussmann, S. (2012). Taking away and determining the difference – a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics, 79,* 389-408. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9305-6

Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General, 126,* 71-92. http://dx.doi.org/10.1037/0096-3445.126.1.71

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009a). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics, 71,* 1-17. doi: 10.1007/s10649-008-9155-z

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009b). Solving subtractions adaptively by means of indirect addition: Influence of task, subject, and instructional factors. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8*(2), 1-30.

Torbeyns, J., Peters, G.,De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2018). Subtraction by addition strategy use in children of varying mathematical achievement level: A choice/no-choice study. *Journal of Numerical Cognition*, 2363-8761. https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.77

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2017, August-September). Efficient and flexible use of SBA in multi-digit subtraction. In S. Rathé (Chair), *Adaptive expertise in elementary arithmetic*. Symposium conducted at the biennial meeting of the European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI), Tampere, Finland. Retrieved from https://earli.org/sites/default/files/2017-09/EARLI2017_book_of_abstracts1309.pdf

Torbeyns, J., Verguts, G., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2018). Efficient and flexible use of SBA in multi-digit subtraction in elementary school children. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 5)* (p. 175). Umeå, Sweden: PME.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). New York, NY: MacMillan.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24*, 335-359. https://doi.org/10.1007/BF03174765

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477. doi: 10.2307/749877.

Prof. Dr. Lieven Verschaffel
Center for Instructional Psychology and Technology
Education and Training Research Group
Katholieke Universiteit Leuven
Van den Heuvel Instituut (Room nr. 05.71)
Dekenstraat 2
Post Box 3773
B-3000 Leuven
lieven.verschaffel@kuleuven.be

Arbeitsgruppe Arithmetik

Koordination: Elisabeth Rathgeb-Schnierer
rathgeb-schnierer@mathematik.uni-kassel.de

Beitrag I: Sandra Gleißberg
sandra.gleissberg@ph-gmuend.de

Geeignetes Arbeiten mit den Grundaufgaben der Multiplikation und Division

1 Problemlage

Die Bedeutung des inhaltlichen Verstehens und der gedächtnismäßigen Beherrschung der Grundaufgabengleichungen der Multiplikation und Division sind unumstritten: Beides ist bedeutsam für die Bewältigung alltäglicher Probleme ebenso wie für die Meisterung von Aufgaben im Unterricht nachfolgender Schulstufen nicht nur im Fach Mathematik. Studien wie etwa die von Ahlemann (1979), Bülow (1982) oder Bönig (1995) zeigen immer wieder, dass Lehrerinnen und Lehrern dem Ziel *gedächtnismäßige Beherrschung der Grundaufgabengleichungen* eine hohe Bedeutung beimessen und dass sie ihre Schüler hier zu guten Ergebnissen führen möchten.

Demgegenüber zeigen Ergebnisse aktueller Studien, wie die von Brandt (2016) und Truppel (2017), dass zu viele Kinder dieses Ziel nicht erreichen. Zugleich wird in den Studien deutlich, dass selbst in Klasse 5 zwar viele Kinder die Grundaufgabengleichungen reproduzieren können, aber kein inhaltliches Verständnis der Operationen besitzen. Diese Kinder operieren mit eingeprägten Zahlensätzen, ohne deren Bedeutung zu kennen.

In beiden Studien wurde deutlich, dass es von Schule zu Schule und von Klasse zu Klasse oft erhebliche Leistungsunterschiede gibt, die in dieser Höhe kaum zu rechtfertigen sind.

Aus diesen Fakten folgt die Notwendigkeit, den Unterricht und seine Ergebnisse zu analysieren und den Unterrichtserfolg begünstigende, verallgemeinerungswürdige und zugleich übertragungsfähige Merkmale der Unterrichtsgestaltung herauszuarbeiten.

2 Anlage der Studie im Überblick

2.1 Analyse der Schülerleistungen

Zunächst untersuchten wir, inwieweit sich die von Brandt (2016) und Truppel (2017) genannten unbefriedigenden Ergebnisse bei einer größeren Population von Schülerinnen und Schülern mit einer breiteren lokalen Verteilung bestätigen. Deshalb wurden in einer umfassenden Längsschnittstudie Schülerinnen und Schüler aus 39 Klassen am Ende der Klasse 2 sowie zu Beginn und am Ende der Klasse 3 untersucht. Insgesamt umfasst die Stichprobe 535 Schülerinnen und Schülern, die an allen drei Messzeitpunkten anwesend waren. Einmal erfassten wir in einem Test die gedächtnismäßige Beherrschung der Grundaufgabengleichungen: Es wurden 30 Aufgaben in Termform vorgegeben, darunter 15 Multiplikationsaufgaben und 15 Divisionsaufgaben. Die Kinder erhielten stets 3 Minuten Zeit zum Lösen dieser Aufgaben.

Darüber hinaus wurden mehr als 80 halbstandardisierte Einzelinterviews mit Schülerinnen und Schülern aller beteiligten Klassen durchgeführt. In diesen Interviews wollten wir herausfinden, inwieweit die Kinder die Bedeutung der Operationen verstanden haben. Im Interview sollen die Kinder unter anderem Terme der Form $a \bullet b$ identifizieren, realisieren und systematisieren.

2.2 Analyse der im Unterricht eingesetzten Aufgaben

Weil ein geeignetes Arbeiten mit Aufgaben im Sinne von Fanghänel (vgl. 2000) entscheidend für die Qualität des Unterrichts und seiner Ergebnisse ist, analysierten wir die Auswahl der Aufgaben näher.

Zur Klassifizierung der Aufgaben rund um die Multiplikation entwickelten wir ein Framework (vgl. Eichler & Gleißberg 2019). Wir analysierten und klassifizierten damit zunächst das Aufgabenangebot der Lehrwerke. Da Lehrerinnen und Lehrer neben dem Lehrwerk oft noch andere Materialien einsetzen, untersuchten wir, welche Aufgaben sie dabei bevorzugt wählen. Wir bereiteten 82 Aufgaben vor und ließen Lehrerinnen und Lehrer diese Auswahl im Hinblick auf ihre unterrichtliche Verwendbarkeit klassifizieren.

3 Ergebnisse der Grundaufgabentests

Im Grundaufgabentest am Ende der Klasse 2 lösten nur 86 der 535 Kinder (16%) 29 oder 30 der Aufgaben in der vorgegebenen Zeit korrekt. Dagegen schafften 208 Kinder (38,9 %) nicht mehr als die Hälfte der Aufgaben. Auffällig waren zuweilen große Leistungsunterschiede zwischen einzelnen Klassen mit vergleichbaren Rahmenbedingungen.

Beim Grundaufgabentest in der 2. bis 4. Unterrichtswoche in Klasse 3 war das Resultat auf den ersten Blick ähnlich: Diesmal schafften nur 72 der 535 Kinder (13,5 %) 29 oder 30 der Aufgaben und 205 Kinder (38,3 %) berechneten nicht mehr als die Hälfte der Aufgaben.

Am Ende des 3. Schuljahres lösten 149 der Kinder (27,8 %) 29 oder 30 Aufgaben in der vorgegebenen Zeit korrekt. Diesem erfreulichen Zuwachs gegenüber steht der Fakt, dass immer noch 105 Kinder (19,6 %) nur maximal die Hälfte der Aufgaben in der vorgegebenen Zeit korrekt lösten: Jedes fünfte Kind beherrscht die Grundaufgabengleichungen nur unzureichend gedächtnismäßig, darunter gab es 37 Kinder, die maximal 10 Aufgaben richtig lösten.

Das ist nur scheinbar ein guter Befund, denn genau betrachtet, verfehlen damit immerhin 72,2 % der Kinder das Ziel.

Wesentlich interessanter noch als diese globalen Feststellungen sind Aussagen zum Verlauf der Leistungsentwicklung über den beobachteten Zeitraum hinweg.

Es gibt Kinder, die über die 3 Tests hinweg stetig steigende oder gleichbleibend gute bis sehr gute Leistungen zeigen. Weiterhin gibt es Kinder, die am Ende der Klasse 2 die Grundaufgabengleichungen gedächtnismäßig beherrschen, über die Ferien hinweg Aufgaben vergessen, die vergessenen Kenntnisse reaktivieren und am Ende der Klasse 3 sehr gute oder gute Leistungen zeigen. Die Leistungsverläufe dieser beiden Gruppen sind so, wie es zu erwarten ist: einige Kenntnisse werden über die Ferien vergessen, aber die Leistung steigt im Laufe eines Schuljahres wieder an.

Eine dritte Gruppe bilden jene Kinder, die am Ende der Klasse 2 die Grundaufgabengleichungen gedächtnismäßig beherrschen, über die Ferien hinweg Aufgaben vergessen, sich zwar bis zum Ende der Klasse 3 verbessern, aber nicht mehr das Niveau vom Ende Klasse 2 erreichen. Außerdem gibt es eine vierte Gruppe: Kinder, deren Leistungen vom Ende der Klasse 2 bis zum Ende der Klasse 3 trotz Mathematikunterricht stetig sinken. Die Resultate der Gruppen 3 und 4 bedürfen einer detaillierten Analyse.

4 Ausblick

Im Fokus der weiteren Auswertung stehen die Analyse der Ergebnisse einzelner Gruppen und einzelner Klassen. Darüber hinaus werden Zusammenhänge zu den eingesetzten Aufgaben untersucht.

Literatur

Ahlemann, H. (1979). *Die Gestaltung des Mathematikunterrichts bei der Behandlung der Grundaufgaben der Multiplikation und Division in Klasse 2 unter besonderer Berücksichtigung des gedächtnismäßigen Beherrschens der Grundaufgabengleichungen*. Dissertation. PH Erfurt / Mühlhausen.

Bönig, D. (1995). *Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern*. Münster: Waxmann.

Brandt, B. (2016). *Rechenstrategien und Rechenperformance bei der Multiplikation und Division in Klasse 3 – Analyse und Bilanz*. Schwäbisch Gmünd: Masterarbeit an der PH.

Bülow, E. (1982). *Zum Mathematikunterricht in der Unterstufe – Ergebnisse und Möglichkeiten zu deren Verbesserung*. Dissertation. PH Erfurt / Mühlhausen.

Eichler, K.-P. & Gleißberg, S. (zur Annahme bei CERME 11 eingereicht 2019). *The offer of tasks to work on multiplication in classes 2 and 3.*

Fanghänel, G. (2000). Arbeiten mit Aufgaben – ein wesentliches Mittel zur Gestaltung eines modernen Mathematikunterrichts. *Mathematikunterricht gestalten,* 23–40.

Gleißberg, S. (2018). Man muss es ja doch auswendig wissen – die Behandlung der Multiplikation zwischen Anspruch und Wirklichkeit. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 619–622). Münster: WTM-Verlag.

Lorenz, J. H. (2007). Die Repräsentation von Zahlen und Rechenoperationen im kindlichen Kopf. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. 13 – 22.

Truppel, D. (2017). *Grundaufgabenkenntnisse der Multiplikation und Division sowie deren Anwendung in Klasse 5 – Analyse, Bilanz und Hauptrichtung der Weiterentwicklung*. Examensarbeit. PH Schwäbisch Gmünd.

Beitrag II: Susannah Unteregge
susannah.unteregge@tu-dortmund.de

Gleichheitsbeziehungen durch Terme entdecken und begründen: Entwicklung und Erforschung von Lernchancen in der Grundschule

1 Sichtweisen auf Gleichheiten im Kontext flexiblen Rechnens

Das Gleichheitszeichen wird im Arithmetikunterricht der Grundschule in der Regel als Zeichen eingeführt, das zwischen Aufgabe und Ergebnis notiert wird und so von den Kindern häufig als Aufforderung zum Ausrechnen, zum Durchführen von Operationen, verstanden wird. Dieser Umgang mit dem Gleichheitszeichen führt daher primär zu einer operationalen Sicht auf Terme.

Neben dieser durchaus wichtigen Bedeutung ist jedoch eine weitere Sichtweise zentral, die den Relationscharakter des Gleichheitszeichens betont und den Blick auf Zusammenhänge und Beziehungen zwischen Termen lenkt. Diese Deutung als Zeichen für Gleichheit bzw. Gleichwertigkeit wird von den Kindern oft noch nicht eingenommen (Winter, 1982). Genau sie ermöglicht es jedoch gleichwertige, aber unterschiedlich schwierig zu berechnende Terme in Beziehung zu setzen und so schnell und flexibel zu rechnen. Zu den zentralen Voraussetzungen für flexibles Rechnen zählen z. B. das Erkennen von Aufgabenmerkmalen und Zahlbeziehungen und das Verfügen über strategische Werkzeuge im Sinne mentaler Hilfsmittel zum operativen Verändern und Vereinfachen von Aufgaben (Rathgeb-Schnierer, 2014). Die Ausbildung eines umfassenden Gleichheitsverständnisses hängt daher eng mit der Fähigkeit zum flexiblen Rechnen zusammen. Um flexibel rechnen zu können, muss sowohl die operationale als auch die relationale Perspektive auf Gleichheiten eingenommen werden.

Weiterhin hat eine solche erweiterte Sichtweise auf Aufgaben bzw. Gleichungen auch eine wichtige propädeutische Bedeutung, da das Gleichheitszeichen im Algebraunterricht der Sekundarstufe fast ausschließlich als Relationszeichen fungiert, das die Gleichwertigkeit zweier Terme ausdrückt.

In der Grundschule sollte daher ein umfassendes, flexibles Gleichheitsverständnis angebahnt werden, das beide Sichtweisen, die operationale und die relationale, beinhaltet (Mayer, 2015).

2 Studien zum Gleichheitsverständnis

Vergleicht man Studien zum Gleichheitsverständnis von Kindern, so zeigen sich zwei verschiedene Schwerpunkte: Zum einen gibt es Studien, die sich mit dem Verständnis von Gleichheiten im Kontext substanzieller Aufgabenformate wie z. B. Rechenketten befassen und das Gleichheitszeichen bewusst vermeiden (u. a. Mayer, 2015). In diesen wurde festgestellt, dass Grundschulkinder durchaus eine relationale Sichtweise auf Gleichheiten einnehmen können. Zum anderen untersuchen viele Studien, besonders aus dem Sekundarstufenbereich, ganz konkret den Umgang mit Gleichungen oder die Bedeutung des Gleichheitszeichens für Schülerinnen und Schüler untersuchen (u. a. Borromeo Ferri & Blum, 2011; Mc Neil & Alibali, 2005). Hier zeigen die Lernenden ein stark einseitiges operationales Gleichheitsverständnis.

Seo & Ginsburg (2003) sprechen in diesem Zusammenhang von einer „pseudo-flexiblen" Interpretation von Gleichheiten. Schülerinnen und Schüler zeigen zwar unterschiedliche Deutungen in Bezug auf Gleichheiten, diese werden jedoch durch den jeweiligen Kontext aktiviert und sind meistens nicht miteinander verknüpft. Da das Gleichheitszeichen in der Grundschule häufig in einem Aufgabe-Ergebnis-Kontext genutzt wird, ist hier die operationale Sichtweise der Kinder entsprechend dominant.

3 Forschungsprojekt

Das vorliegende Forschungsprojekt verfolgt zwei Ziele: Zum einen geht es darum, auf Entwicklungsebene ein Lehr-Lernarrangement zu entwickeln, das ein umfassendes, flexibles Gleichheitsverständnis bei Kindern anregen kann. Zum anderen soll auf Forschungsebene rekonstruiert werden, wie Grundschulkinder entdeckte Gleichheiten begründen und ihre Vorstellungen von Kontexten ohne Gleichheitszeichen auf Kontexte mit Gleichheitszeichen übertragen.

Die dazu erstellten Lehr-Lernarrangements stellen daher eine Kombination aus substanziellem Aufgabenformat und formaler Darstellung in Gleichungen dar. Sie basieren auf einem substanziellen Aufgabenformat (z. B. Zahlenfolgen), das das Betrachten von Gleichheiten ermöglicht, aber ohne das Gleichheitszeichen auskommt, nutzen aber auch die formale Darstellung in Gleichungen. Diese Gleichungen bestehen dabei immer aus Termen, die sich aus dem Aufgabenformat ergeben (Nührenbörger & Unteregge, 2017) (s. auch Abb. 1).

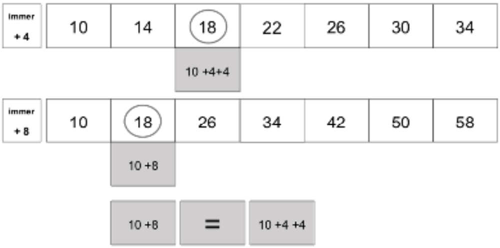


Abb. 1 Formal dargestellte Gleichung zu den gleichen Feldern (18)

Zu den entwickelten Lehr-Lernarrangements wurde jeweils eine Reihe halbstandardisierter Partnerinterviews mit Viertklässlern durchgeführt, diese videografiert und teilweise transkribiert.

4 Ausgewählte Ergebnisse

Aus der Analyse der verschiedenartigen Begründungen der Kinder ließ sich ein Modell rekonstruieren, das die Verortung der Begründungen in einer Spanne zwischen Ergebnis- und Strukturorientierung ermöglicht (s. Abb. 2). Die Kinder sind in der Regel nicht auf eine Begründungsebene festgelegt, sondern wechseln zwischen diesen.

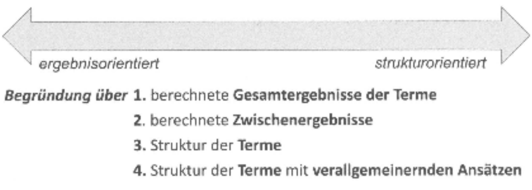


Abb. 2 Begründungen für Gleichheiten

In den bisherigen epistemologischen Analysen (Steinbring, 2000), durch die die Begründungsprozesse in der Interaktion noch genauer charakterisiert werden, hat sich gezeigt, dass ein starker Zusammenhang zwischen dem genutzten Referenzkontext des Kindes und der Verortung seiner Begründung in der Spanne zwischen Ergebnis- und Strukturorientierung besteht. Während Referenzkontexte wie einzelne Zahlen oder Ergebnisse eher zu Begründungen auf Ebene 1 und 2 führen, werden bei Begründungen auf Ebene 3 und 4 eher Referenzkontexte wie Strukturen, Zahl- und Aufgabenbeziehungen oder implizit bekannte Gesetze genutzt. Die Referenzkontexte der Kinder können sich jedoch durch bestimmte Auslöser verändern oder erweitern, was häufig auch eine strukturorientiertere Begründung zur Folge hat.

Bisher haben sich durch die Analysen folgende Auslöser für solche Veränderungen oder Erweiterungen ergeben: Impulse des anderen Kindes, Impulse der Interviewerin, eigene Ideen, ähnliche Aufgaben.

Literatur

Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (2011). Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 127-130). Münster: WTM.

Mayer, C. (2015). Argumentativ geprägte Lernsituationen zur Erkundung arithmetischer Gleichheiten. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter* (S. 87-90). Bamberg: University Press.

McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2005). Knowledge Change as a Function of Mathematics Experience: All Contexts are Not Created Equal. *Journal of Cognition and Development, 6*(2), 285-306.

Nührenbörger, M. & Unteregge, S. (2017). Aufgaben vergleichen in der Grundschule – Entdecken und Begründen algebraischer Gleichheitsbeziehungen im Kontext der Arithmetik. *Die Grundschulzeitschrift, 31*(306), 30-35.

Rathgeb-Schnierer, E. (2014). Flexibel Rechnen lernen. Erkennen und nutzen von Aufgabenmerkmalen und Zahlbeziehungen. *Die Grundschulzeitschrift, 28*(280), 28-33.

Seo, K. & Ginsburg, H. (2003). Classroom context and children's interpretations of the equals sign. In A. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills* (pp. 161-187). London: LEA.

Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *Mathematica didactica, 5*(4), 185-211.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion. *JMD, 21*(1), 28-49.

Arbeitsgruppe Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit

Koordination: Grit Kurtzmann
kurtzmann@schule-franzburg.de

Beitrag: Bernd Neubert
Bernd.Neubert@math.uni-giessen.de

„Schweinereien" und Galtonbrett

In der Arbeitsgruppe wurden zwei Studien zum Umgang mit dem „Würfelschwein" und Galton-Brett als Zufallsgeneratoren vorgestellt.

1 „Schweinereien" - Grundschüler untersuchen einen asymmetrischen Zufallsgenerator

Angeregt durch das Gesellschaftsspiel „Schweinerei" entstand die Idee zu einer Studie, in der 12 Kinder einer vierten Klasse den dort verwendeten asymmetrischen Zufallsgenerator – ein kleines Schwein – untersuchten. In Abwandlung bzw. Vereinfachung gegenüber dem Spiel, in dem jeweils zwei „Würfelschweine" verwendet werden, untersuchten die Viertklässler nur eines (vgl. Schnabel & Neubert 2017). Zentrales Anliegen war zu untersuchen, ob die Kinder die Ungleichwahrscheinlichkeit der verschiedenen Ergebnisse erkennen und diese auch begründen können.

Abb.1 „Würfelschwein" in verschiedenen Positionen

Die Versuchsteilnehmer wurden mit vier Aufgaben konfrontiert. Die Aufgabenstellungen waren in eine fortlaufende kleine Geschichte mit dem Thema „Zirkus", in dem ein Schwein außergewöhnliche Kunststücke beherrscht, eingebettet (vgl. Schnabel 2017).

Ziel der ersten Aufgabe war das Kennenlernen des asymmetrischen Zufallsgenerators und das Herausfinden der unterschiedlichen Ereignisse, die beim Werfen eintreten können. Dies gelang den Kindern fast problemlos. Nur die Unterscheidung zwischen den fast identischen Seiten bereitete einigen Kindern Schwierigkeiten.

Im Hauptteil der Studie bearbeiteten die Kinder drei Aufgaben (Aufgabe 2 bis 4) in Einzelarbeit. Bei der Bearbeitung der zweiten Aufgabe sollten die Kinder erkennen, dass nicht jede Position des Schweins gleich oft eintritt und Vermutungen über die Unterschiede anstellen. Bei der Begründung ihrer Vermutungen argumentierten die meisten Versuchsteilnehmer mit dem Aufbau und der Struktur des Zufallsgenerators. Die übrigen Schüler verwiesen in ihrer Begründung auf den Zufall, Würfelverhalten oder auf subjektive Vorerfahrungen.

Bei der Bearbeitung der dritten Aufgabe führten die Kinder eine Versuchsreihe aus dreißig Versuchen durch und hielten die einzelnen Versuchsausgänge in einer Strichliste fest. Die Aufgabe zielte darauf ab, einen quantitativen Vergleich zwischen den einzelnen Positionen zu ziehen und gegebenenfalls vorherige Vermutungen und Vorstellungen aus Aufgabenstellung 2 zu überdenken. Alle Versuchsteilnehmer bemerkten, dass die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der verschiedenen Ereignisse (Positionen) untereinander verschieden sind. Für die Entscheidung zwischen den Aussagen „Das Schwein landet auf einer Position besonders häufig“ und „Das Schwein landet auf mehreren Positionen besonders häufig“ wurden die Strichlisten genutzt. Bei den Begründungen wurde sowohl mit der Struktur des Zufallsgenerators als auch der Strichliste argumentiert. Es gab aber auch Fehleinschätzungen. So wurde dem Zufallsgenerator ein eigener Willen hinsichtlich der Unbestimmbarkeit des Fallens zugesprochen oder das Würfelschwein mit dem Verhalten eines realen Schweins verglichen.

In der vierten Aufgabe ging es darum, Schlussfolgerungen für ein faires Spiel mit dem asymmetrischen Zufallsgenerator anzustellen. Die Schüler hatten die Aufgabe, die Spielregeln zu vervollständigen, indem sie Punkte für die einzelnen Positionen vergeben. Fünf Versuchsteilnehmer stellten durchweg eine korrekte Beziehung zwischen dem Punktwert und der Häufigkeit der Position her. Sie erkannten, dass sie für weniger oft auftretende Ereignisse mehr Punkte vergeben mussten. Den meisten der anderen sieben Schüler gelang es, einige, aber nicht alle Positionen entsprechend der Relation angemessen zu bepunkten und zu begründen. Bei der Vergabe der Punkte stellten sich die Kinder häufig die folgenden Fragen: Gebe ich der Position, die am seltensten (oder gar nicht) gewürfelt wurde die volle Punktzahl? Erhält die Position, die am häufigsten vorkam, nur einen Punkt oder mehr? Warum? Welche Punktabstände zwischen den Positionen sind angemessen? Bei den Begründungen wurde, vor allem von den Kindern die zu einer sinnvollen Punktbewertung kamen, auf die Häufigkeiten aus der Strichliste zurückgegriffen. Weiterhin wurde mit Aufbau und Struktur des Zufallsgenerators sowie naiven Vorerfahrungen argumentiert.

2 Das Galton-Brett in der Grundschule - Möglichkeiten und Grenzen

Das Galton-Brett wird häufig im Stochastikunterricht der Sekundarstufe II zur Veranschaulichung der Binomialverteilung genutzt und dient als Prototyp der Bernoulli-Kette. Zur Erkundung der Möglichkeiten und Grenzen in der Grundschule wurde eine empirische Studie in zwei ersten Klassen und einer 4. Klasse durchgeführt (vgl. Payer 2017). Durch die Wahl verschiedener Klassenstufen wurden Kinder mit unterschiedlichen Vorkenntnissen zur Thematik der Wahrscheinlichkeit einbezogen.

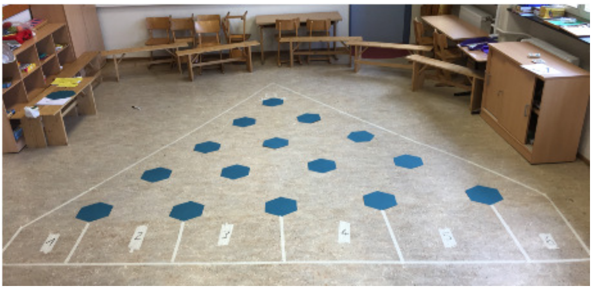


Abb. 2 Handlungsorientiertes Galton-Brett

Hauptanliegen der Studie war die Beantwortung der Frage nach dem Verständnis der Schüler über den Aufbau und Ablauf des Galton-Bretts. Nach Vermutungen, in welches Fach die meisten Kugeln fallen und dem Nachdenken über die Wege zu den einzelnen Fächern, wurde ein handlungsorientierter Zugang des Galton-Brettes erprobt.

Die Schüler sollten sich vorstellen, sie wären selbst die Kugel und durchlaufen nacheinander das Galton-Brett.

Ob an einem Hindernis der Weg nach rechts oder nach links fortgesetzt wird, wird durch einen Münzwurf entschieden. Die Kinder verstanden, dass die geworfene Münzseite ihnen anzeigt, in welche Richtung sie ihren Weg fortsetzen müssen. Nach dem Durchlaufen markierte jeder Schüler das Fach, in welchem er angekommen ist mit einem Bierdeckel. Nachdem alle Schüler das Galton-Brett durchlaufen hatten, wurden die Verteilung der Bierdeckel betrachtet und das Fach bzw. die Fächer genannt, in denen die meisten Bierdeckel und in welchen die wenigsten lagen.

Folgende Erkenntnisse der Studie sind besonders hervorzuheben:

Die Schüler beider Klassenstufen erkannten – zumindest in Ansätzen - die Zufälligkeit eines Weges durch das Galton-Brett und damit auch, dass keine sichere Voraussage getroffen werden kann, in welches Fach man gelangt. Sie erkannten die Ungleichverteilung in den Fächern des Galton-Bretts und deren Zustandekommen sowie die größere Chance in ein mittleres Feld zu gelangen als in ein äußeres. Auch die Erstklässler stellten bereits fest, dass es jeweils nur einen möglichen Weg gibt, um in ein äußeres Feld zu gelangen. Vor allem in der 1. Klasse war die handlungsorientierte Durchführung des Galton-Bretts eine wichtige Unterstützung bei der Gewinnung der Erkenntnisse.

Literatur

Schnabel, S. (2017). Das Würfelschweinchen. Grundschulkinder in Klasse 3 und 4 untersuchen einen asymmetrischen Zufallsgenerator. *Grundschulunterricht Mathematik, 64*(4), 24–26.

Schnabel, S. & Neubert, B. (2017). „Schweinereien" – Grundschüler untersuchen einen asymmetrischen Zufallsgenerator. *Stochastik in der Schule, 37*(3), 25–29.

Payer, M. (2017). *Das Galton-Brett in der Grundschule – Möglichkeiten und Grenzen*. Gießen.

Arbeitsgruppe Geometrie

Koordination: Carla Merschmeyer-Brüwer & Simone Reinhold
c.merschmeyer-bruewer@tu-bs.de simone.reinhold@uni-leipzig.de

Beitrag I: Daniela Götz
daniela.goetz@uni-osnabrueck.de

Typische Schülerfehler bei der Bestimmung von Symmetrieachsen: Eine Analyse von Schülerantworten

Im Rahmen eines Projektes an der Universität Osnabrück wird das Erkennen von Achsensymmetrien in Jahrgangsstufe 3 betrachtet. In einem Leistungstest bearbeiteten Schülerinnen und Schüler Items zum Einzeichnen von Symmetrieachsen in ebenen Figuren. Die in den Aufgaben verwendeten Figuren wurden systematisch variiert (z. B. Lage der Achse und Symmetrie der Figur). In einer detaillierten Analyse der Schülerdokumente wird insbesondere der Einfluss unterschiedlicher Symmetrien auf das Lösungsverhalten der Kinder betrachtet. Ebenso werden typische Fehlerbilder, die beim Einzeichnen von Symmetrieachsen auftreten, herausgearbeitet und im Zusammenhang mit Merkmalen der Figur betrachtet.

1 Empirische Befunde aus Studien zur Achsensymmetrie

In der Entwicklung des Symmetrieverständnisses von Kindern nehmen vertikale Symmetrien bereits ab dem frühen Kindesalter eine besondere Rolle ein: Figuren mit vertikalen Symmetrieachsen werden sowohl besser wiedererkannt als auch besser von nicht symmetrischen Figuren unterschieden als Figuren mit horizontalen oder schrägen Achsen (Bornstein und Stiles-Davis 1984; Fisher et al. 1981). Auch Schülerinnen und Schülern im Grundschulalter fällt das Einzeichnen und Erkennen vertikaler Achsen leichter als das Einzeichnen horizontaler Achsen. Als am schwersten stellt sich auch in diesem Alter noch der Umgang mit schrägen Symmetrieachsen heraus (Schmidt 1986). Weitere Merkmale, die neben der Lage der Achse das Einzeichnen von Symmetrieachsen beeinflussen, sind bisher noch wenig geklärt. Ebenso mangelt es an einer Ausdifferenzierung typischer Fehlerbilder. Als ein typisches Fehlerbild könnte sich erweisen, dass Figuren, die (auch) andere Symmetrien aufweisen, dazu verleiten, zusätzliche falsche Symmetrieachsen einzuzeichnen (Grohe 2011; Schmidt 1986). Bei nicht achsensymmetrischen Figuren, die aber punktsymmetrisch sind, lässt sich vermuten, dass die Punktsymmetrie als Eigenschaft der Figur einen Einfluss darauf hat, ob eine Figur als nicht achsensymmetrisch erkannt oder fälschlicherweise als achsensymmetrisch benannt wird (Genkins 1978; Schmidt 1986). Aus diesen Vermutungen (vgl. Genkins 1978; Schmidt 1986; Grohe 2011) ergeben sich für den vorliegenden Beitrag folgende Fragen: Gibt es Zusammenhänge zwischen der Art der Symmetrie und den Lösungshäufigkeiten bei Aufgaben zum Einzeichnen von Symmetrieachsen? Welche Fehlerbilder treten beim Einzeichnen von Symmetrieachsen auf und stehen diese im Zusammenhang mit Merkmalen der Figur?

2 Untersuchungsdesign

An insgesamt acht Grundschulen wurden Items zum Einzeichnen von Symmetrieachsen von 213 Kindern in Jahrgangsstufe 3 bearbeitet. Die ebenen Figuren wurden systematisch bezüglich der Lage der Symmetrieachse und der (Symmetrie-)Art der Figur variiert.

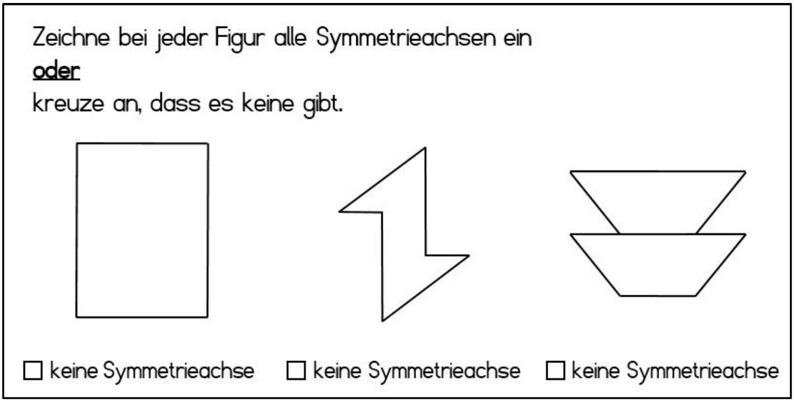


Abb. 1 Beispielaufgabe mit einer achsen-und punktsymmetrischen (li), einer "rein" punktsymmetrischen und einer achsen- und “schubsymmetrischen“ Figur (re).

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurden 19 Figuren entwickelt, dabei wurden folgende (Symmetrie-)Arten variiert und unterschieden: *punktsymmetrisch* (nicht aber achsensymmetrisch), *dreh-*

symmetrisch (nicht aber punktsymmetrisch), *„schubsymmetrisch“* (eine Figur entstanden durch Verschiebung einer Teilfigur), *achsensymmetrisch, achsen- und „schubsymmetrisch“, achsen- und punktsymmetrisch, achsen- und drehsymmetrisch* und *achsen-, punkt- und drehsymmetrisch* (exemplarische Beispiele s. Abb. 1 und Abb. 2).

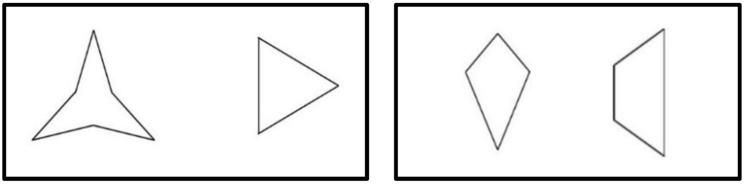


Abb. 2 Beispiele für *achsen- und drehsymmetrische* Figuren (li) und *„rein“ achsensymmetrische* Figuren (re)

Das Design umfasst ebenfalls genaue Überlegungen zur Lage der einzuzeichnenden Symmetrieachsen: Die Anzahl vertikaler, horizontaler und schräger Achsen ist über alle Figuren hinweg gleich.

3 Ausgewählte Ergebnisse und Diskussion

Wie bereits aus anderen Studien bekannt, wird auch in dieser Studie die vertikale Symmetrieachse am häufigsten richtig eingezeichnet, gefolgt von der horizontalen und der schrägen Achse, die am seltensten korrekt eingezeichnet wird.

Unter den Items zum Erkennen von nicht achsensymmetrischen Figuren wurden Items zu *drehsymmetrischen* und zu *„schubsymmetrischen“* Figuren am besten gelöst. Ebenso zeigte sich, dass von allen nicht achsensymmetrischen Figuren *punktsymmetrische* Figuren am seltensten richtig als „nicht achsensymmetrisch“ identifiziert wurden. A*chsen- und punktsymmetrische* Figuren wurden zu circa einem Fünftel fälschlicherweise als „nicht achsensymmetrisch“ befunden.

Betrachtet man alle falsch eingezeichneten „Achsen“, zeigen sich folgende Ergebnisse: In *achsen-, punkt- und drehsymmetrische* Figuren sowie *achsen- und drehsymmetrische* Figuren wurden kaum falsche „Achsen“ eingezeichnet. Der häufigste Fehler bei diesen Figuren war, dass Symmetrieachsen nicht eingezeichnet wurden.

Bezüglich typischer Fehler beim Einzeichnen zeigte sich in dieser Studie, dass Schülerinnen und Schüler fälschlicherweise häufig innenliegende Verbindungslinien zweier Ecken der Figur oder eine zu den Seiten parallel liegende Mittellinie einzeichneten. Insbesondere geschieht dies bei *achsen- und punktsymmetrischen* sowie bei *punktsymmetrischen* Figuren.

Ob eine „Symmetrieachse“ falsch eingezeichnet wird und ob die Figur als „nicht achsensymmetrisch“ erkannt wird, scheint demnach durch die (Symmetrie-)Art beeinflusst zu sein. Möglicherweise spielt beim Einzeichnen falscher „Achsen“ in *punktsymmetrische* Figuren eine Rolle, dass die Figur durch die eingezeichnete Linie in zwei kongruente Teile zerfällt (dies geschieht auch beim Einzeichnen einer Symmetrieachse). Um dies zu überprüfen wäre eine weiterführende Interviewstudie sinnvoll. Typische Fehlerbilder zu falsch eingezeichneten „Symmetrieachsen“, wie sie hier aufgezeigt wurden, könnten eine Orientierung an Oberflächenmerkmalen zur Ursache haben. Auch wäre noch zu prüfen, ob die Raumvorstellung einen Einfluss auf das Lösen der Items zum Einzeichnen von Symmetrieachsen hat.

Literatur

Bornstein, M. H., & Stiles-Davis, J. (1984). Discrimination and Memory for Symmetry in Young Children. *Developmental Psychology, 20*(4), 637–649.

Fisher, C. B., Ferdinandsen, K., & Bornstein, M. H. (1981). The role of Symmetry in Infant Form Discrimination. *Child Development, 52*(2), 457–462.

Genkins, E. F. (1978). Der Begriff der Achsensymmetrie bei Kindern. *Der Mathematikunterricht, 24*(2), 20–43.

Grohe, T. (2011). Achsensymmetrie. Durch ansprechende Handlungen trainieren und verbessern Kinder einer dritten Klasse ihr symmetrisches Verständnis. *Grundschulunterricht Mathematik,* (1), 27–30.

Kühnhenrich, M. (2018). *Untersuchung geometrischer Fähigkeiten von Grundschulkindern anhand von Aufgaben zur Symmetrie ebener Figuren mit verschiedenen Kompetenzanforderungen*. Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Osnabrück. Osnabrück.

Schmidt, R. (1986). *Geometrische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten am Ende der Grundschulzeit: Ergebnisse einer Untersuchung*. Justus-Liebig-Universität. Gießen.

Beitrag II: Ninja Del Piero
ninja.delpiero@math.upb.de

Lern- und Kooperationsprozesse in natürlich differenzierenden, geometrischen Lernumgebungen

1 Überblick über das Forschungsprojekt

Natürlich differenzierende Lernumgebungen stellen in Aussicht, dass alle Kinder auf ihrem jeweiligen Leistungsniveau und nach ihren individuellen Vorgehensweisen arbeiten können und sich daraus ein von- und miteinander Lernen aus der Sache heraus ergibt. Empirische Untersuchungen legen den Fokus dabei bisher vor allem auf das individuelle Lernen und zeigen dort, dass das Potential meist ausgeschöpft wird (vgl. z.B. Krauthausen & Scherer 2010). Es existieren jedoch wenige Erkenntnisse hinsichtlich natürlich differenzierender Lernumgebung zur Raumvorstellung und des von- und miteinander Lernens innerhalb jener. Das Forschungsprojekt „KindeR" nimmt u.a. diese Aspekte in den Fokus. Dafür wurde die geometrische Lernumgebung „Würfelgebäude entdecken" zur Förderung der Raumvorstellung im Lehr-Lern-Labor „ZahlenRaum" der Universität Paderborn im Sinne der fachdidaktischen Entwicklungsforschung entwickelt und mit dritten und vierten Klassen durchgeführt und erforscht. Zentrale Frage des Forschungsprojektes ist einerseits zu untersuchen, welche unterschiedlichen Vorgehensweisen und Niveaus die Kinder zeigen, die anhand der räumlichen Fähigkeiten konkretisiert und u.a. entsprechend hinsichtlich des Ausbaus der Komponenten räumlichen Vorstellungsvermögens (Maier 1999) und auftretenden Schwierigkeiten beim Darstellungswechsel analysiert werden. Andererseits wird in einem zweiten Schritt untersucht, wie diese unterschiedlichen Vorgehensweisen und Fähigkeiten in der Kooperation miteinander ausgehandelt werden und ob sich die Kinder gegenseitig unterstützen.

2 Die Lernumgebung „Würfelgebäude entdecken“

Bei der Bearbeitung der Lernumgebung „Würfelgebäude entdecken“ steht der Bau von dreidimensionalen Würfelgebäuden, deren Darstellung in zweidimensionalen Ansichten und Bauplänen und den damit verbundenen Anforderungen an das räumliche Vorstellungsvermögen der Kinder im Vordergrund. Die Lernumgebung besteht aus drei Etappen mit jeweils mehreren Aufgaben, die das Bauen von Würfelgebäuden und das Darstellen der Ansichten erfordern. Zur Lösung stehen den Kindern dabei Würfel, eine beschriftete Drehplatte, auf der das Würfelgebäude gebaut und ausgerichtet werden kann, sowie Ansichten auf Karten zur Verfügung. Die Darstellung der Ansichten folgt dabei dem Prinzip der Dreitafelprojektion mit Aufsicht, Vorderansicht und Seitenansicht, welche zur besseren Orientierung auf 5x5-Raster eingetragen sind und farblich unterschieden werden.

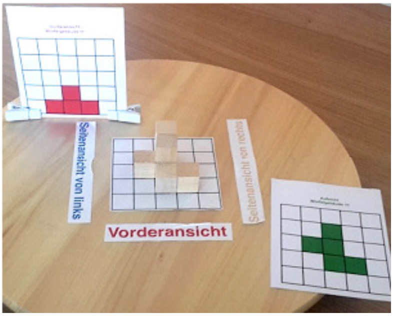


Abb. 1 Material der Lernumgebung

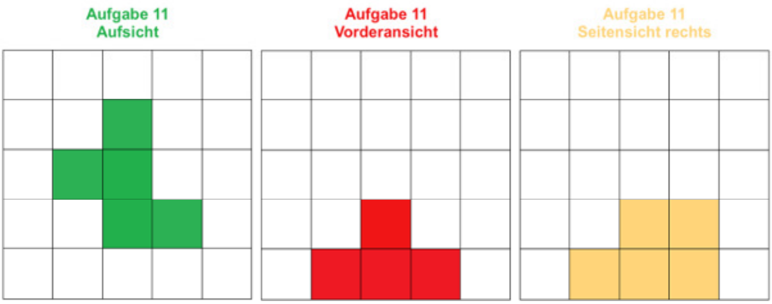


Abb. 2 Ansichten auf das Würfelgebäude 11
(Aufsicht im Original grün, Vorderansicht rot und Seitenansicht rechts gelb)

Bei dem Wechsel zwischen dem dreidimensionalen realen Würfelgebäude und den zweidimensionalen Ansichten müssen mehrere Aspekte beachtet werden: es muss z.B. aus dem richtigen Blickwinkel geschaut, perspektivische Verzerrungen idealisiert bzw. „die abstrakten Darstellungen […] in räumliche Informationen umgesetzt“ (Junker 1999, S. 23) und versteckte Würfel beachtet werden (Junker 1999, Scherer & Wellensiek 2012).

3 Schwierigen im Darstellungswechsel zwischen dreidimensionalem Gebäude und zweidimensionaler Ansicht

Bei der Analyse der Videos hinsichtlich der Vorgehensweisen und räumlichen Fähigkeiten der Kinder zeigt sich eine immer wiederkehrende Herausforderung darin, das dreidimensionale reale Würfelgebäude mit der idealisierten zweidimensionalen Darstellung der Ansichten übereinzubringen. Oftmals werden bspw. die Vorderansicht oder die Seitenansicht wie die Aufsicht in horizontaler Lage interpretiert, versetzte Würfel verschoben, um diese mit anderen Würfeln auf eine Linie zu bringen, oder versetzte Würfel in den Ansichten in höhere Kästchen gezeichnet, sodass die Verzerrung übernommen wird.

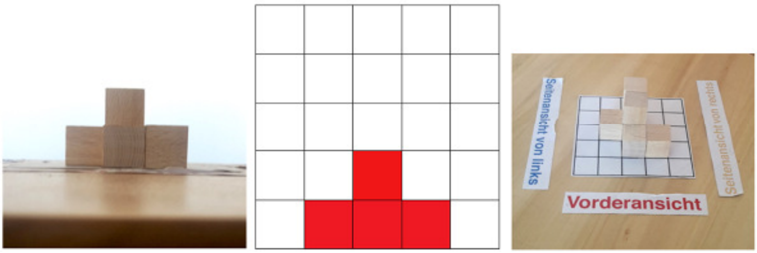


Abb. 3 Vorderansicht des Würfelgebäudes 11 aus passender Perspektive (links), in idealisierter zweidimensionaler Darstellung (Mitte) und aus nicht passender, schräger Sicht von oben (rechts)

Die Schwierigkeit könnte möglicherweise darin begründet sein, dass die Kinder sich nicht im Sinne der Komponente räumliche Orientierung (Maier 1999) mental in die ihnen zugeschriebene Perspektive hineinversetzen. Sie stellen sich womöglich nicht vor, direkt vor dem Gebäude zu stehen, sondern verharren in einer schrägen Sicht von oben, in der Verzerrungen und der Versatz einzelner Würfel des Würfelkomplexes wesentlich stärker herausstechen und den Abgleich mit der idealisierten Darstellung erschweren (siehe Abbildung 3).

Da die Kinder die Gebäude gemeinsam bauen sollen, ergibt sich die Lernchance im Sinne des von- und miteinander Lernens, dass andere Kinder bei Schwierigkeiten erklärend einwirken:

Luca	**Guck mal hier** *(zeigt mit dem Finger auf die von vorne aus sichtbaren drei vorderen Würfel)* **Du siehst ja nur die** *(hält seine Handfläche senkrecht vor die Vorderansicht des Würfelgebäudes* **(..) Ach!** *(winkt ab)*
Titus	**Ich hab nur dieses** *(zeigt seine Karte mit der Vorderansicht)*
Luca	**Jaaa! Und du siehst ja nur die Steine** *(deutet auf die untere Reihe der Vorderansicht auf der Karte und dann auf die Titus zugewandten Seitenflächen der vorderen drei Würfel des Gebäudes)*

Die Kinder versuchen beim Auftreten der Schwierigkeit oft zu erläutern, wie der andere schauen muss oder was er sehen kann, zeigen aber Schwierigkeiten darin, das Phänomen zu verbalisieren und passende Begriffe zu verwenden. Daher erfolgt die Erläuterung oftmals über Zeigen am Material, was nicht immer weiterhilft. Dennoch bestehen Lernchancen im gemeinsamen Tun: Titus kann die richtige Lösung des Würfelgebäudes im weiteren Verlauf der Interaktion nachvollziehen, als er - möglicherweise angeregt durch die Erklärung Lucas - seine Position so verändert, dass er das Gebäude auf Augenhöhe mit der Drehplatte betrachtet.

Literatur

Junker, B. (1999). Räumliches Denken bei lernbeeinträchtigten Schülern. In *Die Grundschulzeitschrift*, 121, S. 22-24.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2010). Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Ausgestaltung und Zwischenergebnisse des EU-Projektes NaDiMa (Partner Deutschland). In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 735-738). Münster: WTM-Verlag.

Maier, P.H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen*. Donauwörth: Auer.

Scherer, P. & Wellensiek, N. (2012): Ein Würfelbauwerk: verschiedene Ansichten – verschiedene Materialien. In *Grundschulunterricht Mathematik*, 1, S. 8-11.

Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation

Koordination: Birgit Brandt & Uta Häsel-Weide

birgit.brandt@zlb.tu-chemnitz.de

uta.haesel.weide@math.uni-paderborn.de

Beitrag: Evelyn Schneider

evelyn.schneider@tu-dortmund.de

Lösungswege und Begründungen von Kindern mit Spracherwerbsstörungen bei der Bearbeitung schriftlicher Mathematikaufgaben

Internationale und nationale Vergleichsstudien zeigen auf, dass Mathematikleistungen signifikant durch herkunftsbedingte und sprachliche Faktoren beeinflusst werden (Ufer, Reiss & Mehringer, 2013; Prediger et al., 2015). In diesem Zusammenhang gewinnt die Frage an Bedeutung, wie Spracherwerbsstörungen (SES) sich in mathematischen Anforderungskontexten auswirken und mit welchen Strategien die Lernenden diese Herausforderungen bewältigen.

1 Einfluss sprachlicher Faktoren auf das mathematische Lernen

Der Einfluss sprachlicher Faktoren auf das mathematische Lernen wird in den verschiedenen Funktionen der Sprache im Unterricht deutlich. Sprache nimmt als Lernmedium und Lerngegenstand eine *kommunikative Funktion* ein (Maier & Schweiger, 1999, S. 17). Grundlegend für gelungene Kommunikationsprozesse im steten Wechsel von Sprachrezeption und -produktion ist eine gemeinsame Sprachbasis, d.h. eine ausreichende Kenntnis über verbale Konventionen im fachlichen Kontext. Auch mentale Konstruktions- und Speicherprozesse werden sprachlich realisiert, sodass Sprache zusätzlich *kognitive Funktionen* einnimmt. Beispielsweise wird das kleine Einmaleins als große Datenmenge zumeist im verbalen Gedächtnis gespeichert (Dehaene, 1999, S. 152, s. auch Abb.1).

Bei Kindern mit SES können – in unterschiedlicher Ausprägung – in allen Prozessen und an mehreren Stellen gleichzeitig Beeinträchtigungen auftreten, wobei diese nicht durch den Faktor Intelligenz zu erklären sind.

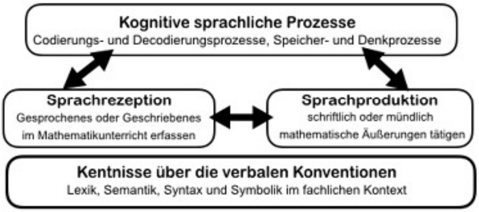


Abb. 1 Sprachliche Anforderungen im Mathematikunterricht

2 Forschungslage zum Zusammenhang von Sprachkompetenz und Mathematikleistungen

Der Einfluss von SES auf die mathematischen Kompetenzen der Lernenden ist bisher kaum erforscht. Studien zu den Mathematikleistungen bilingualer Kinder weisen auf mögliche Schwierigkeiten bei der Erschließung des Aufgabentextes und der Sinnkonstruktion hin, welche hinderlich für die erfolgreiche Bearbeitung textlastiger Aufgaben sind. Als ursächlich werden Leseschwierigkeiten oder eine unzulängliche Sprachbasis der Lernenden sowie verschiedene schwierigkeitsgenerierende linguistische Merkmale in den Testitems vermutet (Stephany, 2018).

Bei mathematischen „Aufgaben, die durch schematisierbare, gut strukturierte Lösungsprozeduren bewältigt werden können“ (Ufer et al. 2013, S. 197), wurden bislang keine signifikanten Unterschiede zwischen mono- und bilingualen Lernern festgestellt. Kinder mit SES zeigen dagegen zum Teil auch unterdurchschnittliche Leistungen in numerischen Basisfähigkeiten (v.a. Ritterfeld & Schröder, 2014, S. 54).

3 Forschungsdesign

Dem vorgestellten Forschungsvorhaben im Mixed-Methods-Design dienen die Ergebnisse der bundesweiten VERA 3 - Erhebungen aus den Jahren 2015 und 2016 als Ausgangspunkt.

Die Lösungshäufigkeiten der Aufgaben wurden verglichen und geprüft, ob ein signifikanter Unterschied zwischen Drittklässlern mit und ohne Förderbedarf Sprache festzustellen ist. Auffällig war nach einer qualitativen Analyse der linguistischen und mathematischen Aufgabenspezifika, dass ein Testitem mit rein sprachlichen Anforderungen keine signifikanten Leistungsunterschiede aufwies, während die Lösungshäufigkeiten hauptsächlich symbolisch repräsentierter Aufgaben zum Teil deutlich abwichen.

Um die Ursachen dafür genauer zu erforschen, wurden zehn der Testaufgaben an Förderschulen mit dem Förderschwerpunkt Sprache mit insgesamt 118 Drittklässlern erneut erprobt. Anschließend wurden mit 22 Kindern diagnostische Einzelinterviews zu 4 der Testaufgaben durchgeführt.

4 Ausgewählte Ergebnisse der Studie

Das vorgestellte Testitem ist für den Fokus auf fachliche und sprachliche Herausforderungen für Kinder mit SES und deren Lösungsstrategien besonders interessant. Zum einen ist die Aufgabenstellung rein sprachlich repräsentiert (Ausnahme: die Zahldarstellung „38“). Zum anderen wird als Antwort eine schriftlich formulierte, sprachliche Begründung eingefordert (vgl. Abb.2). Trotzdem war der Anteil der richtigen Lösungen der Kinder mit SES bei der Aufgabe nicht signifikant geringer als bei den Regelschülern, obwohl 30% der Lernenden gar keine Eintragung im Antwortfeld vornahm.

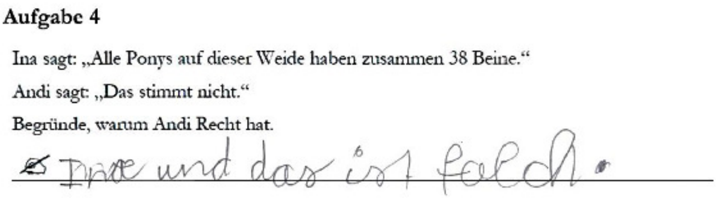


Abb. 2 Beispiellösung zu Aufgabe 4 (Aufgabentext: VERA 3, 2015)

Bei der sprachlichen Analyse der 81 formulierten Antworten fiel auf, dass häufig (N=59) die Konjunktion „weil“ verwendet wurde, die typisch dafür ist, kausale, begründende Sätze einzuleiten. Das lässt vermuten, dass ein Großteil der Lernenden den Operator „Begründe“ in der Aufgabenstellung richtig gedeutet hat.

Auf inhaltlicher Ebene wurden 17 verschiedene Bearbeitungstypen identifiziert.

Bei Lösungen, die einen expliziten Bezug zur Viererreihe herstellen (N=6), das Problem der restlichen 2 Beine ansprechen (N=5) oder die Anzahl der Beine von 9 bzw. 10 Ponys als Bezugsgröße angeben

(N=7), wird davon ausgegangen, dass die Aufgabe sowohl sprachlich als auch konzeptuell durchdrungen wurde.

Bei der am häufigsten vorgefundenen Begründung, dass jedes Pony vier Beine hat (N=20), bleibt dagegen unklar, ob der multiplikative Kontext immer berücksichtigt wurde. In den Auswertungsvorgaben von VERA 3 gilt der Satz als „richtig“. In der Antwort: „Weil Ponys ja keine Raupen sind. Ponys haben 4 Beine“, wird jedoch deutlich, dass die 38 Beine manchmal nur einem einzigen Tier zugeschrieben werden. So produzieren einige Kinder trotz fehlerhafter Sinnkonstruktion richtige Lösungen.

Andererseits gibt es Begründungen, die aufgrund fehlender Konkretisierungen zunächst keine Rückschlüsse auf das mathematische oder sprachliche Verständnis der Kinder zulassen, wie z.B.: „Weil Andi besser rechnen kann“. In den Interviews zeigt sich, dass manche der Lernenden die Aufgabe zwar richtig deuten und berechnen, jedoch große Schwierigkeiten haben, ihre Überlegungen schriftlich verständlich und angemessen darzustellen.

Literatur

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser Verlag.

Maier, H., & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache*. Wien: Öbv & hpt.

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Gürsoy, E., & Benholz, C. (2015). Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen 10. *Journal für Mathematikdidaktik, 36*(1), 77–104.

Stephany, S. (2018). *Sprache und mathematische Textaufgaben. Eine empirische Untersuchung zu leser- und textseitigen sprachlichen Einflussfaktoren auf den Lösungsprozess*. Münster: Waxmann.

Schröder, A., & Ritterfeld, U. (2014). Zur Bedeutung sprachlicher Barrieren im Mathematikunterricht der Primarstufe: Wissenschaftlicher Erkenntnisstand und Reflexion in der (Förder-)Schulpraxis. *Forschung Sprache*, 1, 49-69.

Ufer, S., Reiss, K., & Mehringer, V. (2013). Sprachstand, soziale Herkunft und Bilingualität: Effekte auf Facetten mathematischer Kompetenz. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann, & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 185-201). Münster: Waxmann.

Arbeitsgruppe Lehrerfortbildung

Koordination: Marianne Grassmann & Christoph Selter
marianne.grassmann@staff.hu-berlin.de
christoph.selter@math.tu-dortmund.de

Beitrag: Mark Sprenger
mark.sprenger@ph-karlsruhe.de

Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen zu besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen: Ergebnisse einer Interventionsstudie

Um Rechenschwierigkeiten zu diagnostizieren und passgenaue Förderangebote zu erstellen und durchzuführen, werden fachlich gut ausgebildete Lehrerinnen und Lehrer benötigt (Gaidoschik, 2015). Untersuchungen (z. B. Schulz, 2014) zeigen, dass die benötigten fachdidaktischen Kompetenzen nicht immer in ausreichendem Maße vorhanden sind. Hier können Lehrerfortbildungen ansetzen (Lipowsky, 2014; Lesemann, 2015).

Im Rahmen eines Dissertationsprojekts wird untersucht, wie sich Qualifizierungsmaßnahmen in Form von Fortbildungen unterschiedlicher zeitlicher Dauer zum Thema Rechenschwierigkeiten auf das diagnostische Wissen und die Selbstwirksamkeitserwartungen in Bezug auf Diagnose der fortgebildeten Lehrpersonen auswirken.

1 Die Fortbildungskonzeptionen

Die Studie untersucht vergleichend zwei Fortbildungskonzeptionen zum Thema Rechenschwierigkeiten. Bei der Konzeption A handelt es sich um eine Qualifizierungsmaßnahme, die an insgesamt sieben Tagen innerhalb eines Schuljahres durchgeführt wurde. Inhaltlich wurden dabei wissenschaftliche Hintergründe zu den Hauptsymptomen von Rechenschwäche, dem Aufbau von Grundvorstellungen sowie tragfähige Diagnose- und Förderkonzepte vermittelt (Wartha & Schulz, 2012). Letztere wurden auch an weiterführenden Inhalten wie Größen und Sachrechnen oder Arbeiten mit Bruchzahlen konkretisiert. Die teilnehmenden Lehrpersonen verpflichten sich, ihr gelerntes Wissen zwischen den einzelnen Bausteinen konkret in einem wöchentlich stattfindenden Förderunterricht in Kleingruppen umzusetzen und anzuwenden. Bei der Fortbildungskonzeption B handelt es sich um eine eintägige Fortbildung. Inhaltlich standen hier die beiden Hauptsymptome von Rechenschwäche und der Aufbau von Grundvorstellungen im Bereich der Addition und Subtraktion im Vordergrund. Um eine Vergleichbarkeit zwischen den unterschiedlichen Konzeptionen zu ermöglichen, wurde bei der Analyse der Wirksamkeit auf zwei fachdidaktische Inhalte fokussiert, welche in beiden Fortbildungen behandelt wurden: Dem Überwinden des zählenden Rechnens und dem Aufbau eines Stellenwertverständnisses.

2 Forschungsmethoden

Die Messung des diagnostischen Wissens und der Selbstwirksamkeitserwartung erfolgte in einer Interventionsstudie im Längsschnitt mittels eines Prä-Post-Designs. Die erste Messung fand für beide Konzeptionen vor Beginn der jeweiligen Fortbildungsmaßnahme statt, die zweite Messung am Ende des jeweiligen Schuljahres. Die Erfassung des diagnostischen Wissens erfolgte in der vorliegenden Untersuchung über Videovignetten (vgl. dazu Sprenger, Wartha & Lipowsky, im Druck). Neben dem handlungsnahen Wissen wurde auch die Selbstwirksamkeit in Bezug auf Diagnose als Kontextvariable erfasst.

3 Auswertung und Ergebnisse

Die Auswertung der erhobenen Daten erfolgte mit einer Varianzanalyse mit Messwiederholungsdesign. Dabei wurde untersucht, inwieweit sich das Wissen und die Selbstwirksamkeitserwartung verändern und ob die Gruppenzugehörigkeit für die Veränderung verantwortlich ist. Es wurde gegen ein Signifikanzniveau von $p = 0.05$ getestet. Abhängig von der jeweiligen Skala wurden die Analysen auf Grundlage einer Stichprobe von $N = 98$ bis 103 Lehrpersonen durchgeführt.

Die Auswertung der Skala ‚Diagnose zählendes Rechnen' auf Gruppenebene zeigt eine signifikante Veränderung in Bezug auf den Faktor Zeit, $F(1,98) = 24.45$, $p < 0.01$ mit einem partiellen $\eta^2 = 0.20$. Für die Interaktion zwischen dem Faktor Zeit und der Gruppenzugehörigkeit kann keine Signifikanz nachgewiesen werden, $F(1,98) = 0.00$,

$p = 0.95$, partielles $\eta^2 = 0.00$. Die Untersuchungsgruppe (Konzeption A) weist vor der Fortbildung eine etwas höheres Wissen auf als die Vergleichsgruppe (Konzeption B). Dieser Unterschied ist aber nicht signifikant. Der Mittelwertsunterschied zwischen dem Zeitpunkt t1 und t2 ist mit 0.19 und 0.20 nahezu identisch. In beiden Gruppen stieg das diagnostische Wissen signifikant.

Der Faktor Zeit wurde bei der Skala ‚Diagnose Stellenwertprobleme' ebenfalls signifikant $F(1,96) = 8.61$, $p < 0.01$ mit einem partiellen $\eta^2 = 0.08$. Die Interaktion Faktor Zeit und Gruppenzugehörigkeit wurde nicht signifikant $F(1,96) = 0.42$, $p > 0.52$, partielles $\eta^2 = 0.00$. Vor Beginn der Qualifizierungsmaßnahmen war nahezu kein Unterschied zwischen den Gruppen festzustellen. In beiden Gruppen gab es einen Wissenszuwachs. Die nach der Fortbildung gemessenen Werte zeigen einen leicht höheren Wert der Gruppe A. Dieser Unterschied im Zuwachs der beiden Gruppen ist allerdings nicht signifikant.

Die Auswertung der Skala ‚Selbstwirksamkeit Diagnose' ergibt, dass der Faktor Zeit mit $F(1,101) = 48.91$, $p < 0.01$ und einem partiellen $\eta^2 = 0.33$ sowie die Interaktion zwischen Zeit und Gruppe mit $F(1,101) = 4.55$, $p < 0.05$ und einem partiellen $\eta^2 = 0.04$ signifikant sind. Vor der Fortbildung unterscheiden sich die gemessenen Mittelwerte der beiden Gruppen kaum. Für Gruppe A ist ein deutlicher Anstieg, für Gruppe B ein geringer Anstieg zu verzeichnen. Daraus resultiert ein signifikanter Unterschied nach der Fortbildung in der Selbstwirksamkeitserwartung bzgl. der Diagnose der beiden Gruppen.

4 Diskussion der Ergebnisse

Die dargestellten Analysen zeigen, dass Fortbildungsmaßnahmen, die auf die Diagnose des zählenden Rechnens und eines Stellenwertverständnisses fokussieren, signifikante Zuwächse bei den gemessenen handlungsnahen Wissensfacetten und der Selbstwirksamkeit bewirken. Die ähnlichen Zuwächse der beiden Gruppen an diagnostischer Kompetenz in Bezug auf zählendes Rechnen und Stellenwertverständnis lassen sich dadurch erklären, dass bei beiden Fortbildungskonzeptionen vergleichbar viel Zeit auf diese Symptome gelegt wurde.

Die längerfristig angelegte Fortbildungsreihe nach Konzeption A zeigt signifikant höhere Zuwächse in der Selbstwirksamkeitserwartung der Lehrpersonen. In Bezug auf das berufliche Selbstverständnis der Lehrpersonen ist es nicht nur wichtig, dass diese über diagnostische Fähigkeiten verfügen, sondern dass sie sich auch als kompetent wahrnehmen. Dies ist für die konkrete Arbeit mit den Schülerinnen und Schülern sowie in der Kommunikation mit Kolleginnen, Kollegen und Eltern relevant.

Literatur

Gaidoschik, M. (2015). *Rechenschwäche - Dyskalkulie: Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern* (9. Aufl.). Hamburg: Persen.

Lesemann, S. (2015). *Fortbildungen zum schulischen Umgang mit Rechenstörungen*. Wiesbaden: Springer-Verlag. http://doi.org/10.1007/978-3-658-11380-3

Lipowsky, F. (2014). Theoretische Perspektiven und empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfort- und - weiterbildung. In E. Terhart, H. Bennewitz, & M. Rothland (Hrsg.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (S. 398–417). Münster: Waxmann.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften: Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien. http://doi.org/10.1007/978-3-658-08693-0

Sprenger, M., Wartha, S., & Lipowsky, F. (im Druck). Wirkungen von Qualifizierungsmaßnahmen zum Thema Rechenschwierigkeiten auf das diagnostische Wissen von Lehrpersonen – Erfassung von handlungsnahem Wissen durch Videovignetten. In Leuders, T., Christophel, E., Hemmer, M., Korneck, F., & P. Labudde (Hrsg.), *Fachdidaktische Forschung zur Lehrerbildung*. Münster: Waxmann Verlag.

Wartha, S., & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen*. Berlin: Cornelsen.

Arbeitsgruppe Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien

Koordination: Roland Rink & Daniel Walter

r.rink@tu-braunschweig.de d.walter@uni-muenster.de

Beitrag: Alexandra Pilgrim

alexandra.pilgrim@uni-hamburg.de

Tablet-Einsatz im Mathematikunterricht der Grundschule: Unterrichtserprobungen zum Thema Dreitafelprojektion

Im Rahmen des Projekts Digitales Lernen Grundschule (vgl. DLG o.J.), gefördert von der Deutsche Telekom Stiftung, wurde im Teilprojekt ›APPsicht‹ der Universität Hamburg eine umfangreiche geometrische Lernumgebung zum Thema Würfelkonfigurationen entwickelt und erprobt. Die vollständige Auswertung der Daten ist in Arbeit. Ausgewählte Beobachtungen und Erkenntnisse stellt dieser Beitrag dar.

1 Die Zwei-/Dreitafelprojektion im Rahmen des Themas Würfelkonfigurationen

Die gesamte Lernumgebung umfasste die drei Sequenzen (1) Baudiktate, (2) Baupläne und (3) Zwei-/Dreitafelprojektion. Letztere soll hier näher vorgestellt werden. Sie gliederte sich wie folgt:

a) Einführung Zwei-/Dreitafelprojektion

b) Bauen nach Bauplan – gesucht: Aufriss und Seitenriss

c) Bauen nach Auf- und Seitenriss – gesucht: Bauplan

d) Bauen nach Grund- und Aufriss – gesucht: Bauplan

Im Teil d) kam die App „Klötzchen“ (Etzold, 2018) zum Einsatz, die auf Tablet-Computern von den Kindern genutzt wurde:

Nach Hinführung zur Aufgabenstellung anhand analoger Materialien (*Schattenbox*; Pöhls, 2015) erstellten die Schülerinnen und Schüler in dieser Stunde nach Vorgabe von Grund- und Aufriss auf Papier in Partnerarbeit Würfelbauwerke digital in der App. Anschließend kontrollierten sie ihre Lösungen, indem sie das Zweitafelbild in der App zuschalteten und mit der analogen Darstellung verglichen. Sie hielten ihre Ergebnisse analog in Bauplänen fest. Einige Kinder vermochten die Bauwerke bereits direkt in der App in der Bauplandarstellung zu bestimmen, ohne die 3D-Ansicht zu nutzen. Ein zweiter Arbeitsschwerpunkt bestand darin, verschiedene Lösungen zu einer derartigen Aufgabenstellung zu finden.

2 Mögliche Potentiale der App

Im Folgenden werden Chancen des Einsatzes der App „Klötzchen" dargelegt, die im Vortrag anhand von Unterrichtsbeispielen ausführlicher diskutiert wurden:

- *Motivation*

Eine erhöhte Motivation und Anstrengungsbereitschaft der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf Aufgabenbewältigung und Kooperation in der Partnerarbeit mag einerseits vom digitalen Medium an sich ausgehen, aber auch vom Vermögen der App, zügig, präzise und u. U. wiederholend Würfelkonfigurationen (auch solche aus einer großen Anzahl von Würfeln) aufzubauen, sodass keine „Warteschleifen" entstehen, die sich negativ auf die Kommunikation auswirken könnten. Weiterhin scheint der „Reiz des Großen" attraktiv: Immer wieder testeten Kinder, von eigentlichen Aufgabenstellungen losgelöst, ob und inwiefern die App Grenzen aufweist, indem sie „unendlich" hohe Würfeltürme zu bauen suchten oder Baupläne „über 100" erstellten. Die App bietet hier eine Chance, dem Forschungsdrang von Kindern gerecht zu werden, aber auch das Risiko, von konkreten Aufgabenstellungen abzulenken.

- *Funktionalität*

Die App „Klötzchen" fungierte in der gesamten Unterrichtsreihe als Kontrollinstrument. Durch das Potential zur Synchronisation und Vernetzung der Darstellungsebenen (Walter, 2018) bekamen die Schülerinnen und Schüler direkt eine Rückmeldung zu ihren individuellen Bearbeitungen und wurden bei Unstimmigkeiten zum kooperativen Überdenken und Korrigieren angeregt.

- *Präsentation und Permanenz*

Mit Hilfe von Beamer und Pointer konnten Aktivitäten und Ergebnisse in der App für alle sichtbar präsentiert werden. Die App enthält zwar keine Speicherfunktion, es lassen sich jedoch sehr zügig Würfelbauten und Baupläne erzeugen und verändern, um darüber ins Gespräch zu kommen.

- *Kognitive Entlastung und Passung zwischen Handlung und mentaler Operation (Walter, 2018)*

Die Schülerinnen und Schüler nutzten die Möglichkeit, Würfelbauwerke in der App um alle drei Raumachsen zu drehen, was eine kognitive Entlastung darstellen kann, die von der Notwendigkeit befreit, das eigene Auge um das Bauwerk herum zu bewegen oder sich die Ansichten mental vorzustellen. Die rote Horizontlinie in der App half, das Bauwerk wieder in Normalposition (Vorderansicht) zu bringen. Die Drehfunktion (wie auch die Möglichkeit am Bauwerk einzelne Würfel hinzuzufügen und zu entfernen) kann eine Passung zwischen Handlung und mentaler Operation darstellen. Zu jeder Ansicht des Bauwerks erscheint in der anderen Bildschirmhälfte zeitlich simultan das entsprechende Zweitafelbild. Im Zusammenhang mit der Zwei-/Dreitafelprojektion stellt allerdings das Drehen des Betrachtungsgegenstandes (Objekt) im Vergleich zur Drehung des eigenen Auges (Subjekt) bereits einen Abstraktionsvorgang dar. Das Gleiche gilt für die Tatsache, dass sich die Erzeugung der Projektionsbilder in der App in der Ebene vollzieht und nicht wie in der Realität im dreidimensionalen Raum.

- *Vom Konkreten zum Abstrakten*

Durch die Wechselbeziehungen zwischen physischem, virtuellem und mentalem Operieren scheinen die Funktionen der App (im Zusammenhang mit der Zwei-/Dreitafelprojektion) einen Übergang vom Konkreten zum Abstrakten zu unterstützen, den rein analoge Medien nur bedingt bieten können.

Grundsätzlich ermöglicht die App den Kindern durch das Zuschalten- und Ausblenden von Bildschirmhälften, das Verändern sowie das Kombinieren der synchron vernetzten multiplen Repräsentationsebenen in unterschiedlichen Phasen des Lernprozesses auf unterschiedliche Darstellungsformen (Bruner, Olver & Greenfield, 1971) zurückzugreifen.

3 Zusammenfassung und Ausblick

Insgesamt wurde in der Erprobung die Notwendigkeit einer soliden

Einführung und Arbeit anhand konkreter physischer Materialien (hier: die Schattenbox) deutlich, ohne die Schülerinnen und Schüler kaum Vorstellungen und Einsichten im Bereich dieses komplexen, anspruchsvollen Inhalts erlangen. Das digitale Medium kam erst zum Einsatz, als das Prinzip der Zwei-/Dreitafelprojektion verinnerlicht war. „Klötzchen“ wurde als ein Werkzeug genutzt, das durchgängig in Ergänzung zu analogen Materialien stand und stehen sollte.

Gewiss wären die Ziele dieser Unterrichtssequenz auch ohne digitale Medien zu erreichen gewesen. An einigen Stellen boten diese jedoch organisatorische Vorteile. Außerdem birgt die App wie unter 2 dargestellt mediendidaktische, aber insbesondere auch fachdidaktische Potentiale, die analoge Medien allein nicht bieten können. Entfalten kann die Potentiale allerdings nur ein sorgfältig geplanter Unterricht in Bezug auf das Wechselspiel zwischen analogen und digitalen Medien unter Berücksichtigung von Lernzielen, Lernvoraussetzungen und differenzierten Aufgaben.

Überlegt wird, auf den Erkenntnissen dieser Erprobung aufbauend, eine abschließende Sequenz zur Dreitafelprojektion unter Nutzung der neuen Funktion der App „Klötzchen“, dem Dreitafelbild, durchzuführen. Auch böte sich das Applet „Bauen mit Würfeln“ (Freudenthal Institut, 2008) zur Erprobung an.

Literatur

Bruner, J.S. & Olver, R.R., & Greenfield, P.M. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Stuttgart: Klett.

DLG – Digitales Lernen Grundschule (o.J.). Abgerufen von https://is.gd/PiSESD

Etzold, H. (2018). *Klötzchen 3.0.* Abgerufen von http://t1p.de/qwu0

Freudenthal Institut. (2008). *Cube Building.* Utrecht. Abgerufen von http://t1p.de/yi6x

Pöhls, A. (2015). Bauen in der Schattenbox. *Grundschule Mathematik,* (45), 22–25.

Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps: Eine Untersuchung bei zählend rechnenden Lernenden zu Beginn des zweiten Schuljahres*. Wiesbaden: Springer.

Arbeitsgruppe Sachrechnen

Koordination: Dagmar Bönig
dboenig@uni-bremen.de

Beitrag: Dana Farina Weiher
weiher@leuphana.de

Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Volumina mit verschiedenen Aufgabentypen

1 Schätzen von Größen in der Mathematikdidaktik

Das Schätzen von Größen ist zunächst zu differenzieren vom Schätzen von Anzahlen und Rechenergebnissen (Hogan & Brezinski, 2003). Darüber hinaus wird zwischen dem qualitativen und dem quantitativen Schätzen unterschieden. So wird beim qualitativen Schätzen der Vergleich zweier Objekte ohne eine Größenangabe oder Zahl bewertet (z. B. mit Wörtern wie mehr/weniger oder länger/kürzer), während beim quantitativen Schätzen „eine Zahl oder Größenangabe als Ergebnis erwartet wird“ (Ruwisch, 2014, S. 5).

Schätzen von Größen bedeutet, durch den mentalen Vergleich mit einem Stützpunkt eine ungefähre Größenangabe zu ermitteln (Franke & Ruwisch, 2010; Bright, 1976). Ein Stützpunkt ist ein Objekt, dessen ungefähre Größenangabe und Größenausprägung bekannt sind und welches daher als Vergleichsobjekt herangezogen werden kann. Nahezu alle Schätzstrategien für visuell erfassbare Größen basieren auf dem Vergleich mit Stützpunkten (Heid, 2018; Weiher & Ruwisch 2018).

2 Aufgabentypen beim Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Volumina

Schätzaufgaben können auf verschiedene Weise gestellt werden. Eine systematische Charakterisierung verschiedener Schätzaufgaben stammt von Bright (1976). Die Unterscheidung von acht Aufgabentypen beruht dabei auf der Art der Fragestellung (zu einem Objekt eine Größe nennen oder umgekehrt), der Sichtbarkeit des Objekts und der Einheit, sowie der Nennung möglicher Antworten.

Weitere Merkmale werden von Bönig (2001) formuliert. Demnach kann das zu schätzende Objekt auch „nur teilweise vorhanden" sein (wenn es aus mehreren gleichen Teilen besteht und nur eines dieser Teile gegeben ist). Zusätzlich kann unterschieden werden, ob das Objekt bereits eine Möglichkeit zur Strukturierung bietet oder nicht oder ob diese gedanklich möglich wäre. Bönig verweist außerdem auf das Vorhandensein anderer Objekte als Hilfsmittel.

Diese genannten Merkmale können durch weitere Merkmale ergänzt werden, sodass schnell deutlich wird, dass es mehr als acht verschiedene Arten von Schätzaufgaben geben kann. So kann, wenn das zu schätzende Objekt physisch anwesend ist, zwischen *nur sichtbar* und *sichtbar und anfassbar* unterschieden werden (Heinze, Weiher, Huang & Ruwisch, 2018).

Dieselbe Unterscheidung kann auch für die Einheit vorgenommen werden. Darüber hinaus kann die Einheit sowohl *standardisiert* (1) als auch *nicht standardisiert* (2) sein:

1) Wie viel Wasser passt ungefähr in eine Badewanne? In eine Badewanne passen ungefähr ___ l Wasser.
2) Wie oft muss man ungefähr Wasser von einem Fruchtzwerge-Becher in ein Honigglas füllen, damit es voll ist? Man muss ungefähr ___ mal Wasser von einem Fruchtzwerge-Becher in ein Honigglas füllen, damit es voll ist.

Neben dem zu schätzenden Objekt und dem Objekt, das als Einheit dient, kann ein weiteres Objekt in eine Schätzaufgabe aufgenommen werden, das als Vergleichsobjekt herangezogen werden kann. Dazu wird die Größenangabe und/oder die Größenausprägung gegeben. Auch dieses Objekt kann entweder *nicht sichtbar, nur sichtbar* oder *sichtbar und anfassbar* sein.

Insgesamt sind unter Berücksichtigung all dieser Merkmale 84 verschiedene Aufgabentypen denkbar. Nicht alle sind in einem schriftlichen Schätztest theoretisch sinnvoll oder praktisch umsetzbar. Gründe für den Ausschluss von Aufgabenkategorien sind zum Beispiel die Möglichkeit zu Messhandlungen (wenn sowohl das zu schätzende Objekt als auch die Einheit oder das Vergleichsobjekt *anfassbar* sind) oder der Anspruch zur parallelen Testentwicklung für die Größen

Längen, Flächeninhalte, Fassungsvermögen und Rauminhalt (hoher Materialaufwand bei *anfassbaren* Objekten für Fassungsvermögen und Rauminhalt). Darüber hinaus ist in einigen Fällen durch die Erfüllung eines Merkmals ein weiteres, welches nicht erfüllt sein soll, doch erfüllt. Dies ist der Fall, wenn die Einheit nicht gegeben sein soll, aber ein Vergleichsobjekt (mit Größenangabe) gegeben ist (Weiher, 2018).

In einen schriftlichen Schätztest werden daher wiederum acht Aufgabenkategorien aufgenommen (siehe Tabelle 1).

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2"></td><td>Objekt sichtbar</td><td rowspan="2">Objekt nicht sichtbar</td></tr>
<tr><td>Nicht anfassbar</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Standardisiert</td><td>Einheit sichtbar</td><td>Nicht anfassbar</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Einheit nicht sichtbar</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nicht standardisiert</td><td>Einheit sichtbar</td><td>Nicht anfassbar</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Einheit nicht sichtbar</td><td>7</td><td>8</td></tr>
</table>

Tab. 1 Aufgabenkategorien im schriftlichen Schätztest

3 Pilotstudie und weitere Forschung

Die Pilotstudie umfasst vier schriftliche Schätztests (jede Größe wird mit je 24 Fragen berücksichtigt). Insgesamt nahmen 137 Kinder aus je drei dritten und drei vierten Klasse an der Pilotstudie teil. Jede Klasse bearbeitete zwei Schätztests.

Die Ergebnisse der Pilotstudie zeigen, dass Aufgaben mit unterschiedlichen Merkmalen unterschiedliche prozentuale Abweichungen aufweisen. Sie unterscheiden sich sowohl in der Schätzgenauigkeit als auch in der Tendenz zum Über- oder Unterschätzen. Diese Ergebnisse variieren jedoch auch von Größe zu Größe.

Weiteres Forschungsinteresse besteht zum einen in der genaueren Untersuchung der Aufgabenkategorien, die alle Merkmale mit einbezieht, zum anderen in der Untersuchung verschiedener Möglichkeiten der Bewertung von Schätzergebnissen.

Literatur

Bönig, D. (2001). Das Ungefähre der richtigen Antwort. *Die Grundschulzeitschrift 41,* 43–45.

Bright, G. W. (1976). Estimation as Part of Learning to Measure. In National Council of Teachers of Mathematics (Hrsg.), *Yearbook 38* (S. 87–104). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. 2. Auflage. Heidelberg: Springer Spektrum.

Hogan, T. P., & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative Estimation: One, Two, or Three Abilities? *Mathematical Thinking and Learning, 5*(4), 259–280.

Heid, M. (2018). *Das Schätzen von Längen und Fassungsvermögen: Eine Interviewstudie zu Strategien mit Kindern im 4. Schuljahr*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Heinze, A., Weiher, D. F., Huang, H.-M., & Ruwisch, S. (2018). Which Estimation Situations are Relevant for a Valid Assessment of Measurement Estimation Skills?. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Hrsg.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Band 3, S. 67–74). Umea (Sweden): PME.

Ruwisch, S. (2014). Das Ungefähre zu schätzen wissen. Die Bedeutung des Ungefähren und wie man sich ihm nähert. *Grundschule Mathematik, 42,* 4–5.

Weiher, D. F. (2018). Operationalisierung des Konstrukts „Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Volumina" für Grundschulkinder. Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (Band 4, S. 1939–1942). Münster: WTM.

Weiher, D. F., & Ruwisch, S. (2018). Kognitives Schätzen aus Sicht der Mathematikdidaktik. *mathematica didactica*. Abgerufen von http://www.mathematica-didactica.com/Pub/md_2018/md_2018_Weiher_Ruwisch.pdf.

Arbeitsgruppe Vorschulische Bildung

Koordination: Julia Bruns & Meike Grüßing
Julia.bruns@uni-paderborn.de meike.gruessing@uni-vechta.de

Beitrag: Karoline Rettenbacher, Lars Eichen, Manfred Pfiffner & Catherine Walter-Laager
karolinerettenbacher@edu.uni-graz.at

Prozessqualität in mathematischen Spiel- und Lernsituationen (3-6 Jahre) im Vergleich Österreich – Schweiz

1 Theoretischer Hintergrund

Der Qualitätsbegriff in der Elementarpädagogik bezieht sich auf unterschiedliche Bereiche und Dimensionen und kann als relativ dynamisches Konstrukt begriffen werden. Die pädagogische Qualität ist nach Tietze et al. (2016) ein Zusammenspiel aus Struktur-, Prozess- und Orientierungsqualität.

Die Strukturqualität beschreibt u.a. das Raumangebot, die räumliche Gestaltung sowie die Qualifikation und Berufserfahrung der elementarpädagogischen Fachpersonen. Die Orientierungsqualität bezieht sich auf die Erziehungs- und Bildungsvorstellungen, Werte und Erziehungsziele sowie handlungsleitenden Überzeugungen (Tietze et al., 2016).

Die Prozessqualität, nimmt verschiedene Interaktionen in den Fokus und schließt die Qualität der kindlichen Erfahrungen, wie auch die Qualität der pädagogischen Stimulationen ein. Eine hohe Prozessqualität ist gegeben, wenn elementarpädagogische Fachpersonen einen sensiblen und einfühlsamen Umgang mit den Kindern pflegen, sowie über den Entwicklungsstand, die Bedürfnisse und Interessen der Kinder Bescheid wissen und entsprechend die pädagogischen Impulse für das kindliche Lernen setzen (Tietze et al., 2016).

Eine hohe mathematische Prozessqualität, hat einen positiven Einfluss auf die Lerneffekte der Kinder (Lehrl et al., 2016; Tresp et al., 2014).

Werden in der frühen Kindheit mathematisches Wissen und Fähigkeiten aufgebaut, so kann dies einen wesentlichen Einfluss auf deren spätere Schulleistungen haben (Krajewski & Schneider, 2006). Neben den Erfahrungs- und Lernmöglichkeiten der Kinder in ihren Familien, kommen damit den Krippen und Kindergärten als erste Bildungseinrichtungen und somit auch den elementarpädagogischen Fachpersonen eine essentielle Rolle in der Begleitung frühmathematischer Bildungsprozesse zu.

2 Forschungsdesign

Die hier betrachteten Videodaten stammen aus der Studie „Bildungs- und Erziehungsvorstellungen von Elementarpädagogen*innen am Beispiel von Mathematik im internationalen Vergleich («BELMi 3-6»)", in der Bildungs- und Erziehungsvorstellungen, Leistungserwartungen und die alltägliche frühmathematische Praxis von elementarpädagogischen Fachpersonen bei Kindern im Alter von drei bis sechs Jahren im Ländervergleich, zwischen der Schweiz, Österreich, China, Vietnam und den USA betrachtet wurden.

Für den hier präsentierten und diskutierten Aspekt, ist folgende Forschungsfrage grundlegend:

Wie können Unterschiede/ Gemeinsamkeiten bezüglich der Prozessqualität in der Gestaltung mathematischer Spiel- und Lernsituationen im Kindergarten in Österreich und der Schweiz gemessen werden?

Die Datenerhebung fand in elementarpädagogischen Einrichtungen in Österreich und der Schweiz statt. Die Stichprobe setzt sich aus jeweils vier Gruppen mit fünf bis sechsjährigen Kindern und drei Gruppen mit Drei- bis Vierjährigen in Österreich und drei Gruppen mit fünf- bis sechsjährigen und zwei mit vier- bis fünfjährigen Kindern in der Schweiz zusammen.

Es wurden alltägliche Spiel- und Lernsituation mit Themen aus verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen von den elementarpädagogischen Fachpersonen vorbereitet. Für die Drei- bis Vierjährigen wurden Aktivitäten im Inhaltsbereich „Raum und Formen" und für die fünf bis sechsjährigen Kinder im Inhaltsbereich „Größen und Messen" geplant. Die Zeitspanne dieser Aktivitäten sollte dem Alter der Kinder entsprechend angepasst werden. Um den elementarpädagogischen Fachpersonen genügend Freiraum für die individuelle Umsetzung und Gestaltung zu bieten, wurde die Aufgabenstellungen bewusst offengehalten.

Die mathematischen Spiel- und Lernsituationen wurden mittels Videographie aufgezeichnet. Insgesamt wurden für die Auswertung mit den Beobachtungsinstrumenten COEMET (Sarama & Clements, 2009) 24 Videosequenzen generiert und einzeln analysiert. Im Rahmen einer Masterarbeit (Lindner, in Vorbereitung) analysierte die Autorin dieselben Videos erneut mit einer selbstentwickelten Erweiterung der „Kindergarten-Einschätz-Skala“ KES-R (Tietze, 2007).

Die hier verwendete, selbstentwickelte Erweiterung der KES-R wurde, entsprechend der mathematischen Inhaltsbereiche der Aufgabenstellung für die elementarpädagogischen Fachpersonen, auf die Bereiche „Größen und Messen“ und „Raum und Form“ ausgelegt und soll die Qualität über folgende Qualitätsmerkmale: Verwendetes Material und geplante mathematische Aktivitäten, Kommunikation, Interaktionen, verwendete Sprache und prozessbezogene Kompetenzen messen. Die Items der einzelnen Merkmale werden auf einer Skala von „unzureichend“ bis „ausgezeichnet“ mit „Ja“ oder „Nein“ eingeschätzt.

3 Erste Ergebnisse

Über eine Reliabilitätsanalyse wurde sichtbar, dass die innere Konsistenz der einzelnen Qualitätsmerkmale zu tief liegt und damit der Zusammenhang zwischen den Items nicht gegeben ist. Die innere Konsistenz der gesamten Skala, mit 51 Items, ist mit einem Cronbach-Alpha von .89 jedoch als sehr gut zu bezeichnen. Für den Workshop in der Arbeitsgruppe werden folgende Itemskalen näher betrachtet und diskutiert:

Kommunikation: 11 Items, Cronbach-$\alpha = .41$

Verwendete Sprache: 9 Items, Cronbach-$\alpha = .46$

Interaktion: 8 Items, Cronbach-$\alpha = .32$.

Literatur

Krajewski, K., & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 53*(4), 246–262.

Lehrl, S., Kluczniok, K., & Rossbach, H.-G. (2016). Longer-term associations of preschool education: The predictive role of preschool quality for the development of mathematical skills through elementary school. *Early Childhood Research Quarterly*, 36, 475–488.

Sarama, J., & Clements, D. (2009). *Manual for "Classroom Observation of Early Mathematics Environment and Teaching" (COEMET): Manual for Classroom Observation (COEMET)*, 1–19.

Tietze, W., Schuster, K., Grenner, K., & Rossbach, H. (2007). *Kindergarten-Skala (KES-R). Feststellung und Unterstützung pädagogischer Qualität in Kindergärten*. Mannheim: Cornelsen.

Tietze, W. & Viernickel, S. (Hrsg.), Dittrich, I., Grenner, K., Hanisch, A. & Marx, J. (2016). *Pädagogische Qualität in Tageseinrichtungen für Kinder. Ein nationaler Kriterienkatalog* (vollständig überarbeitete und aktualisierte Auflage). Berlin: Verlag das Netz.

Tresp, T., Stockheim, D., Jungmann, T., & Koch, K. (2014). Effekte mathematischer Prozessqualität sowie pädagogischer Professionalisierungsmaßnahmen auf die mathematischen Basiskompetenzen von Kindern in Kindertageseinrichtungen. *Empirische Sonderpädagogik*, *6*(3), 227–242.

University of Bamberg Press

Dieser Tagungsband dokumentiert die Ergebnisse der Jahrestagung des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), die in diesem Jahr wieder in Bad Salzdetfurth stattfand. Vom 09. bis 11. November 2018 widmete sich der Arbeitskreis dem Thema „Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln".

Mathematische Bildung in der Grundschule ist eine herausfordernde und langfristige Aufgabe für die Unterrichtspraxis sowie die mathematikdidaktische Forschungs- und Entwicklungsarbeit. Mit Fokus auf die mathematischen Inhaltsbereiche wurde der Themenkomplex „Strategien" im Rahmen von vier Hauptvorträgen aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet und im Plenum diskutiert. So wurde die Nutzung und Entwicklung mathematischer Strategien der Kinder für den Zugang zur und das Verstehen von Mathematik in den Blick genommen. Es wurden die Relevanz von Strukturwahrnehmung und Strategieentwicklung betrachtet und exemplarisch für die Entwicklung und das Verständnis grundlegender Konzepte in den einzelnen Inhaltsbereichen dargestellt. Auf der Grundlage empirischer Befunde wurden praktische Ansätze für eine langfristige Förderung im Mathematikunterricht aufgezeigt und zur Diskussion gestellt.

Zusätzlich setzten sich acht Arbeitsgruppen mit den Themenfeldern ‚Arithmetik', ‚Geometrie', ‚Sachrechnen', ‚Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit', ‚Lehrerfortbildung', ‚Kommunikation und Kooperation', ‚Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien' sowie ‚vorschulische Bildung' intensiv mit aktuellen Forschungs- und Praxisfragen auseinander. Zentrale Inhalte dieser Arbeitsgruppen sind in diesem Band ebenfalls dokumentiert.

Die jährlich stattfindende Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der GDM richtet sich seit ihrem Bestehen an Personen, die den Dialog und die Zusammenarbeit zwischen Hochschule und allen Bereichen schulischer Praxis sowie den schulverwaltenden Institutionen suchen. Die Tagung ist von Beginn an in besonderer Weise durch eine offene und kollegiale Kooperation von Vertreterinnen und Vertretern aus Praxis und Theorie geprägt.

ISBN 978-3-86309-608-3
www.uni-bamberg.de/ubp