



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RELEVÂNCIA DA DIMENSIONALIDADE NO MODELO DE BIANCONI-BARABÁSI

THIAGO CRISÓSTOMO CARLOS NUNES

Natal - RN
Setembro - 2017

THIAGO CRISÓSTOMO CARLOS NUNES

Relevância da dimensionalidade no modelo de
Bianconi-Barabási

*Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de **doutor** em Física.*

Orientador: Prof. Dr. Luciano Rodrigues da Silva

Coorientador(a): Dr^a. Samurai Gomes de Aguiar Brito

Natal - RN

Setembro - 2017

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Nunes, Thiago Crisóstomo Carlos.
Relevância da dimensionalidade no modelo de Bianconi-Barabási
/ Thiago Crisostomo Carlos Nunes. - 2017.
128f.: il.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de
Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Física,
Natal, 2018.

Orientador: Dr. Luciano Rodrigues da Silva.
Coorientadora: Dr^a. Samurái Gomes de Aguiar Brito.

1. Sistemas Complexos - Tese. 2. Redes sem escala - Tese. 3.
Mecânica Estatística não-extensiva - Tese. 4. Modelo de
Bianconi-Barabási - Tese. I. Silva, Luciano Rodrigues da. II.
Brito, Samurái Gomes de Aguiar. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 53

Para Pessoas Especiais:

“Aos meus pais, irmãos, minha noiva Mariana Barbosa da Silva e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.”

Agradecimentos

Ao Prof. e orientador Dr. Luciano Rodrigues da Silva, por todo seu apoio para a realização deste trabalho e principalmente pela ajuda no amadurecimento dos meus conhecimentos.

A Dr^a. Samurai Gomes de Aguiar Brito, coorientadora dessa tese, pela amizade conquistada, por sempre me incentivar nas horas mais difíceis dessa jornada e pelas orientações e discussões nesse trabalho.

Ao Prof. Dr. Constantino Tsallis, pelas conversas que muito me ensinaram, por ter participado e me ajudado a engrandecer o trabalho em que se baseia essa tese.

Aos demais professores do DFTE, que contribuíram para minha formação profissional.

Aos funcionários do DFTE por toda atenção e apoio dispensados.

Aos meu pais, José Crisóstomo Nunes e Maria das Graças Carlos Nunes, por toda educação, amor e principalmente paciência, para me orientar nas horas mais turbulentas dessa jornada.

Ao meu irmão, Rafael Crisóstomo Carlos Nunes, que mesmo de longe sempre me incentivou a nunca desistir dos meus sonhos.

A minha noiva, Mariana Barbosa da Silva, por todas as conversas, e por me acalmar nas horas de cansaço e estresse, me fazendo acreditar que tudo daria certo mesmo quando tudo parecia perdido.

Aos amigos do grupo de pesquisa, Dr. Tiago Medeiros, Dr. Thiago Rafael, e a doutoranda Gerdivane Ferreira Duarte pelas discussões e ajudas durante o desenvolvimento desta tese.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“O pensamento é tempo. Ele nasce da experiência e conhecimento, que são inseparáveis do tempo e do passado. O tempo é o inimigo psicológico do homem. Nossa ação é baseada no conhecimento e, portanto, o tempo, assim o homem é sempre um escravo do passado. O pensamento é sempre limitado e assim nós vivemos em constante conflito e luta. Não há evolução psicológica. Quando o homem se torna consciente do movimento de seus próprios pensamentos, ele verá a divisão entre o pensador e o pensamento, o observador e o observado, o experimentador e a experiência. Ele descobrirá que esta divisão é uma ilusão. Só então haverá observação pura, significando isso percepção sem qualquer sombra do passado ou do tempo. Este vislumbre atemporal traz uma mutação profunda e radical na mente.”

(Jiddu Krishnamurti)

Resumo

Redes sem escala são bastante populares hoje em dia, uma vez que muitos sistemas estão bem representados por tais estruturas. Para estudar esses sistemas, foram propostos vários modelos. No entanto, a maioria deles não levam em conta a distância Euclidiana nó à nó, ou seja, a distância geográfica. Em redes reais, a distância entre os sítios pode ser muito relevante, por exemplo, os casos em que se pretende minimizar custos. Neste cenário, estudamos o papel da dimensionalidade d no Modelo de Bianconi-Barabási com um crescimento e ligação preferencial envolvendo distâncias Euclidianas. A ligação preferencial neste modelo segue a regra $\Pi_i \propto \eta_i k_i / r_{ij}^{\alpha_A}$ ($1 \leq i < j$; $\alpha_A \geq 0$), onde η_i caracteriza a qualidade do i -ésimo sítio e é escolhido aleatoriamente dentro do intervalo $(0, 1]$. Verificamos que a distribuição de grau $P(k)$ para as dimensões $d = 1, 2, 3, 4$ são bem ajustadas por $P(k) \propto e_q^{-k/\kappa}$, onde $e_q^{-k/\kappa}$ é a função q -exponencial que surge naturalmente da Mecânica Estatística não-extensiva de Tsallis. Determinamos o índice q e κ como funções das quantidades α_A e d e verificamos numericamente que ambos apresentam um comportamento universal em relação à variável α_A/d . O mesmo comportamento também foi exibido pelo expoente dinâmico β que está associado a taxa que determinado sítio tem em receber ligações.

Abstract

Scale-free networks are quite popular nowadays since many systems are well represented by such structures. In order to study these systems, several models were proposed. However, most of them do not take into account the node-to-node Euclidean distance, i.e., the geographical distance. In real networks, the distance between sites can be very relevant, e.g., those cases where it is intended to minimize costs. Within this scenario, we studied the role of dimensionality d in the Bianconi-Barabási model with a preferential attachment growth involving Euclidean distances. The preferential attachment in this model follows the rule $\Pi_i \propto \eta_i k_i / r_{ij}^{\alpha_A}$ ($1 \leq i < j$; $\alpha_A \geq 0$), where η_i characterizes the fitness of the i -th site and is randomly chosen within the $(0, 1]$ interval. We verified that the degree distribution $P(k)$ for dimensions $d = 1, 2, 3, 4$ are well fitted by $P(k) \propto e_q^{-k/\kappa}$, where $e_q^{-k/\kappa}$ is the q -exponential function naturally emerging within nonextensive statistical mechanics. We determine the index q and κ as functions of the quantities α_A and d , and numerically verify that both present a universal behavior with respect to the scaled variable α_A/d . The same behavior also has been displayed by the dynamical β exponent which characterizes the steadily growing number of links of a given site.

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
1 Introdução	1
2 Conceitos Básicos e Modelos Teóricos de Redes	4
2.1 Teoria dos Grafos	4
2.1.1 Conceitos fundamentais	6
2.2 Distribuição de conectividade	9
2.2.1 Distribuição de Poisson	9
2.2.2 Distribuição em lei de potência	11
2.3 Menor caminho médio	13
2.4 Coeficiente de agregação	14
2.5 Classificação das redes quanto à sua estrutura	15
2.6 Principais modelos de redes aleatórias	17
2.6.1 Modelo de Erdős e Rényi	18
2.6.2 Modelo de Wattz e Strogatz	19

2.6.3	Propriedades de grafos aleatórios	21
2.7	Redes livres de escala	26
2.7.1	Modelo de Barabási-Albert	26
2.7.2	Propriedades do modelo de Barabási-Albert	31
2.7.3	Modelo de Bianconi-Barabási	33
2.8	Redes reais e o efeito de mundo pequeno	40
2.8.1	World Wide Web	42
2.8.2	Internet	45
2.8.3	Rede de colaborações de atores de cinema	46
2.8.4	Rede celular	47
2.8.5	Rede de relações sexuais	49
2.8.6	Rede ecológica	50
3	Mecânica Estatística e Modelos Teóricos de Redes com Métricas	52
3.1	Entropia de Boltzmann-Gibbs	53
3.2	Mecânica Estatística não-extensiva	56
3.3	Modelo de Natal	59
3.3.1	Modelo de Natal bidimensional ($d = 2$)	59
3.3.2	Modelo de Natal d -dimensional ($d = 1, 2, 3, 4$)	65
4	Modelo de Bianconi-Barabási d-dimensional	74
4.1	Modelo de Bianconi-Barabási d -dimensional	75
4.2	Distribuição de conectividade	79
4.3	Ajustes das curvas de distribuição de grau e a universalidade de q e κ	81
4.4	Evolução temporal da conectividade dos sítios	84
5	Conclusões e Perspectivas	89

Referências Bibliográficas	91
Role of dimensionality in preferential attachment growth in the Bianconi-Barabási model	98

Lista de Figuras

2.1	a) Representação das pontes de Königsberg. b) Grafo de Euler para o problema das pontes de Königsberg. As pontes são representadas pelas ligações e as porções de terra pelos nós. Figura retirada do endereço eletrônico http://idm09.wordpress.com/2009/11/01/its-a-small-world-after-all/	5
2.2	Representação esquemática de um grafo, contendo 5 vértices e 7 arestas. . .	6
2.3	(a) Grafo direcionado com 5 vértices e 7 arestas. Os vértices 1,3 têm grau igual a 2, ou seja, $k_1 = k_3 = 2$, os vértices 4,5 têm grau igual a 3, pois $k_4 = k_5 = 3$, e o vértice 2 têm grau igual a 4. (b) Grafo ponderado, neste grafo suas arestas têm um valor inteiro correspondente ao seus pesos. (c) Vizinhança. O vértice 2 é vizinho do vértice 3 que também é vizinho do vértice 4, mas por exemplo, o vértice 3 não é vizinho do vértice 5.	7
2.4	a) Representação da rede de Bethe. Esse é um exemplo de uma rede tipo árvore. b) Exemplo de uma rede com presença de circuito de ordem $n = 3$, representado pelos nós em vermelho e pelas ligações em azul. Essa rede possui número de nós $N = 8$ e número de ligações $L = 8$. Com esses dados, usando a relação $I = L + 1 - N$, podemos determinar o número de circuitos presentes na rede. Nesse caso, temos $I = 1$. Figura retirada da referência [21].	8
2.5	Comparação entre a distribuição de Poisson e a distribuição em lei de potência ($\gamma = 2.1$), ambas com $\langle k \rangle = 11$. Figura retirada de referência [10].	10
2.6	Figura de um nó ν e seus primeiros vizinhos, vemos que $k_\nu = 6$ resultando $c_\nu = 1/3$. Figura retirada de referência [21].	15

2.7	Redes Regulares: vemos que suas estruturas têm uma forma bem definida (rede triangular, hexagonal, quadrada). Todos os sítios (exceção os sítios da borda) em uma dada rede possuem o mesmo número de vizinhos, ou seja, um mesmo valor para sua conectividade.	16
2.8	(a) À esquerda temos uma rede aleatória com $N = 10$ nós isolados. À direita temos uma rede livre de escala em um período inicial de suas conexões. (b) Ambas as redes em um estágio avançado de evolução, após a adição de nós e arestas. (c) Distribuição de conectividade de ambas as redes. À direita temos a distribuição de conectividade de um grafo aleatório, podemos ver que tal distribuição segue uma Poissoniana. À esquerda temos uma distribuição de conectividade de uma rede livre de escala, bem definida por uma lei de potência do tipo $P(k) = k^{-\gamma}$. Figuras retiradas da referência [24].	17
2.9	Processo de evolução de um grafo para o modelo de Erdős-Rényi. No topo da figura temos várias redes com $N = 12$ nós, cujo cada par de vértices foi conectado com uma probabilidade p . Ao fundo mostramos grafos com $N = 100$, em diferentes estágios de desenvolvimento, correspondentes a probabilidades $p = 0.03$. Vários sítios têm conectividade $k = 0$, mostrados como nós isolados ao fundo da figura. Figura retirada da referência [10].	19
2.10	A figura exhibe os processos de conexões dos nós para o modelo de Wattz-Strogatz, o qual interpola um círculo regular e uma rede aleatória sem alterar o número de nós ou arestas. Em tal figura começa-se com $N = 20$ nós, cada nó conectado aos seus quatro primeiros vizinhos. Para $p = 0$ o círculo se mantém inalterado; com o aumento de p a conectividade dos sítios aumentam desordenadamente até $p = 1$, onde todas as arestas são reconectadas aleatoriamente. Com um valor de p intermediário existe o efeito de mundo pequeno, devido as pequenas distâncias entre os sítios e o alto valor do coeficiente de agregação. Figura retirada da referência [10].	20
2.11	Tamanho do caminho $\langle l(p) \rangle$ e coeficiente de agregação $\langle C(p) \rangle$ para o modelo de Wattz-Strogatz. Os dados estão normalizados para os valores de $\langle l(0) \rangle$ e $\langle C(0) \rangle$ em uma rede regular. Há uma rápida queda no caminho médio $\langle l(p) \rangle$, o que corresponde ao efeito de mundo pequeno, durante esta queda nota-se que $\langle C(p) \rangle$ permanece quase constante, indicando que a transição para o mundo pequeno é quase indetectável à nível local. Figura retirada da referência [10].	21

2.12	Distribuições de conectividade para os modelos Erdős-Rényi e Watts-Strogatz. À esquerda temos o $P(k)$ no modelo ER para $N = 10.000$ com probabilidades $p_{ER} = 0.0006$ (círculos), $p_{ER} = 0.001$ (quadrados) e $p_{ER} = 0.0015$ (diamantes). À direita temos o $P(k)$ no modelo Watts-Strogatz para $N = 10.000$, com $\langle k_i \rangle = 6$ e com três diferentes probabilidades de religação, $p_{WS} = 0$ (círculo, correspondente à função delta $\delta(k - 6)$), $p_{WS} = 0.1$ (quadrados) e $p_{WS} = 0.3$ (diamantes). Figura retirada da referência [27].	23
2.13	Comparação entre o caminho médio de uma rede real (símbolos) e a predição da equação 2.15 da teoria de redes aleatórias (linha pontilhada). Figura retirada da referência [27].	24
2.14	Comparação entre o coeficiente de agregação das redes reais e dos grafos aleatórios. A linha tracejada corresponde a equação 2.16, os pontos coloridos correspondem à várias redes reais, como a WWW, Internet, etc. Figura retirada da referência [10].	25
2.15	Exemplo ilustrativo de crescimento de uma rede de Barabási-Albert para $m_0 = 3$ e $m = 1$. Figura retirada de referência [15].	27
2.16	(a) Distribuição de conectividade em lei de potência para o modelo BA. Simulação realizada para $m = 1$, $N = 2 \times 10^5$ e 2×10^3 amostras. (b) Evolução temporal da conectividade dos sítios $i = 10$ e $i = 97$. Simulação realizada para a rede BA com $m = 1$, $N = 10^5$ e 1000 amostras. Figura retirada da referência [15].	30
2.17	Característica do caminho médio $\langle l \rangle$ pelo tamanho N da rede de Barabási-Albert com $\langle k \rangle = 4$, comparada com um grafo aleatório de mesmo tamanho e mesma conectividade média. Figura retirada da referência [3].	31
2.18	Coeficiente de agregação pelo tamanho da rede de BA com $\langle k \rangle = 4$, comparada com o coeficiente de agregação de um grafo aleatório com $\langle C_{rand} \rangle \approx \langle k \rangle / N$. Figura retirada da referência [3].	32
2.19	Distribuição de conectividade para o modelo de Bianconi-Barabási com $m = 2$ e $N = 10^6$. A linha em verde corresponde à $P(k) = k^{-2.255} / \ln k$. Figura retirada da referência [10].	38
2.20	Evolução temporal do sítio $i = 10$ mostrando a dependência da conectividade $k_\eta(t)$ para sítios com qualidades $\eta = 0.3, 0.6, 0.9$. Fica claro que com o aumento da qualidade a conectividade dos sítios cresce mais rapidamente durante a evolução da rede. Simulação realizada para $m = 1, N = 10^5$ e 1000 amostras.	39

2.21	Dependência linear do expoente dinâmico $\beta(\eta)$ com o parâmetro de qualidade η . Os pontos da reta foram obtidos através da simulação numérica enquanto que a inclinação da reta segue a predição analítica para a variável $D = \eta/\beta(\eta)$, pois $D = 1/0.80 = 1.250$. Simulação realizada para $m = 1, N = 10^5$ e 1000 amostras.	40
2.22	Mapa dos Estados Unidos destacando os estados de Nebraska e Kansas ao centro e Massachusetts ao canto, ambos representando respectivamente os pontos de saída e chegada das cartas. A figura original está disponível em http://www.prodeathpenalty.com/UnitedStates	
2.23	Estrutura da WWW	43
2.24	Distribuição de conectividade da World Wide Web	44
2.25	Estrutura da Internet a nível de roteadores e computadores	45
2.26	Distribuição de conectividade acumulada da internet entre os anos de 1997 a 1999. O valor do expoente da lei de potência é $\gamma = 2.2$ Figura retirada da referência [38].	46
2.27	Distribuição de conectividade da rede de colaboração de atores. Figura retirada da referência [28].	47
2.28	Representação gráfica de uma rede metabólica. (a) 4 equações estequiométricas tirada das vias metabólicas pentose-fosfato. (b) Grafo referente aos substratos das equações estequiométricas. (c) Grafo derivado das reações dos substratos em (b). Figura retirada da referência [56].	48
2.29	Na figura à esquerda temos a distribuição de conectividade do número de parceiros para homens e mulheres. Acima uma distribuição do número de parceiros k no período de um ano. Para as mulheres, os expoentes obtidos foram $\alpha_m = 2.54 \pm 0.2$ com $K > 4$, e para os homens $\alpha_h = 2.31 \pm 0.2$ com $K > 5$. Na figura à direita temos a distribuição total do número de parceiros k_{tot} sobre todos os anos desde a iniciação sexual. Para as mulheres, os expoentes obtidos foram $\alpha_{tot} = 2.1 \pm 0.3$ com $k_{tot} > 20$ e para os homens $\alpha_{tot} = 1.6 \pm 0.3$ com $20 < k_{tot} < 400$. Figura retirada da referência [42].	49
2.30	Histograma mostrando a distribuição do número total de conexões k pelo número de espécies P_k	50

3.1	Podemos perceber o comportamento da q -exponencial $\exp_q(-x)$ para diferentes valores do índice entrópico q . A cauda da distribuição segue claramente um comportamento tipo lei de potência, entretanto quando temos $q = 1$, a distribuição recupera a exponencial padrão. Figura retirada da referência [75].	58
3.2	Figura esquemática da dinâmica de crescimento e ligação preferencial do Modelo de Natal. Em $t = 0$, um nó é colocado em uma origem arbitrária no plano. Em $t = 1$, um novo nó é adicionado a uma distância r do nó inicial, segundo a regra probabilística $P(r)$ dado pela Eq. 3.14, com o parâmetro de crescimento $\alpha_G \geq 0$. Em $t = 2$, um terceiro nó é adicionado à rede, obedecendo à mesma regra de crescimento $P(r)$, a uma distância r do centro de massa do aglomerado preexistente. O novo nó se liga a um dos nós da rede de acordo com a regra de ligação Π_i , que neste caso privilegia os nós mais próximos de acordo com o parâmetro α_A . A partir de $t = 3$, a dinâmica de crescimento da rede obedece a regra estabelecida no item 4 do algoritmo explicitado acima. Observe que embora não esteja contida na figura a escolha do ângulo θ , tal escolha é feita a cada passo do algoritmo de forma aleatória, obtida de uma distribuição uniforme, tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$	61
3.3	(a) Gráfico exibindo as distribuições de conectividade para diferentes de valores de α_G , mantendo-se o parâmetro $\alpha_A = 2$. Simulação realizada para $N = 10^4$ e 3×10^3 amostras. (b) Análise das distribuições de conectividade ao variar o parâmetro α_A , mantendo-se $\alpha_G = 2$. Simulação realizada para $N = 10^5$ nós e 1000 amostras. Figura retirada de referência [15].	63
3.4	(a) Gráfico q versus α_A , mostrando seu decaimento exponencial para diferentes valores de α_A . (b) Gráfico κ versus α_A . O parâmetro κ tende a crescer exponencialmente para valores de $\alpha_A \approx 2$. Figura retirada de referência [15].	64
3.5	(a) Evolução temporal da conectividade do sítio $i = 10$ para diferentes valores do parâmetro α_A . (b) Comportamento do expoente β para diferentes valores de α_A . Podemos observa que de fato o parâmetro β decai com o aumento dos valores α_A . Figura retirada de referência [15].	64
3.6	Ambas figuras representam a distribuição dos sítios (50 sítios) no plano ($d = 2$) para $\alpha_G = 1$. Em (a) temos $\alpha_A = 0$ e em (b) temos $\alpha_A = 8$. Percebemos nitidamente como a estrutura da rede muda a medida que variamos o parâmetro α_A . Figura retirada da referência [15].	67

3.7	Distribuição de conectividade para $d = 1, 2, 3, 4$, mostrando o caráter exponencial de $P(k)$ para valores de $\alpha_A/d = 9$. (a) Representação log-log. (b) Representação log-linear. Figura retirada da referência [15].	67
3.8	Distribuições de conectividade com $d = 1, 2, 3, 4$ para diferentes valores de α_A ($\alpha_G = 2$). Fica evidente o quão sensíveis as distribuições de conectividade são as variações de α_A , indo de uma distribuição em lei de potência à um comportamento claramente exponencial. Figura retirada da referência [16].	68
3.9	Ajustes das distribuições de conectividade dada pela função $P(k) = P(0)e_q^{-k/\kappa}$ para todas as 4 dimensões. (a) Representação em log-log. (b) Representação em $\ln_q[P(k)/P(0)] \times k$. Figura retirada da referência [16].	69
3.10	Vemos como os parâmetros q e κ variam com respeito a variável α_A . No limite em que $\alpha_A = 0$ e $\forall d$ recupera-se a classe de universalidade do modelo de Barabási-Albert com $q = 4/3$, correspondente a $\gamma = 3$, o qual não tem métrica. Figura retirada da referência [16].	70
3.11	Dados da figura 3.10 agora plotados como função da variável α_A/d , mostrando a universalidade das variáveis q e κ . Podemos ver como q e κ se comportam no regime $0 \leq \alpha_A/d \leq 1$ (interações de longo alcance). Em tal regime temos que $q = 4/3$ e $\kappa \approx 0.30$. Entretanto, quando $\alpha_A/d > 1$ ($\forall d$), é visível o surgimento de um comportamento exponencial. Figura retirada da referência [16].	70
3.12	Relação aproximadamente linear entre os parâmetros q e κ no modelo de Natal d -dimensional. Figura retirada da referência [16].	71
3.13	(a) Comportamento do expoente dinâmico β versus α_A para $d = 1, 2, 3, 4$. (b) Colapso das curvas do gráfico (a) mostrando o comportamento universal de β versus α_A/d . Análises feitas para o sítio $i = 10$, $\alpha_G = 2$ e valores típicos de α_A . Figura retirada da referência [15].	72
4.1	Distribuição de conectividade para $d = 1, 2, 3, 4$, $\alpha_A = 2$ e diferentes valores de α_G . Verificamos que $P(k)$ é independente de α_G ($\forall d$). Usamos caixas logarítmicas em algumas distribuições de conectividade com a finalidade de diminuir os ruídos presentes na cauda da distribuição. Simulação realizada para 10^3 amostras com redes de tamanho $N = 10^5$ sítios.	77

4.2	Distribuição de conectividade para $d = 1$ (diamantes), 2 (triângulos), 3 (quadrados), 4 (círculos), para típicos valores de α_A com $\alpha_G = 2$. Simulação realizada para 10^3 amostras com redes de tamanho $N = 10^5$ sítios. Caixas logarítmicas foram usadas com a finalidade de diminuir os ruídos presentes na cauda da distribuição.	78
4.3	Distribuição de conectividade para $d = 1, 2, 3, 4$, para $\alpha_G = 2$ e típicos valores de α_A . Podemos ver que todas as curvas de $P(k)$ são bem representadas por funções q -exponenciais de tal forma que $P(k) = P(0)e_q^{-k/\kappa}$. No topo da figura temos a representação dos dados em log-log plot. Abaixo temos a representação em $\ln_q[P(k)/P(0)]$ versus k . Espera-se que as flutuações presentes nos dados desapareçam no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$. Simulação realizada para 10^3 amostras com redes de tamanho $N = 10^5$ sítios. Caixas logarítmicas foram usadas com a finalidade de diminuir os ruídos presentes na cauda da distribuição.	79
4.4	Distribuição de conectividade para $d = 1, 2, 3, 4$, mostrando o caráter exponencial de $P(k)$ para valores de $\alpha_A/d \geq 10$. (a) Representação log-log. (b) Representação log-linear.	80
4.5	q e κ para $d = 1, 2, 3, 4$. Podemos ver como tais parâmetros variam com α_A e d . q tem um limite superior igual a ($q = 7/5$) e κ tem um limite inferior ($\kappa = 0.01$) independentemente da dimensão do sistema.	82
4.6	q e κ versus α_A/d (mesmos dados da figura 4.5). Podemos ver que $q = 7/5$ e $\kappa = 0.01$ para $0 < \alpha_A/d \leq 1$. Um comportamento aproximadamente exponencial surge gradualmente para ambos os parâmetros a partir de $\alpha_A/d > 1$ ($\forall d$). Esses resultados exibem a universalidade de ambos q and κ	83
4.7	q e κ para ($d = 1, 2, 3, 4$). Os dados confirmam a relação aproximadamente linear entre q e κ dada por $\kappa \simeq 1.4 - 3.98(q - 1)^{1.15}$ (linha contínua). O mais alto valor de q é $7/5$, correspondente a $\kappa = 0.01$ ($\forall d$).	84
4.8	Evolução temporal da conectividade para o sítio $i = 10$ para dois valores de α_A ($\alpha_A = 2$ e $\alpha_A = 10$). Nesta figura mostramos como a conectividade dos sítios evoluem com os parâmetros η , α_A e d . Podemos ver que a inclinação das curvas aumentam com d e η , mas diminuem para um dado valor de α_A	85

- 4.9 Gráfico de β versus α_A para o sítio $i = 10$ com $\eta = 0.3$, $\eta = 0.6$ e $\eta = 0.9$. Podemos ver como β depende de α_A e d (coluna da esquerda). No gráfico β versus α_A/d exibimos a universalidade do parâmetro β (coluna da direita), exibindo também que temos diferentes curvas referentes aos diferentes valores de β . Simulação realizada para 10^3 amostras com redes de tamanho $N = 10^5$ sítios. 86
- 4.10 Exibimos as curvas de β versus α_A/d para três diferentes valores de η incluindo todas as dimensões ($d = 1, 2, 3, 4$). Para $\alpha_A/d = 0$ nossos resultados estão de acordo com o modelo de Bianconi-Barabási com $\beta \simeq 0.8\eta$; para $\alpha_A/d \rightarrow \infty$, o expoente β se aproxima de um valor constante próximo a 0.1 independentemente do valor de η . . 87

Lista de Tabelas

2.1	Propriedades médias para três anos diferentes. $\langle k_i \rangle$ é a conectividade média. $\langle l_i \rangle$ é a menor distância entre cada par de nós (i, j) . $\langle C \rangle$ é o coeficiente de agregação médio. Tabela retirada de referência [38].	46
2.2	Dados de redes reais. N é o número de sítios, E é o número de arestas, γ é o expoente da distribuição de conectividade, C é o coeficiente de agregação e $\langle l \rangle$ é o menor caminho médio. Tabela retirada da referência [32].	51

Introdução

Nas últimas décadas a interdisciplinaridade em vários campos do conhecimento tem causado uma revolução na Ciência, despertando a cada dia bastante interesse entre as mais variadas áreas de pesquisa. Fenômenos altamente complexos e díspares mostrando a correlação entre campos aparentemente desconexos como Física, Economia, Biologia, Psicologia, Estatística e muitos outros, começam a ser entendidos, de uma forma unificada e lógica dentro de um campo de pesquisa conhecido, atualmente, como Sistemas Complexos [1].

Não existe ainda uma definição precisa que consiga decidir quando um sistema é complexo ou não. Mas tentativas que se baseiam em termos estatísticos são amplamente utilizadas com o intuito de definir uma medida da complexidade de tais sistemas, que podem ser identificados por suas características principais:

(i) Os Sistemas Complexos são constituídos por um grande número de elementos simples que interagem através de processos simples;

(ii) A evolução temporal do sistema é geralmente controlada por uma dinâmica não linear.

(iii) O sistema global (macroscópico) costuma apresentar um grande número de configurações metaestáveis (ou de tempo de vida relativamente longo) com propriedades consideravelmente diferentes daquelas de seus elementos isolados;

(iv) Os Sistemas Complexos, frequentemente, apresentam padrões espaço-temporais fractais ou multifractais, que às vezes, se constituem de modo auto-organizado;

(v) Aqueles fenômenos que nos sistemas tradicionais (“não complexos”) são regidos por leis exponenciais, nos Sistemas Complexos costumam apresentar leis de potências.

Embora não exista uma definição precisa do que é um Sistema Complexo, a definição que mais se aproxima é que é um sistema composto por um grande número de partes simples interagentes, interligadas entre si de tal forma que o comportamento coletivo destas partes é mais do que a soma do comportamento das partes individuais. A complexidade do todo decorre deste entrelaçamento de influências mútuas, à medida que o sistema evolui dinamicamente. Sendo assim, um sistema complexo pode ser definido como sendo um sistema de partes interagentes que apresentam um comportamento emergente (comportamento coletivo). Como exemplo dessas unidades interagentes temos os neurônios no cérebro, as pessoas de uma sociedade, átomos em uma molécula de DNA, etc. Percebemos então que a área dos Sistemas Complexos é um vasto campo de estudo que inclui sistemas como os da matéria condensada, a economia e o mercado financeiro, o comportamento caótico das bolsas de valores, o funcionamento do cérebro, a organização das estruturas linguísticas, e até toda a sociedade humana.

Existe uma complexidade inerente ao estudo dos Sistemas Complexos, devido ao número muito grande de unidades interagentes e pelo fato de que alguns sistemas se encontram fora do equilíbrio. É fácil perceber que um tratamento analítico de tais sistemas se constitui uma dificuldade, mas o recente avanço tecnológico na construção de computadores de alto desempenho em conjunto com a facilidade de acesso a várias técnicas de simulação computacional tem ajudado a contornar essa dificuldade, tornando-se um dos principais fatores de estímulo às pesquisas no campo dos Sistemas Complexos.

Uma das abordagens do estudo em Sistemas Complexos é descrever a realidade, criando modelos cada vez mais abrangentes e realistas, utilizando-se de simulações computacionais com o objetivo de representar as partes interativas de um Sistema Complexo, para em seguida, observar e medir os comportamentos emergente do sistema.

A tese está estruturada em cinco capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma introdução geral explicando um pouco sobre a interdisciplinaridade entre várias áreas do conhecimento e como isto concerne com o conceito dos Sistemas Complexos.

No segundo capítulo apresentaremos alguns dos principais conceitos de rede. Ainda neste capítulo falaremos sobre alguns dos principais modelos de redes estudados nas últimas décadas bem como algumas das suas características básicas.

No terceiro capítulo apresentaremos os formalismos da Mecânica Estatística, e um

dos seus mais importantes conceitos, o conceito de entropia proposto por Boltzmann-Gibbs e sua conexão com a Termodinâmica. Apresentaremos também uma estatística que se mostrou ser a mais apropriada para descrever sistemas com interações de longo alcance, a estatística não-extensiva de Tsallis (também chamada de q -estatística), e descreveremos alguns dos modelos teóricos de redes geométricas que confirmam a conexão de tal estatística com Redes Complexas.

No quarto capítulo apresentamos um modelo de rede geométrico, o qual é uma generalização do modelo de Bianconi-Barabási, cuja extensão se dá na inserção de métrica na regra de ligação preferencial, gerando assim um modelo de Bianconi-Barabási d -dimensional. Simulações computacionais foram realizadas para diferentes tipos de dimensão ($d = 1, 2, 3, 4$) comprovando que tal parâmetro é de grande influência na construção desse modelo, como também verificamos como os parâmetros q e κ , provenientes da Mecânica Estatística não-extensiva de Tsallis, influenciam as mais importantes propriedades dessa rede geométrica.

Por fim, no capítulo cinco, apresentaremos algumas considerações finais incluindo nossas conclusões e perspectivas, que a partir do panorama das Redes Complexas servirá de base para o desenvolvimento de futuros trabalhos nesta área do conhecimento.

Conceitos Básicos e Modelos Teóricos de Redes

2.1 Teoria dos Grafos

Redes são abundantes na natureza, descrevendo diversos sistemas reais que possuem muitos elementos interligados, tais como a sociedade, uma rede de indivíduos ligados por várias relações sociais (facebook, instagram, twitter...), as redes de caráter tecnológico, como a Internet, uma rede de roteadores conectados por várias conexões, a World Wide Web, uma enorme rede virtual de páginas na Web conectadas por links, e ainda as redes biológicas, como a rede de neurônios, uma rede de substratos conectados por várias reações químicas [2]. Sabemos que nos dias atuais a área de redes vem desempenhando um importante papel na representação e estudo de sistemas reais interconectados, sendo tal modelagem uma ferramenta que fornece uma simples representação, mas tremendamente útil na análise e comportamento desses sistemas. Mas o que exatamente é uma rede? Como e quais mecanismos determinam a topologia de tais redes? Questionamentos como esses têm induzido a comunidade científica incluindo físicos, matemáticos, cientistas da computação, sociólogos e biólogos [3, 4] a tentar compreender muitos fenômenos da natureza, relativos a essas áreas de estudo, usando uma importante teoria matemática como ferramenta, a Teoria de Grafos.

O estudo das redes teve sua origem na Teoria dos Grafos, quando o matemático Leonard Euler, por volta de 1735, resolveu o problema das pontes de Königsberg [5]. Tal problema consistia em saber se era possível atravessar as sete pontes do rio Pregel, rio que

corta a cidade de Königsberg, passando sobre cada uma das sete pontes uma única vez e assim regressar ao ponto de partida (ver Fig. 2.1(a)). Para solucionar o problema Euler usou um artifício matemático em que ele representou a cidade de Königsberg como um grafo, transformando as pontes da cidade em segmentos (ligações ou arestas) e as porções de terra em pontos (nós ou vértices), como mostra a figura 2.1(b). Com a ajuda desse recurso Euler chegou à conclusão de que o problema era insolúvel¹[7]. Essa prova é considerada o ponto de partida do ramo da Matemática conhecido como Teoria de Grafos.

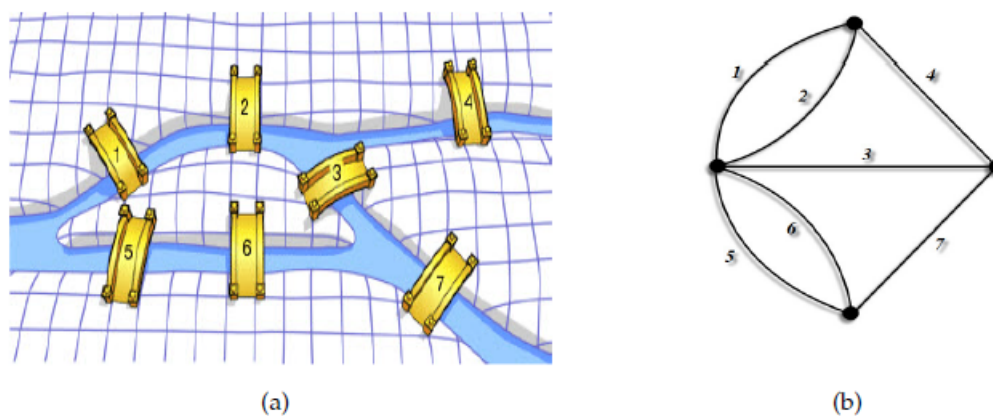


Figura 2.1: a) Representação das pontes de Königsberg. b) Grafo de Euler para o problema das pontes de Königsberg. As pontes são representadas pelas ligações e as porções de terra pelos nós. Figura retirada do endereço eletrônico <http://idm09.wordpress.com/2009/11/01/its-a-small-world-after-all/>.

Dessa forma, temos na Teoria de Grafos, um aporte teórico que nos possibilita uma descrição mais apurada de tais objetos, permitindo um tratamento matemático para redes, uma vez que as redes podem ser representadas por grafos [8]. Partindo de todas as descrições acima, uma rede (ou grafo) é um objeto matemático constituído de um conjunto de vértices (nós ou sítios), conectados via linhas (ligações, arestas ou arcos), ver Fig. 2.2. Matematicamente também podemos descrever um grafo como um objeto matemático $G = (V, E)$ constituído de dois conjuntos finitos, o conjunto V formado pelos vértices do grafo e o conjunto E formado por suas arestas.

Na Fig. 2.2 temos um simples grafo contendo 5 vértices e 7 arestas, cuja representação matemática pode ser escrita da seguinte forma:

¹Em 1873, Carl Hierhler provou que é possível atravessar as sete pontes, passando sobre cada uma delas uma única vez, se, e somente se, todo nó em um grafo tem um número par de ligações.

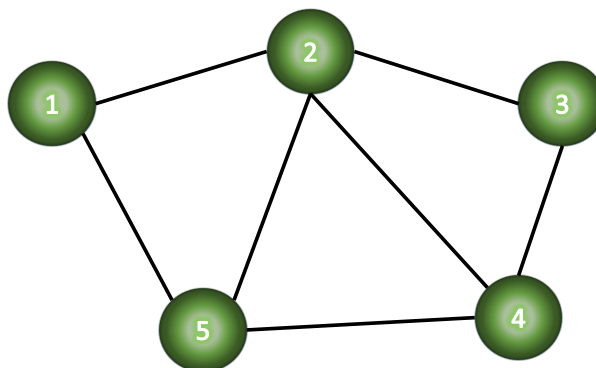


Figura 2.2: Representação esquemática de um grafo, contendo 5 vértices e 7 arestas.

$$G(V, E) : V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E = \{\{2, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 4\}\}$$

Diversas propriedades podem ser associadas aos vértices e arestas de um grafo, características como peso nas arestas, o sentido das ligações e até mesmo o tipo de vértices do grafo podem ser determinantes para o entendimento de propriedades locais ou globais do mesmo. Apresentaremos logo abaixo alguns dos principais conceitos que fundamentam a Teoria dos Grafos.

2.1.1 Conceitos fundamentais

1. **Topologia** – comumente chamada de arquitetura da rede, é uma propriedade que surge como consequência das interações ou comportamentos autônomos de seus constituintes, incluindo seus vértices e arestas. Por exemplo, redes aleatórias e redes livres de escala surgem como consequências de suas regras de ligação [11].
2. **Grau ou conectividade de um vértice** – uma das características locais mais simples de um vértice é a sua conectividade k , que é o número de ligações que o conecta a outros sítios da rede. É fácil perceber que a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do seu número de arestas [9]. Em alguns grafos existem nós que têm um número muito grande de conexões (alto grau) comparados com a maioria dos nós existentes no grafo, e estes nós são geralmente chamados de polos ou hubs. Entretanto, há algumas redes que não apresentam polos, uma vez que a conectividade dos vértices tem um valor próximo à média $\langle k_i \rangle$, ou ainda todos os sítios têm a mesma conectividade (redes regulares) [11].

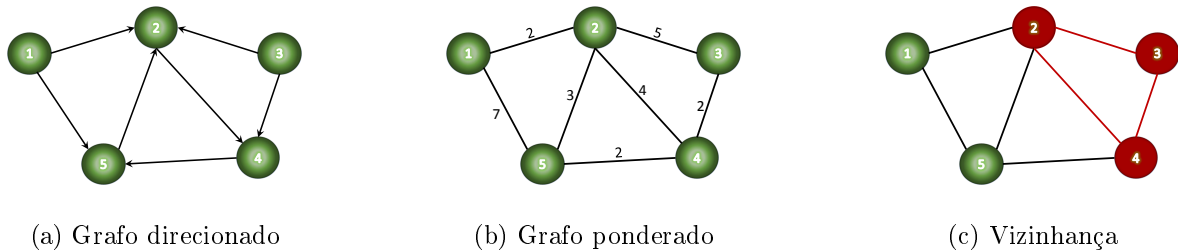


Figura 2.3: (a) Grafo direcionado com 5 vértices e 7 arestas. Os vértices 1,3 têm grau igual a 2, ou seja, $k_1 = k_3 = 2$, os vértices 4,5 têm grau igual a 3, pois $k_4 = k_5 = 3$, e o vértice 2 têm grau igual a 4. (b) Grafo ponderado, neste grafo suas arestas têm um valor inteiro correspondente aos seus pesos. (c) Vizinhança. O vértice 2 é vizinho do vértice 3 que também é vizinho do vértice 4, mas por exemplo, o vértice 3 não é vizinho do vértice 5.

3. **Vizinhança ou adjacência** – se dois vértices compartilham uma aresta, eles são ditos vizinhos, ou seja, se o vértice i está conectado ao vértice j os mesmos são adjacentes². Matematicamente definimos vizinhança da seguinte maneira: para um grafo $G(V, E)$ tal que $a, b \in V$, afirma-se que a é adjacente a b se e somente se $a, b \in E$ [12] (ver Fig. 2.3(c)).
4. **Grafo regular** – um grafo é dito regular quando todos os seus vértices têm a mesma conectividade k , exibindo também uma regularidade com relação à sua estrutura (rede triangular, hexagonal, quadrada) [11]. Redes desse tipo são estudadas na Física, por exemplo, em modelos atômicos, onde os sítios são os átomos e as ligações são as interações entre eles.
5. **Grafo direcionado ou digrafo** – é aquele grafo em que suas arestas têm um sentido bem definido, ou seja, se existe uma aresta direcionada de um dado vértice i para outro j , a troca de informações entre tais vértices só pode ocorrer no sentido do vértice i para j , e não no sentido contrário (ver Fig. 2.3(a)). Em tais grafos, a conectividade dos nós podem ser classificadas como: conexões de saída k_i^{out} (ligações que saem do nó i) e as conexões de entrada k_i^{in} (ligações que chegam ao nó i), sendo a conectividade total de tal nó dada por $k_i = k_i^{in} + k_i^{out}$ [6].
6. **Grafo ponderado** – é um grafo cujas arestas possuem valores (pesos) (ver Fig. 2.3(b)). Estes valores podem ser distâncias, o tempo gasto em um determinado trajeto, etc. Se a aresta $\alpha \in E$, o valor associado a tal aresta é chamado de peso de α denotado por $w(\alpha)$. Sendo assim o peso total do grafo G é dado por $W(G) = \sum_{i=1}^{N_e} w(\alpha_i)$, sendo N_e o número total de arestas do grafo G .

²Afirmção válida apenas para grafos não-direcionados.

7. **Grafo bipartido** – existem grafos que possuem dois ou mais tipos de vértices, cujas ligações só se fazem entre vértices do mesmo tipo. Um grafo G é bipartido se o conjunto V de vértices puder ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 tais que toda aresta de G possui um vértice em V_1 e outro em V_2 . Os conjuntos V_1 e V_2 são chamados de conjunto partição.
8. **Grafo tipo árvore** – uma classe importante de grafo são as árvores (ver Fig. 2.4(a)), que são grafos que não contêm circuitos, sendo um circuito definido como um caminho fechado com k ligações tais que cada duas ligações consecutivas, e somente elas, tenham um nó comum [3] (ver Fig. 2.4(b)). Quando uma árvore não contém circuitos existe somente um caminho ligando cada par de nós, e se uma árvore de ordem N não possuir partes separadas ela é dita uma árvore conectada, com um número máximo de ligações dada por $L = N - 1$.

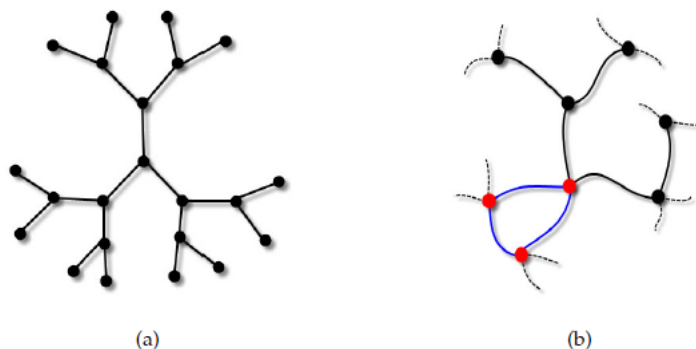


Figura 2.4: a) Representação da rede de Bethe. Esse é um exemplo de uma rede tipo árvore. b) Exemplo de uma rede com presença de circuito de ordem $n = 3$, representado pelos nós em vermelho e pelas ligações em azul. Essa rede possui número de nós $N = 8$ e número de ligações $L = 8$. Com esses dados, usando a relação $I = L + 1 - N$, podemos determinar o número de circuitos presentes na rede. Nesse caso, temos $I = 1$. Figura retirada da referência [21].

9. **Grafos estáticos e dinâmicos** – existem grafos em que o número de vértices e arestas são constantes no tempo, tornando-se assim grafos estáticos. Quando o número de nós ou arestas mudam com o tempo, seja com a adição ou remoção de seus constituintes, chamamos estes grafos de dinâmicos. A função f que define a forma como adicionamos ou religamos aresta em um grafo é chamada de regra de ligação. A regra de ligação de uma rede pode ser aleatória, onde todos os nós têm a mesma probabilidade de receber (ou não) ligações, ou pode ser preferencial, quando alguns nós da rede têm maiores chances de fazer conexões.

2.2 Distribuição de conectividade

Uma das principais propriedades a ser analisada em uma rede é a sua distribuição de conectividade, sendo de grande importância na classificação dos diferentes tipos de redes no que se refere a sua topologia. Através da distribuição de conectividade é fácil diferenciar por exemplo, as redes de escala típica (Redes Aleatórias), cuja distribuição de conectividade tem uma forma gaussiana, das redes sem escala típica (Redes Complexas), que são muito bem representadas por uma distribuição de conectividade assintoticamente em lei de potência.

Sabemos que a conectividade dos vértices em uma rede é distribuída estatisticamente, logo a distribuição de conectividade $P(k)$ é uma função cujo propósito é representar estatisticamente a conectividade dos vértices da rede, tal que $P(k)$ nos dê a probabilidade de que um vértice escolhido aleatoriamente tenha conectividade k , ou equivalentemente a fração de nós na rede que têm conectividade k .

Nos grafos cujas arestas têm direção, deve-se considerar duas distribuições de conectividade: conexões que chegam em um nó k_{in} , e as que saem dele, k_{out} . Dessa forma teremos distribuições de conectividade associadas às conexões de entrada $P_{in}(k)$, e a distribuição de conexões de saída, $P_{out}(k)$. Podemos obter a informação de como a conectividade se distribui entre os nós de uma rede calculando os momentos da sua distribuição de conectividade. O n -ésimo momento de $P(k)$ é definido como:

$$\langle k^n \rangle = \sum_k k^n P(k). \quad (2.1)$$

Dessa forma, o primeiro momento é a conectividade média da rede $\langle k \rangle$ [13], e o segundo momento mede as flutuações da distribuição de conectividade [4, 5]. Apresentarei a seguir exemplos das distribuições de conectividade mais encontradas no estudo de Redes Complexas.

2.2.1 Distribuição de Poisson

Seja um grafo aleatório $G(N, p)$, constituído de um número N fixo de vértices, cujas

arestas são adicionadas aleatoriamente entre todos os pares de vértices com probabilidade p [20]. Podemos perceber que todos os N vértices de um grafo aleatório são estatisticamente equivalentes, dado que um nó em particular pode se ligar aos outros $N - 1$ nós presentes na rede com uma mesma probabilidade p . No limite em que um grafo aleatório tem o seu número de vértices tendendo ao infinito ($N \rightarrow \infty$) e $\langle k \rangle$ é finito, o grafo tem sua distribuição de conectividade seguindo uma distribuição de Poisson, definida como:

$$P(k) = \frac{e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k}{k!} \quad (2.2)$$

$\langle k \rangle = p(N - 1)$. Percebemos pela Fig. 2.5 que para valores distantes da média $P(k) \rightarrow 0$, isso ocorre devido ao termo $k!$ na Eq. 2.2, sendo tal distribuição muito útil em descrever sistemas com um número muito grande de constituintes. Grande parte dos grafos aleatórios clássicos possuem uma distribuição Poissoniana e podemos dizer abertamente que redes que apresentam esse tipo de distribuição são mais homogêneas, pois a maioria dos sítios da rede têm sua conectividade igual ou próxima ao valor médio $\langle k \rangle$ [5].

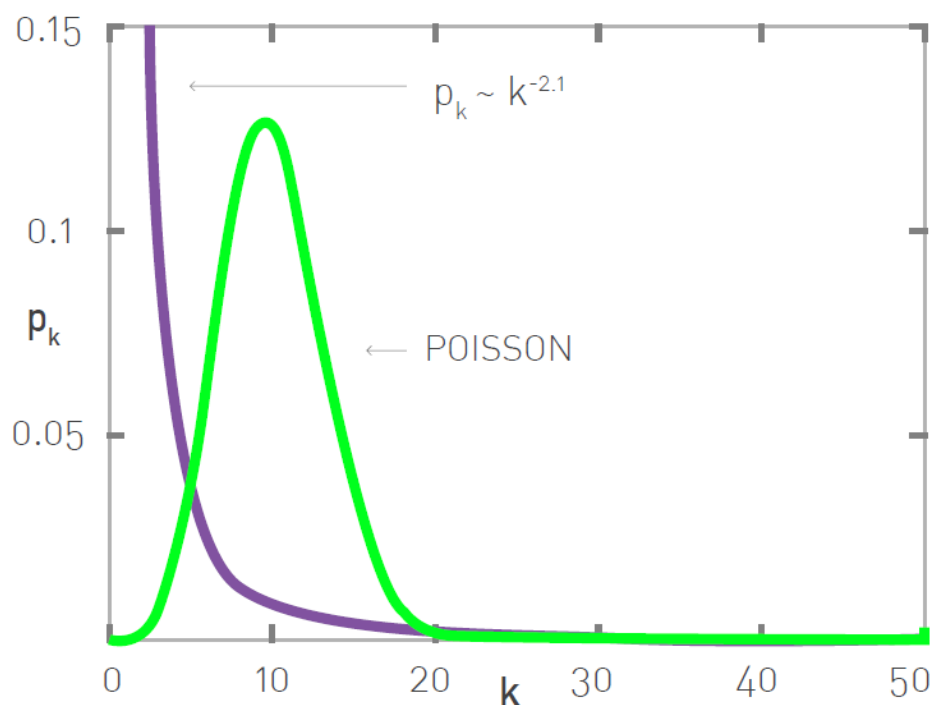


Figura 2.5: Comparação entre a distribuição de Poisson e a distribuição em lei de potência ($\gamma = 2.1$), ambas com $\langle k \rangle = 11$. Figura retirada de referência [10].

2.2.2 Distribuição em lei de potência

Vários sistemas reais têm uma distribuição de conectividade $P(k)$ que difere significativamente de uma distribuição exponencial ou de Poisson, sendo tais sistemas bem representados por distribuições de conectividade que obedecem assintoticamente uma lei de potência da forma $P(k) \propto k^{-\gamma}$ (ver Fig. 2.5). Redes com essa distribuição são chamadas livres de escala ou “scale-free”. Alguns tipos de redes reais, tais como as redes biológicas, sociais e tecnológicas apresentam propriedades de redes livres de escala, pois parecem não possuir uma escala típica, dado que as mesmas possuem vértices com valores de conectividades que estão entre $1 < k < \infty$. Nessas redes, o expoente γ geralmente se encontra entre os valores $2 < \gamma < 3$ [11].

Se a conectividade média da rede livre de escala (primeiro momento da distribuição de conectividade) é finita, então seu expoente deve ser maior que 2, ou seja, $2 < \gamma < \infty$. Como prova, iremos calcular o primeiro momento de uma distribuição de conectividade em lei de potência $P(k) = Ck^{-\gamma}$:

$$\langle k^n \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k^n P(k) dk \quad (2.3)$$

que fazendo as devidas substituições chegamos em:

$$\langle k^n \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k^n Ck^{-\gamma} dk.$$

Para $n = 1$ temos:

$$\langle k \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} Ck^{1-\gamma} dk,$$

o que resulta em:

$$\langle k \rangle = \frac{C}{2-\gamma} [k^{2-\gamma}]_{k_{min}}^{\infty}. \quad (2.4)$$

Vemos que a Eq. 2.4 diverge se $\gamma \leq 2$, mostrando que leis de potência com valores de $\gamma \leq 2$ não podem ter $\langle k \rangle$ finito [14]. Isso significa dizer que se pegarmos dados de uma

rede real, com $\gamma \leq 2$, é possível calcular sua conectividade média. No entanto, $\langle k \rangle$ não ser finito significa que a medida em que efetuamos um número infinito de amostras, a tendência de tal valor médio é divergir, de maneira que a conectividade $\langle k \rangle \rightarrow \infty$ [14]. Temos que para $\gamma > 2$ a média é perfeitamente bem definida com um valor dado por:

$$\langle k \rangle = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 2} k_{min}. \quad (2.5)$$

Para o segundo momento da distribuição $P(k)$ temos:

$$\langle k^2 \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} C k^{2-\gamma} dk,$$

o que resulta em:

$$\langle k^2 \rangle = \frac{C}{3 - \gamma} [k^{3-\gamma}]_{k_{min}}^{\infty}. \quad (2.6)$$

Percebemos que se $\gamma \leq 3$ temos $\langle k^2 \rangle \rightarrow \infty$. Resultados empíricos para muitas redes reais mostram que sua distribuição de conectividade tem expoentes entre $2 < \gamma < 3$. Temos então que a variância, e conseqüentemente o desvio padrão ($\sigma = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}$) não são bem definidos. Para $\gamma > 3$, $\langle k^2 \rangle$ é bem definido e assume a forma:

$$\langle k^2 \rangle = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 3} k_{min}^2. \quad (2.7)$$

A partir de tais resultados vemos que todos os momentos $\langle k^n \rangle$ existem para $n < \gamma - 1$ e divergem caso contrário. Entretanto, os momentos que são bem definidos podem ser calculados através da equação [14]:

$$\langle k^n \rangle = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 1 - n} k_{min}^n. \quad (2.8)$$

2.3 Menor caminho médio

Em uma rede, a distância d_{ij} (ou menor caminho) entre quaisquer dois nós i e j é definida como a quantidade de arestas que formam o menor caminho entre eles [5, 17], ou seja, mesmo sabendo que nem sempre há um único caminho conectando dois nós da rede, estamos interessados na distância em que seu valor seja a menor soma possível do número total de arestas que separam esses vértices. Essa medida de distância também é conhecida como distância geodésica [20]. A definição de distância como a quantidade de arestas entre quaisquer dois vértices só é válida quando os vértices considerados estão conectados. Logo, quando não é possível estabelecer um caminho entre dois vértices i e j , os mesmos são considerados desconectados, e define-se a distância entre eles como $d_{ij} = \infty$.

Matematicamente, o menor caminho médio $\langle l \rangle$ é dado pela média de todos os menores caminhos d_{ij} tomada sobre todos os $N(N - 1)/2$ pares de nós, ou seja,

$$\langle l \rangle = \frac{2}{N(N - 1)} \sum_{i < j} d_{ij}. \quad (2.9)$$

O estudo do menor caminho médio representa uma das ideias básicas no estudo de Redes Complexas, desempenhando um papel de grande importância no transporte e comunicação dentro da rede. Por exemplo, ao enviar uma informação de um computador para outro através da internet, o menor caminho será o caminho mais eficiente para o tráfego da informação, uma vez que por ele, os dados serão transferidos de uma maneira mais rápida, otimizando o fluxo de informação entre qualquer constituinte da rede.

Outra medida de grande importância no estudo de redes, relacionada também ao conceito de distância, é o diâmetro da rede l_D [5, 18]. Essa medida é definida como a maior distância entre dois sítios escolhidos aleatoriamente. Em situações em que se pretende analisar a robustez da rede a ataques, tal definição é importante, pois alterações no seu valor são indicativos do quão forte é a estrutura topológica da rede. Se um grafo tem mais que uma componente (grafos com aglomerados isolados), a distância entre sítios que estão em componentes diferentes é $d_{ij} = \infty$, pois não é possível conectar todos os pares de nós nessa rede. Neste caso, é mais apropriado definir o diâmetro da rede como sendo o diâmetro máximo de seus aglomerados.

2.4 Coeficiente de agregação

Uma característica muito interessante em redes sociais é a naturalidade que seus constituintes têm de formar grupos. Em geral cada membro do grupo pode estar vinculado por suas relações de amizades, profissionais, de forma que cada membro conhece a maioria dos outros membros, mostrando claramente que existe uma tendência de agregação entre eles [21]. O coeficiente de agregação é uma grandeza que nos informa o quão agregados estão os primeiros vizinhos³ de um dado sítio, sendo este um dos mais importantes parâmetros usados para caracterizar a topologia de Redes Complexas. Tal grandeza nos dá a probabilidade de que os dois vizinhos mais próximos de um dado nó também sejam vizinhos entre si. Para um dado nó da rede, tendo ele k_i arestas as quais o conecta com k_i outros sítios, o valor do coeficiente de agregação do sítio i é dado pela relação entre o número de arestas E_i existentes entre esses nós, e o número total de $k_i(k_i - 1)/2$ de arestas possíveis. Assim,

$$C_i(k_i) = \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (2.10)$$

onde $C_i(k_i)$ está definido no intervalo $0 \leq C_i(k_i) \leq 1$. Quando $C_i(k_i) = 0$, entendemos que os vizinhos do nó i não se conhecem e, portanto, não estabelecem ligações entre si. Entretanto, quando $C_i(k_i) = 1$ existem todas as ligações possíveis presentes entre todos os primeiros vizinhos do nó i .

Para exemplificar, mostramos na figura 2.6 um nó ν (vértice vermelho central) conectado a seis primeiros vizinhos (vértices pretos). Para determinar o coeficiente de agregação do nó ν devemos verificar, inicialmente, qual a vizinhança dele e quantos dos seus primeiros vizinhos estão conectados entre si. Neste caso, podemos ver que cinco dos seus seis vizinhos estão conectados (linhas verdes), ou seja, $E_\nu = 5$. Assim, usando a equação 2.10, é possível mostrar que o coeficiente de agregação do nó ν é $C_\nu(k_\nu) = 1/3$.

Como mostrado na figura 2.6, o coeficiente de agregação $C_i(k_i)$ de cada sítio é uma medida local da rede. Então, como determinar o coeficiente de agregação médio da rede? Para obtermos o coeficiente de agregação médio da rede fazemos a média sobre todos os $C_{i's}$

³Sítios que compartilham uma mesma aresta.

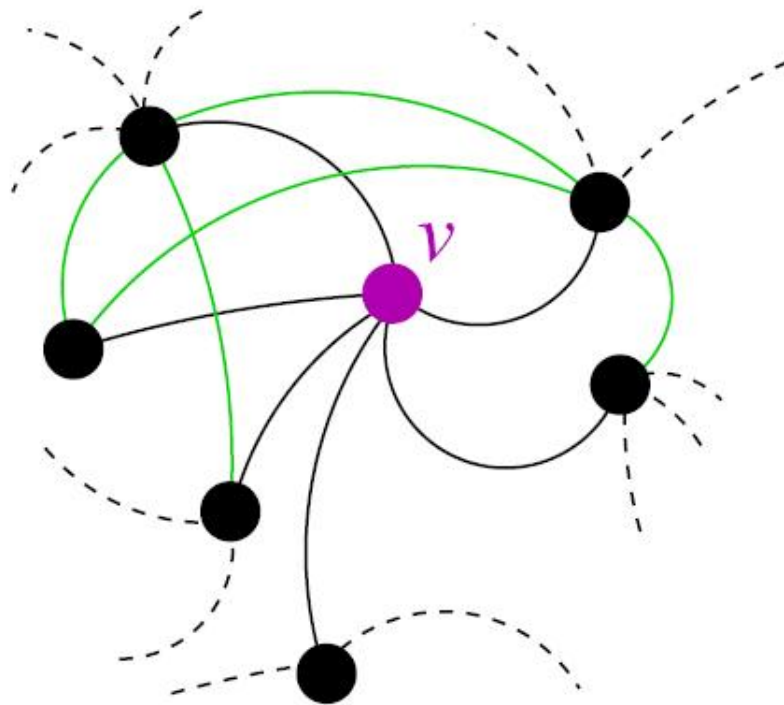


Figura 2.6: Figura de um nó ν e seus primeiros vizinhos, vemos que $k_\nu = 6$ resultando $c_\nu = 1/3$. Figura retirada de referência [21].

individuais e o dividimos pelo número total de nós da rede, ou seja:

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle C_i(k_i) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (2.11)$$

O coeficiente de agregação médio da rede, assim como o coeficiente de agregação local, expressa a probabilidade da existência de conexões entre os primeiros vizinhos de um dado nó, escolhido aleatoriamente entre todos os nós existentes na rede. O coeficiente de agregação $\langle C \rangle$ também demonstra a densidade de pequenos “*loops*” (circuitos) de comprimento três em uma rede [5, 6].

2.5 Classificação das redes quanto à sua estrutura

Vimos até agora que a maneira como os sítios de uma rede se conectam define

de certa forma sua estrutura e o estudo de medidas como menor caminho, distribuição de conectividade, entropia, etc. nos trazem bastante informação quanto a estrutura das redes em estudo. Em termos didáticos podemos caracterizar as redes em duas classes bem definidas, as redes aleatórias, que são redes que possuem estruturas completamente aleatórias, e as redes regulares, cuja estrutura é bem definida.

Um das principais características de redes regulares (rede triangular, hexagonal, quadrada, etc.) é que todos os sítios possuem a mesma conectividade (ver Fig. 2.7) [11]. Do ponto de vista de entropia, devido à sua evidente regularidade estrutural, essa classe de rede exibe baixos valores de entropia.

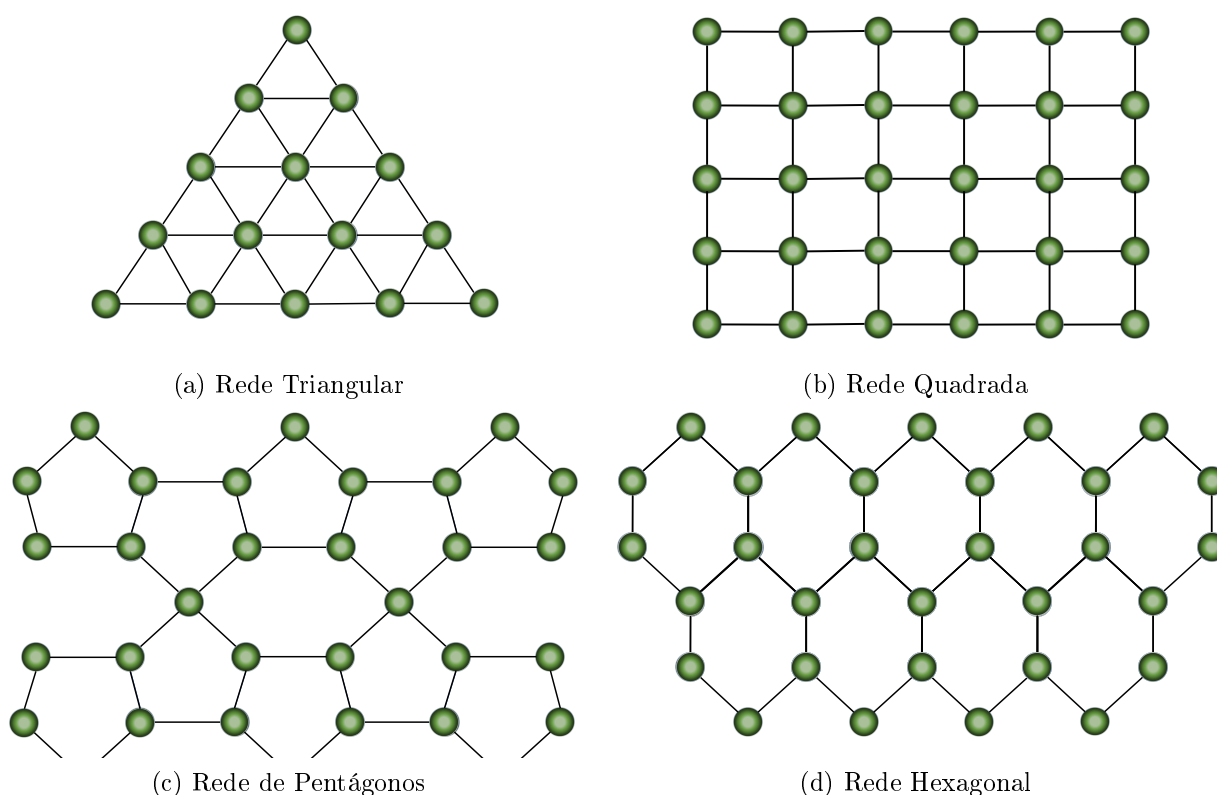
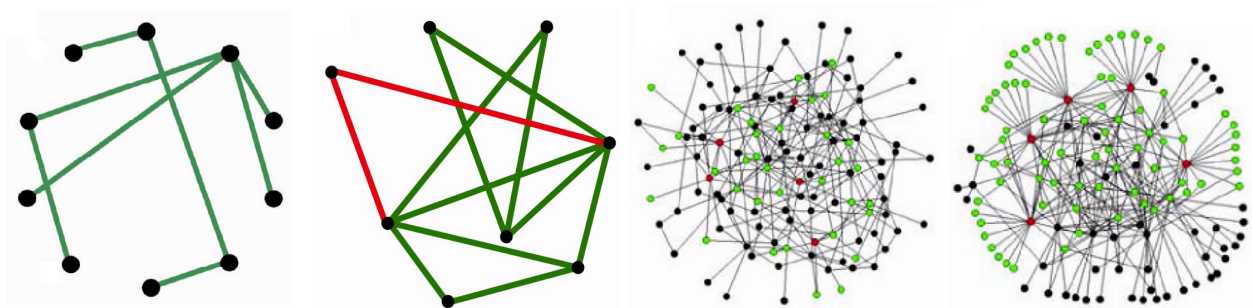


Figura 2.7: Redes Regulares: vemos que suas estruturas têm uma forma bem definida (rede triangular, hexagonal, quadrada). Todos os sítios (exceção os sítios da borda) em uma dada rede possuem o mesmo número de vizinhos, ou seja, um mesmo valor para sua conectividade.

As redes aleatórias (ver Fig. 2.8), podem ser definidas como um arranjo desordenado de ligações. A noção de aleatoriedade não é aplicável somente a um único grafo, sugerindo uma descrição de ensembles estatísticos cujos membros são todos os grafos possíveis. Esse ensemble é definido como um conjunto de todos os possíveis grafos, formando um espaço de probabilidades onde cada grafo possui o mesmo peso estatístico com sua própria probabilidade de realização, ou seja, cada rede aleatória é um grafo com uma probabilidade associada.

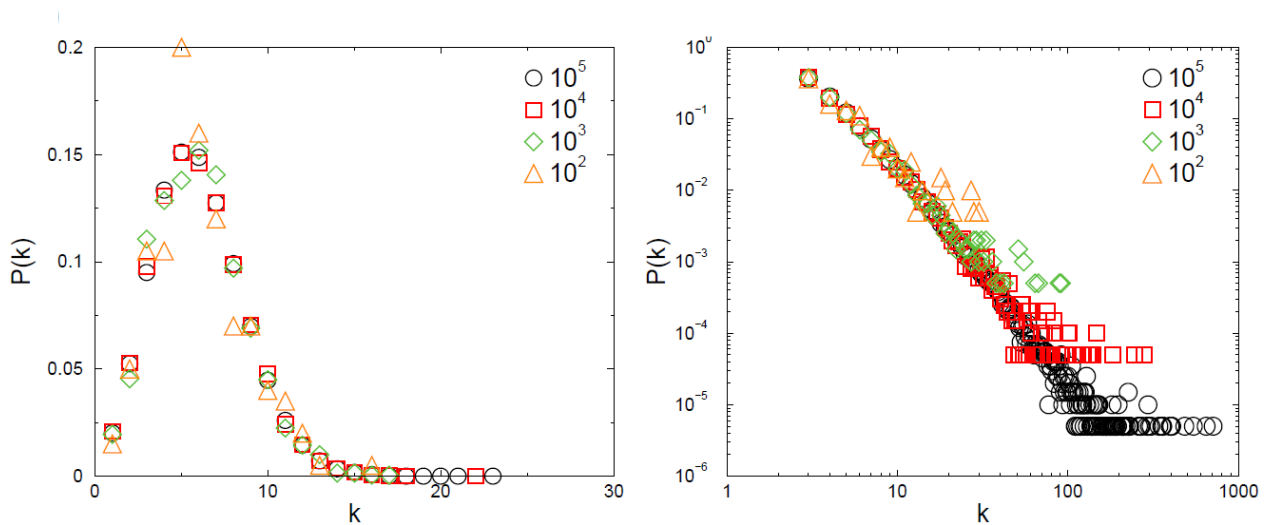
2.6 Principais modelos de redes aleatórias

Nesta seção, mostraremos alguns dos principais modelos de redes aleatórias, criados



(a) Rede Aleatória e Livre de Escala

(b) Ambas as redes em Evolução



(c) Distribuição de Conectividade

Figura 2.8: (a) À esquerda temos uma rede aleatória com $N = 10$ nós isolados. À direita temos uma rede livre de escala em um período inicial de suas conexões. (b) Ambas as redes em um estágio avançado de evolução, após a adição de nós e arestas. (c) Distribuição de conectividade de ambas as redes. À direita temos a distribuição de conectividade de um grafo aleatório, podemos ver que tal distribuição segue uma Poissoniana. À esquerda temos uma distribuição de conectividade de uma rede livre de escala, bem definida por uma lei de potência do tipo $P(k) = k^{-\gamma}$. Figuras retiradas da referência [24].

com o objetivo de compreender o comportamento de algumas redes reais. Evidenciaremos os modelos teóricos de Erdős-Rényi, Watts-Strogatz, que desempenham um papel crucial na compreensão das Redes Complexas.

2.6.1 Modelo de Erdős e Rényi

No final dos anos 50, em seus primeiros artigos sobre redes aleatórias, Paul Erdős e Alfréd Rényi [22] propuseram um modelo de grafo aleatório, cuja regra de ligação é tal que usa-se uma mesma probabilidade p para conectar todos os N vértices da rede (ver Fig. 2.9), criando assim um grafo de aproximadamente $\frac{pN[N-1]}{2}$ ligações distribuídas aleatoriamente. Tal grafo é um ensemble estatístico, cujos membros são todos os grafos possíveis rotulados de um dado número N de nós e L ligações, escolhidas ao acaso entre as $N(N-1)/2$ conexões possíveis, ou seja, existem um total de $C_{N(N-1)/2}^L$ grafos possíveis formando um espaço de probabilidades onde cada grafo possui o mesmo peso estatístico. A partir da regra de ligação, pode-se calcular a conectividade média da rede relacionando-a à probabilidade de conexão p , de forma que:

$$\langle k \rangle = \frac{2E}{N} = p(N-1) \simeq pN, \quad (2.12)$$

consequentemente o número total de arestas é uma variável aleatória com valor esperado $E(N) = pN[N-1]/2$.

Na literatura matemática a construção de um grafo aleatório é frequentemente chamada de uma evolução: começando com um grupo de N vértices isolados, onde o grafo desenvolve-se com a sucessiva adição aleatória de arestas, de tal forma que o papel da teoria de grafos aleatórios é estudar as propriedades do espaço de probabilidades, associada a grafos com N nós quando $N \rightarrow \infty$. O estudo dos grafos aleatórios tem o objetivo de determinar para qual probabilidade de conexão p , uma propriedade particular do grafo irá surgir, como também determinar em qual probabilidade de conexão p , o sistema apresenta uma transição de fase [22].

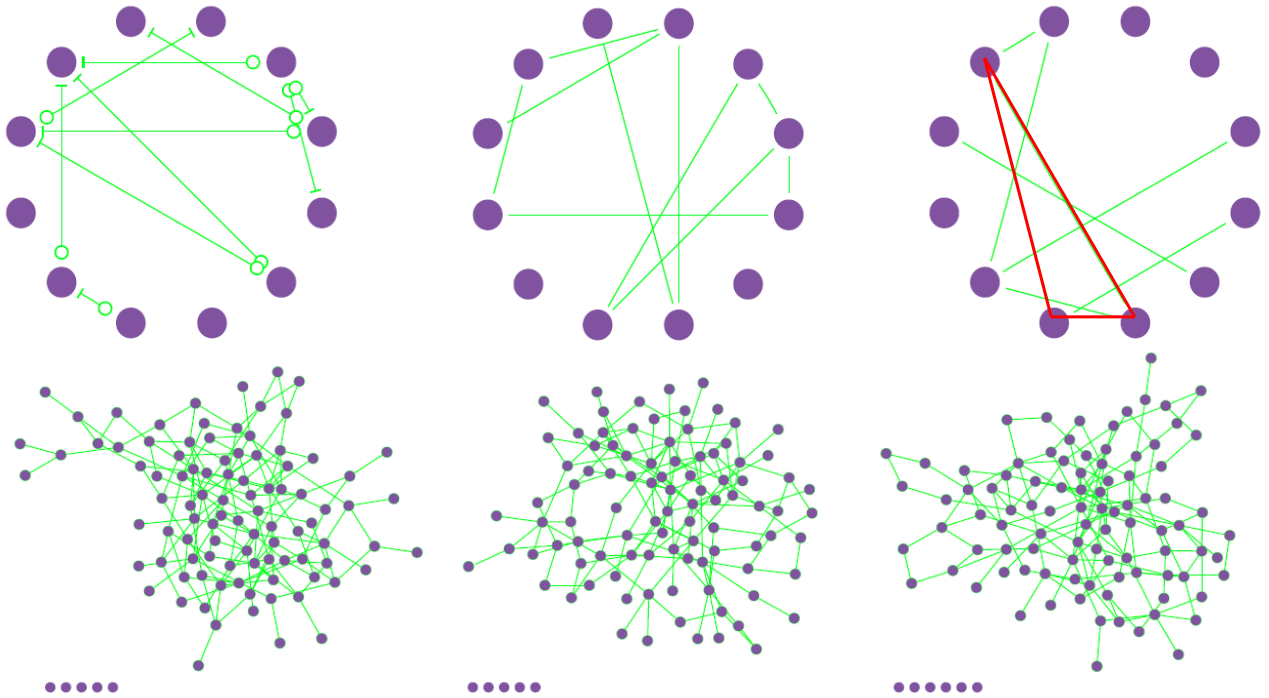


Figura 2.9: Processo de evolução de um grafo para o modelo de Erdős-Rényi. No topo da figura temos várias redes com $N = 12$ nós, cujo cada par de vértices foi conectado com uma probabilidade p . Ao fundo mostramos grafos com $N = 100$, em diferentes estágios de desenvolvimento, correspondentes a probabilidades $p = 0.03$. Vários sítios têm conectividade $k = 0$, mostrados como nós isolados ao fundo da figura. Figura retirada da referência [10].

2.6.2 Modelo de Watts e Strogatz

Em um artigo publicado em 1998 [25], o sociólogo Duncan J. Watts e o matemático Steven H. Strogatz propuseram um modelo que transita entre uma rede regular e uma rede aleatória (ver Fig. 2.10), objetivando reunir em um mesmo modelo, características de mundo pequeno⁴ e alto coeficiente de agregação presentes em muitas redes reais. O algoritmo de tal modelo é explicitado abaixo:

- (a) - Começa-se com um círculo regular com N nós conectados aos seus k primeiros vizinhos, com o propósito de ter uma rede conexa em todos os momentos.
- (b) - Com uma probabilidade p reescreve-se aleatoriamente cada aresta da rede de tal forma que auto-conexões e conexões duplas são excluídas. Este processo inclui $pNk/2$ ligações as

⁴Três características principais definem as redes de mundo pequeno: o menor caminho médio cresce logaritmicamente com o número de nós, alto coeficiente de agregação e baixa conectividade média [25].

quais conecta nós de diferentes vizinhanças. Os casos extremos são $p = 0$ (rede completamente regular) e $p = 1$ (rede completamente aleatória).

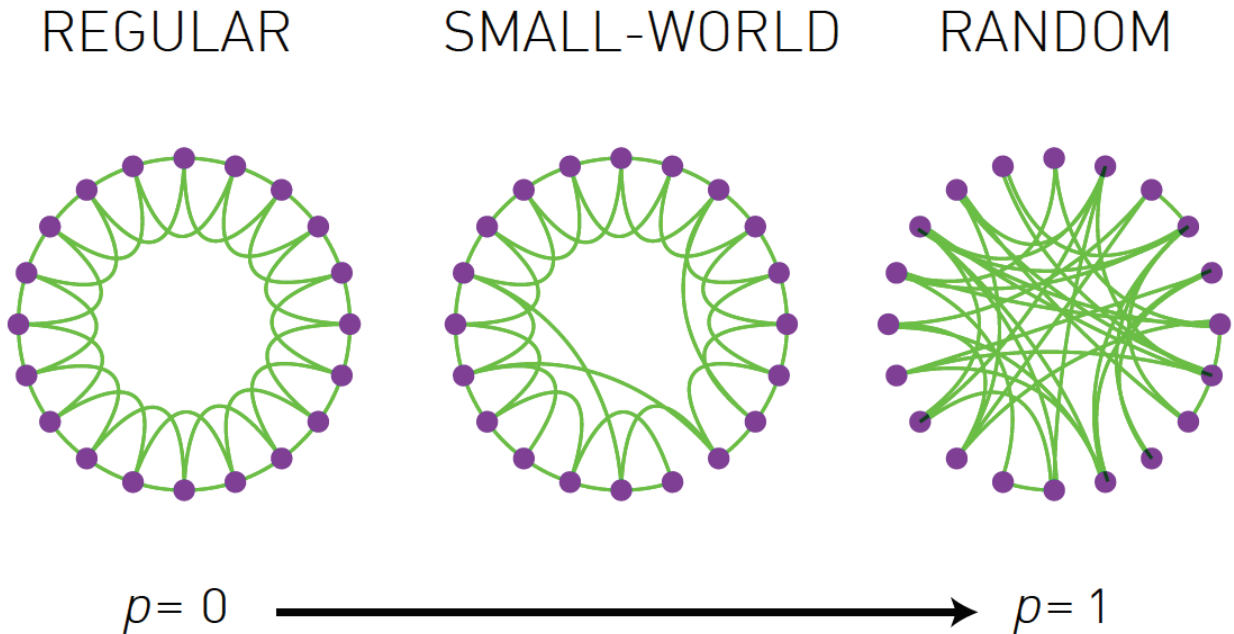


Figura 2.10: A figura exibe os processos de conexões dos nós para o modelo de Watts-Strogatz, o qual interpola um círculo regular e uma rede aleatória sem alterar o número de nós ou arestas. Em tal figura começa-se com $N = 20$ nós, cada nó conectado aos seus quatro primeiros vizinhos. Para $p = 0$ o círculo se mantém inalterado; com o aumento de p a conectividade dos sítios aumentam desordenadamente até $p = 1$, onde todas as arestas são reconectadas aleatoriamente. Com um valor de p intermediário existe o efeito de mundo pequeno, devido as pequenas distâncias entre os sítios e o alto valor do coeficiente de agregação. Figura retirada da referência [10].

O modelo proposto por Watts e Strogatz tem origem em sistemas sociais, onde a maioria das pessoas são amigas de seus vizinhos (por exemplo, da mesma rua). Entretanto, todos têm amigos distantes, de outro bairro, cidade ou país, e podemos representar esta característica da rede usando o modelo de Watts-Strogatz. Esta situação pode ser, claramente, descrita por este modelo, bastando, para isto, redirecionar aleatoriamente as ligações de uma rede regular ($p = 0$), gerando assim ligações de longo alcance.

O gráfico 2.11 ilustra o comportamento do coeficiente de agregação, $\langle C(p) \rangle$, e o tamanho do menor caminho médio, $\langle l(p) \rangle$ para uma rede de Watts-Strogatz. No estágio inicial da rede, onde o mesmo é um círculo regular, temos que $p = 0$, $\langle l(0) \rangle \approx N/2k \gg 1$ e $\langle C(0) \rangle \approx 3/4$. Esse resultado mostra que $\langle l \rangle$ varia linearmente com o tamanho do sistema,

quando o coeficiente de agregação é máximo. Por outro lado, quando o sistema converge para uma rede aleatória ($p = 1$) $\langle l(1) \rangle \approx \ln(N)/\ln(k)$ e $\langle C(1) \rangle \approx k/N$. Neste caso, $\langle l \rangle$ varia logaritmicamente com N e o coeficiente de agregação decresce com N . Os casos limites indicam que altos valores de $\langle C \rangle$ estão sempre associados com altos valores de $\langle l \rangle$, e pequenos valores de $\langle C \rangle$ com pequenos valores de $\langle l \rangle$. Mas ao contrário, Watts e Strogatz encontraram que há um amplo intervalo de p para o qual $\langle l(p) \rangle$ está próximo de $\langle l(1) \rangle$ ainda que $\langle C(p) \rangle \gg \langle C(1) \rangle$. Este regime se origina em uma rápida queda de $\langle l(p) \rangle$ para pequenos valores de p , enquanto $\langle C(p) \rangle$ fica quase inalterado. A coexistência de pequenos $\langle l \rangle$ e grandes $\langle C \rangle$ concorda com as características de redes reais.

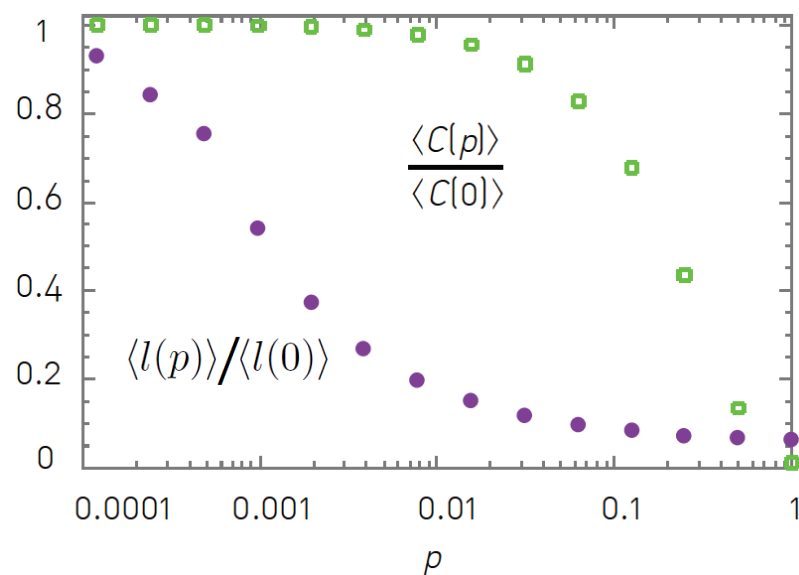


Figura 2.11: Tamanho do caminho $\langle l(p) \rangle$ e coeficiente de agregação $\langle C(p) \rangle$ para o modelo de Watts-Strogatz. Os dados estão normalizados para os valores de $\langle l(0) \rangle$ e $\langle C(0) \rangle$ em uma rede regular. Há uma rápida queda no caminho médio $\langle l(p) \rangle$, o que corresponde ao efeito de mundo pequeno, durante esta queda nota-se que $\langle C(p) \rangle$ permanece quase constante, indicando que a transição para o mundo pequeno é quase indetectável à nível local. Figura retirada da referência [10].

2.6.3 Propriedades de grafos aleatórios

A. Subgrafos

Seja $G_1 = (E_1, V_1)$ um grafo de E_1 arestas e V_1 nós, inteiramente contido em um grafo $G = (E, V)$ de tal forma que todos os V_1 nós e todas as E_1 arestas de G_1 são também nós de V e arestas de E , logo dizemos que G_1 é um subgrafo de G . A aparição de subgrafos

foi a primeira propriedade de grafos aleatórios estudada por Erdős e Rényi (1959) [22]. Na figura 2.9, temos um exemplo de subgrafo constituído pelo circuito de ordem 3 no último estágio de ligações da rede (linhas em vermelho). Nos circuitos de ordem k , percebemos que os mesmos tem k arestas, e isso só é possível pois a cada par de arestas consecutivas tem-se somente um nó em comum, por exemplo, um triângulo é um circuito de ordem 3 contendo 3 arestas, um retângulo é um circuito de ordem 4 contendo 4 arestas, e assim por diante. Vemos então que a conectividade média de um circuito é dois ($\langle k \rangle = 2$), já que a cada nó tem duas arestas. Outro exemplo de subgrafos são os grafos tipo árvore, que é um grafo de ordem k (contendo k nós e $k - 1$ arestas). A conectividade média de uma árvore de ordem k é dada por $\langle k \rangle = 2 - 2/k$, com k nós e todos as possíveis $k(k - 1)$ arestas.

Um interessante problema na Teoria dos Grafos é determinar segundo a sua evolução a probabilidade crítica $P_c(N)$ em que o grafo contenha uma árvore de certa ordem, como também determinar se existe uma probabilidade crítica que marca o aparecimento de subgrafos com k nós e l arestas. A seguir, mostraremos alguns resultados importantes de probabilidade crítica em grafos:

- (a) A probabilidade crítica de ter uma árvore de ordem k é $P_c(N) = cN^{-k/(k-1)}$;
- (b) A probabilidade crítica de ter um circuito de ordem k é $P_c(N) = cN^{-1}$;
- (c) A probabilidade crítica de ter um subgrafo completo de ordem k é $P_c(N) = cN^{-2/(k-1)}$.

B. Distribuição de conectividade

Em um grafo aleatório com probabilidade p de conexão, a conectividade k_i de um nó i segue uma distribuição binomial com parâmetros $N - 1$ e p :

$$P(k_i = k) = p^k(1 - p)^{N-1-k}C_k^{N-1}. \quad (2.13)$$

A probabilidade expressa na equação 2.13 representa o número de formas aos quais k arestas podem estar ligadas à um determinado nó, onde o primeiro termo p^k é a probabilidade de se ter as k arestas, $(1 - p)^{N-1-k}$ é a probabilidade que expressa a ausência das $(N - 1 - k)$ ligações e C_k^{N-1} é o número de diferentes combinações em que as ligações podem estar distribuídas (ver Fig. 2.12). Para grandes valores N a distribuição binomial expressa na equação 2.13 tende para uma distribuição de Poisson,

$$P(k) \cong e^{-pN} \frac{(pN)^k}{k!} = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}. \quad (2.14)$$

Nas análises de conectividade máxima e mínima, os resultados indicam que para altos valores de p ambas as conectividades são determinadas e finitas, e se $pN/\ln(N) \rightarrow \infty$, a conectividade máxima de quase todos os grafos aleatórios tem a mesma ordem de grandeza que a conectividade média, ou seja, apesar do fato de que a posição das arestas são aleatórias, um grafo aleatório típico é bastante homogêneo, assim a maioria dos nós tem o mesmo número de arestas.

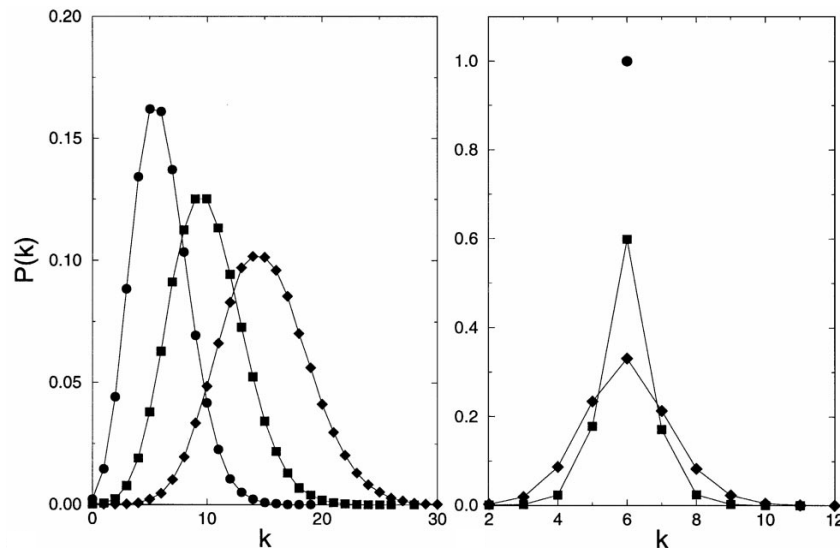


Figura 2.12: Distribuições de conectividade para os modelos Erdős-Rényi e Watts-Strogatz. À esquerda temos o $P(k)$ no modelo ER para $N = 10.000$ com probabilidades $p_{ER} = 0.0006$ (círculos), $p_{ER} = 0.001$ (quadrados) e $p_{ER} = 0.0015$ (diamantes). À direita temos o $P(k)$ no modelo Watts-Strogatz para $N = 10.000$, com $\langle k_i \rangle = 6$ e com três diferentes probabilidades de religação, $p_{WS} = 0$ (círculo, correspondente à função delta $\delta(k - 6)$), $p_{WS} = 0.1$ (quadrados) e $p_{WS} = 0.3$ (diamantes). Figura retirada da referência [27].

C. Diâmetro da rede

O diâmetro de um grafo é definido como a distância máxima entre qualquer par de vértices. Entretanto, grafos aleatórios tendem a ter pequenos diâmetros, pois o mesmo é igualmente distribuído com uma probabilidade já definida, ou seja, o número de nós a uma distância l de um dado nó não é muito menor que $\langle k \rangle^l$. Explicaremos passo a passo o porque de termos chegado à $l \propto \langle k \rangle^l$.

Seja uma rede aleatória onde os sítios tenham em média k ligações, $\langle k \rangle$. Usando a conectividade média da rede vemos que de um sítio qualquer podemos visitar em média k outros sítios afastados a uma distância de um passo. De cada um desses k sítios, podemos

visitar k outros sítios. Deste modo podemos visitar $\langle k \rangle^n$ sítios com n passos. Se a rede tiver N sítios, é evidente que $\langle k \rangle^n$ não pode exceder o tamanho N da rede. Assim, para alcançar os N sítios da rede são necessários em média $\langle l \rangle$ passos, dado por 2.15. Isso explica o motivo pelo qual partindo-se de um sítio inicial qualquer, será possível com poucos passos encontrar qualquer sítio na rede.

$$\langle l \rangle \cong \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)} \tag{2.15}$$

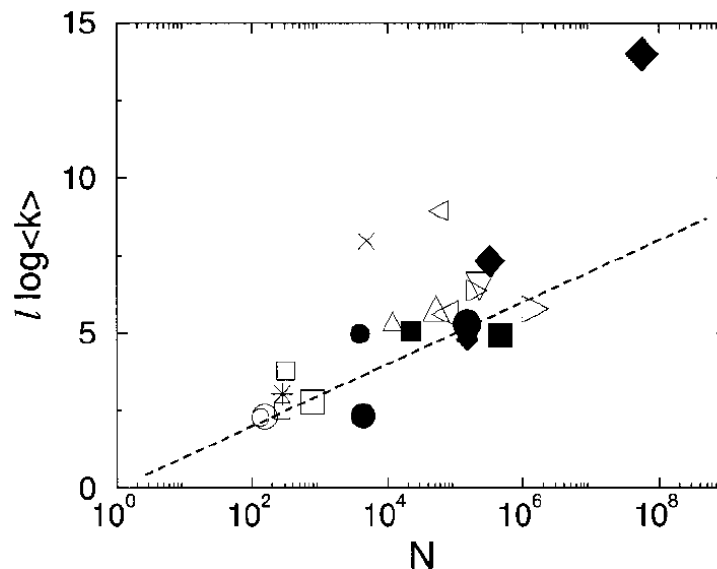


Figura 2.13: Comparação entre o caminho médio de uma rede real (símbolos) e a predição da equação 2.15 da teoria de redes aleatórias (linha pontilhada). Figura retirada da referência [27].

Seguem abaixo alguns resultados importantes [3]:

- (a) Se $\langle k \rangle = pN < 1$, teremos que um grafo típico é composto de árvores isoladas e seu diâmetro é igual ao diâmetro de uma árvore.
- (b) Se $\langle k \rangle > 1$, um aglomerado gigante aparece. O diâmetro do grafo é igual ao diâmetro do aglomerado se $\langle k \rangle > 3.5$.
- (c) Se $\langle k \rangle \geq \ln(N)$, quase todo o grafo é conectado.

Espera-se que o tamanho do menor caminho médio varie com o número de nós de forma igual ao diâmetro. A figura 2.13 mostra a comparação do menor caminho médio de redes reais e o estimado pela teoria de grafos aleatórios.

D. Coeficiente de agregação

A probabilidade de que dois nós aleatoriamente escolhidos estejam conectados é a mesma que considerar que dois dos primeiros vizinhos de um nó escolhido aleatoriamente estejam conectados, conseqüentemente o coeficiente de agregação de um grafo aleatório é

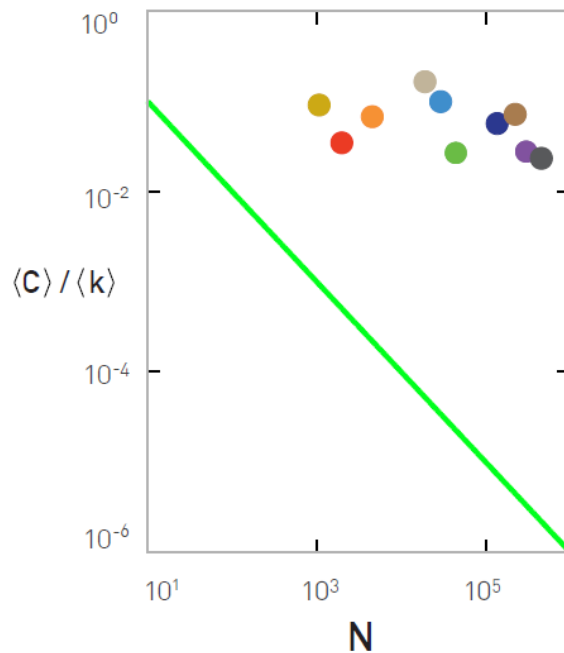


Figura 2.14: Comparação entre o coeficiente de agregação das redes reais e dos grafos aleatórios. A linha tracejada corresponde a equação 2.16, os pontos coloridos correspondem à várias redes reais, como a WWW, Internet, etc. Figura retirada da referência [10].

$$\langle C \rangle = p = \frac{\langle k \rangle}{N}. \quad (2.16)$$

Na figura 2.14, observamos o gráfico de $\langle C_{real} \rangle = \langle k \rangle$ em função dos seus tamanhos e comparamos este com a predição da equação 2.16. O gráfico indica convincentemente que redes reais não seguem a predição dos grafos aleatórios. A razão $C / \langle k \rangle$ não diminui com N^{-1} , ao invés disso, parece ser independente de N .

2.7 Redes livres de escala

2.7.1 Modelo de Barabási-Albert

Os modelos básicos de grafos aleatórios de Erdős e Rényi (ER) [22, 23] foram largamente usados como uma tentativa de descrever a topologia das redes reais. Entretanto, Barabási *et al.* mostraram que muitas redes reais com um grande número de nós, auto-organizam-se em uma topologia livre de escala, pois a probabilidade $P(k)$ de um vértice na rede interagir com k outros vértices decai assintoticamente como uma lei de potência dada por $P(k) = k^{-\gamma}$. Um comportamento não previsto pelos modelos teóricos de redes aleatórias existentes até então [28].

Sabemos que os modelos clássicos de redes aleatórias são estáticos, possuindo um número fixo de sítios, e além disso, todos os sítios têm uma mesma probabilidade p de fazer conexões. Barabási e Albert perceberam que algumas redes reais possuem dois ingredientes principais que ditam os seus comportamentos. Essas redes são melhor descritas como sistemas abertos onde o tamanho da rede aumenta continuamente com a adição de novos sítios. Além disso, eles também observaram que em algumas redes reais, os nós recém adicionados preferem se conectar aos nós altamente conectados.

O modelo introduzido por Barabási e Albert (BA) (ver Fig. 2.15) reúne essas características, **crescimento** e **ligação preferencial**, sendo um dos primeiros modelos a exibir uma distribuição de conectividade em lei de potência com um expoente fixo. O algoritmo do modelo de (BA) está explicitado abaixo.

- (1) **Crescimento da rede:** começa-se com um número pequeno de nós (m_0), e a cada passo no tempo, adiciona-se um novo nó com $m(\leq m_0)$ arestas que o conecta a m diferentes vértices presentes no sistema.
- (2) **Ligação preferencial:** quando se escolhe quais nós um novo vértice vai se conectar, assume-se que a probabilidade Π do novo nó se conectar ao vértice i depende da conectividade k_i do vértice i , com probabilidade

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (2.17)$$

- (3) Repete-se os passos anteriores até o tamanho desejado do sistema, depois de t passos no

tempo esse procedimento resulta em uma rede com $N = t + m_0$ nós e mt ligações, onde m é a quantidade de ligações iniciais que qualquer sítio faz ao chegar à rede.

Percebemos então que a combinação dos ingredientes crescimento da rede e ligação preferencial influenciam de maneira singular a conectividade individual dos nós, pois os nós que foram incorporados à rede nos seus primeiros estágios de desenvolvimento têm mais chances de adquirir ligações, mostrando que a idade do sítio é um fator determinante para ele se tornar um polo⁵(ver Fig. 2.15). Logo, os dois ingredientes, crescimento e ligação preferencial desempenham um papel fundamental, sendo necessários para o comportamento de uma distribuição de conectividade em lei de potência⁶.

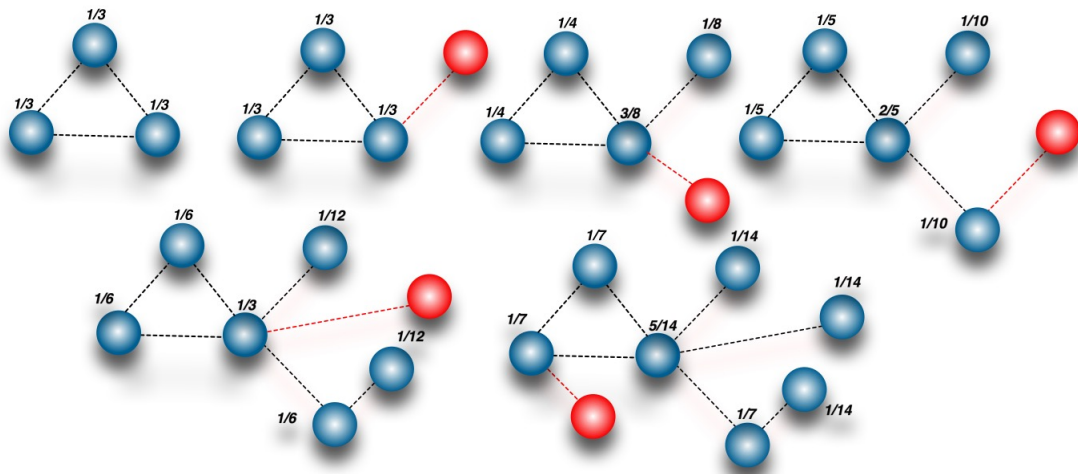


Figura 2.15: Exemplo ilustrativo de crescimento de uma rede de Barabási-Albert para $m_0 = 3$ e $m = 1$. Figura retirada de referência [15].

Para estudarmos a evolução da conectividade dos sítios e a distribuição da conectividade da rede, veremos uma aproximação analítica com o propósito de calcular as propriedades dinâmicas do modelo livre de escala, que foi proposta por Barabási e Albert (1999), o tratamento contínuo [27].

Tratamento contínuo do modelo BA

O tratamento contínuo calcula a dependência temporal da conectividade k_i de um dado nó i . Tal conectividade aumenta assim que um novo sítio entra na rede e se conecta ao nó i , a taxa com que k_i varia é proporcional a $\prod(k_i)$. Seja k_i uma variável real e contínua,

⁵Polos são aqueles nós altamente conectados que surgem em função do crescimento da rede.

⁶Essa condição não é unicamente necessária para obter um comportamento em lei de potência, apenas o crescimento da rede ou ligação preferencial podem produzir o mesmo resultado [29].

k_i satisfaz a seguinte equação

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \prod(k_i) = m \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{N-1} k_j}, \quad (2.18)$$

onde a soma é sobre todos os nós já existentes no sistema, deste modo $\sum_j k_j = 2mt$, logo a equação 2.18 pode ser escrita como,

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \frac{k_i}{2mt} = \frac{k_i}{2t}. \quad (2.19)$$

A solução para a equação 2.19, levando em conta a condição de que cada novo vértice i adicionado a rede tem conectividade inicial $k_i(t_i) = m$, é:

$$\begin{aligned} \int_{k_i(t_0)=m}^{k_i} \frac{dk_i}{k_i} &= \int_{t_0}^t \frac{dt}{2t} \\ \ln\left(\frac{k_i(t)}{m}\right) &= \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \\ k_i(t) &= m\left(\frac{t}{t_i}\right)^\beta, \end{aligned} \quad (2.20)$$

com $\beta = \frac{1}{2}$. Vemos que na equação 2.20 a conectividade de todos os nós evolui da mesma forma, seguindo uma lei de potência. A partir da equação 2.20 podemos calcular a probabilidade de que um certo nó tenha conectividade $k_i(t)$ menor que k . Através desse resultado é possível calcular o valor do expoente γ analiticamente, logo:

$$\begin{aligned} P(k_i(t) < k) &= P\left(m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2} < k\right) \\ P(k_i(t) < k) &= P\left(m^2\left(\frac{t}{t_i}\right) < k^2\right) \\ P(k_i(t) < k) &= P\left(\frac{m^2 t}{k^2} < t_i\right) \\ P(k_i(t) < k) &= P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$P[k_i(t) < k] = P\left(t_i > \frac{m^{1/\beta} t}{k^{1/\beta}}\right). \quad (2.22)$$

Mas em intervalos de tempos iguais adiciona-se novos nós à rede, de forma que

$$P(t_i) = \frac{1}{N} = \frac{1}{m_0 + t}. \quad (2.23)$$

Substituindo 2.23 na equação 2.18 obtemos

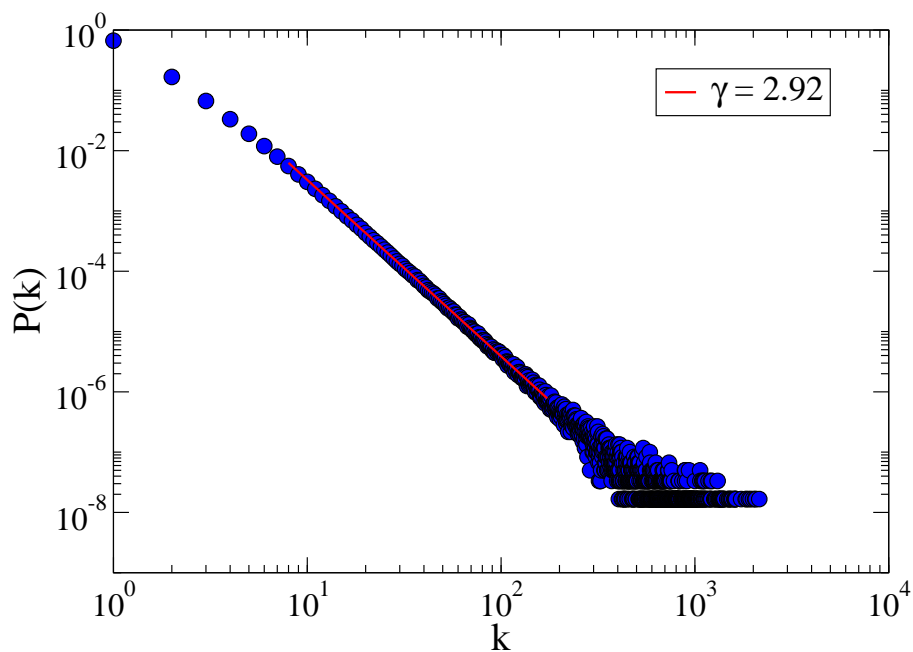
$$\begin{aligned} P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) &= 1 - P\left(t_i \leq \frac{m^2 t}{k^2}\right) \\ P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) &= 1 - \frac{m^2 t}{k^2(t + m_0)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

A distribuição de conectividade $P(k)$ pode ser obtida usando

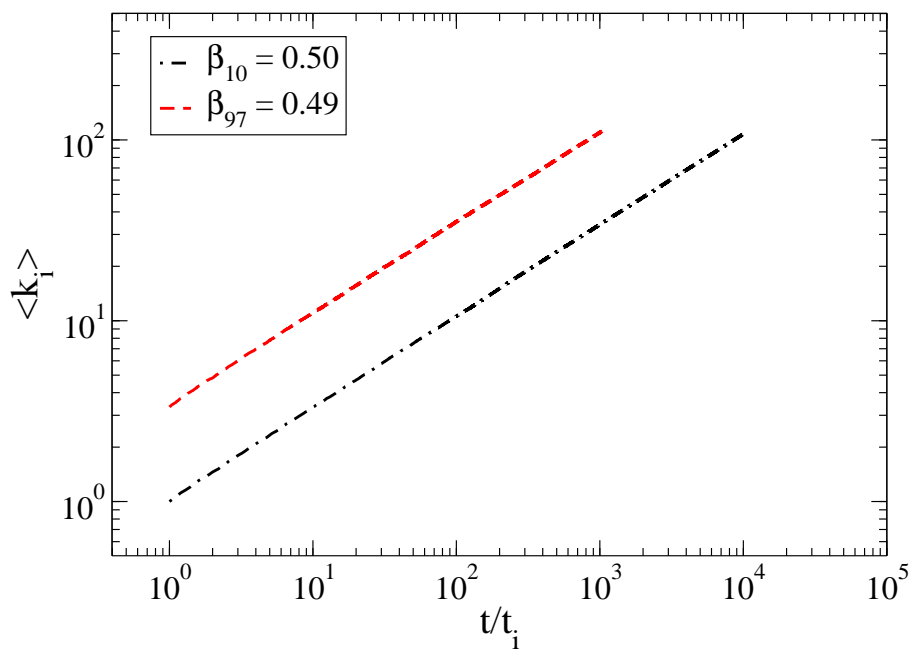
$$\begin{aligned} P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) &\equiv P(k_i(t) < k) \\ P(k) &= \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} \\ P(k) &= \left(\frac{2m^2 t}{m_0 + t}\right) k^{-3} \\ P(k) &\sim k^{-3}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Com o resultado 2.25 o modelo BA mostra que a distribuição de conectividade é independente de m e do tamanho da rede $N = m_0 + t$.

Logo abaixo o resultado numérico para a distribuição de conectividade do modelo BA (ver Fig. 2.16(a)), exibe o valor do expoente γ em acordo com o resultado analítico. Podemos ver na Fig. 2.16(b) como que o grau de cada nó aumenta no tempo. Assim como na solução analítica, os resultados números mostram que $k_i(t)$ obedece uma lei de potência com expoente dinâmico $\beta = 1/2$.



(a)



(b)

Figura 2.16: (a) Distribuição de conectividade em lei de potência para o modelo BA. Simulação realizada para $m = 1$, $N = 2 \times 10^5$ e 2×10^3 amostras. (b) Evolução temporal da conectividade dos sítios $i = 10$ e $i = 97$. Simulação realizada para a rede BA com $m = 1$, $N = 10^5$ e 1000 amostras. Figura retirada da referência [15].

2.7.2 Propriedades do modelo de Barabási-Albert

A. Tamanho do caminho médio

Comparando o tamanho do caminho médio da rede de Barabási-Albert com o de uma rede aleatória (com os mesmos valores N e $\langle k \rangle$), vemos que o modelo BA possui um caminho médio menor quando comparado ao da rede aleatória (ver Fig. 2.17), isso se deve ao fato de que a estrutura heterogênea de redes livres de escala são mais eficientes em aproximar vértices quando comparados com a estrutura homogênea das redes aleatórias.

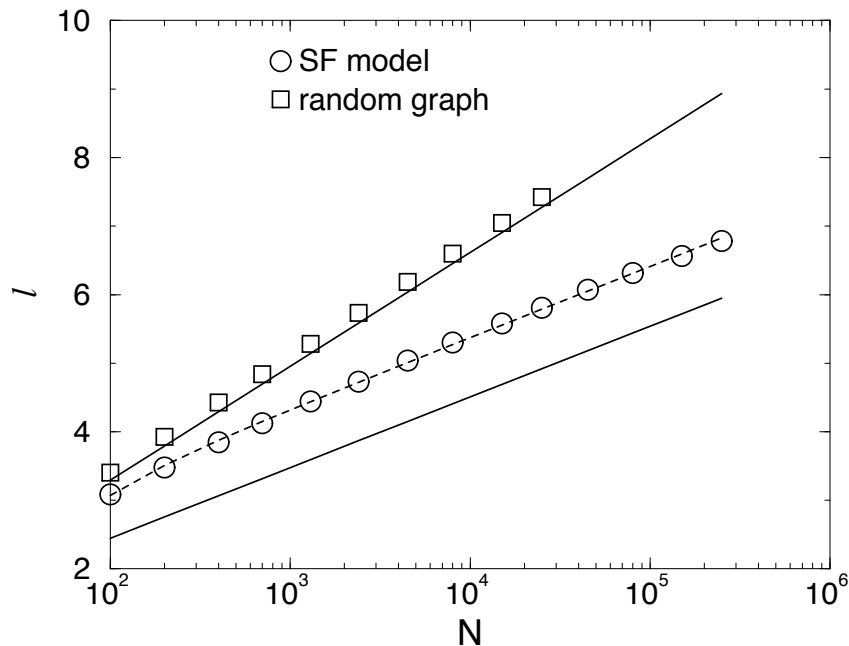


Figura 2.17: Característica do caminho médio $\langle l \rangle$ pelo tamanho N da rede de Barabási-Albert com $\langle k \rangle = 4$, comparada com um grafo aleatório de mesmo tamanho e mesma conectividade média. Figura retirada da referência [3].

O tamanho do caminho médio da rede de Barabási-Albert cresce aproximadamente de forma logarítmica com N para diferentes valores de m , como podemos ver nas equações 2.26[5]:

$$\langle l \rangle (m = 1) \sim \ln(N) \quad \text{e} \quad \langle l \rangle (m > 1) \sim \frac{\ln(N)}{\ln \ln(N)}. \quad (2.26)$$

B. Coeficiente de agregação

Exibimos a comparação entre o coeficiente de agregação da rede de Barabási-Albert com conectividade média $\langle k \rangle = 4$ comparada com o coeficiente de agregação $\langle C_{rand} \rangle = \langle k \rangle / N$ para redes aleatórias (ver Fig. 2.18).

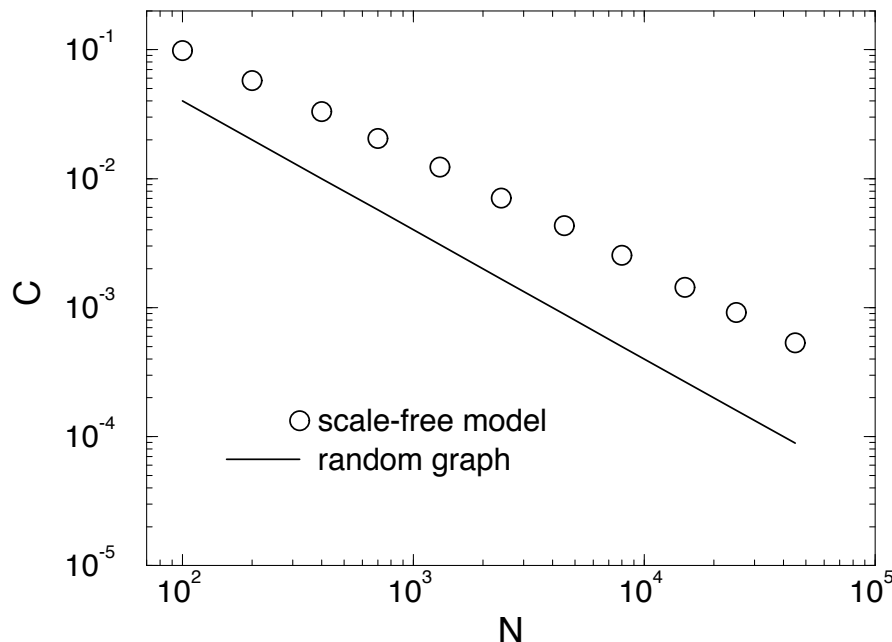


Figura 2.18: Coeficiente de agregação pelo tamanho da rede de BA com $\langle k \rangle = 4$, comparada com o coeficiente de agregação de um grafo aleatório com $\langle C_{rand} \rangle \approx \langle k \rangle / N$. Figura retirada da referência [3].

O coeficiente de agregação de redes livres de escala é cerca de 5 vezes maior que o da rede aleatória, e esse fator aumenta lentamente com o número de nós [3]. Entretanto, o coeficiente de agregação do modelo de BA diminui com o tamanho da rede, seguindo aproximadamente uma lei de potência $\langle C \rangle \approx N^{-0.75}$, sendo seu valor aproximado dado por $\langle C \rangle \approx (\ln N)^2 / N$. Nos grafos aleatórios o coeficiente de agregação é dado por $\langle C \rangle = \langle k \rangle N^{-1}$, que ainda difere do comportamento exibido nos modelos de mundo pequeno, pois em tais modelos C é independente de N .

2.7.3 Modelo de Bianconi-Barabási

Vários sistemas reais demonstram um grau de competitividade que se reflete na forma como os sítios recebem conexões, em tais sistemas a conectividade dos sítios não depende somente do tempo em que estão na rede, mas sim de parâmetros que os tornem suscetíveis a adquirir ligações. Por exemplo, alguns indivíduos são melhores em construir amizades (conexões) em um encontro casual, na WWW alguns documentos que utilizam ferramentas como o marketing acabam adquirindo um número maior de conexões em um período muito curto de tempo, criando assim a possibilidade de ultrapassar sites mais antigos (que possuem muitas conexões). Esta “habilidade” que determinados sítios têm de adquirir ligações não está presente nos modelos de redes vistos até então, pois no modelo de Barabási-Albert sabemos que os sítios recebem ligações à uma mesma taxa, com a variação de sua conectividade dada por $k_i(t) = (t/t_i)^\beta$, onde $\beta = 1/2$ e t_i é o tempo em que o nó i foi adicionado ao sistema. Através dessa equação é fácil perceber que os sítios mais “velhos” da rede têm uma maior probabilidade de receber conexões.

Ao observarem este aspecto competitivo das redes reais, Bianconi e Barabási propuseram um modelo que levasse em consideração esta “habilidade” que alguns sítios têm de adquirir ligações [30]. Neste modelo, a cada sítio i da rede é atribuído um fator de “qualidade” η_i , obtido de uma distribuição $\rho(\eta)$. Como o parâmetro de qualidade está inserido na ligação preferencial, é notório que sítios com diferentes qualidades terão ritmos distintos para evoluir suas conectividades, pois agora o expoente $\beta(\eta_i)$ torna-se dinâmico e dependente das qualidades dos nós.

Utilizamos o algoritmo abaixo para gerarmos uma rede seguindo o modelo de Bianconi-Barabási:

1. Inicia-se a rede com m_0 sítios, onde cada um deles possui um parâmetro de qualidade η . A qualidade é escolhida aleatoriamente respeitando uma distribuição de qualidade $\rho(\eta)$ (que se mantém constante com o tempo).
2. A cada passo de tempo é inserido um novo sítio que já possui um parâmetro de qualidade η , escolhido a partir da distribuição de qualidade $\rho(\eta)$ (passo 1). Esse novo sítio é conectado aos $m(\leq m_0)$ sítios preexistentes da rede, segundo a probabilidade de conexão do passo 3.

3. A probabilidade do novo sítio se conectar com um determinado sítio i , é proporcional a conectividade k_i e a qualidade η_i desse sítio, é dada por:

$$\prod_{ij} = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j}. \quad (2.27)$$

4. Repete-se os passos (2) e (3) até o tamanho desejado. Para tempos bastante longos, $t \rightarrow \infty$, a rede terá $N = m_0 + t$ sítios e mt ligações.

Vemos que essa generalização da ligação preferencial (Equação 2.27) incorpora ingredientes que permitem que sítios jovens com poucas ligações possam adquirir ligações a uma alta taxa, basta que o mesmo tenha uma alta qualidade, possibilitando-o tornar-se um polo nesta rede, diferentemente do que ocorre no modelo BA, em que a idade do sítio é o único fator para que ele se torne um polo.

Para entender as propriedades de escala deste modelo, utilizaremos uma teoria contínua de modo a obter a distribuição de conectividade. Lembrando que esta teoria possui aproximações que foram tratadas em detalhes na seção sobre o modelo BA.

Tratamento contínuo do modelo Bianconi-Barabási

Vemos que qualquer nó i aumentará sua conectividade k_i numa taxa que é proporcional a probabilidade dada pela equação 2.27, da seguinte forma

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j}. \quad (2.28)$$

O fator m ilustra o fato de que cada novo sítio incrementa m ligações ao sistema. Para resolver a equação 2.28, Bianconi e Barabási sugeriram a seguinte solução [30], inspirados no modelo livre de escala, de tal forma que a evolução temporal da conectividade de um sítio neste modelo é dada por:

$$k_{\eta_i}(t, t_0) = m \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\beta(\eta_i)}, \quad (2.29)$$

onde t_0 é o tempo em que o nó foi adicionado ao sistema. Sabemos que o número de ligações de um dado nó sempre aumenta no tempo, de maneira que $\beta(\eta) > 0$, mas a variável $k_i(t)$ não pode aumentar mais rápido que t , mostrando que o expoente $\beta(\eta)$ está compreendido entre

os valores $0 < \beta(\eta) < 1$. Calcularemos a média de $\sum_j \eta_j k_j$, cuja soma sobre todos os j pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \sum_j \eta_j k_j \right\rangle &= \int d\eta \rho(\eta) \eta \int_1^t dt_0 k_\eta(t, t_0) \\
 &= \int d\eta \rho(\eta) \eta \int_1^t \frac{dt_0}{t_0^{\beta(\eta)}} \\
 &= \int d\eta \rho(\eta) \eta m \frac{(t - t^{\beta(\eta)})}{1 - \beta(\eta)}. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Desde que $\beta(\eta) < 1$, no limite em que $t \rightarrow \infty$, $t^{\beta(\eta)}$ pode ser desprezado quando comparado com t , obtendo

$$\left\langle \sum_j \eta_j k_j \right\rangle = D m t (1 + \mathbf{O}(t)^{-\epsilon}) \tag{2.31}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= (1 - \max \beta(\eta)) > 0 \\
 D &= \int d\eta \rho(\eta) \frac{\eta}{1 - \beta(\eta)} \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

Usando a equação 2.31, e a notação $k_\eta = k_{\eta_i}(t, t_0)$, a equação dinâmica 2.28 pode ser escrita como

$$\frac{\partial k_\eta}{\partial \eta} = \frac{\eta k_\eta}{Dt}, \tag{2.33}$$

que tem uma solução da seguinte forma,

$$k_\eta(t, t_0) = A t^{\frac{\eta}{D}}. \tag{2.34}$$

Impondo a condição dada pela equação 2.29, encontramos o expoente dinâmico $\beta(\eta)$, dado por

$$\beta(\eta) = \frac{\eta}{D}. \quad (2.35)$$

Notemos que $\beta(\eta)$ depende de D e logicamente dependerá de $\rho(\eta)$. Deste modo temos que obter o valor de D . Para isso substituiremos $\beta(\eta)$ na equação 2.32, ficando com

$$1 = \int_0^{\eta_{max}} d\eta \rho(\eta) \frac{\eta}{\frac{D}{\eta} - 1}, \quad (2.36)$$

onde η_{max} é a máxima qualidade possível no sistema. Vemos que a integral dada pela equação 2.36 tem uma singularidade quando $D/\eta = 1$. Entretanto, desde que $\beta(\eta) < \eta/D < 1$ para qualquer valor de η , temos que $D > \eta_{max}$, assim o limite de integração nunca terá uma singularidade. O expoente $\beta(\eta)$ ilustra o comportamento da evolução temporal da conectividade dos sítios da rede que dependem do parâmetro η (qualidade intrínseca do nó) (ver Fig. 2.20).

Finalmente, podemos calcular a distribuição de conectividade $P(k)$, visto que $P(k) = k^{-\gamma}$, com $\gamma = 1/\beta + 1$. Calcularemos a probabilidade acumulada para um nó fixo tal que $k_{\eta} > k$, como mostrado a seguir

$$\begin{aligned} P(k_{\eta(t)} > k) &= P \left[m \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\beta(\eta)} > k \right] \\ &= P \left[\frac{m}{k} t^{\frac{\eta}{D}} > t_0^{\frac{\eta}{D}} \right] \\ &= P \left[t_0 < t \left(\frac{m}{k} \right)^{\frac{\eta}{D}} \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Como adicionamos os nós em intervalos de tempo iguais, os valores t_i tem uma densidade de probabilidade constante dada por

$$P(t_i) = \frac{1}{m_0 + t}, \quad (2.38)$$

com isso encontramos o valor de $P(k_\eta > k)$, dado por

$$P(k_\eta(t) > k) = \int_0^{t\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{D}{\eta}}} \frac{1}{m_0 + t} dt_0 = \frac{1}{m_0 + t} t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{D}{\eta}}. \quad (2.39)$$

Assim a distribuição de conectividade, que mede a probabilidade que um nó tenha k ligações, é dada pela integral

$$P(k) = \int_0^{\eta_{max}} d\eta \frac{\partial P(k_\eta(t) > k)}{\partial k} \propto \int_0^{\eta_{max}} d\eta \rho(\eta) \frac{D}{\eta} \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{D}{\eta}+1}. \quad (2.40)$$

Iremos analisar a distribuição de conectividade $P(k)$ dada pela equação 2.40, com o propósito de demonstrar a validade de $P(k)$ quando os valores da distribuição $\rho(\eta)$ exibir diferentes comportamentos.

Modelo livre de escala - Podemos perceber que no modelo livre de escala de Barabási-Albert a ligação preferencial depende apenas da conectividade dos nós (Eq. 2.17). Entretanto, o modelo BA corresponde ao caso do qual todos os sítios da rede apresentam um mesmo valor de qualidade (notemos que se $\eta_i = 1$ para qualquer sítio, obtemos a mesma dinâmica do modelo BA). Assim podemos representar a distribuição de qualidade deste modelo da seguinte forma: $\rho(\eta) = \delta(\eta - 1)$. Quando substituimos esta função na Eq. 2.36, encontramos $D = 2$, sendo este o maior valor possível da constante D . Substituindo o valor de $D = 2$ na Eq. 2.35 obtemos $\beta = 1/2$, e quando tal valor é aplicado na Eq. 2.40 chegamos a $P(k) = k^{-3}$. Assim, o modelo livre de escala representa um caso particular do modelo de qualidade considerado nesta seção, com o expoente da distribuição de conectividade possuindo o maior valor possível.

Distribuição uniforme da qualidade - Neste caso a função $\rho(\eta)$ representa uma distribuição de qualidade uniforme, de maneira que escolhemos aleatoriamente um valor de $\rho(\eta)$ distribuído uniformemente no intervalo $(0,1]$. Quando os sítios possuem diferentes valores de qualidade os mesmos competem por ligações de maneira que neste modelo, sítios jovens com poucas ligações podem receber conexões com uma probabilidade maior do que sítios mais antigos com alto grau, contanto que seu parâmetro de qualidade seja alto. No modelo BA isso nunca seria possível uma vez que a idade do sítio é o único fator determinante para este tornar-se polo. A constante D pode ser determinada novamente pela equação 2.36. Fazendo uma mudança de variável, $y = D - \eta$ e assim $dy = -d\eta$, teremos

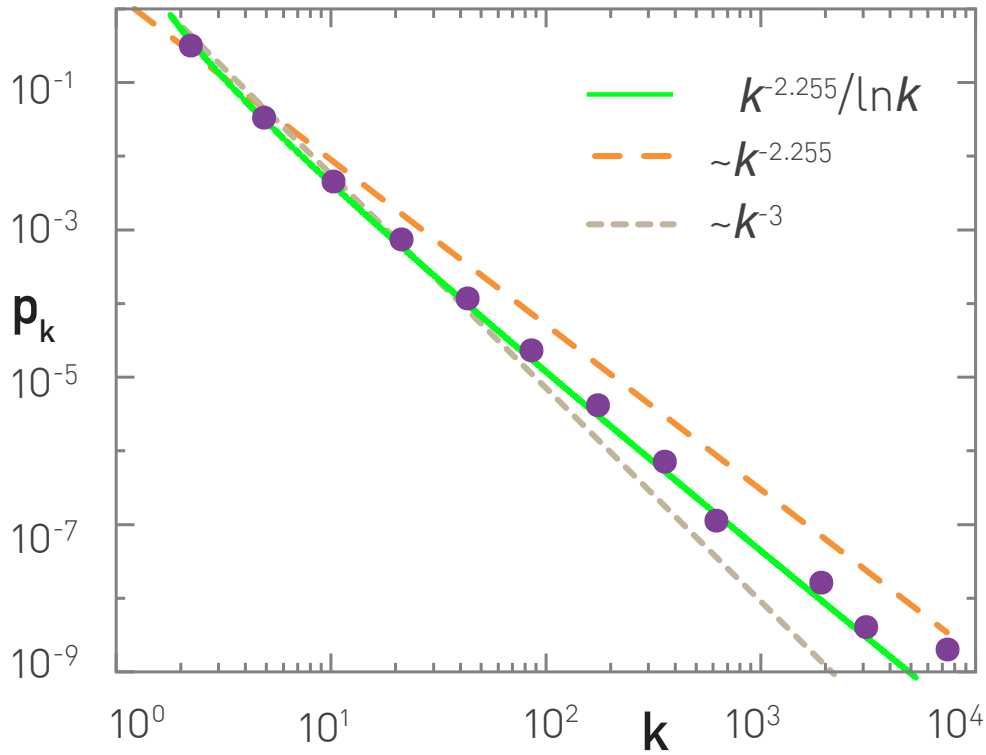


Figura 2.19: Distribuição de conectividade para o modelo de Bianconi-Barabási com $m = 2$ e $N = 10^6$. A linha em verde corresponde à $P(k) = k^{-2.255}/\ln k$. Figura retirada da referência [10].

$$1 = \int_{D-1}^D \left(\frac{D-y}{y} \right) dy. \quad (2.41)$$

Resolvendo a integral acima, obtemos a expressão para encontrar D , dada por

$$\exp(-2/D) = 1 - 1/D \quad (2.42)$$

cuja solução é $D = 1.255$. Assim, sabemos que cada nó terá um diferente expoente dinâmico, dado por $\beta \sim \frac{\eta}{D}$. Usando a equação 2.40, obtemos

$$P(k) \propto \int_0^1 d\eta \rho(\eta) \frac{D}{\eta} \frac{1}{k^{\frac{D}{\eta}+1}} \sim \frac{k^{-(1+D)}}{\log(k)} \quad (2.43)$$

ou seja, a distribuição de conectividade segue uma lei de potência generalizada, com um logaritmo inverso (ver Fig. 2.19).

Para todos os gráfico mostrados abaixo exibimos o modelo de distribuição uniforme da qualidade, ou seja, escolhemos aleatoriamente um valor de $\rho(\eta)$ distribuído uniformemente no intervalo entre $(0,1]$. Escolhemos também o parâmetro $m = 1$, pois a evolução da conectividade do sítio independe do valor escolhido para m (ver Eq. 2.29), além do mais a escolha de um m cada vez maior, aumenta o tempo de execução da simulação.

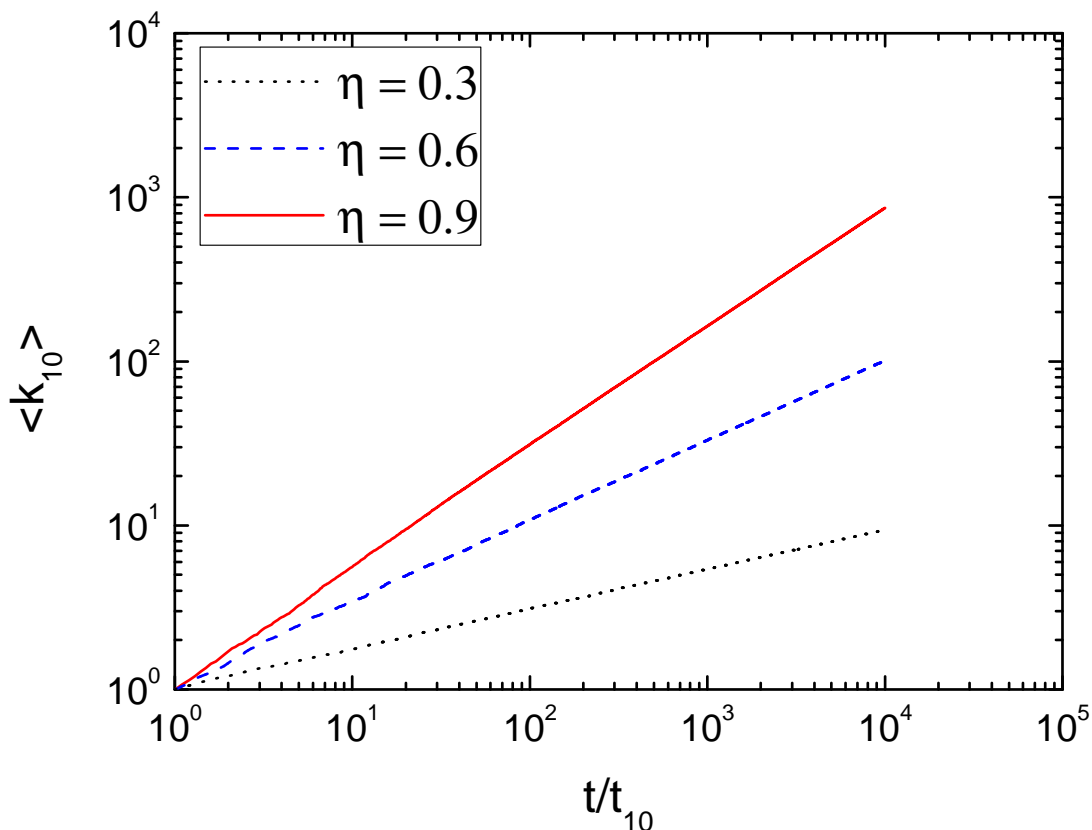


Figura 2.20: Evolução temporal do sítio $i = 10$ mostrando a dependência da conectividade $k_\eta(t)$ para sítios com qualidades $\eta = 0.3, 0.6, 0.9$. Fica claro que com o aumento da qualidade a conectividade dos sítios cresce mais rapidamente durante a evolução da rede. Simulação realizada para $m = 1, N = 10^5$ e 1000 amostras.

Na Eq. 2.35 podemos ver que o expoente dinâmico $\beta(\eta)$ não é mais constante para todos os sítios como no modelo BA, mas agora ele depende da qualidade η_i do sítio i . Entretanto, sabemos que a conectividade $k_i(t)$ dos sítios segue uma lei de potência para qualquer valor do parâmetro η (ver Eq. 2.29), resultado que pode ser notado no gráfico 2.20.

No gráfico 2.21 vemos o crescimento do expoente dinâmico $\beta(\eta)$ como função do parâmetro η . Outro ponto interessante neste gráfico é que o comportamento do sistema é

dados por $\beta(\eta) = \eta/D$ em concordância com o cálculo analítico (Eq. 2.35).

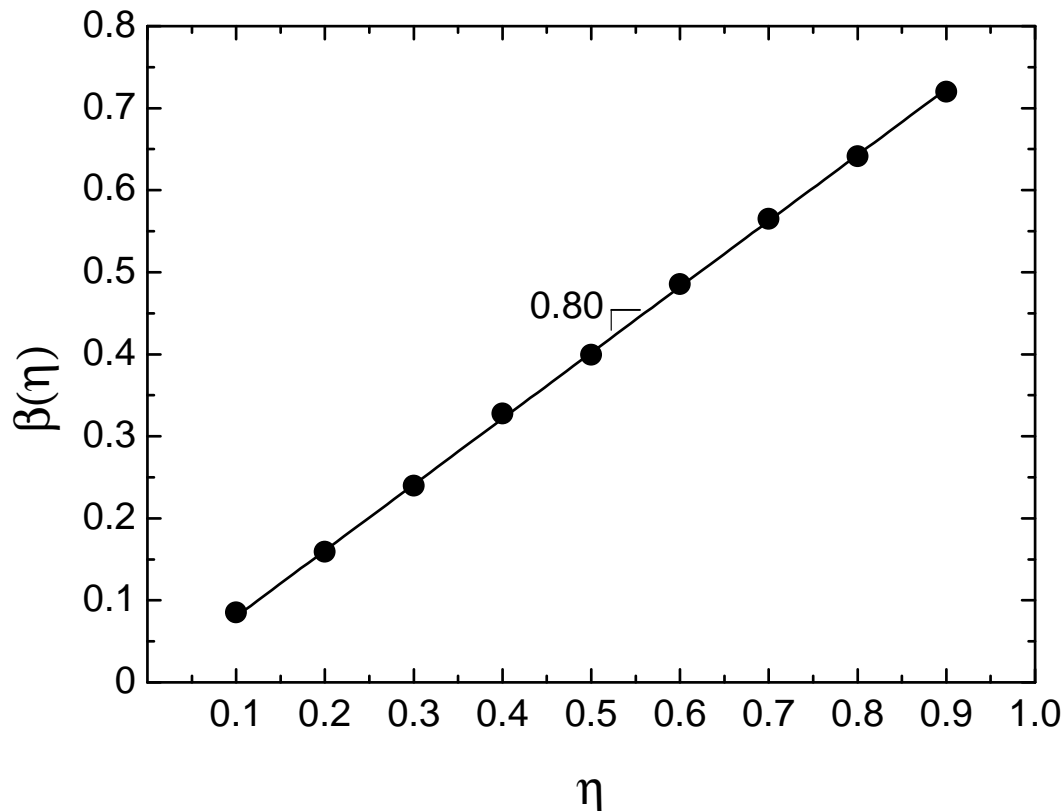


Figura 2.21: Dependência linear do expoente dinâmico $\beta(\eta)$ com o parâmetro de qualidade η . Os pontos da reta foram obtidos através da simulação numérica enquanto que a inclinação da reta segue a predição analítica para a variável $D = \eta/\beta(\eta)$, pois $D = 1/0.80 = 1.250$. Simulação realizada para $m = 1$, $N = 10^5$ e 1000 amostras.

2.8 Redes reais e o efeito de mundo pequeno

Em muitas redes reais, tais como as redes biológicas ou mesmo a World Wide Web têm se verificado a presença de duas características marcantes, uma alta agregação local (onde os nós têm vários vizinhos mútuos) e um baixo valor para o menor caminho médio. Esse comportamento é bem presente em redes reais, e pode ser explicado devido a existência de três características principais. Primeiro, o caminho médio da rede não aumenta linearmente

com o tamanho do sistema, mas cresce logaritmicamente com o número de nós. Segundo, a conectividade média dos nós da rede é pequena. Terceiro, a rede tem uma alta agregação média quando comparada ao do modelo de rede de Erdős-Rényi (ER). Tais características concernem ao conceito de *redes de mundo pequeno*. O conceito de mundo pequeno, descreve simplesmente o fato de que, mesmo uma rede possuindo um elevado número de nós, existe um caminho relativamente curto entre dois nós quaisquer. E a distância entre esses dois nós é definida como sendo o número de ligações ao longo do menor caminho que os conecta [21].

O efeito de mundo pequeno foi primeiro observado em uma rede social, quando em 1967 o sociólogo norte-americano Stanley Milgram [31] realizou um experimento com o propósito de estimar o número real de passos em uma rede de conhecidos. A questão era: quantas intermediações entre laços sociais separam dois indivíduos? Para responder este questionamento, Milgram selecionou aleatoriamente pessoas no Nebraska e as pediu para enviar cartas às pessoas em Massachusetts (ver Fig. 2.22) [31, 32, 18]. A pessoa escolhida que recebesse um envelope, teria que entregá-lo diretamente ou indiretamente para a pessoa alvo. Cada envelope continha uma carta com o resumo da proposta da pesquisa, uma fotografia, nome, endereço e alguns dados da pessoa alvo, com as seguintes instruções:

- (1) As pessoas que receberem as cartas devem se identificar colocando seus nomes nas mesmas, para rastrear seus passos.
- (2) Se você conhece a pessoa alvo mande essa carta diretamente para ela, se não repasse a carta para algum conhecido que provavelmente a conheça.
- (3) Quando a carta chegar à pessoa alvo, esta deverá enviar a mesma de volta para o pesquisador em questão.

Uma fração essencial das correspondências enviadas por Milgram chegaram a seu destino. Milgram então constatou que os participantes de sua experiência, aos quais faziam parte de uma rede de 200 milhões de nós (habitantes), estavam separados em média, por seis pessoas. Este surpreendente resultado, foi publicado na revista “Psychology Today” e intitulado “The small world problem” (O problema de mundo pequeno) [31].

Um dos primeiros modelos de redes a exibir o comportamento de mundo pequeno foi introduzido por Watts e Strogatz (ver seção 2.6.2), no seu artigo intitulado **Collective dynamics of small-world networks** [25]. Como dito anteriormente, em tais redes temos presente um alto coeficiente de agregação e seus diâmetros crescem logaritmicamente com o número de nós. O modelo proposto por Watts e Strogatz tem como ideia central começar



Figura 2.22: Mapa dos Estados Unidos destacando os estados de Nebraska e Kansas ao centro e Massachusetts ao canto, ambos representando respectivamente os pontos de saída e chegada das cartas. A figura original está disponível em <http://www.prodeathpenalty.com/UnitedStates.htm>

com uma rede bem estruturada, como um círculo ou uma grade, os quais têm um alto coeficiente de agregação, mas também uma grande distância entre seus nós, e aleatoriamente reconectar as arestas da rede com o propósito de reduzir seu diâmetro (ver Fig. 2.10). De uma forma detalhada começamos a rede com um círculo composto por N vértices, no qual cada nó é simetricamente conectado aos seus $2m$ vizinhos mais próximos, nos dando um total de $K = mN$ arestas. Depois, cada aresta é reconectada com uma probabilidade p à um determinado nó. Note que para $p = 0$ temos uma rede regular, enquanto que para $p = 1$ temos um grafo aleatório com a restrição de que cada nó tenha uma conectividade mínima dada por $k_{min} = m$.

2.8.1 World Wide Web

Representando uma das maiores redes de informação disponível, a World Wide Web é uma rede cujo seus nós são as páginas da internet e as suas arestas são os hyperlinks⁷

⁷Um hyperlink ou hiperligação é um link para uma dada publicação. O destino é geralmente outra página da Web.

(URL's). A WWW se tornou uma das maiores redes de informação devido à liberdade de que qualquer indivíduo ou instituição tem em criar websites, tornando-se uma das maiores redes para o qual as informações topológicas estão atualmente disponíveis. O descontrole de tal crescimento conduziu a uma enorme e complexa web de aproximadamente 8×10^8 documentos⁸ [33], da qual se assemelha a um grande grafo direcionado, dado que seus links (URL's) apontam de um documento para outro (ver Fig. 2.23).

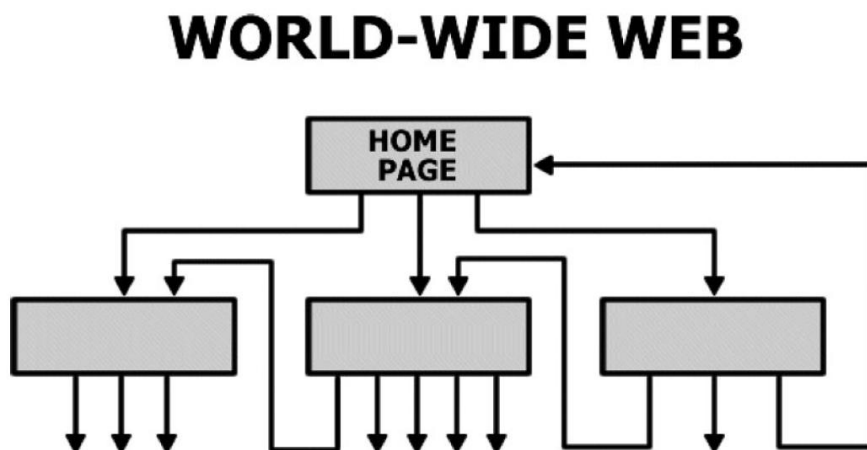


Figura 2.23: Estrutura da WWW. Os nós da World Wide Web são os documentos da web, conectados aos seus hiperlinks (URL's). Figura retirada da referência [3].

O interesse em estudar a World Wide Web cresceu devido à descoberta de que suas páginas seguem uma distribuição de conectividade em lei de potência [27]. Devido ao caráter direcionado das arestas da World Wide Web, a rede possui dois tipos de distribuição de conectividade: a distribuição dos links de saída, $P_{out}(k)$, que significa a probabilidade de que um certo documento tenha k links de saída, e a distribuição dos links de entrada, $P_{in}(k)$, que é a probabilidade de que k links apontem para um determinado documento. Vários estudos concluíram que ambas as conectividades $P_{out}(k)$ e $P_{in}(k)$ seguem uma lei de potência: $P_{out}(k) = k^{-\gamma_{out}}$ e $P_{in}(k) = k^{-\gamma_{in}}$.

A distribuição em lei de potência indica que a probabilidade de achar documentos com um grande número de links é bastante significativa, e a conectividade da rede é dominada por uma alta conexão de páginas da web. Albert, Jeong e Barabási (1999) estudaram um subconjunto da World Wide Web contendo 325.729 nós e 1.469,680 links, e encontraram que os expoentes γ_{in} e γ_{out} valem respectivamente 2.1 e 2.45[28]. Um resultado similar foi

⁸Dados estatísticos sobre a web apurados instantaneamente em <http://www.internetlivestats.com/total-number-of-websites/>.

encontrado por Kumar *et al.* (1999) [34], ao qual usou uma amostra de 40 milhões de documentos obtendo $\gamma_{in} = 2.1$ e $\gamma_{out} = 2.38$, e pesquisas posteriores feitas por Broder *et al.* (2000) usando 200 milhões de documentos obteve $\gamma_{in} = 2.1$ e $\gamma_{out} = 2.72$ (ver Fig. 2.24) [35]. Note que o valor do expoente $\gamma_{in} = 2.1$ é o mesmo para todas as medidas citadas acima, apesar dos números de documentos ter variado ao longo dos dois anos de análise, embora nesse mesmo período a rede deve ter crescido cerca de cinco vezes o seu tamanho inicial.

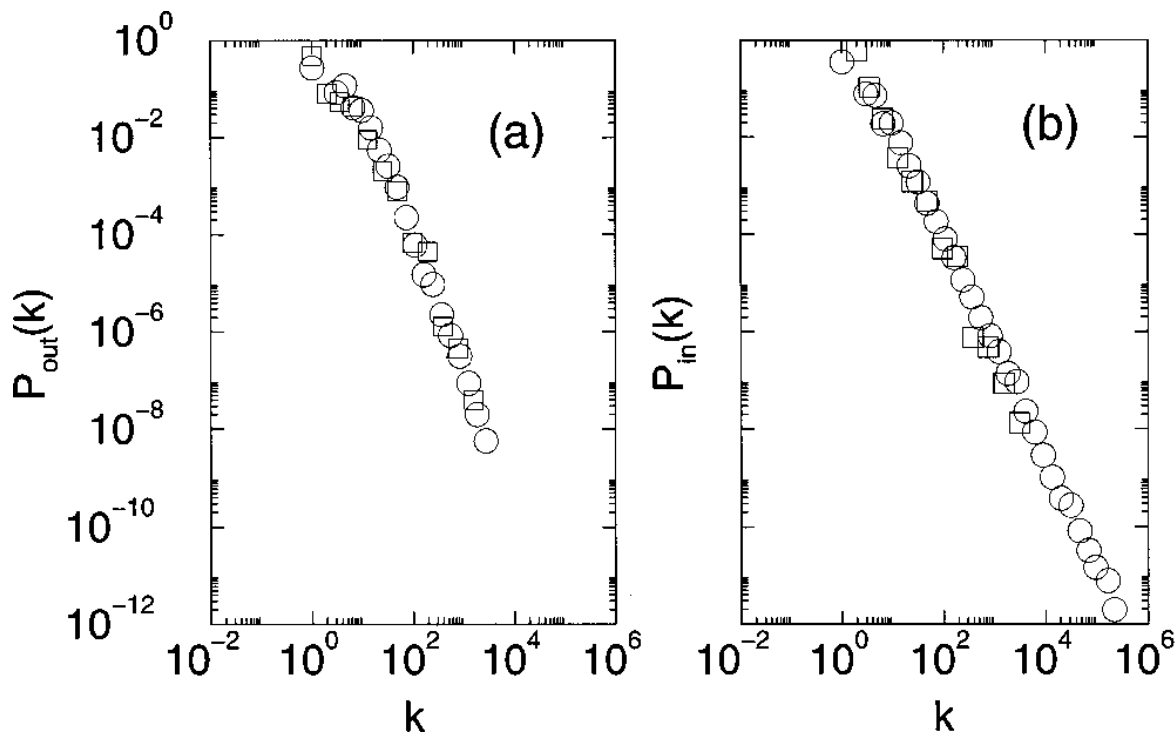


Figura 2.24: Distribuição de conectividade da World Wide Web: a distribuição de conectividade de saída $P_{out}(k)$ (lado esquerdo) e a distribuição de conectividade de entrada P_{in} (lado direito). Medidas feitas em 200 milhões de páginas (Broder *et al.* 2000). Figura retirada da referência. [3].

Uma quantidade particularmente importante é o menor caminho entre dois documentos, definido como o menor número de links (URL's) que devemos seguir para ir de um documento a outro. Barabási *et al.* encontrou que a média sobre todos os pares de vértices é $\langle l \rangle = 0.35 + 2.06 \log(N)$, indicando que em tal rede há a presença da propriedade de mundo pequeno. Usando o valor de $N = 8 \times 10^8$, encontramos $\langle l \rangle = 18.59$, isto é, a distância média entre dois documentos escolhidos aleatoriamente é cerca de 19 cliques. Desde que para um dado N , l siga uma distribuição gaussiana, o menor caminho médio, $\langle l \rangle$ pode ser interpretado como o diâmetro da web, ou seja, a medida da maior distância entre quaisquer dois pontos na rede.

2.8.2 Internet

A internet é uma rede onde sua estrutura é frequentemente estudada em dois diferentes níveis, uma em nível de roteadores e outra em nível de interdomínios, onde tais níveis definem na rede quem são as arestas e os seus respectivos nós. Ao nível de roteadores temos uma rede onde os nós são roteadores conectados por vários canais físicos de comunicação. Ao nível de interdomínios (ou sistemas autônomos), cada domínio é composto potencialmente de milhares de roteadores e computadores, sendo representado por um único nó (ver Fig. 2.25), de tal forma que suas arestas (as ligações entre os domínios) são roteadores que os conecte.

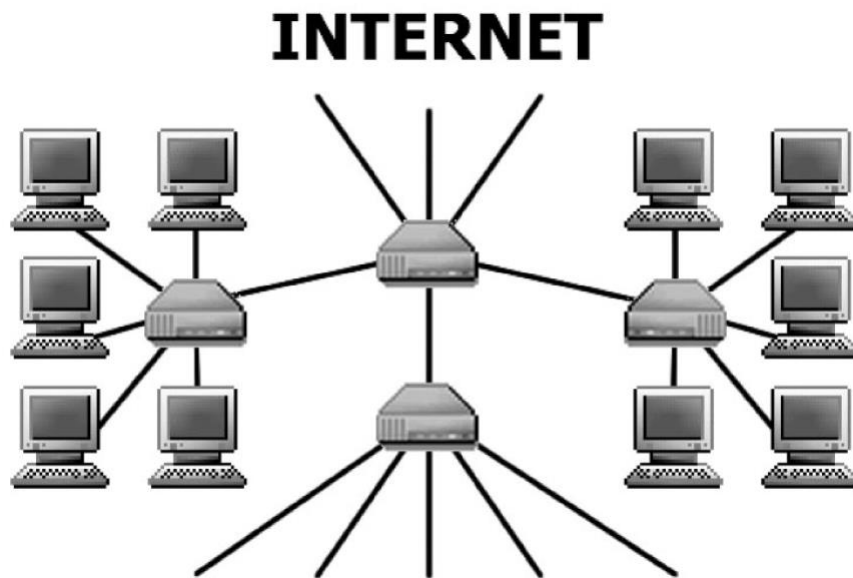


Figura 2.25: Na Internet os nós são roteadores e computadores, onde suas arestas são roteadores conectados por vários canais físicos de comunicação. Figura retirada da referência [3].

A topologia da internet em ambos os níveis é representada assintoticamente por uma lei de potência, onde estudos feitos por Faloutsos *et al.* (1997 - 1998) no nível de interdomínios revelaram que os expoentes da distribuição de conectividade estão entre 2.15 e 2.2 (ver Fig. 2.26) [36]. No nível de roteadores, em uma rede contendo 3.888 nós, o encontrado foi $\gamma^r = 2.48$. Estudos feitos por Yook *et al.* and Pastor-Satorras *et al.* mostraram que entre os anos de 1997 e 1999 o coeficiente de agregação variou entre 0.18 - 0.24, e o tamanho do menor caminho médio ao nível de domínio variou entre 3.72 - 3.77 (ver tabela 2.1) [37, 38].

Ano	1997	1998	1999
$\langle k \rangle$	3.47(4)	3.62(5)	3.82(6)
$\langle C \rangle$	0.18(1)	0.21(2)	0.24(1)
$\langle l \rangle$	3.77(1)	3.76(2)	3.72(1)

Tabela 2.1: Propriedades médias para três anos diferentes. $\langle k_i \rangle$ é a conectividade média. $\langle l_i \rangle$ é a menor distância entre cada par de nós (i, j) . $\langle C \rangle$ é o coeficiente de agregação médio. Tabela retirada de referência [38].

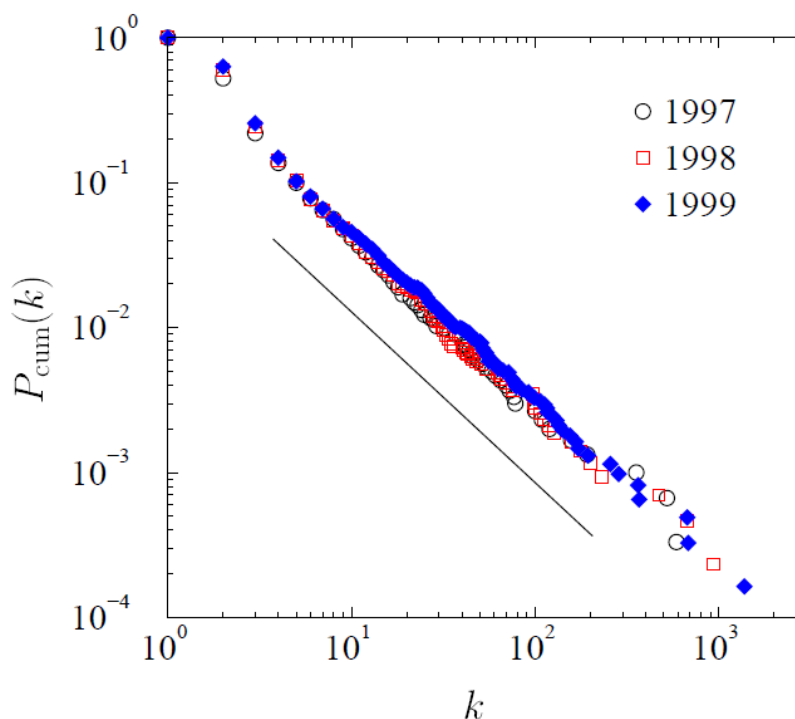


Figura 2.26: Distribuição de conectividade acumulada da internet entre os anos de 1997 a 1999. O valor do expoente da lei de potência é $\gamma = 2.2$ Figura retirada da referência [38].

2.8.3 Rede de colaborações de atores de cinema

A rede de colaborações de atores representa um ótimo exemplo de rede social, seu estudo é baseado nos bancos de dados da Internet Movie Database (www.imdb.com). Nessa rede cada ator é representado por um nó e dois atores estão conectados se eles atuaram em um mesmo filme. O crescimento dessa rede se deve ao fato de que continuamente são adicionados novos nós (atores). Entretanto, uma importante contribuição para a distribuição de conectividade da rede se deve a uma frequente interação entre os nós, onde um ator

veterano atua em um novo filme, estabelecendo assim novas conexões com atores aos quais ele nunca atuou antes.

A probabilidade que um ator tenha k conexões (caracterizando sua popularidade) segue uma lei de potência $P(k) = k^{-\gamma_{actor}}$ com $\gamma_{actor} = 2.3 \pm 0.1$ [28] (ver Fig. 2.27). Estudos comparando o caminho médio da rede de atores com a de um grafo aleatório de mesmo tamanho e conectividade média mostraram que para a rede de atores $\langle l \rangle_{atores} = 3.65$ comparada com $\langle l \rangle = 2.9$ de uma rede aleatória, mas seu coeficiente de agregação é mais que cem vezes maior que a de um grafo aleatório.

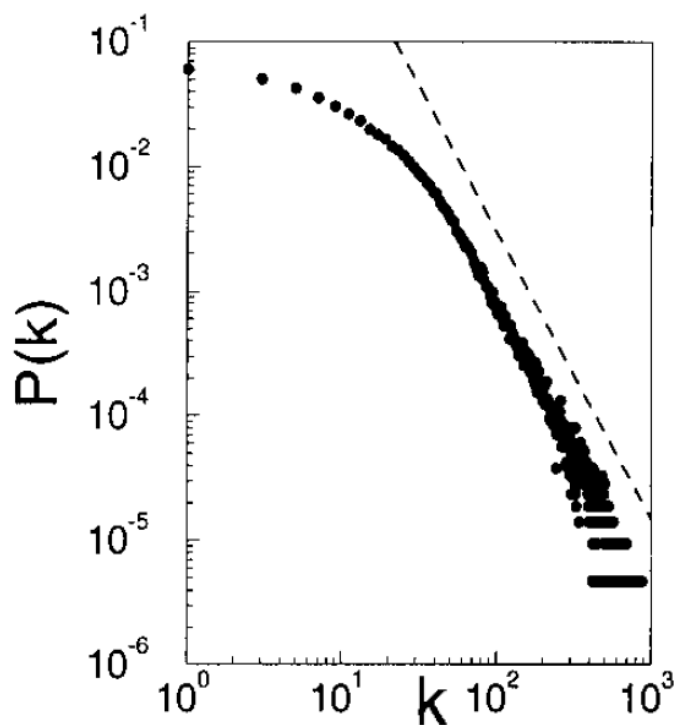


Figura 2.27: Distribuição de conectividade da rede de colaboração de atores. Figura retirada da referência [28].

2.8.4 Rede celular

A estrutura das redes metabólicas foi abordada em dois estudos independentes endereçados à Fell, Wagner e Jeong *et al.* [56, 40, 2]. Fell e Wagner montaram uma lista de equações estequiométricas aos quais representam vias centrais do metabolismo energético. Essa rede de substrato foi definida de tal forma que seus nós são representados por todos os

metabolitos, e dois substratos estão conectados se os mesmos estiverem presentes em uma reação (ver Fig. 2.28).

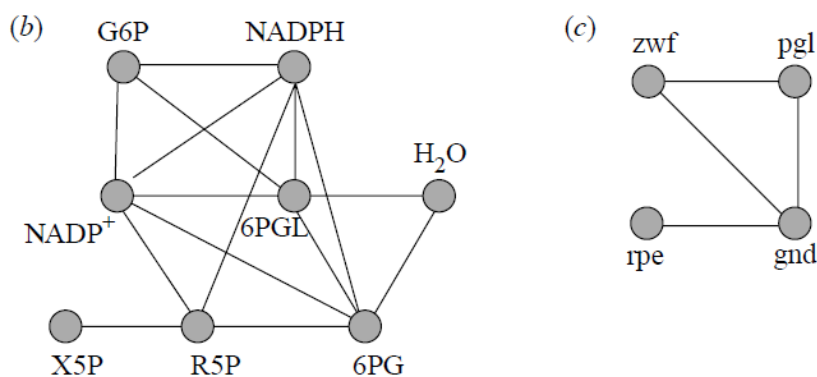
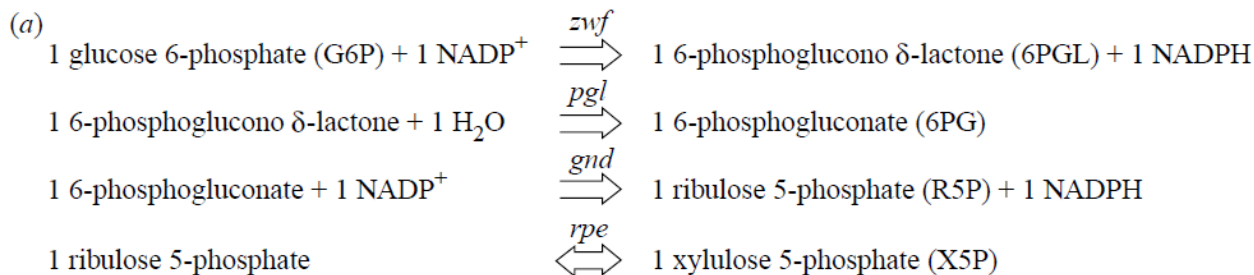


Figura 2.28: Representação gráfica de uma rede metabólica. (a) 4 equações estequiométricas tirada das vias metabólicas pentose-fosfato. (b) Grafo referente aos substratos das equações estequiométricas. (c) Grafo derivado das reações dos substratos em (b). Figura retirada da referência [56].

Ao mesmo tempo, Jeong *et al.* analisaram uma rede metabólica de 43 organismos representando todos os três domínios da vida, construindo uma rede nas quais os nós são os substratos (tais como ATP, ADP, H₂O) e as arestas representam reações químicas em que esse substratos possam participar. Tal estudo permitiu encontrar que a distribuição de conectividade vale para todos os organismos, seguindo uma lei de potência, com expoentes que variam entre 2.0 e 2.2. Além disso, a separação média entre os nós tem o mesmo valor para todos os organismos sob consideração, independentemente dos números de substratos achados na espécie em estudo.

Outra oportunidade de estudar rede celular é o estudo da interação entre proteínas, considerando proteínas como os nós e as interações físicas como conexões. Estudos mostraram que a rede de interações das proteínas do *S. cerevisiae* e *H. pylori* exibem o comportamento de escala livre [56, 41]. Um estudo dessas interações físicas mostrou que a distribuição de conectividade para interações proteicas têm a forma $P(k) \approx (k + k_0)^{-\gamma} e^{-(k+k_0)/k_c}$ com $k_0 = 1$,

$k_c = 20$ e $\gamma = 2.4$.

2.8.5 Rede de relações sexuais

Na rede de relações sexuais doenças são facilmente transmissíveis quando se tem uma imunização aleatória, devido à rede ter uma topologia de escala livre. Liljeros *et al.* [42] estudaram uma rede de relações sexuais composta por 2810 indivíduos, baseada em uma extensiva pesquisa realizada na Suécia. Para analisar a conectividade desta rede, dado que suas conexões podem ter um período curto de tempo, analisou-se o número k de parceiros sexuais durante um período de um ano anterior a pesquisa, obtendo-se para ambos os sexos uma distribuição de conectividade em lei de potência com expoentes $\alpha_h = 2.31 \pm 0.2$ para os homens e $\alpha_m = 2.54 \pm 0.2$ para as mulheres. (ver Fig. 2.29)

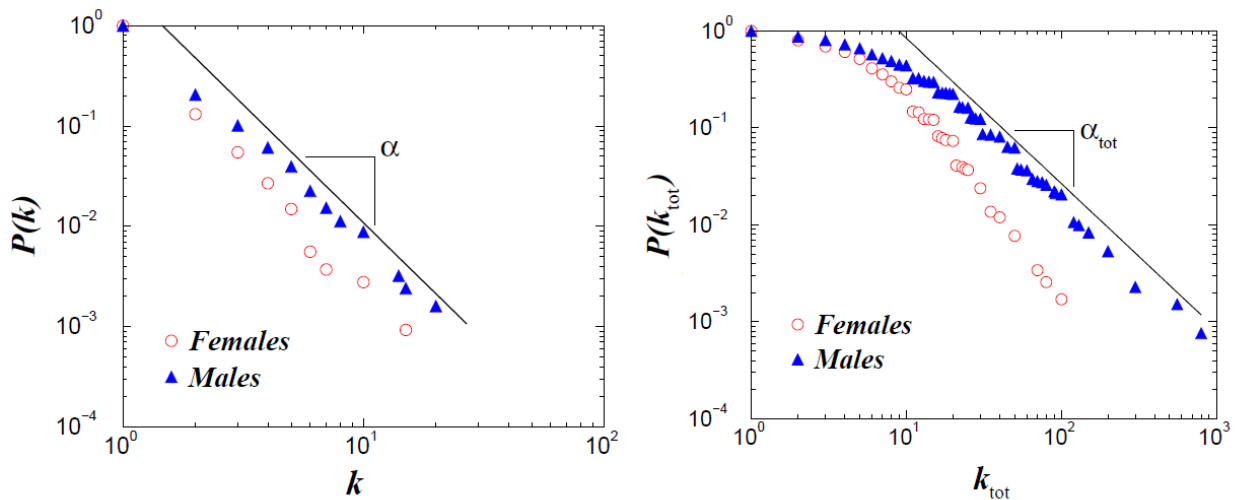


Figura 2.29: Na figura à esquerda temos a distribuição de conectividade do número de parceiros para homens e mulheres. Acima uma distribuição do número de parceiros k no período de um ano. Para as mulheres, os expoentes obtidos foram $\alpha_m = 2.54 \pm 0.2$ com $K > 4$, e para os homens $\alpha_h = 2.31 \pm 0.2$ com $K > 5$. Na figura à direita temos a distribuição total do número de parceiros k_{tot} sobre todos os anos desde a iniciação sexual. Para as mulheres, os expoentes obtidos foram $\alpha_{tot} = 2.1 \pm 0.3$ com $k_{tot} > 20$ e para os homens $\alpha_{tot} = 1.6 \pm 0.3$ com $20 < k_{tot} < 400$. Figura retirada da referência [42].

2.8.6 Rede ecológica

Um método frequentemente usado por ecologistas com o propósito de quantificar interações entre várias espécies é o estudo das cadeias alimentares [43], onde os nós são espécies e as arestas são os predadores. Dado que os predadores não são os mesmos para todas as espécies, temos uma rede dirigida, onde por convenção as conexões se dão da presa para o predador. Estudos feitos por Williams *et al.* [44] com propósito de investigar a topologia das setes maiores cadeias alimentares, revelaram que embora as cadeias em estudo sejam diferentes no número de espécies ou em suas conectividades média, elas indicam que espécies em seus habitats interagem com três ou menos espécies. As cadeias alimentares estudadas foram Skipwith Pond, Little Rock Lake, Bridge Brook Lake, Chesapeake Bay, Ythan Estuary, Coachella Valley, e St. Martin Island, todas com um pequeno número de espécies (a maior delas tem 186 espécies), e apresentam um alto coeficiente de agregação [45], sendo suas distribuições de conectividade dada por uma lei de potência com expoente $\gamma = 1.1$ [46] (ver Fig. 2.30).

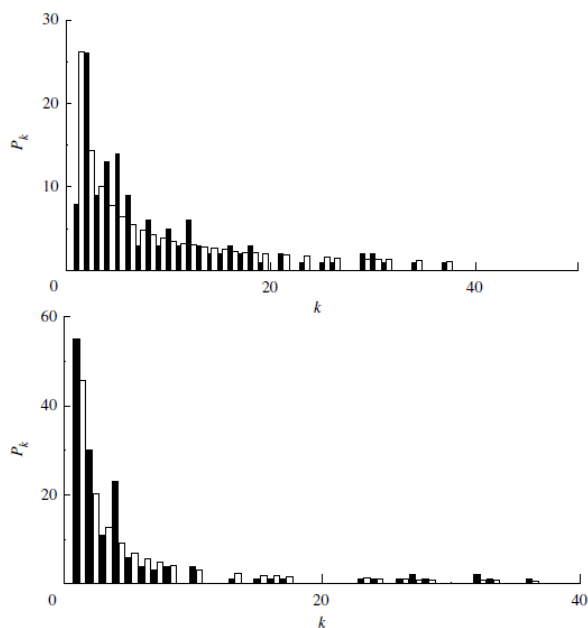


Figura 2.30: Histograma mostrando a distribuição do número total de conexões k pelo número de espécies P_k (barras pretas) para Ythan Estuary (Gráfico superior) e Silwood Park (Gráfico inferior). As cadeias de Ythan Estuary e Silwood Park são mostradas juntas com seus melhores fit's em lei de potência (Barras brancas). Figura retirada da referência [46].

Tabela 2.2: Dados de redes reais. N é o número de sítios, E é o número de arestas, γ é o expoente da distribuição de conectividade, C é o coeficiente de agregação e $\langle l \rangle$ é o menor caminho médio. Tabela retirada da referência [32].

	Rede ou subgrafo	N	E	γ	C	C/C_r	\bar{l}	\bar{l}/\bar{l}_r	Refs.
1	Mapa completo do domínio nd.edu da Web	325 729	1 469 680	$\gamma_i = 2.1,$ $\gamma_o = 2.45$	-	-	11.2	-	[27]
2	WWW analisado pelo Altavista (1999)	2711×10^8	2130×10^9	$\gamma_i = 2.1,$ $\gamma_o = 2.7$	-	-	16	1	[35]
3	(outro ajuste)			$\gamma_i = 2.10,$ $\gamma_o = 2.82$					[47]
4	Mapa de páginas de um domínio da WWW	260×10^5	-	$\gamma_i = 194$	-	-	-	-	[48]
5	Mapa com ligações sem direções da WWW	153 127	270×10^6	-	0.108	470	3.1	0.93	
6	Um conjunto de páginas	4923	1335×10^7	$\gamma_i = 2.05$	-	-	-	-	
7	Outro conjunto de páginas	-	-	$\gamma_i = 2.05$	-	-	-	-	
8	Conjunto de páginas de uma universidade	-	-	$\gamma_i = 2.63$	-	-	-	-	
9	Conjunto de páginas de cientistas	56880	-	$\gamma_i = 2.66,$ $\gamma_o = 2.82$	-	-	-	-	
10	Internet (1998)	4389	8256	$\gamma_i = 2.2$	-	-	4	0.6	[36]
11	Internet (1999)	6374	13 641	$\gamma_i = 2.2$	0.24	3.3×10^2	3.7	0.58	[38]
12	Internet a nível de roteadores (1995)	3888	5012	$\gamma_i = 2.5$	-	-	12.1	1.39	[36]
13	Internet a nível de roteadores (2000)	150 000	200 000	$\gamma_i = 2.3$	-	-	10	0.8	
14	Citações	783 339	6 716 198	$\gamma_i = 3$	-	-	-	-	[49]
15	(outro ajuste)			$\gamma_i = 2.9$					[50]
16	(outro ajuste)			$\gamma_i = 2.5$					[51]
17	Citações no Physical Review D	24 296	351 872	$\gamma_i = 3$					[49]
18	(outro ajuste)			$\gamma_i = 2.6$					[50]
19	(outro ajuste)			$\gamma_i = 2.3$					[51]
20	(outro ajuste)			$\gamma_i = 1.9$					[52]
21	Colaboração de atores de cinema	212 250	61 085 555	$\gamma_i = 2.3$	-	-	4.54	1.25	[27]
22	(outro ajuste)			$\gamma_i = 3.1$					[53]
23	Colaboração	1 388 989	1028×10^7	$\gamma_i = 2.5$	0.066	6×10^3	4.6	0.9	[54]
24	Co-autores	56 627	4898×10^6	$\gamma_i = 1.2$	0.726	0.24×10^3	4.0	1.88	[54]
25	Colaboração	70 975	0.132×10^6	$\gamma_i = 2.1$	0.59	1.1×10^4	9.5	1.16	[55]
26	Colaboração	209 293	1214×10^6	$\gamma_i = 2.4$	0.76	1.4×10^4	6	1.2	[55]
27	Relações sexuais	2810	-	$\gamma_i = 3.4$	-	-	-	-	[42]
28	Reações metabólicas	200 – 800	600 – 3000	$\gamma_i = 2.2,$ $\gamma_o = 2.2$	0.32	12	3.2	0.95	[2, 56]
29	Interações entre proteínas	1870	2240	$\gamma_i = 2.5$	0.022	4.4	6.8	0.8	[41, 56]
30	Cadeia alimentar	470 000	17 000 000	$\gamma_i = 2.7$	0.44	2.8×10^3	2.65	0.87	[57]
31	Cadeia alimentar do parque Silwood	154	366	$\gamma_i = 1$	0.15	5	3.4	1.05	
32	“Java Development Framework”	1376	2174	$\gamma_i = 2.5$	0.06	25	6.39	1.02	[58]
33	Jogo de computador	1989	4.78×10^3	$\gamma_i = 2.85$	0.08	35	6.2	1.28	[58]
34	Circuitos eletrônicos	2×10^4	4×10^4	$\gamma_i = 3$	0.03	150	6	1	
35	Chamadas telefônicas	47×10^6	8×10^7	$\gamma_i = 2.1$	-	-	-	-	
36	E-mail	5165	6.57×10^4	$\gamma_i = 1.5$	0.156	3.25×10^3	4.95	0.48	[59]
37	“Energy landscape net for a 14-atom cluster”	4196	87 219	$\gamma_i = 2.78$	0.073	7.4	2.32	1.04	[60]

Mecânica Estatística e Modelos Teóricos de Redes com Métricas

Sabemos que sistemas reais são constituídos de um número muito grande de partículas interagentes, cujo comportamento de tais unidades pode ser descrito com base nas leis da Mecânica Clássica ou da Mecânica Quântica. O processo de difusão de um gás, por exemplo, pode ser bem entendido a partir de um ponto de vista microscópico, uma vez que as colisões entre as moléculas levam o sistema a outra configuração de equilíbrio. Como as colisões entre partículas são bem descritas pela Mecânica Newtoniana, poderíamos descrever os possíveis estados acessíveis a esse sistema. Entretanto, descrever um sistema como esse usando a Mecânica Clássica é totalmente impraticável, pois quanto maior o número de partículas, maior o número de equações necessárias para descrevê-lo. Mas, se os sistemas como o citado acima não podem ser descritos pela Mecânica Clássica, de que maneira podemos descrevê-los?

Sistemas como o descrito acima são bem explicados com base nas leis da Mecânica Estatística, e seu desenvolvimento foi amplamente motivado por tentativas de entender a Termodinâmica a partir de uma dinâmica microscópica. A Termodinâmica é uma teoria fenomenológica cujo propósito é a descrição de processos e fenômenos físicos da matéria macroscópica. Seu desenvolvimento remonta ao século XIX, resultando nos trabalhos de Maxwell e de Boltzmann no final daquele século sobre a teoria cinética dos gases.

No século XIX algumas questões fundamentais foram abordadas com o intuito de descrever microscopicamente um sistema macroscópico, e para isso foi introduzido o conceito

de probabilidade inerente a tais processos [1]. O conceito de entropia, que surgiu primeiramente no contexto termodinâmico, definida para estados de equilíbrio através da equação $\Delta S = \Delta Q/T$, permitiu formar o aporte teórico da Termodinâmica de equilíbrio e de processos irreversíveis, e que constituiu um conceito fundamental para as bases da Mecânica Estatística [61]. Entretanto, para sistemas que apresentam interações de longo alcance ou que apresentam correlações temporais de longa duração, o formalismo de Boltzmann-Gibbs não os descreve satisfatoriamente. Por essa limitação, algumas generalizações do conceito de entropia têm surgido nas últimas décadas [63].

Apresentaremos nas seções seguintes, a entropia de Boltzmann-Gibbs e mostraremos as relações entre a Estatística não-extensiva de Tsallis e às Redes Complexas. Por fim apresentaremos alguns modelos de Redes Geométricas, cujas distribuições de conectividade são bem descrita por tal estatística.

3.1 Entropia de Boltzmann-Gibbs

O conceito central da Termodinâmica para estados de equilíbrio é a entropia, definida através da equação $\Delta S = \Delta Q/T$, podendo ainda ser expressa em termos de parâmetros extensivos como energia interna U , volume V e o número de partículas N de um dado sistema composto¹. A entropia possui as seguintes propriedades [64]:

1. **Aditividade** – Para um sistema composto, o funcional entrópico $S(\{p_i\})$ é aditivo para cada um dos seus componentes, probabilisticamente independentes, se a relação abaixo é satisfeita:

$$S(U_1, V_1, N_1, U_2, V_2, N_2) = S_1(U_1, V_1, N_1) + S_2(U_2, V_2, N_2) \quad (3.1)$$

Isso significa que $S(U, V, N)$ é uma função homogênea de primeiro grau das suas variáveis, pois $S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(U, V, N)$ para quaisquer valores de λ . Por exemplo, para $\lambda = 2$, dobramos todos os parâmetros extensivos do sistema, ou seja, dobramos a energia U , o volume V e o número de partículas N , logo, como resultado temos uma entropia que é o dobro do valor de $S(U, V, N)$.

¹Um sistema composto é constituído por um conjunto de sistemas simples separados por paredes ou vínculos.

2. **Extensividade** – Um funcional entrópico $S(\{p_i\})$ é dito ser extensivo se:

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(N)}{N} < \infty \quad (3.2)$$

ou seja, $S(N)$ cresce com N para $N \gg 1$, onde $N \propto L^d$, com d sendo a dimensão espacial inteira ou fractal do sistema, e L seu tamanho Linear [62]. Para um sistema em equilíbrio termodinâmico, as variáveis que compõe os campos termodinâmicos² possuem um valor constante em qualquer parte do sistema, independentemente do tamanho de cada parte. Por outro lado, as variáveis extensivas assumem valores que dependem do tamanho de cada parte.

Em 1877 o físico austríaco Ludwig Boltzmann introduziu um formalismo probabilístico na Termodinâmica [67]. Ele adotou um sistema composto por N partículas não interagentes, com energia total U constante, podendo ser distribuída entre os vários microestados. Boltzmann dividiu o volume do espaço de fase em pequenas regiões de volume v_i onde cada partícula poderia ter uma energia E_i e concluiu que o sistema total composto pelas n_i partículas ocuparia um volume total dado por $V = v_1^{n_1} v_2^{n_2} \dots v_i^{n_i}$.

A partir desse modelo, Boltzmann introduziu a hipótese de que todos os microestados possuem a mesma probabilidade P , cujo número de microestados acessíveis Ω envolvendo as N partículas pode ser calculado usando um raciocínio combinatório, dado pela expressão

$$\Omega(n_0, n_1, n_2 \dots) = \frac{N!}{\prod_i n_i!} \quad (3.3)$$

Usando a hipótese das probabilidades iguais, Boltzmann escreveu:

$$P(n_0, n_1, n_2 \dots) = C \Omega(n_0, n_1, n_2 \dots), \quad (3.4)$$

onde $P(n_0, n_1, n_2 \dots)$ é a probabilidade de ocorrência de um estado microscópico pertencente ao conjunto definido pelos números de ocupação $(n_0, n_1, n_2 \dots)$ e C é uma constante de normalização. Com base nessa hipótese, Boltzmann apresentou sua interpretação probabilística da entropia, definindo-a como o logaritmo do número de microestados acessíveis ao sistema, dado por:

$$S = k_B \ln(\Omega), \quad (3.5)$$

²Variáveis como temperatura e pressão são denominadas campos termodinâmicos [65].

onde k_B é a constante de Boltzmann.

Depois disso, o físico norte americano Josiah Williard Gibbs (1839-1903) desenvolveu um formalismo apropriado para o cálculo das médias das grandezas termodinâmicas, e publicou no livro intitulado “*Princípios Elementares da Mecânica Estatística*”, livro este que é uma revisão do trabalho de Boltzmann de 1877 [66]. Gibbs desenvolveu uma nova abordagem (Teoria dos Ensembles) que ao invés de tratar um gás onde as moléculas estão em constantes colisões, como fez Boltzmann, ele estudou o espaço de fase ocupado pelo gás.

Nesta nova abordagem, o sistema em estudo é percebido como uma infinidade de cópias, ensembles de sistemas semelhantes (macroestados), mas diferentes entre si nos valores particulares em que seus parâmetros como coordenadas de posição e momento assumem a cada instante de tempo (microestados). Os pontos (q_i, p_i) do espaço de fase, identificados como uma réplica do sistema real em um dos seus microestados, recebe um peso dado por uma função densidade de probabilidade $\rho(q_i, p_i)$. Dessa maneira, para um dado macroestado, as grandezas termodinâmicas representadas por $f(q_i, p_i)$ agora podem ser expressas por seus valores médios $\langle f \rangle$, onde cada microestado coopera com um peso correspondente $\rho(q_i, p_i)$ [64, 68]. Logo, a média sobre o ensemble estatístico pode ser escrita como:

$$\langle f \rangle = \frac{\int f(q_i, p_i) \rho(q_i, p_i) d^{3N}q d^{3N}p}{\int \rho(q_i, p_i) d^{3N}q d^{3N}p} \quad (3.6)$$

A conexão com a Termodinâmica é feita através da função entropia que, em termos de probabilidades, pode escrita como:

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln(p_i), \quad (3.7)$$

com $\sum_i p_i = 1$.

A equação 3.7 é a forma generalizada da expressão 3.5, dispondo das mesmas propriedades, como aditividade e extensividade. No caso particular onde os microestados do sistema são equiprováveis, ou seja, $p_i = 1/\Omega$, e há Ω estados acessíveis ao sistema, essa equação recai na equação de Boltzmann 3.5. A maximização da equação 3.7 fornece, para um sistema em equilíbrio com um reservatório térmico a uma temperatura T , o fator de Boltzmann-Gibbs

$$p_i = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E_i), \quad (3.8)$$

sendo $\beta = 1/k_B T$, E_i a energia do estado i do sistema e $Z = \sum_j \exp(-\beta E_j)$ a função de

partição.

As equações 3.7 e 3.8 constituem umas das peças fundamentais da Física contemporânea, mostrando como a compreensão da entropia e a utilização desse conceito em sistemas estatísticos é fundamental. Tais equações fazem um elo entre a descrição macroscópica e microscópica de sistemas físicos, tornando-se uma das formulações mais sólidas da Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs.

Embora a Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs tenha uma notória aplicação na maioria dos sistemas, estas equações parecem não satisfazer todos os sistemas. Seu domínio de validade parece apenas descrever satisfatoriamente a natureza se as interações microscópicas efetivas sejam de curto alcance e se as condições de contorno não sejam (multi)fractais [69]. Assim, a possibilidade de algum tipo de generalização da estatística de Boltzmann-Gibbs é necessária, pois muitos sistemas na natureza não obedecem aos seus critérios. Apresentaremos na seção seguinte uma das generalizações da Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs, a Mecânica Estatística não-extensiva de Constantino Tsallis.

3.2 Mecânica Estatística não-extensiva

Como dito anteriormente, muitos sistemas na natureza não podem ser descritos pela Mecânica Estatística clássica (Boltzmann-Gibbs). Como exemplo desses sistemas podemos citar: difusões anômalas tipo Lévy [70], turbulências em plasmas [71], materiais granulares tipo pilhas de areia [72], entre outros. Constantino Tsallis, em 1988, propôs uma generalização da entropia de Boltzmann-Gibbs, que possui a mesma como caso particular, inspirada em distribuições probabilísticas de geometrias multifractais [69, 73].

Esta generalização da entropia é não-extensiva na ausência de correlações, todavia tem sido mostrado que a mesma vale-se de características extensivas para sistemas altamente correlacionados, recaindo então na estatística padrão de Boltzmann-Gibbs quando as interações tornam-se de curto alcance [69, 74].

A entropia não-extensiva de Tsallis é caracterizada por um índice q , denominado de

índice entrópico, e tem a seguinte forma:

$$S_q = \frac{k_B}{q-1} \left(1 - \sum_i^W p_i^q \right) \quad (3.9)$$

sob o vínculo $\sum_i p_i = 1$, com $q \in \mathfrak{R}$. p_i é a probabilidade de encontrar o sistema em um estado microscópico i e q é o índice entrópico que caracteriza o grau da não-extensividade em que o sistema se encontra. Como dito anteriormente, quando o índice $q = 1$, a q -entropia, representada por S_q recai na entropia extensiva padrão de Boltzmann-Gibbs, revelando que o sistema tem correlações de curto alcance. Uma propriedade peculiar da entropia não-extensiva é que S_q é sempre côncava para valores positivos de q , e sempre convexa para valores negativos.

A equação 3.9 pode ser reescrita de forma mais apropriada, como:

$$S_q = -k_B \sum_{i=1}^W p_i^q \ln_q(p_i) \quad (3.10)$$

onde a q -logarítmica, na teoria de Tsallis, é definida como:

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \forall(x, q) \quad (3.11)$$

e sua inversa, a função q -exponencial, é definida como:

$$\exp_q(x) \equiv [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}, \forall(x, q) \quad (3.12)$$

Vemos que para $q = 1$, $\ln_1(x) = \ln(x)$, recuperando o logaritmo padrão. É viável ainda verificar que $\exp_q(\ln_q(x)) = \ln_q(\exp_q(x)) = x$, contudo e_q^x precisa atender as seguintes exigências: $[1 + (1-q)x] > 0$ e para qualquer outro valor $\exp_q(x) = 0$. É razoável mostrar que quando $q = 1$ a q -exponencial tende para a exponencial padrão.

A figura 3.1 mostra o comportamento assintótico da q -exponencial, expressa por $\exp_q(-x)$, para diferentes valores de q .

Na estatística padrão de BG temos que $S(A+B) = S(A) + S(B)$, no entanto, um resultado interessante da teoria proposta por Tsallis é que o princípio de aditividade definido no terceiro postulando da Termodinâmica é violado³. Sendo assim, para um sistema composto

³O terceiro postulando da Termodinâmica diz que a entropia é uma função contínua, diferencial e monoto-

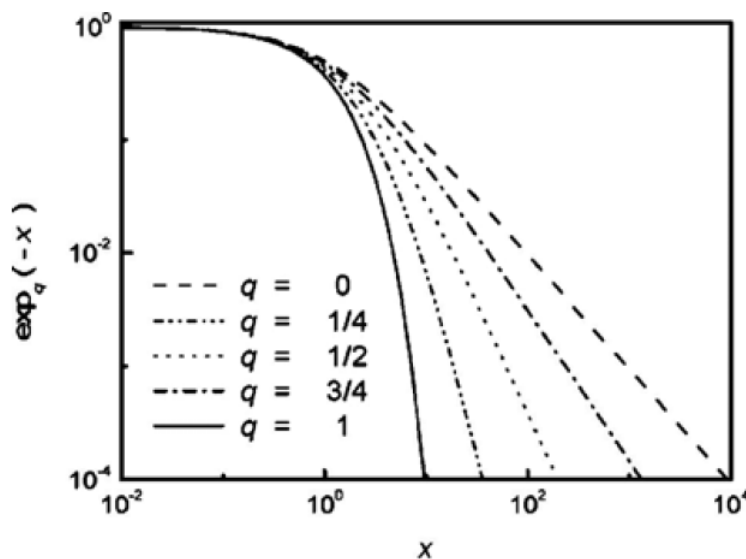


Figura 3.1: Podemos perceber o comportamento da q -exponencial $\exp_q(-x)$ para diferentes valores do índice entrópico q . A cauda da distribuição segue claramente um comportamento tipo lei de potência, entretanto quando temos $q = 1$, a distribuição recupera a exponencial padrão. Figura retirada da referência [75].

formado de dois subsistemas independentes A e B , a entropia generalizada S_q é expressa como

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)S_q(B)}{k_B} \quad (3.13)$$

Quando $q = 1$, temos que S_1 é aditiva (extensiva), recuperando assim a entropia padrão de BG, entretanto para $q \neq 1$, o termo cruzado $(1-q)[S_q(A)S_q(B)]/k_B$ torna a equação 3.13 não-extensiva.

Olhando para a equação 3.13, vemos que cada subsistema, do sistema composto $A+B$, contribui com o termo adicional $S_q(A)[1 + \frac{1}{2}(1-q)S_q(B)]$ e $S_q(B)[1 + \frac{1}{2}(1-q)S_q(A)]$ [63], mostrando que tal equação viola o princípio da aditividade e rompe com um conceito fundamental da Termodinâmica, o de sistemas isolados⁴. Este comportamento indica que um sistema já sentia a presença do outro mesmo antes da junção, evidenciando que o sistema antes da junção, não estava isolado.

nicamente crescente da energia e é aditiva sobre os subsistemas constituintes de um dado sistema composto [63].

⁴O sistema está isolado quando não troca matéria, nem energia, nem informação com sua vizinhança.

Nas seções seguintes apresentaremos modelos teóricos de redes que incorporaram na regra de ligação preferencial a distância Euclidiana entre os sítios, levando à estrutura da rede que antes era apenas topológica para uma estrutura que entra na classe de sistemas com interações de longo alcance. A utilização da estatística não-extensiva de Tsallis para descrever as distribuições de conectividade destes modelos tem-se mostrado a mais apropriada, evidenciando a estrita relação entre tal estatística e as Redes Complexas.

3.3 Modelo de Natal

Estudamos até aqui modelos de redes que são puramente topológicos, modelos estes que não levam em conta a distância Euclidiana entre seus sítios. De fato, em algumas redes reais a distância geográfica realmente não é um fator importante, como por exemplo, a rede formada por atores que atuaram em um mesmo filme (ver seção 2.8.3), a rede de interações proteicas (ver seção 2.8.4), ou até mesmo a rede de Internet (ver seção 2.8.2), uma vez que a interação entre seus constituintes parece independe do quão distantes eles estejam um do outro⁵.

Porém em algumas redes reais como as de energia elétrica [78], aeroportos [79], metrô [80], redes neurais [81], etc. a distância Euclidiana é um fator importante que não se deve negligenciar, de maneira que as conexões entre os sítios da rede são diretamente acrescidas por estarem em uma localização estrategicamente privilegiada, pois a distância entre os sítios influencia os custos envolvidos nas interações entre os mesmos.

Mostraremos a seguir um modelo de rede geográfico bidimensional (Modelo de Natal), proposto por Soares *et al.* [76], com o objetivo de verificar as relações entre a estatística não-extensiva de Tsallis e as Redes Complexas.

3.3.1 Modelo de Natal bidimensional ($d = 2$)

Em 2005, Soares *et al.* propuseram um modelo de rede⁶ bidimensional que levasse em

⁵Um dos fatores que influencia a velocidade de comunicação entre os constituintes da internet é a distância entre o servidor que “hospeda” o conteúdo acessado e o usuário [77].

⁶Modelo de Natal. O modelo leva esse nome pois o mesmo foi uma ideia que surgiu entre pesquisadores

consideração a distância Euclidiana entre os sítios, crescimento da rede e ligação preferencial. O propósito era verificar as relações existentes entre as redes livres de escala e a Estatística não-extensiva de Tsallis [17, 76]. Para a construção desse modelo, eles consideraram um plano contínuo, e com utilização de coordenadas polares⁷ sorteavam a posição dos sítios à uma distância r do centro de massa do sistema, como também à uma direção θ do mesmo. A variável r que quantifica a distância entre os sítios e o centro de massa do sistema é tal que satisfaz à uma lei de potência da forma $P(r) \propto 1/r^{2+\alpha_G}$, caracterizada pelo parâmetro de escala α_G ⁸ responsável pelo crescimento da rede, e que define o quão próximos os sítios estão uns dos outros.

Como dito anteriormente, a dinâmica da rede obedece a uma regra de ligação preferencial que é influenciada pela distância entre os sítios do sistema, ou seja, a conexão entre dois sítios quaisquer dependerá da conectividade do sítio que já está na rede como também da distância deste sítio ao que está chegando. Em detalhes, ao chegar na rede um dado nó (i) é conectado a um dos outros sítios preexistentes no sistema, obedecendo a uma regra de ligação preferencial proporcional à conectividade destes sítios, e inversamente proporcional à distância Euclidiana $r_{ij}^{\alpha_A}$ do sítio (i) à todos os outros (j) sítios da rede. O parâmetro α_A ⁹, de certa forma, controla a importância da distância entre os sítios na regra de ligação preferencial. Segue abaixo o algoritmo de construção do Modelo de Natal:

1. O sítio $i = 1$ é colocado em uma origem arbitrária no plano;
2. O sítio $i = 2$ é situado isotropicamente, e aleatoriamente, a uma distância r do sítio $i = 1$ obedecendo à distribuição:

$$P(r) \propto \frac{1}{r^{2+\alpha_G}} \quad (3.14)$$

cuja direção θ também é escolhida de forma aleatória, obtida de uma distribuição uniforme, tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Após isso o segundo sítio é, então, conectado com o primeiro sítio;

3. A partir deste passo, para fixar os sítios seguintes ($i = 3, 4, 5, \dots, N$), a origem do sistema é movida para o centro massa da rede e é recalculada a cada passo de tempo. O novo sítio ($i > 2$) é então colocado a uma distância r do centro de massa do sistema. Esta

que participavam de um evento localizado na cidade de Natal/RN.

⁷Em coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$; $y = r\sin(\theta)$ [82].

⁸O índice “G” utilizado aqui se refere à palavra em inglês growth que significa crescimento.

⁹O índice “A” refere-se à palavra inglesa attachment que significa ligação.

distância é dada pela distribuição de probabilidade do item anterior. Então, o sítio recém-chegado irá conectar-se a um dos sítios preexistentes da rede através da seguinte regra de ligação preferencial:

$$\Pi_i = \frac{k_i r_{ij}^{-\alpha_A}}{\sum_j k_j r_{ij}^{-\alpha_A}} \in (0, 1] \quad (\alpha_A \geq 0). \quad (3.15)$$

Em que Π_i é a probabilidade do sítio i se conectar ao sítio recém-chegado j ;

4. O passo anterior (processo de crescimento e ligação) é repetido, sequencialmente, até o tamanho desejado do sistema.

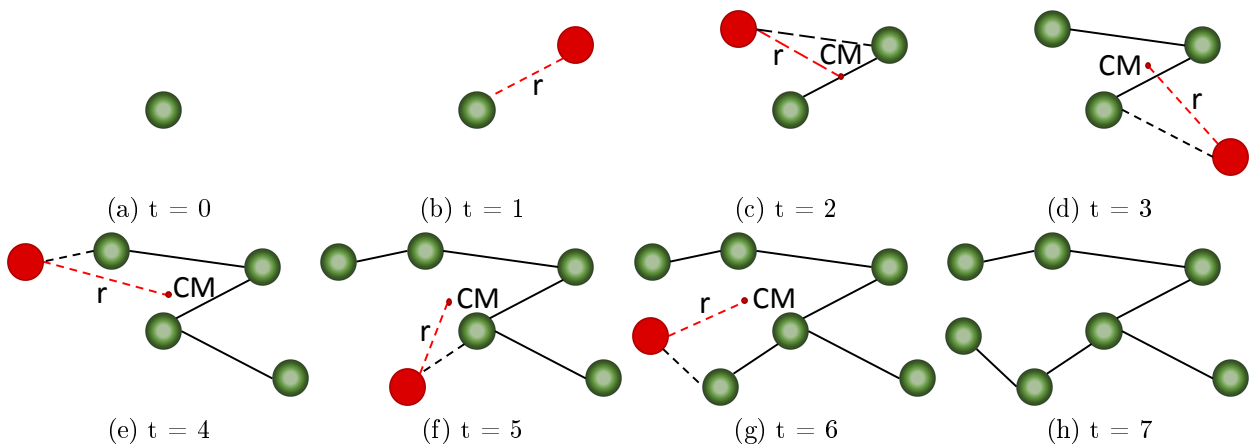


Figura 3.2: Figura esquemática da dinâmica de crescimento e ligação preferencial do Modelo de Natal. Em $t = 0$, um nó é colocado em uma origem arbitrária no plano. Em $t = 1$, um novo nó é adicionado a uma distância r do nó inicial, segundo a regra probabilística $P(r)$ dado pela Eq. 3.14, com o parâmetro de crescimento $\alpha_G \geq 0$. Em $t = 2$, um terceiro nó é adicionado à rede, obedecendo à mesma regra de crescimento $P(r)$, a uma distância r do centro de massa do aglomerado preexistente. O novo nó se liga a um dos nós da rede de acordo com a regra de ligação Π_i , que neste caso privilegia os nós mais próximos de acordo com o parâmetro α_A . A partir de $t = 3$, a dinâmica de crescimento da rede obedece a regra estabelecida no item 4 do algoritmo explicitado acima. Observe que embora não esteja contida na figura a escolha do ângulo θ , tal escolha é feita a cada passo do algoritmo de forma aleatória, obtida de uma distribuição uniforme, tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

A figura 3.2 mostra o crescimento da rede passo a passo, utilizando o algoritmo acima. Nesse modelo é evidente que haverá uma competição entre conectividade e distância, pois o sítio recém colocado na rede decidirá estatisticamente se vai conectar-se ao sítio com maior conectividade (um polo) ou ao sítio que está mais próximo a ele. Pela Eq. 3.15 percebe-se

também que a competição entre distância e conectividade tende a sumir quando $\alpha_A \rightarrow 0$, e desaparece completamente quando $\alpha_A = 0$, reproduzindo o modelo de Barabási-Albert.

O trabalho de Soares *et al.* verificou de maneira satisfatória as relações existentes entre a estatística não-extensiva e as redes livres de escala [76, 17]. Tal trabalho analisou dois principais aspectos das redes geográficas:

- (i) O estado estacionário da distribuição de conectividade $P(k)$ no limite $N \rightarrow \infty$.
- (ii) A dependência temporal da conectividade média, ou seja, como $\langle k_i \rangle$ aumenta com o tempo à medida que $t/t_i \rightarrow \infty$.

À medida que variamos α_G mantendo-se o parâmetro $\alpha_A = cte$ (ver Fig. 3.3(a)), observamos que as distribuições de conectividade não sofrem alterações, fato que mostra que as curvas de $P(k)$ são invariantes com respeito aos diferentes valores de α_G . Tal expoente controla a distribuição dos sítios no aglomerado emergente, mas não tem nenhuma influência nas distribuições de conectividade. Já ao variarmos os valores do parâmetro α_A , para um dado α_G , as distribuições de conectividade são fortemente influenciadas por tais variações, conforme ilustrado na figura 3.3(b). Percebemos que as distribuições de conectividade se alteram de tal forma que a regra de ligação, Π_i , acaba por construir uma rede que vai se aproximando do comportamento exponencial (rede aleatória) à medida que α_A aumenta, embora que para baixos valores deste parâmetro a rede construída exiba um comportamento de uma rede livre de escala.

Mas de que maneira Soares *et al.* verificaram as relações existentes entre as redes livres de escala e a estatística não-extensiva? Ao supor um sistema que leva em consideração a distância Euclidiana entre os seus sítios, a rede que era apenas topológica, passa a depender da geometria devido à presença de métrica. Para descrever tais sistemas a Mecânica Estatística não-extensiva de Tsallis demonstra ser mais apropriada que a estatística de Boltzmann-Gibbs, uma vez que, dependendo do valor de parâmetro α_A , o sistema apresenta interações de longo alcance. Sabemos que uma grande variedade de redes reais possuem uma distribuição de conectividade $P(k)$ que segue assintoticamente uma lei de potência, de tal forma que podemos escrevê-la como [21, 29, 74]:

$$P(k) = \frac{1}{(k_0 + k)^\gamma}, \quad (3.16)$$

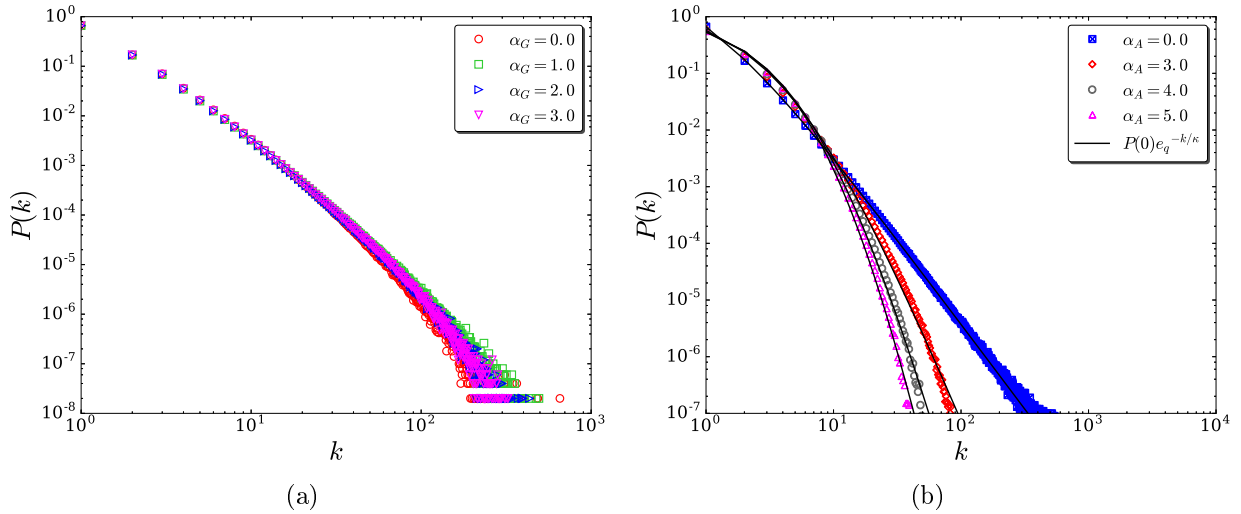


Figura 3.3: (a) Gráfico exibindo as distribuições de conectividade para diferentes de valores de α_G , mantendo-se o parâmetro $\alpha_A = 2$. Simulação realizada para $N = 10^4$ e 3×10^3 amostras. (b) Análise das distribuições de conectividade ao variar o parâmetro α_A , mantendo-se $\alpha_G = 2$. Simulação realizada para $N = 10^5$ nós e 1000 amostras. Figura retirada de referência [15].

com $k_0 > 0$ e $\gamma > 0$. Se redefinirmos k_0 e γ como:

$$k_0 \equiv \frac{\kappa}{q-1} \quad \text{e} \quad \gamma \equiv \frac{1}{q-1}, \quad (3.17)$$

a equação 3.16 pode ser reescrita e assume a forma:

$$P(k) = P_0 \exp_q(-k/\kappa), \quad (3.18)$$

onde P_0 é a constante de normalização, κ é uma constante positiva e que está associada ao número característico de ligações da rede, e o termo $\exp_q(-k/\kappa)$ é uma q -exponencial descrita na seção 3.2, mais especificamente pela Eq. 3.12.

Na figura 3.3(b) mostramos as curvas das distribuições de conectividades geradas a partir do modelo de Natal, e as mesmas são bem ajustadas pela função q -exponencial dada pela equação 3.18, onde κ é o número característico de ligações e q é o índice entrópico. Também foi encontrado uma relação entre os parâmetros q e κ , parâmetros estes que são usados nos ajustes das curvas presentes no gráfico 3.3(b). Tais relações são mostradas na figura 3.4. Observamos que para valores de α_A a partir de $\alpha_A \approx 2$, $q(\alpha_A)$ tem um comportamento exponencial, decaindo a medida que α_A aumenta. Já o parâmetro $\kappa(\alpha_A)$ tende a crescer exponencialmente para valores de $\alpha_A \approx 2$ (ver Fig. 3.4(b)).

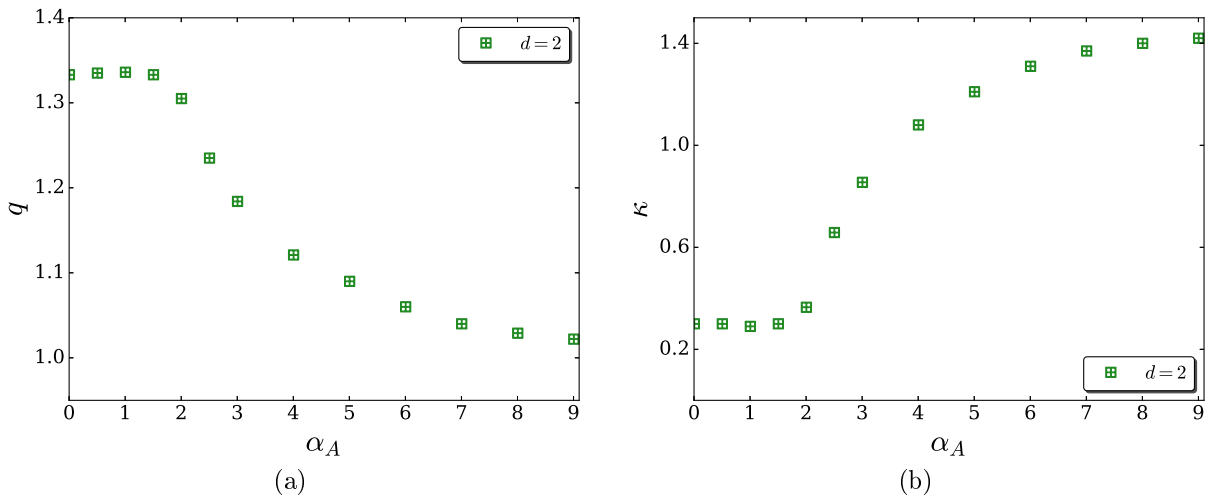


Figura 3.4: (a) Gráfico q versus α_A , mostrando seu decaimento exponencial para diferentes valores de α_A . (b) Gráfico κ versus α_A . O parâmetro κ tende a crescer exponencialmente para valores de $\alpha_A \approx 2$. Figura retirada de referência [15].

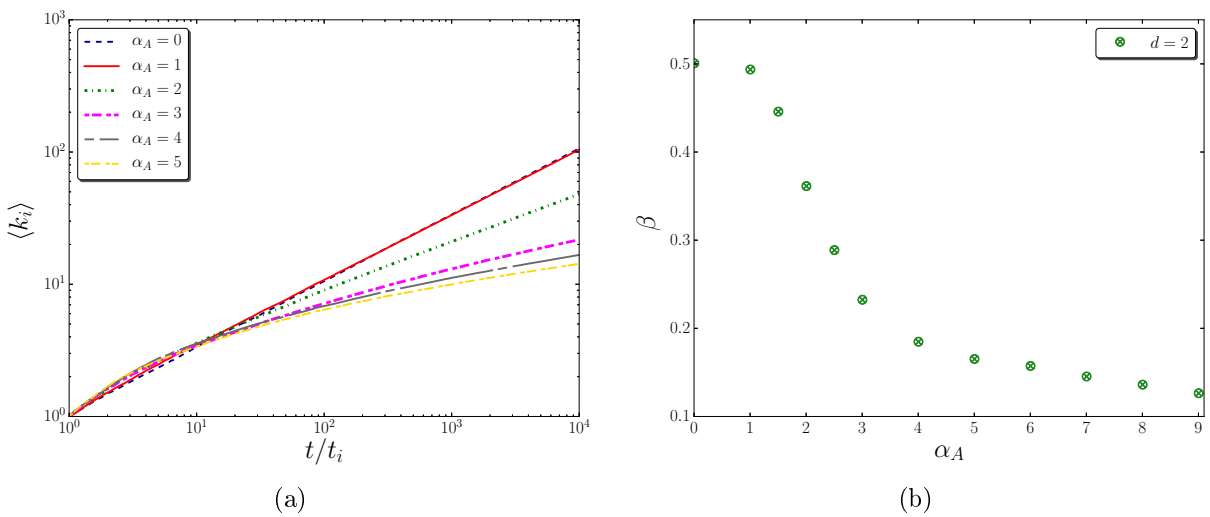


Figura 3.5: (a) Evolução temporal da conectividade do sítio $i = 10$ para diferentes valores do parâmetro α_A . (b) Comportamento do expoente β para diferentes valores de α_A . Podemos observar que de fato o parâmetro β decai com o aumento dos valores α_A . Figura retirada de referência [15].

Sabemos que a maneira com que os sítios de uma rede adquirem conexões depende diretamente de suas habilidades ao competir por elas. No modelo de BA a evolução temporal da conectividade tem expoente β fixo e igual a $1/2$ (ver Eq. 2.20). Isto sugere que todos os sítios recebem conexões de uma mesma maneira, indicando que sítios mais velhos na rede serão privilegiados com mais ligações, pois terão mais tempo para adquiri-las. No modelo MN observou-se algo semelhante, pois o expoente dinâmico β passa a ser dependente de tal parâmetro

(ver Fig. 3.5), mas ainda continua fixo para todos os sítios da rede. No intervalo em que $0 \leq \alpha_A \leq 1$, podemos perceber que β tem seu valor máximo e igual a $1/2$, o que condiz com o modelo de BA que é recuperado exatamente no ponto $\alpha_A = 0$ (ver Fig. 3.5(b)). Entretanto, quando $\alpha_A \geq 2$, temos um comportamento aproximadamente exponencial, decaindo até o seu valor mínimo quando $\alpha_A \rightarrow \infty$.

Os resultados encontrados por Soares *et al.* mostraram de maneira satisfatória que, através da distribuição de conectividade presente nas redes livres de escala, existe uma estrita relação entre $P(k)$ e a q -exponencial da estatística não-extensiva de Tsallis [17, 76]. Entretanto, o MN foi apenas estudado para $d = 2$, além de que outras propriedades da rede não foram analisadas, como menor caminho médio, correlações de grau, entropia da distribuição de grau, entre outras. Na seção a seguir apresentaremos uma generalização desse modelo, proposta por Brito *et al.* [16], os quais estudaram o comportamento desse modelo para $(d = 1, 2, 3, 4)$, com o propósito de verificar como a dimensão influencia as propriedades básicas das redes geométricas.

3.3.2 Modelo de Natal d -dimensional ($d = 1, 2, 3, 4$)

Em 2016 Brito *et al.* publicaram o artigo intitulado **Role of dimensionality in complex Networks** [16], com o propósito de verificar como a dimensão influencia as propriedades básicas das redes geométricas, e investigar como a regra de ligação preferencial influencia os componentes de tal sistema nas suas interações, analisando de que forma os parâmetros α_A e d mudam as interações entre os sítios (de longo para curto alcance). Dado um potencial cuja forma funcional é dada por $1/r^\alpha$, define-se potenciais de longo alcance aqueles que $\alpha \leq d$ (d é a dimensão espacial do sistema). Sendo assim, para os casos em que $\alpha > d$, temos um sistema caracterizado por interações de curto alcance [83].

No Modelo de Natal d -dimensional, as interações de longo alcance são aquelas caracterizadas de maneira igual à definida acima, ou seja, sempre que $0 \leq \alpha_A/d \leq 1$ o sistema exhibe interações de longo alcance, e as interações de curto alcance ocorrem quando $\alpha_A/d > 1$, mesmo que o índice entrópico q não tenha atingido o seu valor mínimo ($q = 1$). Apresentaremos a seguir o algoritmo usado para gerar a rede no Modelo de Natal d -dimensional.

1. O sítio $i = 1$ é colocado em uma origem arbitrária (linha, plano, espaço);

2. O sítio $i = 2$ é situado isotropicamente, e aleatoriamente, a uma distância r^{10} do centro de massa do sistema obedecendo à distribuição:

$$P(r) \propto \frac{1}{r^{d+\alpha_G}} \quad (3.19)$$

cuja direção angular (ϕ, θ, ψ) é escolhida de forma aleatória, obtida de uma distribuição uniforme, tal que $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq \pi$. Após isso o segundo sítio é então, conectado com o primeiro;

3. A partir deste passo, para fixar os sítios seguintes ($i = 3, 4, 5, \dots, N$), a origem do sistema é movida para o centro massa da rede e é recalculada a cada passo de tempo. O novo sítio ($i > 2$) é então colocado a uma distância r do centro de massa do sistema. Esta distância é dada pela distribuição de probabilidade do item anterior. Então, o sítio recém-chegado irá conectar-se a um dos sítios preexistentes da rede através da seguinte regra de ligação preferencial:

$$\Pi_i = \frac{k_i r_{ij}^{-\alpha_A}}{\sum_j k_j r_{ij}^{-\alpha_A}} \in (0, 1] \quad (\alpha_A \geq 0). \quad (3.20)$$

Em que Π_i é a probabilidade do sítio i se conectar ao sítio recém-chegado j ;

4. O passo anterior (processo de crescimento e ligação) é repetido, sequencialmente, até o tamanho desejado do sistema.

Assim como no modelo MN bidimensional podemos perceber que os parâmetros α_A e α_G influenciam diretamente na construção da rede, onde α_G (parâmetro de escala) controla a distribuição das distâncias entre os sítios da rede como também na proximidade entre eles. Já a influência do parâmetro α_A mostra que o efeito das distâncias diminui gradativamente a medida que seus valores vão diminuindo. No limite $\alpha_A = 0$, o fator referente as distâncias na equação 3.20 se anula, fazendo com que as distâncias entre os sítios tornem-se desprezíveis (ver Fig. 3.6).

Valendo-se da definição de interações de longo ou de curto alcance, a análise dos gráficos com base na variável α_A/d nos mostra em que regimes o sistema se encontra. Quando $0 \leq \alpha_A/d \leq 1$ encontramos o sistema com uma distribuição de conectividade $P(k)$ que

¹⁰Em uma dimensão $r = |x|$, em duas dimensões $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, em três dimensões $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e assim por diante.

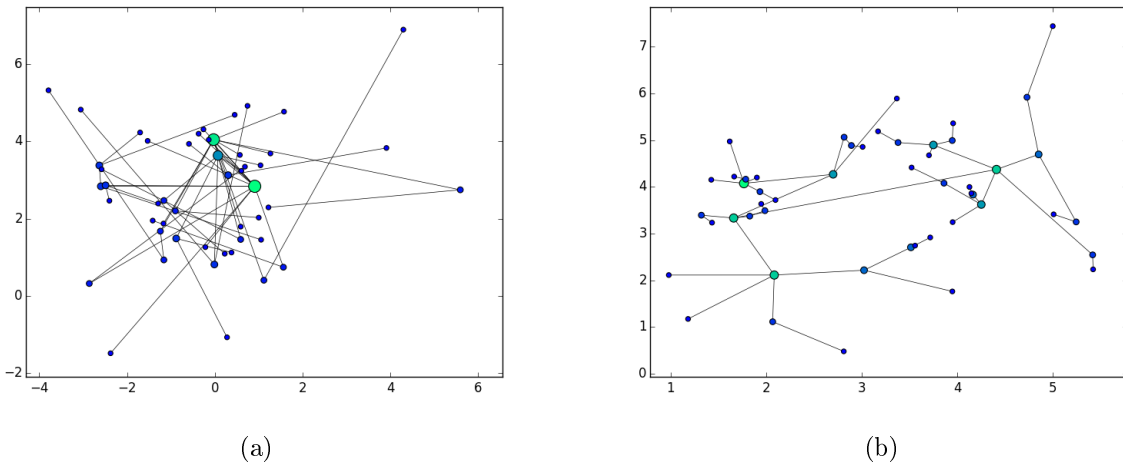


Figura 3.6: Ambas figuras representam a distribuição dos sítios (50 sítios) no plano ($d = 2$) para $\alpha_G = 1$. Em (a) temos $\alpha_A = 0$ e em (b) temos $\alpha_A = 8$. Percebemos nitidamente como a estrutura da rede muda a medida que variamos o parâmetro α_A . Figura retirada da referência [15].

segue assintoticamente uma lei de potência, mostrando que interações de longo alcance estão presentes entre os sítios da rede, evidenciando também a presença de polos. Entretanto no regime em quem $\alpha_A/d > 1$, os polos são “desfeitos” e a distribuição de conectividade passa a ser mais igualitária, mostrando assim que as interações presentes no sistema são apenas interações locais (entre sítios geograficamente mais próximos, ver Fig. 3.7).

Brito *et al.* analisaram o comportamento das distribuições de conectividade para

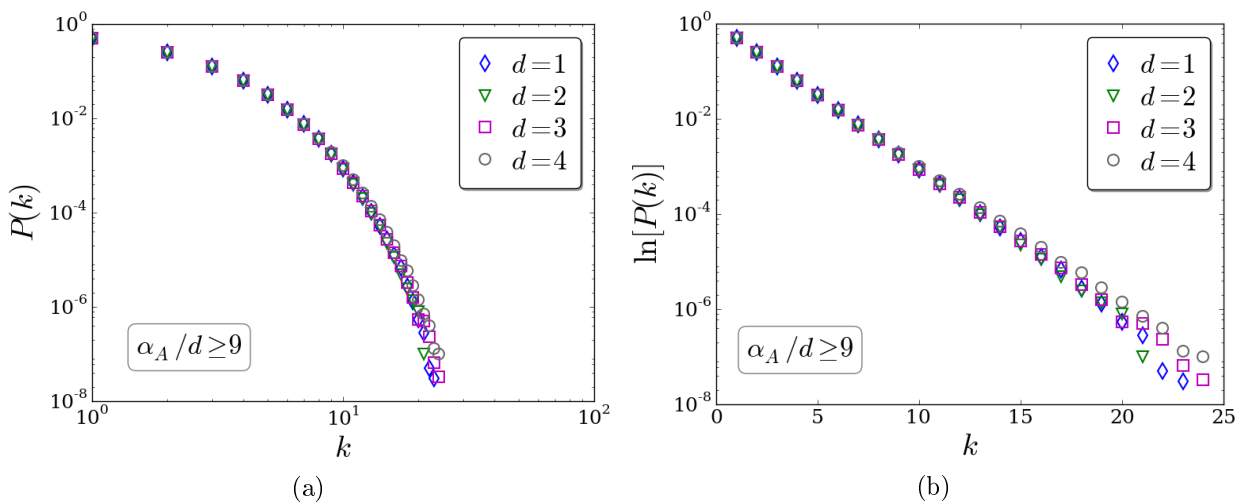


Figura 3.7: Distribuição de conectividade para $d = 1, 2, 3, 4$, mostrando o caráter exponencial de $P(k)$ para valores de $\alpha_A/d = 9$. (a) Representação log-log. (b) Representação log-linear. Figura retirada da referência [15].

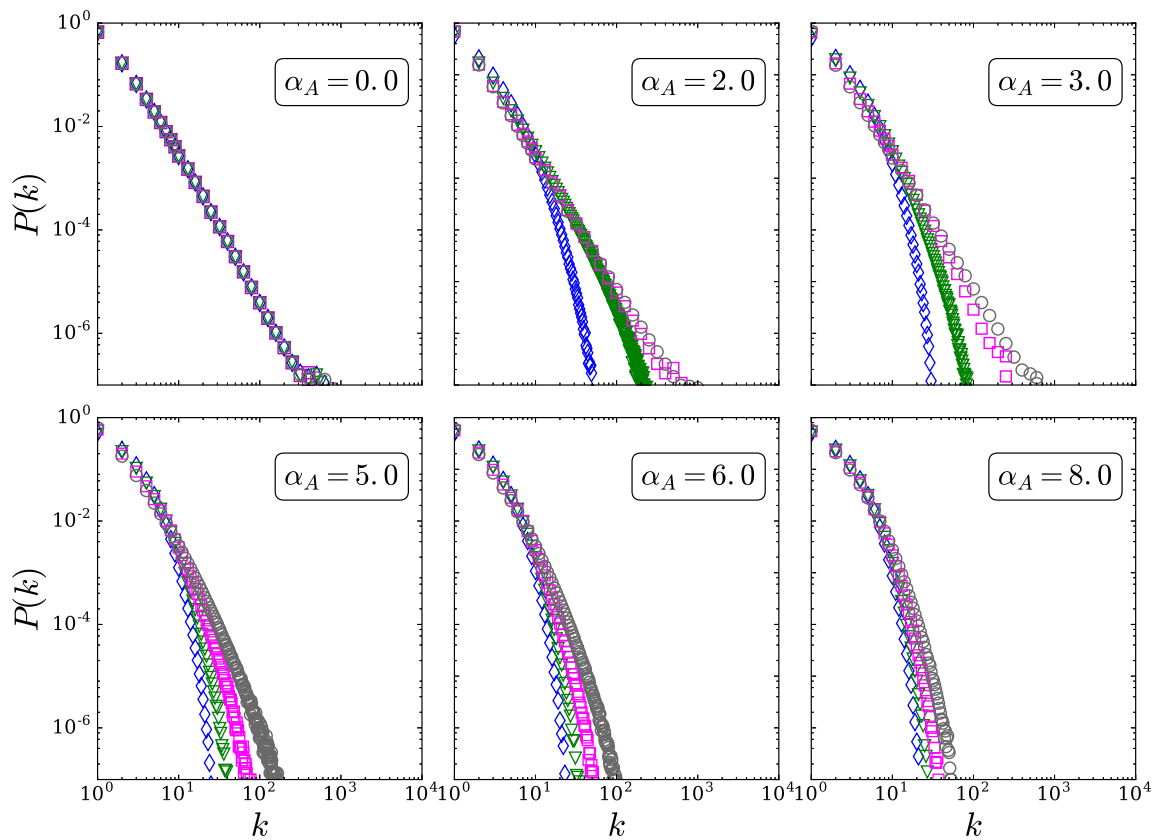


Figura 3.8: Distribuições de conectividade com $d = 1, 2, 3, 4$ para diferentes valores de α_A ($\alpha_G = 2$). Fica evidente o quão sensíveis as distribuições de conectividade são às variações de α_A , indo de uma distribuição em lei de potência à um comportamento claramente exponencial. Figura retirada da referência [16].

diferentes valores de α_A e α_G , constatando que as distribuições de grau são de fato independentes do parâmetro α_G , como foi averiguado no Modelo de Natal bidimensional. É notório que o parâmetro α_G tem claras influências somente no crescimento do sistema como na distribuição de posição dos nós que chegam a rede. A partir disso, para uma melhor análise dos dados, foi escolhido arbitrariamente o valor de $\alpha_G = 2$ e analisado como os parâmetros α_A e d modificam a distribuição de conectividade da rede (ver Fig. 3.8).

Em todos os casos estudados, a função q -exponencial se ajusta de maneira singular às distribuições de conectividade dada por $P(k) \propto P_0 e_q^{-k/\kappa}$, com índice entrópico $q > 0$ e $\kappa > 0$ (ver Fig. 3.9). Todos os valores de q e κ usados nos ajustes de $P(k)$ são mostrados no gráfico 3.10, de onde também podemos perceber em quais regimes o sistema se encontra. Para estudar tais regimes, ambos os parâmetros de ajuste q e κ foram analisados como funções da variável α_A/d , mostrando que não dependem somente de α_A ou d de maneira independente, mas da razão α_A/d .

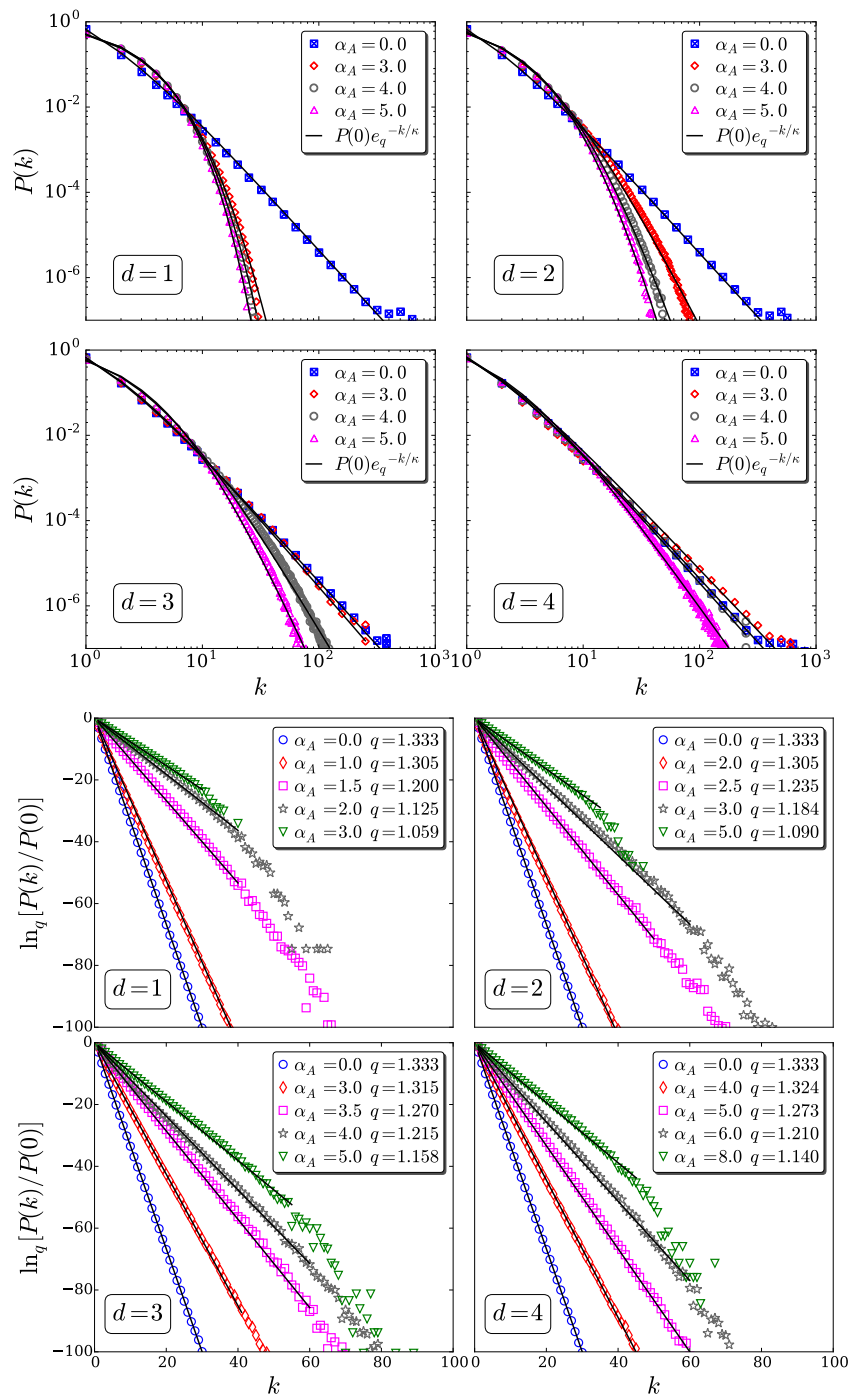


Figura 3.9: Ajustes das distribuições de conectividade dada pela função $P(k) = P(0)e_q^{-k/\kappa}$ para todas as 4 dimensões. (a) Representação em log-log. (b) Representação em $\ln_q[P(k)/P(0)] \times k$. Figura retirada da referência [16].

No regime em que $0 \leq \alpha_A/d \leq 1$, podemos perceber que os parâmetros q e κ são constantes e iguais a $4/3$ e 0.30 respectivamente. Em tais regimes o sistema se encontra com interações de longo alcance. Para valores em que $\alpha_A/d > 1$, percebemos que $q(\alpha_A) \rightarrow 1$

decai exponencialmente até o seu valor mínimo, e acredita-se que atinja esse valor quando $\alpha_A/d \rightarrow \infty$ (ver Fig. 3.11(a)). Entretanto, $\kappa(\alpha_A)$ tem um crescimento exponencial, atingindo $\kappa(\alpha_A) \approx 1.4$ quando $\alpha_A/d \rightarrow \infty$ (ver Fig. 3.11(b)).

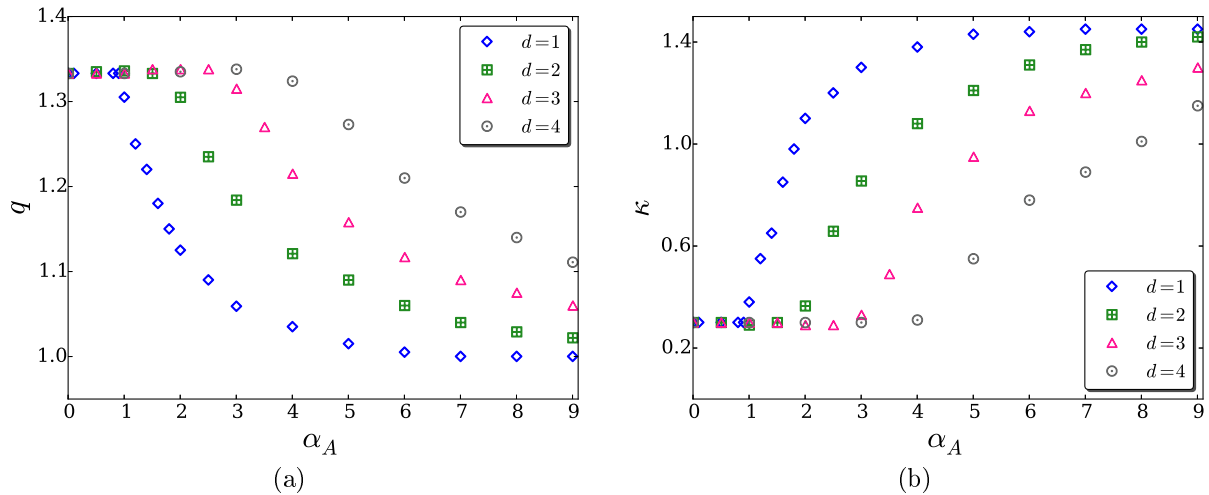


Figura 3.10: Vemos como os parâmetros q e κ variam com respeito a variável α_A . No limite em que $\alpha_A = 0$ e $\forall d$ recupera-se a classe de universalidade do modelo de Barabási-Albert com $q = 4/3$, correspondente a $\gamma = 3$, o qual não tem métrica. Figura retirada da referência [16].

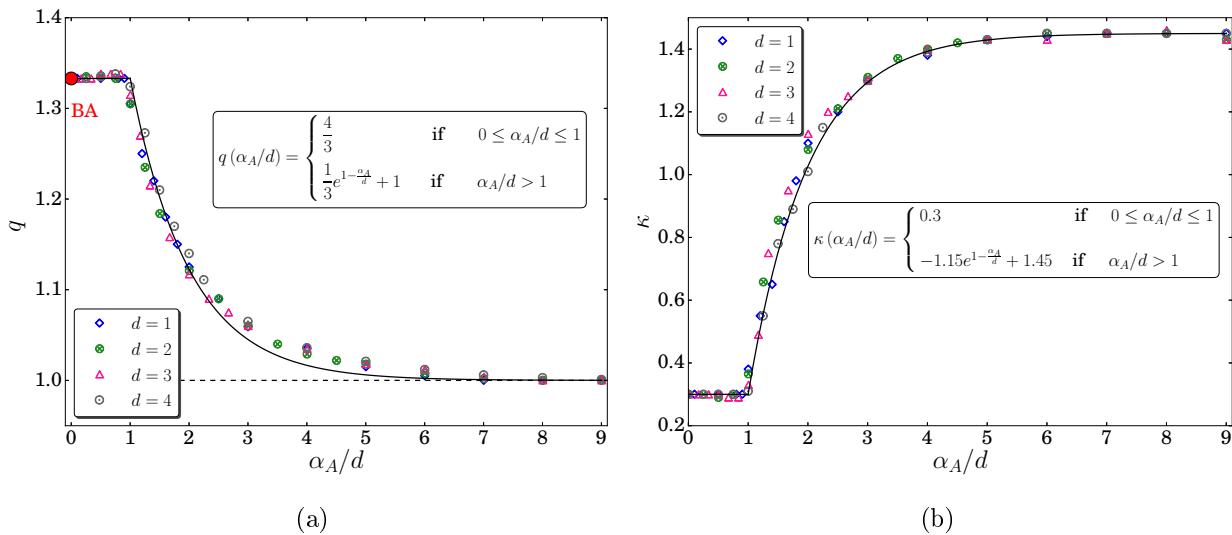


Figura 3.11: Dados da figura 3.10 agora plotados como função da variável α_A/d , mostrando a universalidade das variáveis q e κ . Podemos ver como q e κ se comportam no regime $0 \leq \alpha_A/d \leq 1$ (interações de longo alcance). Em tal regime temos que $q = 4/3$ e $\kappa \approx 0.30$. Entretanto, quando $\alpha_A/d > 1$ ($\forall d$), é visível o surgimento de um comportamento exponencial. Figura retirada da referência [16].

Podemos perceber na figura 3.11 que ambas expressões para q e κ no limite que $\alpha_A/d > 1$ têm a mesma exponencial dada por $e^{1-\frac{\alpha_A}{d}}$, o que sugere uma estrita relação entre

essas variáveis. Em decorrência disso Brito *et al.* encontraram uma relação linear (Eq. 3.21) que estabelece uma dependência entre tais variáveis e que está de acordo com os resultados numéricos expressos na figura 3.12.

$$k \simeq 4.90 - 3.45q \tag{3.21}$$

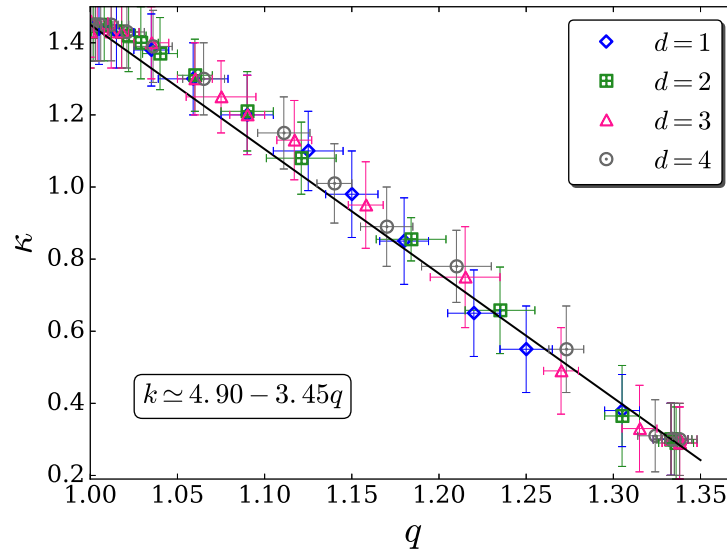


Figura 3.12: Relação aproximadamente linear entre os parâmetros q e κ no modelo de Natal d -dimensional. Figura retirada da referência [16].

Foi analisada a evolução temporal da conectividade dos sítios com o propósito de verificar como o expoente dinâmico β varia com α_A e d (ver Fig. 3.13(a)). Sendo assim, no Modelo de Natal d -dimensional foi constatado que de fato o expoente β varia com relação aos parâmetros α_A e d , apresentando curvas universais com relação a α_A/d , com valor máximo de β igual a $\frac{1}{2}$ no limite em quem $0 \leq \alpha_A/d \leq 1$ (ver Fig. 3.13(b)). Foi averiguado que a medida que α_A aumenta, os valores de β passam a diminuir, e no limite em que $\alpha_A/d \rightarrow \infty$, $\beta(\alpha_A/d) = cte$, indicando que todos os sítios da rede passam a ter aproximadamente a mesma chance de adquirir conexões, o que caracteriza o regime exponencial ($q \rightarrow 1$) [15].

No Modelo de Natal d -dimensional também foram analisadas outras quantidades importantes para o estudo das redes geométricas, como o menor caminho médio e a entropia da distribuição de conectividade da rede [15]. Os resultados encontrados estão diretamente relacionados à mudança topológica sofrida pela rede devido a alterações nos valores do parâmetro α_A . No cálculo do menor caminho médio, os dados indicam que o seu tamanho aumenta à medida que o expoente α_A aumenta, quando $\alpha_A = 0$ recupera-se os valores do

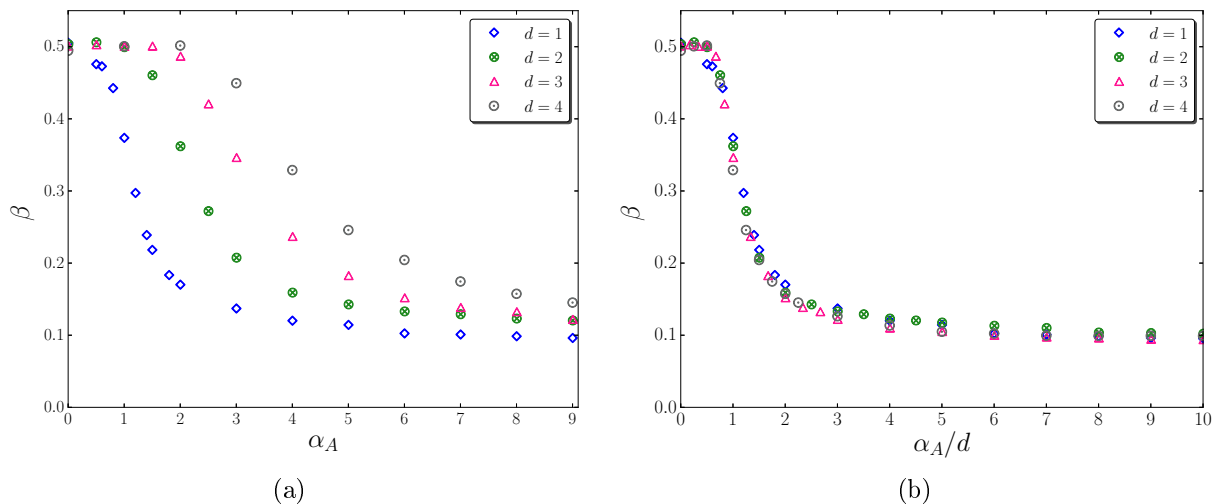


Figura 3.13: (a) Comportamento do expoente dinâmico β versus α_A para $d = 1, 2, 3, 4$. (b) Colapso das curvas do gráfico (a) mostrando o comportamento universal de β versus α_A/d . Análises feitas para o sítio $i = 10$, $\alpha_G = 2$ e valores típicos de α_A . Figura retirada da referência [15].

menor caminho médio para a rede de BA, dado por $\langle l \rangle \approx \ln N \approx 9.2$ ($m = 1$ e $N = 10^4$). Esse resultado é facilmente explicado quando percebemos que na rede livre de escala, a presença de polos acabam por encurtar a distância entre os sítios da rede ($\alpha_A \rightarrow 0$), e no limite que ($\alpha_A \rightarrow \infty$), a rede tem uma distribuição de grau mais homogênea, o que caracteriza maior grau de aleatoriedade na rede. Esse resultado pode ser percebido na distribuição de conectividade $P(k)$ (caracterizada por uma exponencial), bem como no aumento do menor caminho médio devido a ausência de sítios muito conectados na rede.

Nos cálculos referentes a entropia, os resultados também expressam as mudanças topológicas sofridas pelo sistema, pois a entropia é uma medida clara do grau de aleatoriedade presente na distribuição de conectividade da rede. Os resultados mostram que assim como no menor caminho médio, à medida com que o parâmetro α_A aumenta, a entropia da distribuição de grau também passa a aumentar, pois ora sua estrutura topológica é livre de escala, ou ora é uma rede com características exponenciais. Sabemos que no intervalo em que $1 \leq \alpha_A/d \leq 0$ temos presente no sistema interações de longo alcance, e como dito anteriormente, a estatística de Boltzmann-Gibbs não é a mais apropriada para descrever sistemas nesse regime. Sendo assim, Brito *et al.* fizeram um comparativo entre a validade das duas entropias aplicando-as no Modelo de Natal. Já no limite em que $\alpha_A \rightarrow \infty$ e $q \rightarrow 1$, temos um sistema cuja correlações são de curto alcance, e nesse limite temos um equivalência entre a estatística padrão de Boltzmann-Gibbs e a de Tsallis, como esperado.

Apresentaremos no próximo capítulo uma extensão do modelo de Bianconi-Barabási,

primeiramente proposto por Meneses *et al.* [19], cuja ligação preferencial foi modificada com a inclusão de um fator referente à métrica do sistema, com o propósito de verificarmos as relações entre Redes Complexas e a estatística não-extensiva de Constantino Tsallis.

Modelo de Bianconi-Barabási d -dimensional

Sabemos que muitas redes reais exibem um grau de competitividade entre seus constituintes de maneira que a complexidade topológica da rede é diretamente influenciada pelas interações presentes no sistema. Ao longo do desenvolvimento teórico das Redes Complexas, vários modelos têm tentado simular de maneira significativa a complexidade desses sistemas. Complexidade esta associada à forma como estes constituintes interagem no sistema. [3, 16, 30]. Vemos nas últimas décadas o surgimento de vários modelos de redes que são modificações do modelo de Barabási-Albert, os quais visam inserir características mais realistas buscando descrever o comportamento de algumas redes reais. O modelo de Natal, por exemplo, leva em consideração um fator importantíssimo presente em vários sistemas reais, o efeito da distância Euclidiana sob a conectividade dos sítios da rede [15, 16].

Em algumas redes, de fato, a distância Euclidiana entre seus constituintes não pode ser ignorada, como por exemplo a rede elétrica, a rede metroviária, ou mesmo na rede de aeroportos. Nessas redes as posições dos sítios são particularmente importantes, dado que os mesmos são diretamente beneficiados com um número maior de conexões caso sua localização seja estrategicamente privilegiada. Sendo assim o modelo de Natal incorpora de modo mais realista três mecanismos que governam a evolução de algumas redes reais: crescimento, ligação preferencial e distância Euclidiana entre os sítios. Ao incorporar mais ingredientes na regra de ligação preferencial, parâmetros que controlam a distância entre os sítios influenciam

diretamente na forma da distribuição de conectividade da rede, e dependendo dos valores de tais parâmetros, a rede pode apresentar características aleatórias ou pode exibir características livres de escala. Apesar de o Modelo de Natal inserir distância entre seus constituintes como um importante parâmetro no estabelecimento de conexões, tal modelo despreza outros aspectos que podem influenciar na competição por ligações na rede. Muitos sistemas reais mostram que a taxa com que a conectividade de um dado sítio aumenta no tempo, pode depender da “qualidade” deste sítio, ou melhor, da habilidade deste em conseguir ligações.

Neste capítulo, estudaremos o modelo de Bianconi-Barabási d -dimensional, modelo este que foi primeiramente estudado como um modelo bidimensional ($d = 2$) por de Meneses M. D. *et al.* [19], cujo propósito era verificar as relações entre Redes Complexas e a estatística não-extensiva de Tsallis. Através desse estudo eles mostraram que existe uma relação entre a Mecânica Estatística não-extensiva e este modelo. Os resultados evidenciaram a influência do parâmetro α_A na distribuição de conectividade e no expoente dinâmico β . Mostraremos a seguir o modelo de Bianconi-Barabási d -dimensional e estudaremos como a distribuição de conectividade $P(k)$, os parâmetros de ajuste q e κ , e como a evolução temporal da conectividade dos sítios variam com a dimensão d do sistema e com o parâmetro α_A . Mostraremos também que alguns desses parâmetros apresentam um comportamento universal com relação à variável α_A/d .

4.1 Modelo de Bianconi-Barabási d -dimensional

Na direção de sugerir um modelo de rede mais realista, que nos possibilite investigar os vários aspectos envolvendo o comportamento competitivo presente nas redes reais, estudamos uma extensão do modelo de Bianconi-Barabási, cuja regra de ligação preferencial passa a conter três parâmetros: o parâmetro η referente a qualidade dos nós, a distância Euclidiana r_{ij} entre os sítios da rede e a conectividade k dos vértices preexistentes no sistema. A equação 4.1 abaixo exhibe a probabilidade de conexão entre os sítios.

$$\Pi_i = \frac{k_i \eta_i r_{ij}^{-\alpha_A}}{\sum_j k_j \eta_j r_{ij}^{-\alpha_A}} \in (0, 1] \quad (\alpha_A \geq 0), \quad (4.1)$$

onde o índice i refere-se aos sítios preexistentes na rede e o índice j aos sítios recém-chegados.

Assim como no modelo de Natal, o parâmetro α_A ¹ controla a importância da distância entre os sítios.

Como podemos ver na equação 4.1 esse modelo sugere uma regra de ligação preferencial que é influenciada pela distância entre os sítios da rede, pelo fator η dos sítios, bem como pelo parâmetro α_A do sistema. Nosso objetivo é verificar como tais parâmetros influenciam as propriedades básicas dessas redes, e também analisar como essas propriedades sofrem influências dos parâmetros α_A e d .

Quando um sistema apresenta interações de longo alcance, a estatística tradicional de Boltzmann-Gibbs não é a apropriada para descrever esse sistema, logo deve-se usar uma estatística mais abrangente, como por exemplo, a estatística não-extensiva proposta por Tsallis. Esse modelo é mais uma confirmação da relação entre a Mecânica Estatística não-extensiva de Tsallis e as Redes Complexas.

Para gerar o modelo de Bianconi-Barabási d -dimensional, primeiro escolhemos a dimensão d do sistema, e a cada novo sítio que chega à rede escolhemos aleatoriamente um valor η_i (qualidade do sítio i), dado por uma função $\rho(\eta)$ distribuída uniformemente no intervalo entre $(0,1]$. Apresentaremos a seguir o algoritmo para gerar o modelo de Bianconi-Barabási d -dimensional.

1. O sítio $i = 1$ é colocado em uma origem arbitrária;
2. O sítio $i = 2$ é situado isotropicamente, e aleatoriamente, a uma distância r do centro de massa do sistema obedecendo à distribuição:

$$P(r) \propto \frac{1}{r^{d+\alpha_G}} \quad (\alpha_G > 0; d = 1, 2, 3, 4); \quad (4.2)$$

com r em uma dimensão dado por $r = |x|$, em duas dimensões $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, em três dimensões $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e assim por diante. A direção angular θ, ψ, ϕ são escolhidos de forma aleatória, obtida de uma distribuição uniforme, tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi$. Após isso o segundo sítio é, então, conectado com o primeiro sítio;

3. A partir deste passo, para fixar os sítios seguintes ($i = 3, 4, 5, \dots, N$), a origem do sistema é movida para o centro massa da rede e é recalculada a cada passo de tempo. O novo sítio ($i > 2$) é então colocado a uma distância r do centro de massa do sistema.

¹O índice “A” refere-se à palavra inglesa attachment que significa ligação.

Esta distância é dada pela distribuição da equação 4.2. Então, o sítio recém-chegado irá conectar-se a um dos sítios preexistentes da rede através da regra de ligação preferencial definida pela equação 4.1.

4. O passo anterior (processo de crescimento e ligação) é repetido, sequencialmente, até o tamanho desejado do sistema.

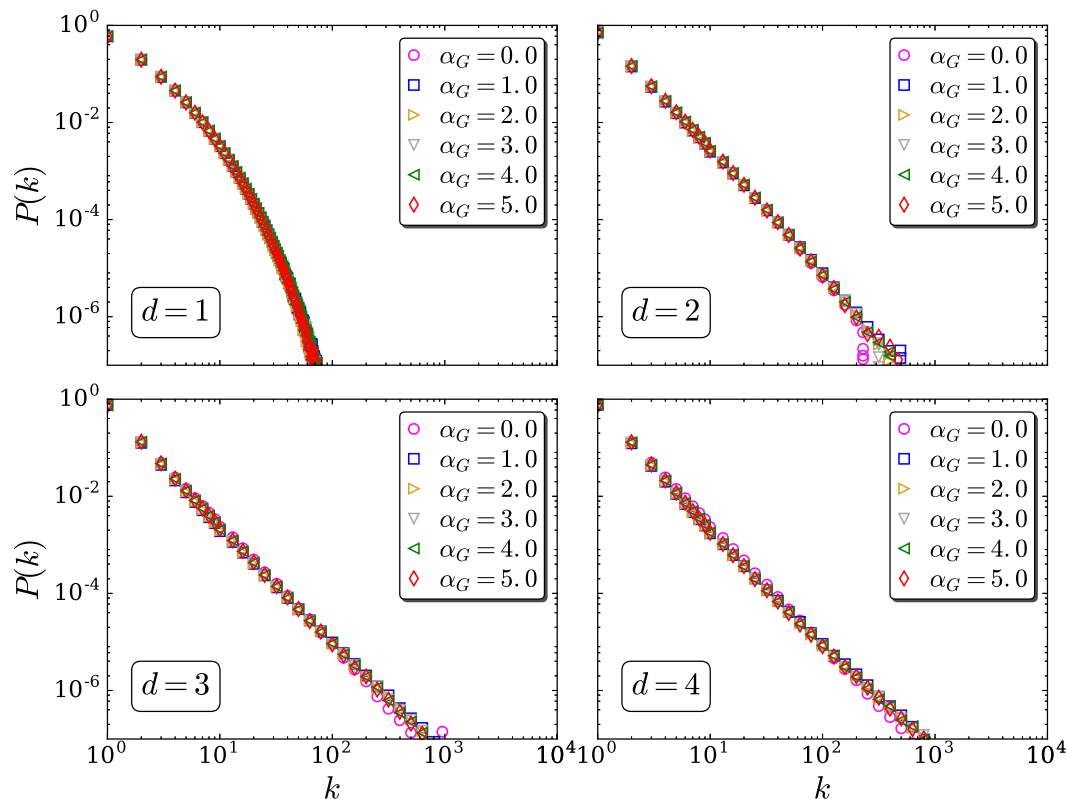


Figura 4.1: Distribuição de conectividade para $d = 1, 2, 3, 4$, $\alpha_A = 2$ e diferentes valores de α_G . Verificamos que $P(k)$ é independente de α_G ($\forall d$). Usamos caixas logarítmicas em algumas distribuições de conectividade com a finalidade de diminuir os ruídos presentes na cauda da distribuição. Simulação realizada para 10^3 amostras com redes de tamanho $N = 10^5$ sítios.

Assim, como mostrado anteriormente nos modelos que possuem métrica, os parâmetros α_A e α_G influenciam diretamente na construção da rede, onde α_G^2 (parâmetro de escala) controla a distribuição das distâncias entre os sítios, definindo de certa maneira o quão próximos os sítios estão uns dos outros. Já o parâmetro α_A controla a importância da distância entre os sítios da rede, e sua influência é bem notável no limite em que $\alpha_A \rightarrow \infty$. As distribuições de conectividades exibidas na figura 4.2, mostram, explicitamente, a influência

²O índice “G” utilizado aqui se refere à palavra em inglês growth que significa crescimento.

de α_A na homogeneidade da distribuição de grau. Entretanto, no limite em que $\alpha_A \rightarrow 0$ o efeito das distâncias entre os sítios tende a diminuir e perde completamente o efeito quando $\alpha_A = 0$. Nossos resultados ressaltam os seguintes aspectos:

- A distribuição de conectividade $P(k)$ da rede e sua dependência com α_A , α_G e a dimensão espacial d .
- A evolução temporal da conectividade média dos sítios, mais precisamente como $\langle k_i \rangle$ varia com o tempo t/t_i para $(t \geq t_i)$. Dado que $k_i(t) \propto (t/t_i)^\beta$, estudamos o expoente dinâmico β como função dos parâmetros α_A , d e do parâmetro de qualidade η de um sítio previamente escolhido.

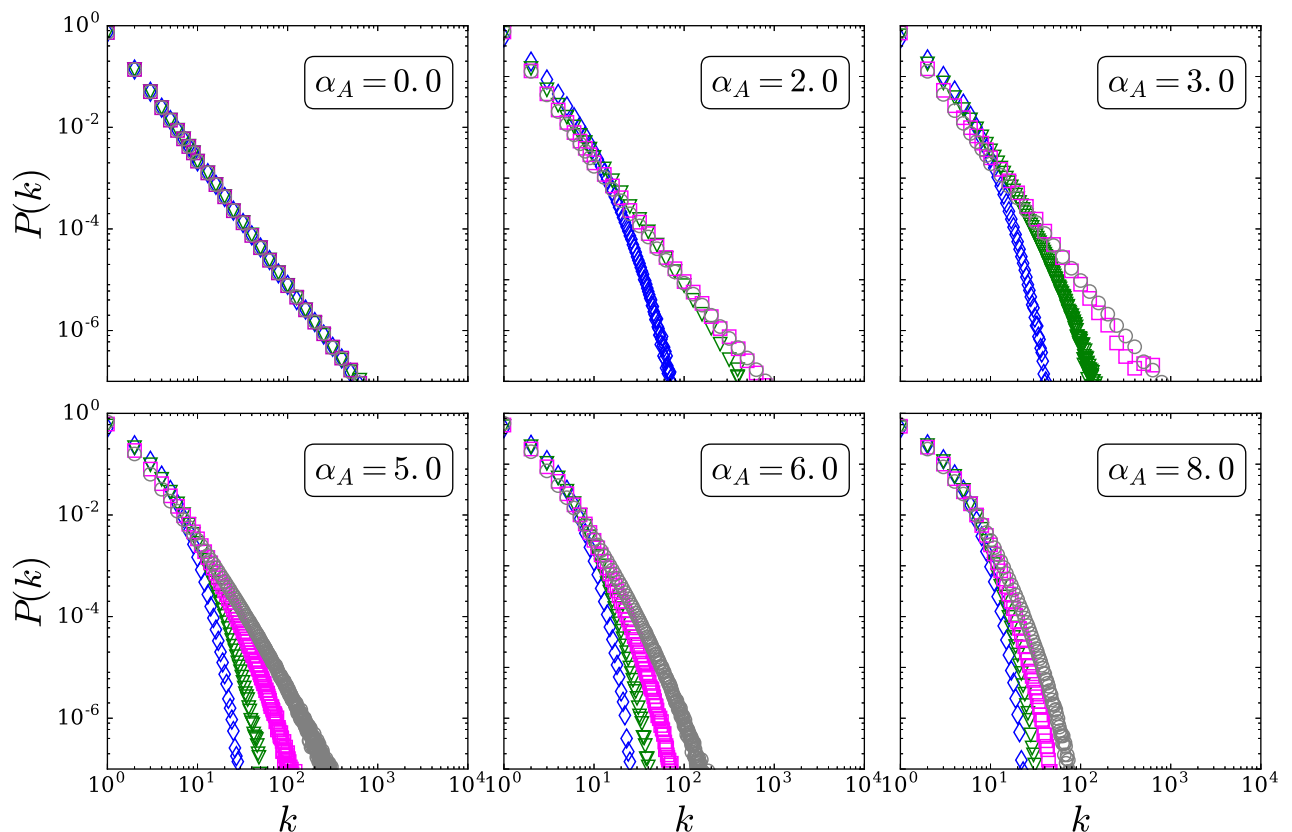


Figura 4.2: Distribuição de conectividade para $d = 1$ (diamantes), 2 (triângulos), 3 (quadrados), 4 (círculos), para típicos valores de α_A com $\alpha_G = 2$. Simulação realizada para 10^3 amostras com redes de tamanho $N = 10^5$ sítios. Caixas logarítmicas foram usadas com a finalidade de diminuir os ruídos presentes na cauda da distribuição.

4.2 Distribuição de conectividade

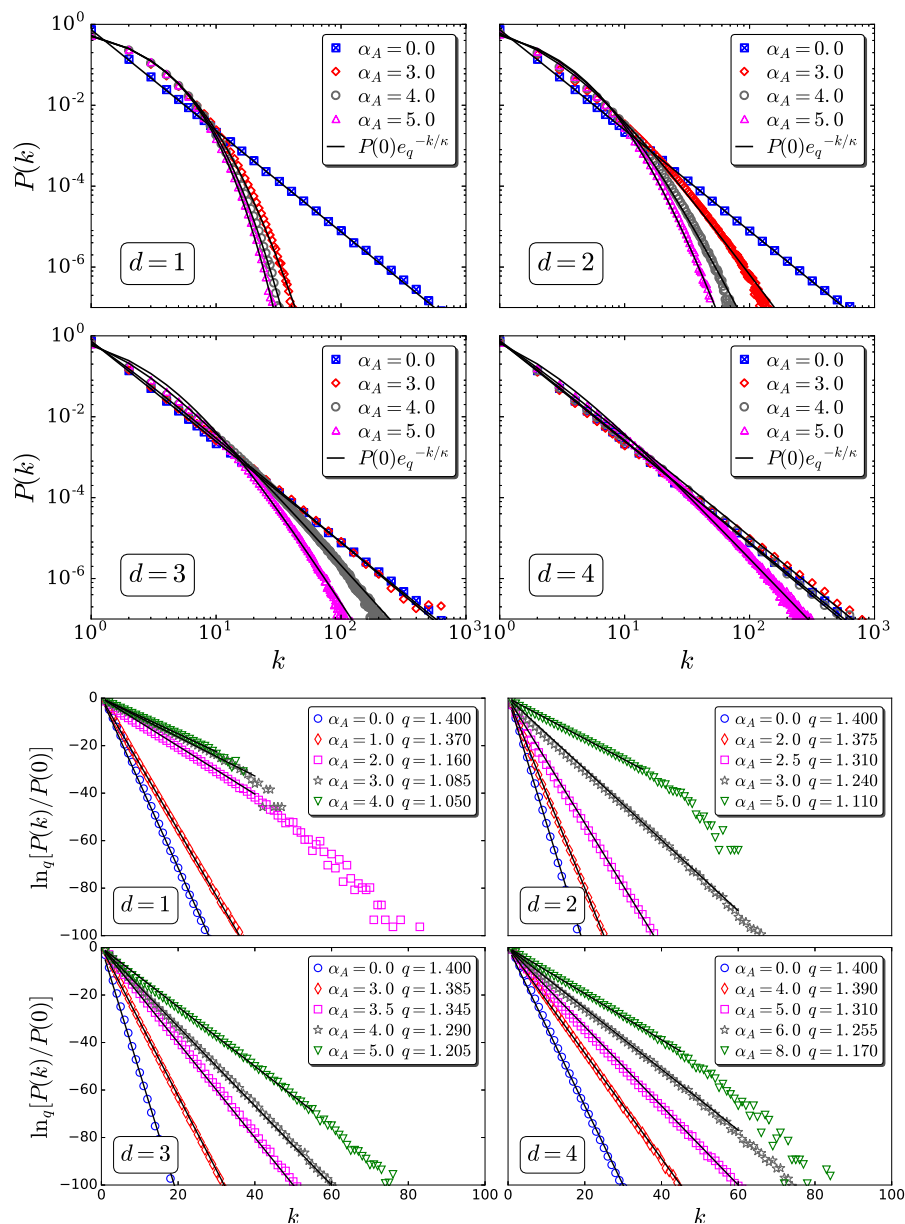


Figura 4.3: Distribuição de conectividade para $d = 1, 2, 3, 4$, para $\alpha_G = 2$ e típicos valores de α_A . Podemos ver que todas as curvas de $P(k)$ são bem representadas por funções q -exponenciais de tal forma que $P(k) = P(0)e_q^{-k/\kappa}$. No topo da figura temos a representação dos dados em log-log plot. Abaixo temos a representação em $\ln_q[P(k)/P(0)]$ versus k . Espera-se que as flutuações presentes nos dados desapareçam no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$. Simulação realizada para 10^3 amostras com redes de tamanho $N = 10^5$ sítios. Caixas logarítmicas foram usadas com a finalidade de diminuir os ruídos presentes na cauda da distribuição.

Analisamos o comportamento da distribuição de conectividade para diferentes valores de α_A e α_G ($\forall d$), e verificamos em todos os casos que a distribuição de conectividade $P(k)$ não depende de α_G (ver Fig. 4.1), resultado este já esperado e que está de acordo com os modelos mostrados anteriormente (Modelo de Natal 2D e d -dimensional), confirmando que tal parâmetro é apenas influente no crescimento do sistema bem como na distribuição de posições dos nós recém-chegados à rede.

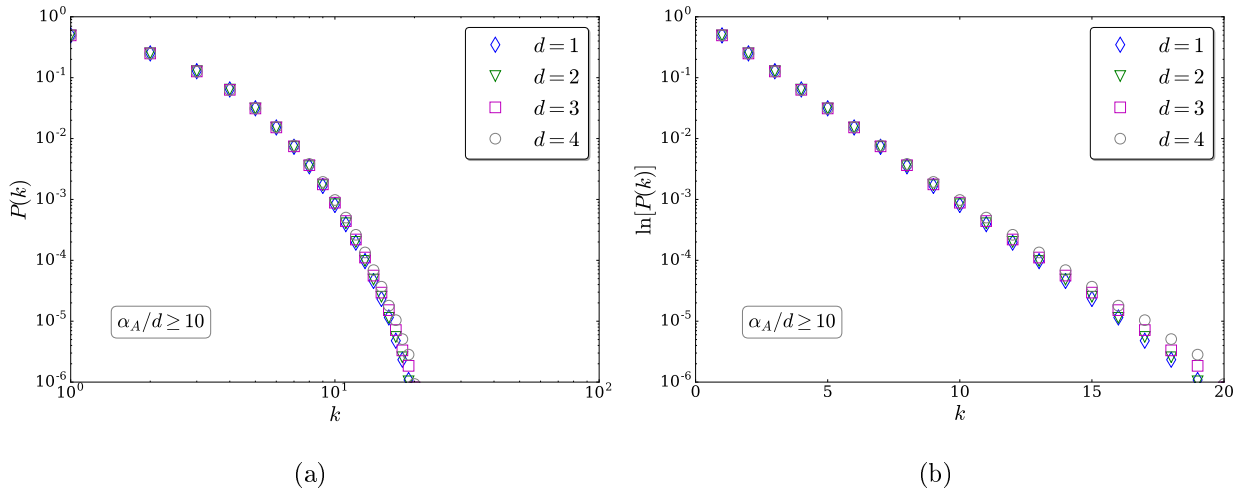


Figura 4.4: Distribuição de conectividade para $d = 1, 2, 3, 4$, mostrando o caráter exponencial de $P(k)$ para valores de $\alpha_A/d \geq 10$. (a) Representação log-log. (b) Representação log-linear.

Usando este fato, fixamos o valor de $\alpha_G = 2$ e numericamente estudamos a influência de α_A e d em $P(k)$ (ver Fig. 4.2). Observamos que de fato α_A tem forte influência sobre $P(k)$ e, em todos os casos, as funções q -exponenciais são bem ajustadas às distribuições de conectividade do tipo $P(k) = P_0 e_q^{-k/\kappa}$, com índice $q > 1$ e $\kappa > 0$ (ver Fig. 4.3).

Devemos observar que para $\alpha_A = 0$ recuperamos o modelo de Bianconi-Barabási, cuja distribuição de conectividade tem solução exata e é dada por $P(k) = k^{-\gamma}/\ln(k)$, com expoente $\gamma = -2.255$ [20, 30, 84]. Entretanto, todas as distribuições de conectividade para $\alpha_A > 0$ não têm solução exata e nossos resultados numéricos sugerem fortemente que este modelo tem uma distribuição de conectividade que é, de fato, dada por $P(k) = P_0 e_q^{-k/\kappa}$.

No limite em que $\alpha_A \rightarrow \infty$ ($q \rightarrow 1$), o sistema possui interações de curto alcance e sua distribuição de conectividade $P(k)$ tende a uma função exponencial padrão (ver Fig. 4.4). Neste limite, independentemente da dimensão do sistema, os sítios da rede possuem conectividade em torno de um valor médio $\langle k \rangle$. Esta é uma característica de redes aleatórias clássicas. Este fato pode ser visto como uma transição de fase topológica da rede, pois o sistema transita entre uma rede livre de escala à uma rede aleatória, sendo tal transição

associada ao parâmetro α_A .

4.3 Ajustes das curvas de distribuição de grau e a universalidade de q e κ

Para cada valor de α_A temos valores de q e κ correspondentes, obtidos a partir dos ajustes das curvas do gráfico 4.3. Tais valores foram analisados com relação às variáveis α_A e d (ver Fig. 4.5), e percebemos que, quando $\alpha_A = d$, os valores de q diminuem com α_A , enquanto que os valores de κ aumentam. Apesar de q e κ dependerem de α_A e d isoladamente, podemos perceber que ambos apresentam curvas universais com relação à variável escalada α_A/d (ver Fig. 4.6).

Quando $0 \leq \alpha_A/d \leq 1$ o sistema apresenta interações de longo alcance e a distribuição de conectividade segue assintoticamente uma lei de potência, evidenciando a presença de polos na rede. Neste mesmo intervalo, os parâmetros q e κ são constantes e iguais a $7/5$ e 0.01 respectivamente (ver Fig. 4.6). Para valores em que $\alpha_A/d > 1$, as distribuições de conectividade passam a apresentar um comportamento exponencial, o que caracteriza uma distribuição mais homogênea (igualitária), mostrando que não há sítios privilegiados (polos). Neste regime, as interações são dadas entre sítios geograficamente mais próximos. Ainda neste limite, é possível ver no gráfico 4.6 que $q(\alpha_A/d)$ decai exponencialmente até o seu valor mínimo ($q \rightarrow 1$) (ver Fig. 4.6(a)), enquanto que $\kappa(\alpha_A/d)$ tem um crescimento exponencial, cujo valor máximo $\kappa \approx 1.4$ é alcançado quando $\alpha_A/d \rightarrow \infty$ (ver Fig. 4.6(b)).

No limite em que $\alpha_A/d > 1$ ambas as expressões para q e κ têm formas funcionais semelhantes, contendo a mesma exponencial $e^{1-\alpha_A/d}$, exibindo assim uma estrita relação entre esses parâmetros. Conseqüentemente, uma relação quase linear entre essas variáveis pode ser estabelecida:

$$\kappa \approx 1.4 - 3.98(q - 1)^{1.15} \quad (4.3)$$

Podemos ver na figura 4.7 que esta relação é bem satisfeita e que está de acordo com os resultados numéricos encontrados para esse modelo. O parâmetro κ desempenha um papel similar ao de uma temperatura crítica, pois a equação 4.3 nos mostra claramente que

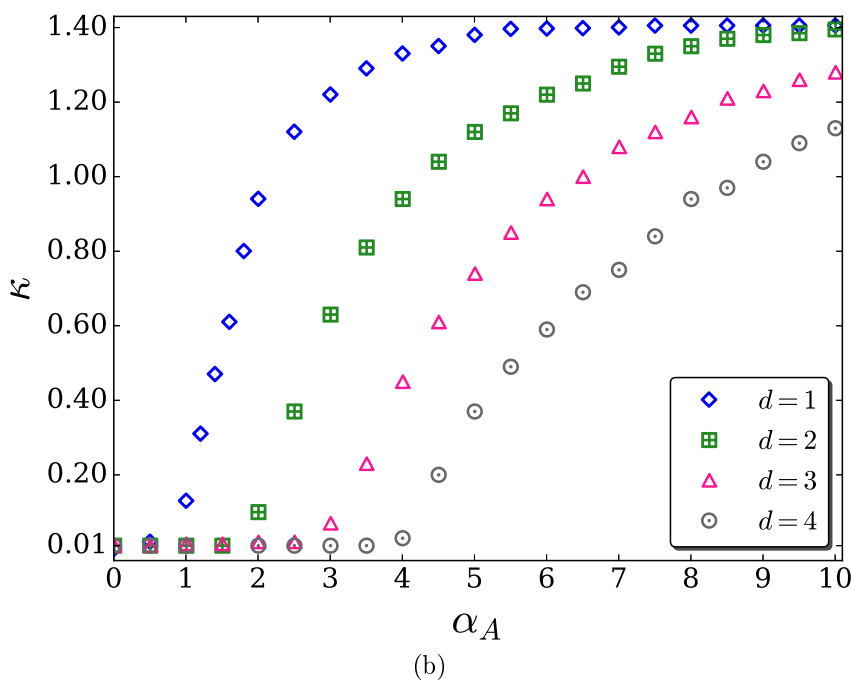
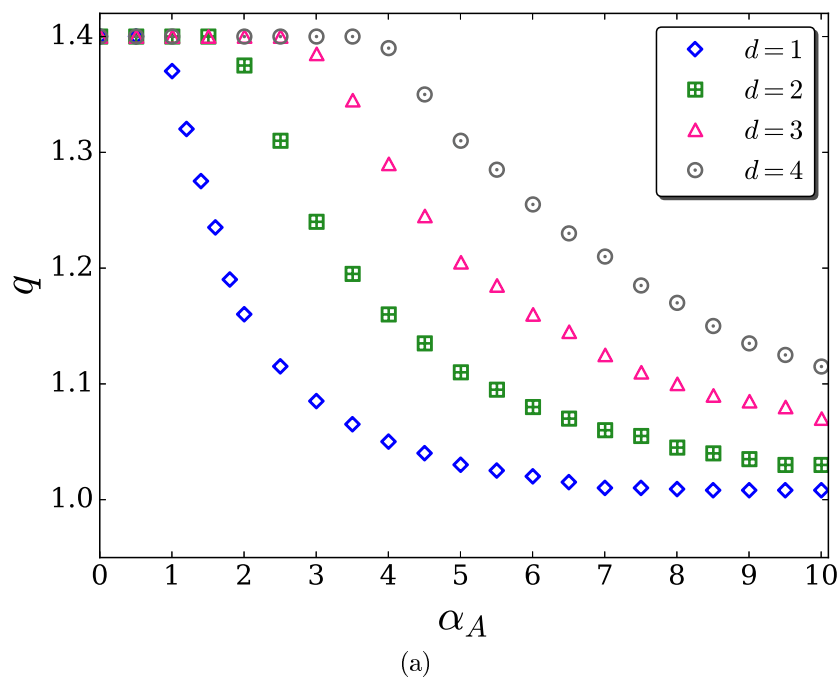
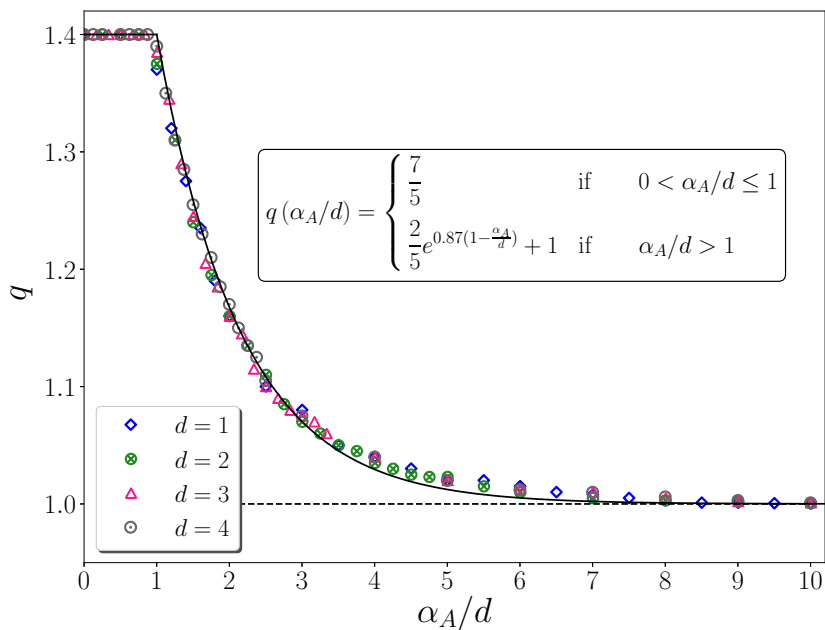
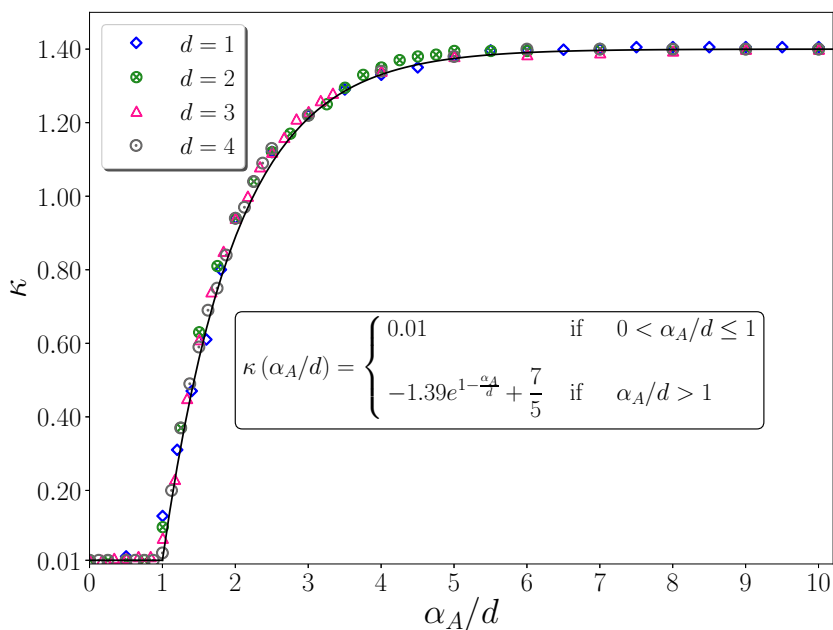


Figura 4.5: q e κ para $d = 1, 2, 3, 4$. Podemos ver como tais parâmetros variam com α_A e d . q tem um limite superior igual a ($q = 7/5$) e κ tem um limite inferior ($\kappa = 0.01$) independentemente da dimensão do sistema.

κ não é um parâmetro livre do sistema, ou seja, cada modelo específico (caracterizado por α_A e d), possui o seu próprio valor de κ .



(a)



(b)

Figura 4.6: q e κ versus α_A/d (mesmos dados da figura 4.5). Podemos ver que $q = 7/5$ e $\kappa = 0.01$ para $0 < \alpha_A/d \leq 1$. Um comportamento aproximadamente exponencial surge gradualmente para ambos os parâmetros a partir de $\alpha_A/d > 1$ ($\forall d$). Esses resultados exibem a universalidade de ambos q and κ .

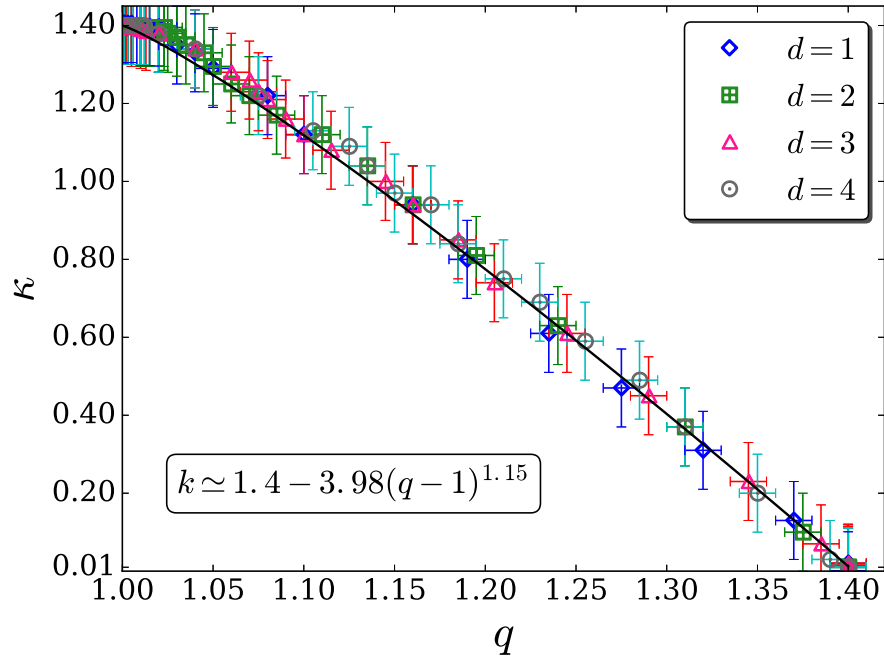


Figura 4.7: q e κ para $(d = 1, 2, 3, 4)$. Os dados confirmam a relação aproximadamente linear entre q e κ dada por $\kappa \simeq 1.4 - 3.98(q - 1)^{1.15}$ (linha contínua). O mais alto valor de q é $7/5$, correspondente a $\kappa = 0.01$ ($\forall d$).

4.4 Evolução temporal da conectividade dos sítios

Na figura 4.8 exibimos a evolução temporal da conectividade do sítio $i = 10$ para diferentes valores de α_A , d e η_i (0.3, 0.6, 0.9). A escolha de tal sítio foi feita de maneira arbitrária, uma vez que este resultado independe da escolha do sítio. É notório que a evolução temporal da conectividade varia com α_A , d e η , obedecendo uma função do tipo:

$$k_i(t) \propto \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\beta(\alpha_A, \eta_i, d)} \quad t \geq t_i. \quad (4.4)$$

Podemos ver na figura 4.8 que as inclinações das curvas apresentadas no gráfico (o valor do expoente β é dado pela inclinação da curva) aumentam com a dimensão d do sistema e com o parâmetro η , mas decresce com aumento dos valores de α_A .

Na figura 4.9 exibimos o expoente $\beta(\alpha_A, \eta, d)$ versus α_A e α_A/d para valores típicos de η . Para estudarmos como varia o expoente β com relação aos parâmetros citados acima,

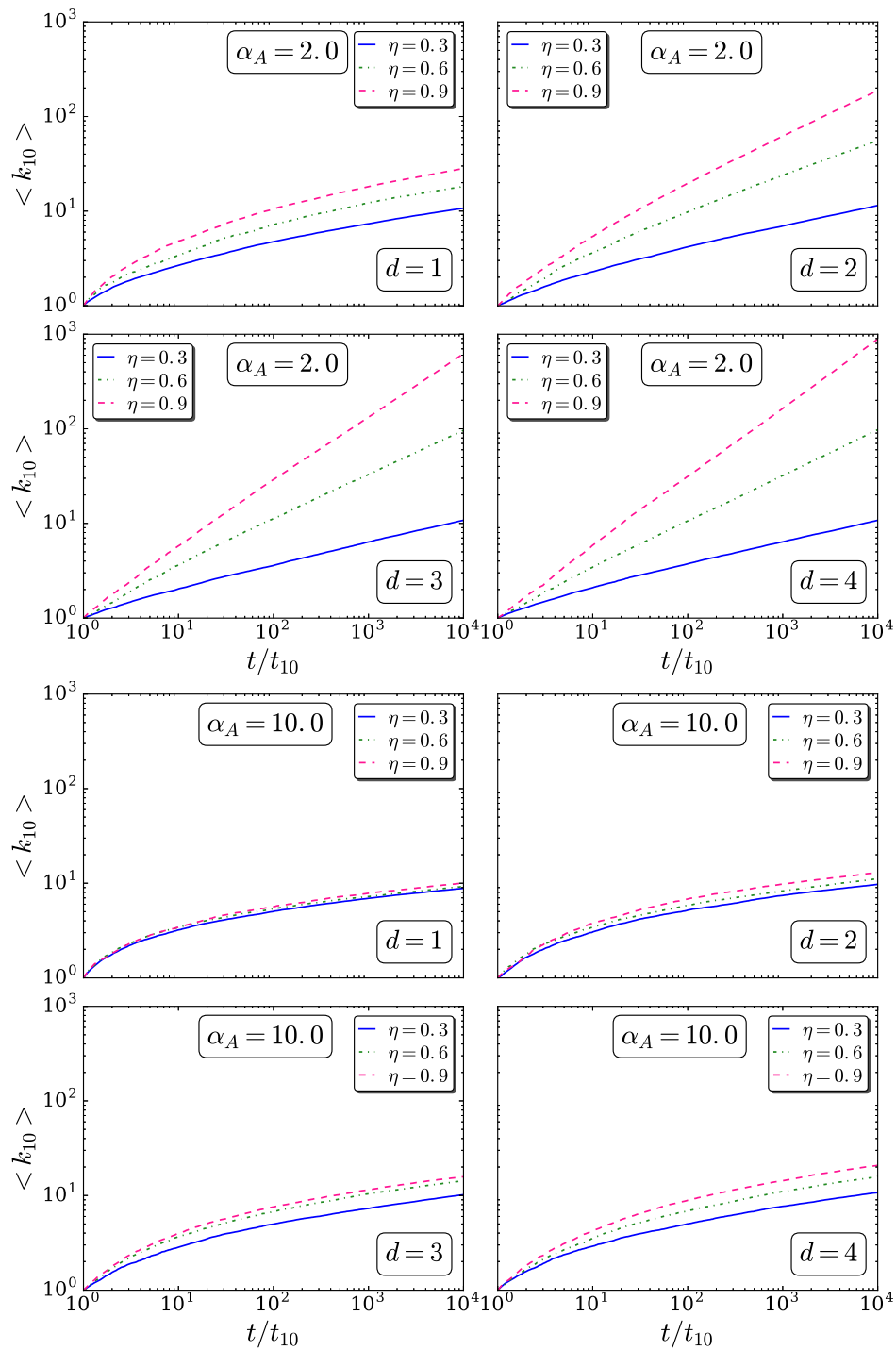


Figura 4.8: Evolução temporal da conectividade para o sítio $i = 10$ para dois valores de α_A ($\alpha_A = 2$ e $\alpha_A = 10$). Nesta figura mostramos como a conectividade dos sítios evoluem com os parâmetros η , α_A e d . Podemos ver que a inclinação das curvas aumentam com d e η , mas diminuem para um dado valor de α_A .

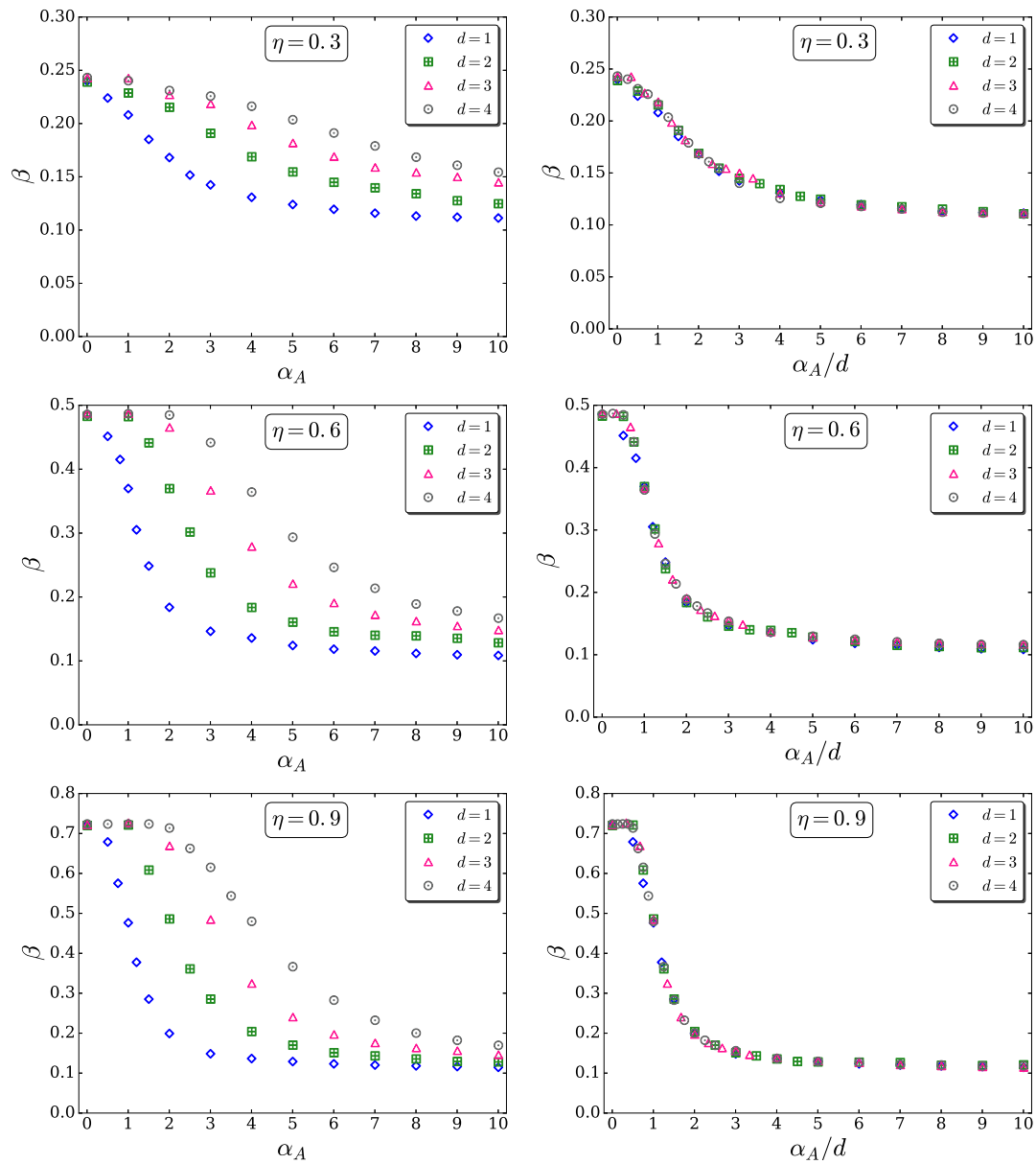


Figura 4.9: Gráfico de β versus α_A para o sítio $i = 10$ com $\eta = 0.3$, $\eta = 0.6$ e $\eta = 0.9$. Podemos ver como β depende de α_A e d (coluna da esquerda). No gráfico β versus α_A/d exibimos a universalidade do parâmetro β (coluna da direita), exibindo também que temos diferentes curvas referentes aos diferentes valores de β . Simulação realizada para 10^3 amostras com redes de tamanho $N = 10^5$ sítios.

nós fixamos o valor de η para o sítio $i = 10$ (o parâmetro η é escolhido aleatoriamente para todos os sítios da rede, exceto para o sítio que queremos analisar a evolução temporal de sua conectividade), e observamos como β varia com α_A , d e η . Verificamos que β varia com d e α_A isoladamente, bem como também varia com a razão α_A/d , mostrando que para um

determinado valor fixo de η , as curvas referentes a β têm um comportamento universal com respeito a variável α_A/d (coluna da direita na figura 4.9).

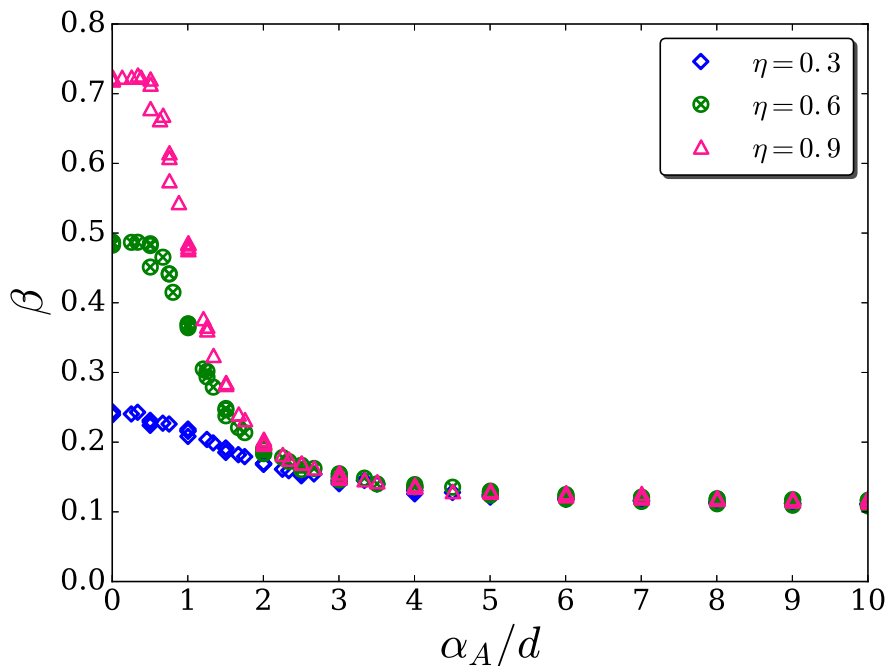


Figura 4.10: Exibimos as curvas de β versus α_A/d para três diferentes valores de η incluindo todas as dimensões ($d = 1, 2, 3, 4$). Para $\alpha_A/d = 0$ nossos resultados estão de acordo com o modelo de Bianconi-Barabási com $\beta \simeq 0.8\eta$; para $\alpha_A/d \rightarrow \infty$, o expoente β se aproxima de um valor constante próximo a 0.1 independentemente do valor de η .

Podemos ver na figura 4.10 o colapso das curvas de β versus α_A/d para diferentes valores de η . Para cada valor de β temos um valor correspondente da variável α_A/d . Neste modelo, percebemos que o expoente dinâmico β é de fato função das variáveis α_A, η e d , enquanto que no modelo de Bianconi-Barabási tal expoente é apenas função da variável η . Vimos que no ponto $\alpha_A/d = 0$, a distância não influencia na conectividade dos sítios da rede, ou seja, a taxa com que os sítios recebem ligações depende apenas de η . Neste ponto, o modelo d -dimensional tem expoente β igual ao do modelo de Bianconi-Barabási, o qual segue uma relação linear dada por $\beta(\eta) \simeq 0.8\eta$ (ver Fig. 4.10 e 2.21). Estes resultados mostram que, nesse limite, nossos dados estão de acordo com o modelo de Bianconi-Barabási. À medida que aumentamos o valor da variável α_A , especificamente para $\alpha_A/d \gtrsim 2$, o parâmetro de qualidade (η_i) perde sua influência na evolução temporal da conectividade dos sítios. Neste limite, as curvas de β coincidem (não dependem mais de η) e β atinge seu valor limite dado por $\beta(\alpha_A/d \rightarrow \infty) \approx 0.1$. Este resultado nos mostra que não importa se os sítios têm um alto ou baixo valor de η , a taxa com que os sítios recebem ligações é a mesma quando

$\alpha_A/d \rightarrow \infty$. Este resultado era esperado, uma vez que a distribuição de conectividade é exponencial ($q \rightarrow 1$), e todos os sítios da rede passam a ter praticamente a mesma chance de adquirir ligações.

Conclusões e Perspectivas

Apresentamos neste trabalho um modelo de rede que incorpora aspectos geométricos na regra de ligação preferencial, cujo propósito é de incrementar a disputa por conexões entre os sítios presentes na rede. O modelo de Bianconi-Barabási d -dimensional utiliza uma regra de ligação que inclui três fatores competitivos: conectividade, métrica e a qualidade dos sítios. Simulamos computacionalmente redes com dimensões $d = 1, 2, 3, 4$ com tamanho $N = 10^5$ sítios e com 10^3 amostras. Os resultados comprovam que de fato, independentemente da dimensão a qual se encontra o sistema, o parâmetro α_G não têm qualquer influência sobre as distribuições de conectividade. Entretanto, mostramos que as distribuições de conectividade sofrem fortes influências do parâmetro α_A . Através de nossos resultados confirmamos as relações entre a Mecânica Estatística não-extensiva de Tsallis e as Redes Complexas, uma vez que o conjunto de funções q -exponenciais presentes em tal estatística descreve de maneira satisfatória o comportamento das distribuições de conectividade presentes nas redes livres de escala. Vimos que ambos os parâmetros q e κ empregados nos ajuste das curvas de $P(k)$ dependem notoriamente de α_A e da dimensão d do sistema. Quando $\alpha_A > d$ o parâmetro q apresenta uma forma funcional que decresce exponencialmente, até o limite ($q \rightarrow 1$). O parâmetro κ cresce de maneira exponencial à medida com que os valores de α_A aumentam, tal que, quando $\alpha_A \rightarrow \infty$ o parâmetro $\kappa \rightarrow 1.40$. Quando $0 \leq \alpha_A/d \leq 1$ todas as distribuições de conectividade são caracterizadas pela mesma função q -exponencial, cujos valores dos parâmetros q e κ são dados respectivamente por $q = 7/5$ e $\kappa = 0.1$. A partir de $\alpha_A/d > 1$ ambas as formas funcionais de $q(\alpha_A/d)$ e $\kappa(\alpha_A/d)$ apresentam a mesma exponencial dada por $e^{1-\alpha_A/d}$, o que nos leva a concluir que existe uma estrita relação entre essas variáveis, e

de fato, encontramos uma relação quase linear dada por $\kappa \simeq 1.4 - 3.98(q - 1)^{1.15}$. Vimos que a função q -exponencial tende, por definição, à exponencial padrão quando $q \rightarrow 1$. No limite em que $q \rightarrow 1$, o sistema apresenta interações de curto alcance com distribuições de conectividade que são bem descritas por uma exponencial padrão e o sistema se comporta como uma rede aleatória clássica, dado que tais redes têm uma conectividade típica e podem ser descritas por uma distribuição do tipo Poisson (exponencial). Calculamos a evolução temporal da conectividade dos sítios e verificamos que $k_i(t)$ obedece uma lei de potência com expoente β que passa a depender de α_A , η e d . Curiosamente para qualquer valor fixo de η , as curvas referentes ao expoente $\beta(\alpha_A, \eta, d)$ têm um comportamento universal com respeito a variável α_A/d . Por fim, verificamos que existe um regime, $\alpha_A/d \gtrsim 2$, onde o parâmetro de qualidade não tem influência na evolução temporal da conectividade dos sítios da rede, pois à medida que $\alpha_A/d \rightarrow \infty$, o expoente β , que está diretamente relacionado com a taxa que os sítios recebem ligações, atinge seu valor mínimo dado por $\beta \approx 0.1$. Podemos concluir que, de fato, neste limite, não importa se os sítios têm um alto ou baixo valor de η , pois a taxa com que os sítios recebem ligações será a mesma.

Alguns outros aspectos podem ainda ser estudado nesse modelo, listaremos abaixo perspectivas para futuros trabalhos:

1. **Realizar simulações para outros valores de m** - Todos os resultados que constam nessa tese foram para simulações com $m = 1$, pretendemos realizar simulações para valores de $m > 1$ afim de analisarmos outros parâmetros pertencentes à rede.
2. **Coeficiente de agregação médio** - Pretendemos analisar como varia $\langle C \rangle$ com α_A e d , e a partir dessa análise observar se há universalidade de tal parâmetro com relação à variável α_A/d .
3. **Menor Caminho Médio** - Estamos no momento realizando testes com o propósito de verificar se há ou não colapso das curvas de $\langle l \rangle$ versus α_A/d .
4. **Distância Euclidiana** - Pretendemos inserir o valor real das distâncias entre os sítios nas ligações (rede ponderada) e verificar como se comporta o menor caminho médio para diferentes valores de α_A , d e α_A/d .
5. **Outras propriedades** - Outras propriedades podem ser calculadas, como por exemplo a correlação de grau, assortatividade e centralidade.

Referências Bibliográficas

- [1] SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA. **Física para o Brasil: Pensando o Futuro**. São Paulo: SBF, 2005.
- [2] JEONG, H.; TOMBOR, B.; ALBERT, R.; OLTVAI, Z.N. and BARABÁSI, A. L. **The large scale organization of metabolic networks**. Nature, 407(6804):651-4, October 2000.
- [3] ALBERT, R.; BARABÁSI, A. L. **Statistical Mechanics of complex networks**. Rev. Mod. Phys. v. 74, n. 1, p. 47-97, jan. 2002.
- [4] BUCHANAN, M. **Nexus: Small worlds and the groundbreaking science of networks**. New York: Norton, 2002.
- [5] DOROGOVTSEV, S. N. **Lectures on Complex Networks**. New York: Oxford University Press, 2010.
- [6] DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. F. **Evolution of networks: from biological nets to the Internet and WWW**. New York: Oxford University Press, 2003.
- [7] SAHIMI, M. **Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock**. Boston: VCH, 1995.
- [8] HARARY, FRANK. **Graph Theory**. MA: Addison-Wesley, 1994.
- [9] JURKIEWICZ, SAMUEL. **“Grafos - Uma Introdução”**. Programa de Iniciação Científica da (2009).
- [10] BARABÁSI, A. L. **Network science**. Cambridge University Press, 2016.

- [11] LEWIS, T. G. **Network science, theory and applications**. Wiley, 2009.
- [12] SCHEINERMAN, E. R. **Matemática discreta: uma introdução**. São Paulo: Cengage Learning, 2011
- [13] BOCCALETIA, S.; LATORAB, V.; MORENOD, Y.; CHAVEZ, M. and HWANG, D. U. **Complex networks: Structure and dynamics**. Physics Reports 424 (2006) 175.
- [14] NEWMAN, M. E. **Power laws, pareto distributions and zipf's law**. Contemporary physics, v. 46, n. 5, p. 323-351, 2005.
- [15] BRITO, S.; **Papel da dimensionalidade em redes complexas: conexões com a mecânica estatística não-extensiva**. Tese (Doutorado em Física) - Departamento de Física Teória e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, 2016.
- [16] BRITO, S.; DA SILVA, L. R.; TSALLIS, C. **Role of dimensionality in complex Networks**. Scientific Reports 6, Article number: 27992. 2016
- [17] SOARES, D. J. B. **Contribuição ao estudo de modelos estocásticos geométricos e de Séries Temporais**. Tese (Doutorado em Física) - Departamento de Física Teória e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, 2004.
- [18] ALMEIDA, M. L. de. **Dinâmica e estrutura de Redes Complexas no Modelo de Afinidade**. Dissertação (Mestrado em Física) - Departamento de Física Teória e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, 2009.
- [19] DE MENESES, M. D.; DA CUNHA, S. D.; SOARES, D. J. and DA SILVA, L. R. **Preferential attachment scale-free growth model with random fitness and connection with Tsallis statistics** Prog. Theor. Phys. Suppl. 162 131-7
- [20] NEWMAN, M. E. **Networks: an introduction**. Oxford: Oxford University Press, 2010.
- [21] DE MACEDO FILHO, A. **Conexão entre as redes complexas e a estatística de Kaniadakis e busca eficiente das propriedades críticas do processo epidêmico difusivo 1d**. Tese (Doutorado em Física) - Departamento de Física Teória e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, 2011.

- [22] ERDŐS, P. and RÉNYI, A. **On Random Graphs**. *Publicationes Mathematicae* 6, 290-297, 1959.
- [23] ERDŐS, P. and RÉNYI, A. **On the central limit theorem for samples from a finite population**. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, v. 4, p. 49-61, 1959.
- [24] WUCHTY, S.; RAVASZ, E.; BARABÁSI, A. L. **The Architecture of Biological Networks** (2003)
- [25] WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. **Collective dynamics of small-world networks**. *Nature*, 393, 440, 1998.
- [26] BOLLOBÁS, B. **Random Graphs**. Academic Press, London, 1985.
- [27] BARABÁSI, A. L.; ALBERT, R.; JEONG, H. **Mean-field theory for scale-free random networks**. *Phys. A*, v. 272, n. 1-2, p. 173-187, oct. 1999.
- [28] BARABÁSI, A. L.; ALBERT, R. **Emergence of scaling in random networks**. *Science*, Washington, v. 286, p. 509-512, 1999.
- [29] TSALLIS, C. **Connection between scale-free networks and nonextensive statistical mechanics**. *The European Physical Journal: Especial topics*, v. 161, n. 1, p. 175-180, 2008.
- [30] BIANCONI, G.; BARABÁSI, A. L. **Competition and multiscaling in evolving networks**. *Europhysics Letters, Les Ulis*, v. 54, p. 436-442, 2001.
- [31] MILGRAM, S. **The small world problem**. *Psychology Today*, v. 2, p. 60, 1967.
- [32] MENDES, G. A. **Contribuição ao estudo de Redes Complexas: Modelo de Afinidade**. Dissertação (Mestrado em Física) - Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, 2007.
- [33] LAWRENCE, S. and GILES, C. L. **Searching the world wide Web**. *Science* 280, 98 (1998).
- [34] KUMAR, R.; RAGHAVAN, P.; RAJALOPAGAN, S. and TOMPKINS, A. **Proceedings of the 9th ACM Symposium on Principles of Database Systems**, 1(1999).

- [35] BRODER, A.; KUMAR, R.; MAGHOUL, F.; RAGHAVAN, P.; RAJALOPAGAN, S.; STATA, R.; TOMPKINS, A. and WIENER, J. **Graph structure in the web**. Computer Networks. 33, 309-320. 2000.
- [36] FALOUTSOS, M.; FALOUTSOS, P.; FALOUTSOS, C. **On power-law relationship of the internet topology**. Com. Commun. Rev., v. 29, p. 251, 1999.
- [37] YOOK, S. H.; JEONG, H. and BARABÁSI, A. L. **Modeling the Internet's large-scale topology**. v. 99, p. 13382-13386 (2002).
- [38] PASTOR-SATORRAS, R.; VÁZQUEZ, A.; VESPIGNANI, A. **Dynamical and correlation properties of the internet**. Phys. Rev. Lett., v. 87, p. 258701, 2001.
- [39] WAGNER A.; FELL, D. A. **The small world inside large metabolic networks**. Proc Biol Sci. 2001 Sep 7; 268(1478):1803-10.
- [40] FELL, D. A; WAGNER A. **The small world of metabolism**. Nat. Biotechnol. 2000 Nov; 18(11):1121-2.
- [41] JEONG, H.; MASON, S. P.; BARABÁSI, A. L. and OLTVAI, Z. N. **Lethality and centrality in protein networks**. Nature, London, v. 411, p. 41-42, 2001.
- [42] LILJEROS, F.; EDLING, C. R.; AMARAL, L. A. N.; STANLEY, H. E.; and ABERG, Y. **The Web of Human Sexual Contacts**. Nature 411, 907 (2001).
- [43] PIMM, S. L. **The Balance of Nature? Ecological issues in the conservation of species and communities**. University of Chicago, Chicago. (1991).
- [44] WILLIAMS, R. J and MARTINEZ, N. D. **Simple rules yield complex food webs**. Nature 404:180-183, 2000.
- [45] CAMACHO, J.; GUIMERÁ, R.; AMARAL, L. A. N. **Robust Patterns in Food Web Structure**. Phys. Rev. Lett. 88 (2002) 228102.
- [46] SOLÉ, R. V. and MONTOYA, J. M. **Complexity and fragility in ecological networks**. The Royal Society, 268 (2001).
- [47] NEWMAN, M. E. J.; STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. **Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications**. Phys. Rev. E, v. 64, p. 026118, 2001.

- [48] ADAMIC, L. A.; HUBERMAN, B. A. **Power-law distribution of the world wide web**. Science, Washington, v. 287, p. 2115, 2000.
- [49] REDNER, S. **How popular is your paper? an empirical study of the citation distribution**. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems, v. 4, n. 2, p. 131-134, 1998.
- [50] TSALLIS, C.; DE ALBUQUERQUE, M. P. **Are citations of scientific papers a case of nonextensivity?** Eur. Phys. J. B., v. 13, p. 777-780, 2000.
- [51] KRAPIVSKY, P. L.; REDNER, S.; LEYVRAS, F. **Connectivity of growing random networks**. Phys. Rev. Lett., v. 85, p. 4629, 2000.
- [52] VÁZQUEZ, A. **Statistics of citation networks**. cond-mat.stat-mech, p. 010503, 2001.
- [53] RÉKA, A. and BARABÁSI, A. L. **Topology of evolving networks: Local events and universality**. Phys. Rev. Lett., v. 85, p. 5234-5237, Dec 2000.
- [54] NEWMAN, M. E. J. **Clustering and preferential attachment in growing networks**. Phys. Rev. E, v. 64, p. 025102, 2001.
- [55] BARABÁSI, A. L.; JEONG, H.; NÉDA, Z.; RAVASZ, E.; SHUBERT, A.; VICSEK, T. **Evolution of social network of scientific collaborations**. Physica A, Amsterdam, v. 311, p. 590-614, 2002.
- [56] WAGNER, A. **The yeast protein interaction network evolves rapidly and contains few redundant duplicate genes**. Mol. Biol. Evol., v. 18, p. 1283, 2001.
- [57] CANCHO, R. F. I; SOLÉ, R. V. **The small world of human language**. The Royal Society, v. 268, p. 2261-2265, 2001.
- [58] VALVERDE, S.; SOLÉ, R. V. **Self-organized critical traffic in parallel computer networks**. Physica A, Amsterdam, v. 312, p. 636-648, 2002.
- [59] ABE, S.; SUZUKI, N. **Itineration of the internet over nonequilibrium stationary states in tsallis statistics**. Phys. Rev. E, v. 67, p. 016106, Jan 2003.
- [60] DOYE, J. P. K. **Network topology of a potential energy landscape: A static scale-free network**. Phys. Rev. Lett., v. 88, p. 238701, May 2002.

- [61] DAHMEN, S. R. “**A obra de Boltzmann em Física.**” *Revista Brasileira de Ensino de Física* 28.3 (2006): 281-295.
- [62] TSALLIS, C. **Approach of complexity in nature: Entropic nonuniqueness.** *Axioms*, v. 5, n. 3, p. 20, 2016.
- [63] BORGES, E. P. **Irreversibilidade, desordem e incerteza: três visões da generalização do conceito de entropia.** *RBEF*, v. 21, n. 4, p. 453-463, dez. 1999.
- [64] SALINAS, S. R. A. **Introdução à Física Estatística.** 2ed. São Paulo: Edusp, 2008.
- [65] OLIVEIRA, M. J. **Termodinâmica.** 1^aed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.
- [66] GIBBS, J. W. **Elementary principles in statistical mechanics.** Courier Corporation, 2014.
- [67] BASSALO, J. M. F.; NASSAR, A. B.; CATTANI, M. S. D. Aspectos contemporâneo da Mecânica Estatística. *RBEF*, v. 21, n. 4, p. 528, dez. 1999.
- [68] LARANJEIRAS, C. C.; CHIAPPIN, J. R. N. **A construção de uma teoria de ensembles: antecedentes em Maxwell e Boltzman.** *RBEF*, v. 30, n. 1, p. 1601, mar. 2008.
- [69] TSALLIS, C. **Nonextensive statistics: Theoretical, experimental and computational evidences and connections.** *cond-mat.stat-mech*, v. 1, p. 9903356, 1999.
- [70] HUANG, X. P.; DRISCOLL, C. F. **Relaxation of 2D turbulence to a metaequilibrium near the minimum enstrophy state.** *Phys. Rev. Lett.*, v. 72, n. 14, p. 2187-2190, apr. 1994.
- [71] BOGHOSIA, B. M. **Thermodynamics description of the relaxation of twodimensional turbulence using Tsallis statistics.** *Phys. Rev. E*, v. 53, n. 5, p. 4754-4763, may 1996.
- [72] TAGUCHI, Y. H.; TAKAYUASU, H. **Power Law Velocity Fluctuations Due to Inelastic Collisions in Numerically Simulated Vibrated Bed of Powder.** *Europhys. Lett.*, v. 30, n. 8, p. 499, june 1995.
- [73] TSALLIS, C. **Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics.** *Journal of statistical physics*, v. 52, n. 1-2, p. 479-487, 1988.

- [74] TSALLIS, C. et al. **Introduction to nonextensive statistical mechanics**. Springer, 2009.
- [75] KANIADAKIS, G.; SCARFONE, A. M. **Lesche stability of κ -entropy**. Physica A, v.340, n. 1-3, p. 102-109, sept. 2004.
- [76] SOARES, D. J. B.; TSALLIS, C.; MARIZ, A. M.; DA SILVA, L. R. **Preferential attachment growth model and nonextensive statistical mechanics** Europhys. Lett., v. 70, n. 1, p. 70-71, apr. 2005.
- [77] VAKALI, A.; PALLIS G. **Content Delivery Networks: Status and Trends**. IEEE Computer Society Volume 7 Issue 6, November 2003 Page 68-74.
- [78] ALBERT, R.; ALBERT, I.; NAKARADO, G. L. **Structural vulnerability of the north american power grid**. Physical review E, v. 69, n. 2, p. 025103, 2004.
- [79] BARRAT, A.; BARTHELEMY, M.; PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. **The architecture of complex weighted networks**. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Washington, v. 101, n. 11, p. 3747-3752, 2004.
- [80] LATORA, V.; MARCHIORI, M. **Is the boston subway a small-world network?** Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 314, n. 1, p. 109-113, 2002.
- [81] SPORNS, O. **Network analysis, complexity, and brain function**. Complexity, v. 8, n. 1, p. 56-60, 2002.
- [82] ARFKEN, G. B. and WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists**. Elsevier, 7th Edition, 2012.
- [83] CAMPA, A.; DAUXOIS, T.; RUFFO, S. **Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions**. Physics Reports, v. 480, n. 3, p. 57-159, 2009.
- [84] ERGN, G. and RODGERS, G. J. **Growing random networks with fitness** Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 303.1 261-272, 2002.

Role of dimensionality in preferential attachment growth in the Bianconi–Barabási model

Thiago C Nunes¹, Samurá Brito², Luciano R da Silva^{1,3}
and Constantino Tsallis^{3,4,5,6}

¹ Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 59078-900, Brazil

² International Institute of Physics, Natal-RN, 59078-970, Brazil

³ National Institute of Science and Technology of Complex Systems, Brazil

⁴ Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rua Xavier Sigaud 150, 22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brazil

⁵ Santa Fe Institute, 1399 Hyde Park Road, New Mexico 87501, United States of America

⁶ Complexity Science Hub Vienna, Josefstädter Strasse 39, A 1080 Vienna, Austria

E-mail: thiagoccn@dfte.ufrn.br, samuraigab@gmail.com, luciano@dfte.ufrn.br and tsallis@cbpf.br

Received 28 April 2017

Accepted for publication 22 July 2017

Published 18 September 2017



Online at stacks.iop.org/JSTAT/2017/093402

<https://doi.org/10.1088/1742-5468/aa8198>

Abstract. Scale-free networks are quite popular nowadays since many systems are well represented by such structures. In order to study these systems, several models were proposed. However, most of them do not take into account the node-to-node Euclidean distance, i.e. the geographical distance. In real networks, the distance between sites can be very relevant, e.g. those cases where it is intended to minimize costs. Within this scenario we studied the role of dimensionality d in the Bianconi–Barabási model with a preferential attachment growth involving Euclidean distances. The preferential attachment in this model follows the rule $\Pi_i \propto \eta_i k_i / r_{ij}^{\alpha_A}$ ($1 \leq i < j$; $\alpha_A \geq 0$), where η_i characterizes the fitness of the i th site and is randomly chosen within the $(0, 1]$ interval. We verified that the degree distribution $P(k)$ for dimensions $d = 1, 2, 3, 4$ are well fitted by $P(k) \propto e_q^{-k/\kappa}$, where $e_q^{-k/\kappa}$ is the q -exponential function naturally emerging

within nonextensive statistical mechanics. We determine the index q and κ as functions of the quantities α_A and d , and numerically verify that both present a universal behavior with respect to the scaled variable α_A/d . The same behavior also has been displayed by the dynamical β exponent which characterizes the steadily growing number of links of a given site.

Keywords: network dynamics

Contents

1. Introduction	2
2. Methods	3
3. Results	4
4. Conclusion and discussion	11
Acknowledgments	11
References	11

1. Introduction

Scale-free networks emerge spontaneously in many systems, and due to their uncountable applications in different fields of knowledge, like physics, biology, economics, social sciences, among other areas, have become very popular nowadays [1–4]. Many of these networks are characterized by an asymptotic power law degree distribution, instead of the usual exponential laws. There are some networks where the Euclidean distance between sites is very relevant and cannot be neglected, once it plays a key role in maximizing or minimizing costs. These networks are named *geographic networks* [5, 6]. Like examples are airlines networks, electrical power grids or even pipes that carry water to the home. Some models [7–9] in the literature take into account this aspect of the problem and reveal a strong connection with nonextensive statistical mechanics [10–12], based on the nonadditive entropy $S_q = k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q-1}$ ($q \in \mathfrak{R}$; $S_1 = S_{\text{BG}} \equiv -k \sum_i p_i \ln p_i$ where BG stands for Boltzmann–Gibbs).

This current generalization of the BG entropy has been widely successful in explaining thermostistical properties in complex systems in high-energy collisions at LHC/CERN (CMS, ALICE, ATLAS and LHCb detectors) and at RHIC/Brookhaven (PHENIX detector) [16–19], cold atoms [20], dusty plasmas [21], among others.

The deep relationship between scale-free networks and q -statistics started being explored in 2005 [7], where it was shown that it is possible to relate the q -exponential function to the scale-free networks through the connectivity distribution $P(k)$. A large

variety of these networks exhibit a power law tail and their degree distribution has the form $P(k) \sim \frac{1}{(k_0+k)^\gamma}$. Using the basic functional $S_q[P(k)] = k \frac{1-\int dk [P(k)]^q}{q-1}$ with the constraint $\langle k \rangle \equiv \int dk k P(k) = \text{constant}$ (k being the degree of a generic site), it has been shown that:

$$P(k) = P(0)e_q^{-k/\kappa} = P(0)[1 + (q-1)k/\kappa]^{1-q} \tag{1}$$

for $q > 1$ and $k \rightarrow \infty$, $P(k) \sim k^{-\gamma}$ with $\gamma \equiv 1/(q-1)$, thus revealing to be the generic degree distribution for a wide class of scale-free networks, with the q -exponential function being defined as:

$$e_q^z \equiv [1 + (1-q)z]^{1/q} \quad (e_1^z = e^z), \tag{2}$$

and its inverse function being defined as:

$$\ln_q(z) \equiv \frac{z^{1-q} - 1}{1-q}, \forall(z, q). \tag{3}$$

2. Methods

In this paper we study the role of dimensionality in the Bianconi–Barabási model [15] for $d = 1, 2, 3, 4$ dimensions (from now when we discuss about dimensions in this paper, $\forall d$, specifically $d = 1, 2, 3, 4$). In order to study this, we included the term r_{ij} in the preferential attachment rule, r_{ij} being the Euclidean distance from site i to the newly arrived site j . To generate a network by this model, firstly we choose the dimension d of the system. To each new site that arrives at the network is attributed a position and a fitness parameter η_i , which is randomly chosen from a uniform distribution and belongs to the interval $\in (0, 1]$. From now when we discuss about the variable η_i in this paper, $\forall \eta$, specifically $\eta = 0.3, 0.6, 0.9$ (typical values of η). To fix the position of the sites in the line, plane, space and so on, we proceed in the following way.

We considered the center of mass as being the origin of the system. The first site ($i = 1$) is put in an arbitrary origin. Sequentially we added the second node ($i = 2$) at an Euclidean distance r from the site $i = 1$ obeying the d -dimensional isotropic distribution:

$$p(r) = \frac{1}{r^{d+\alpha_G}} \quad (\alpha_G > 0; \forall d), \tag{4}$$

where $r \geq 1$ (in one dimension, $r = |x|$; in two dimensions, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; in three dimensions $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, and so on); we assumed angular isotropy. From this step on, the center of mass of the system is always recalculated and then the new site ($i > 2$) is positioned at a distance r from the current origin obeying equation (4). The exponent α_G controls the network growth and the subindex G stands for *growth*. The newly arrived site will then be connected to one of the pre-existing sites of the network through the preferential attachment rule given by:

$$\Pi_i = \frac{k_i \eta_i r_{ij}^{-\alpha_A}}{\sum_i k_i \eta_i r_{ij}^{-\alpha_A}} \in (0, 1) \quad (\alpha_A \geq 0), \quad (5)$$

where k_i is the connectivity of the i th pre-existing site; α_A controls the importance of the distance in the preferential attachment rule and the subindex A stands for *attachment*. The previous procedure are used to include the third site, fourth site, and so on up to a given N (N is the total number of nodes).

The preferential attachment of this model makes the pre-existing sites to compete for links and three factors can influence the probability of the sites to receive the new connections: the sites degree, the Euclidean distance of this sites to the new site arriving in the network, and the fitness of these sites. The importance of the distance in the preferential attachment rule is less pronounced when α_A is close to zero and completely disappears for $\alpha_A = 0$. In this limit, we recover the Bianconi–Barabási Model, which has topology but no metrics. It is important to say that the model studied here, although more general, does not contain the model studied by Brito *et al* [22] as a particular case. Therefore, it is not possible to recover here the results found by these authors.

In the present paper, we will focus on the following main aspects:

- The connectivity distribution $P(k)$ of the network and its dependence on (α_A, d) .
- The average connectivity time evolution of the site, more precisely how $\langle k_i \rangle$ grows with the scaled time t/t_i ($t \geq t_i$). Given that $k_i(t) \propto (t/t_i)^\beta$, we studied the dynamical β exponent as a function of (α_A, d) , as well as of the fitness η of a arbitrarily chosen illustrative site.

3. Results

Our numerical simulations for $P(k)$ indicated in the figures 1 and 2 have been performed, $\forall d$, by varying the α_G and α_A parameters. We have verified in all cases that $P(k)$ does not depend on α_G for any value of α_A and d (see figure 1). Using this fact, we have arbitrarily fixed $\alpha_G = 2$ and numerically studied the influences of α_A and d on $P(k)$. Similarly to the results found in [22], we have observed, in the present model, that α_A has a strong influence on $P(k)$ (see figure 2). In this way, we numerically verified, for our model, that the connectivity distributions are very well fitted by the function $P(k) = P(0)e_q^{-k/\kappa}$ for all α_A and d , with $q > 1$ and $\kappa > 0$. However, when $\alpha_A = 0$, we have the Bianconi–Barabási model, whose exact solution is known and given by $P(k) = k^{-\gamma}/\ln(k)$, with $\gamma = 2.255$ [13, 14]. When $\alpha_A > 0$, no exact solution is known and our numerical results strongly suggest that this model has a degree distribution which is, in fact, $P(k) \propto e_q^{-k/\kappa}$.

For $\alpha_A \rightarrow \infty$ ($q \rightarrow 1$) the BG limit is reached and $P(k)$ tends to the standard exponential function. In this limit, independently of the system dimension, the network present typical connectivity between sites, that is a characteristic of classical random networks. This fact can be seen as a topological phase transition (from scale-free to random networks) associated with the α_A parameter.

Role of dimensionality in preferential attachment growth in the Bianconi–Barabási model

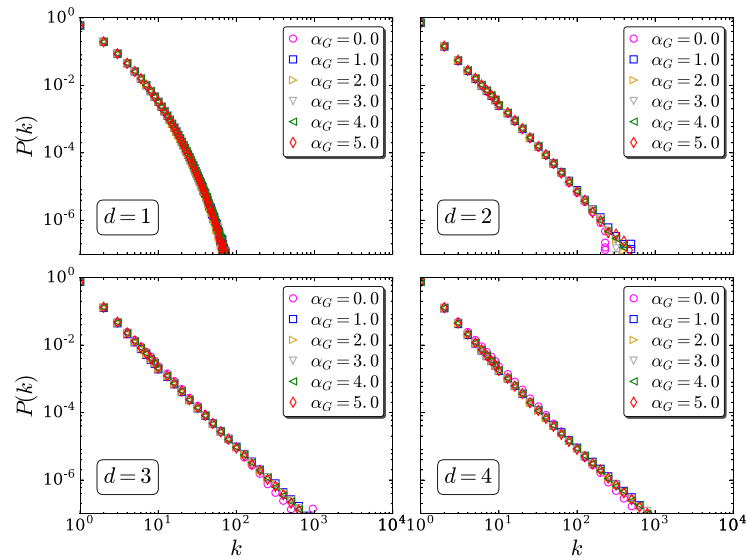


Figure 1. Connectivity distribution for $d = 1, 2, 3, 4$, $\alpha_A = 2.0$ and typical values for α_G . The simulations have been run for 10^3 samples of $N = 10^5$ sites each. We verified that $P(k)$ is independent from α_G ($\forall d$). Logarithmic binning was used whenever convenient.

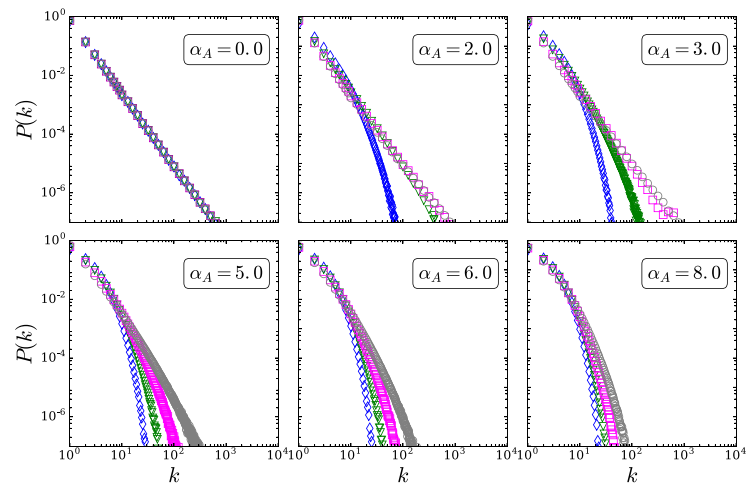


Figure 2. Degree distribution for $d = 1$ (blue diamonds), 2 (green triangles), 3 (magenta squares), 4 (grey circles), and typical values of α_A for fixed value of $\alpha_G = 2$. The simulations have been run for 10^3 samples of $N = 10^5$ sites each. Logarithmic binning was used whenever convenient.

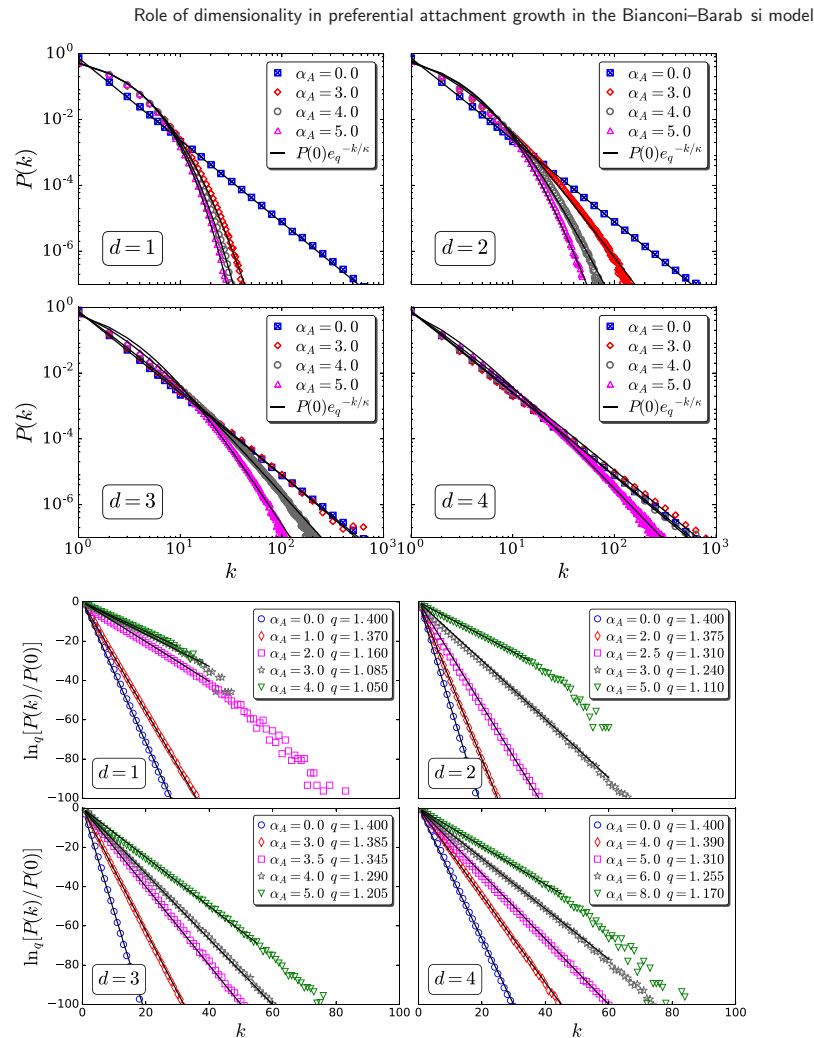


Figure 3. Connectivity distributions for $d = 1, 2, 3, 4$, fixed $\alpha_G = 2$ and typical values of α_A . We can see that all curves of $P(k)$ are very well represented by q -exponential functions (defined in equation (2)) in such way that $P(k) = P(0)e_q^{-k/\kappa}$. In the top figure we have log-log representation. In the bottom we have $\ln_q[P(k)/P(0)]$ versus k representation. The numerical fluctuations for increasing k will disappear in the thermodynamic limit $N \rightarrow \infty$. Logarithmic binning was used whenever convenient.

Our results showed, furthermore, that for each α_A values we have one corresponding q and κ value, where q is the entropic index and κ is the characteristic number of links (or effective ‘temperature’) (see figure 3). Once q and κ were obtained from the fits, we further analyzed how these parameters vary with respect to α_A and

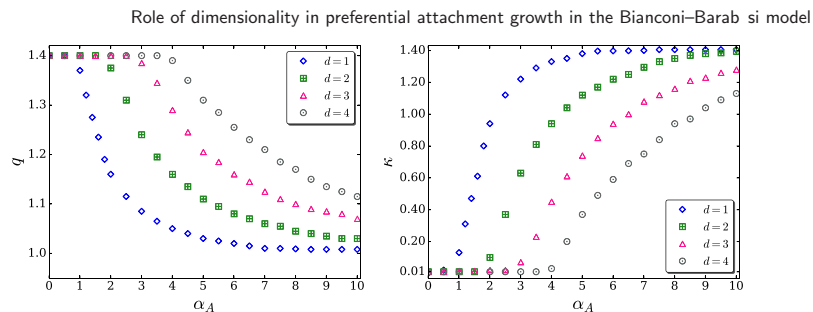


Figure 4. q and κ for $d = 1, 2, 3, 4$. We can see how q and κ vary with α_A and d . q has an upper limit ($q = 7/5$) and κ has a lower limit ($\kappa = 0.01$) regardless of the system dimension.

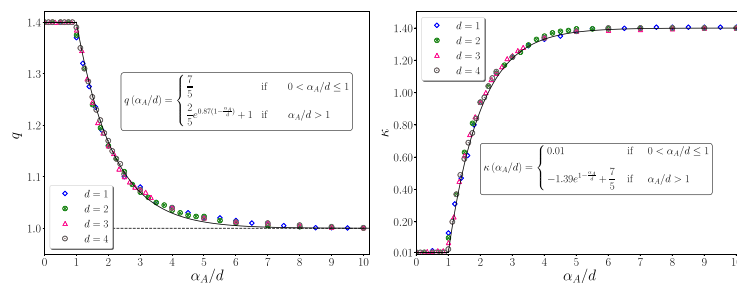


Figure 5. q and κ versus α_A/d (same data as in the figure 5). We see that $q = 7/5$ and $\kappa = 0.01$ for $0 < \alpha_A/d \leq 1$. Nearly exponential behavior gradually emerges for $\alpha_A/d > 1$ ($\forall d$) and similarly for κ . These results exhibit the universality of both q and κ .

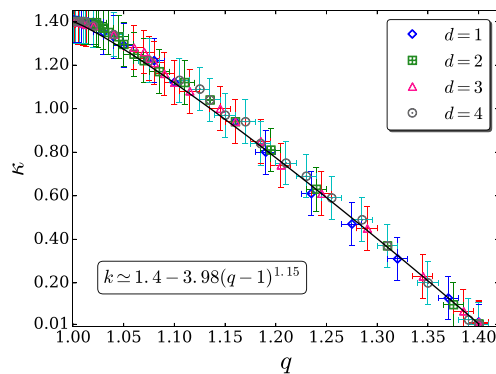


Figure 6. q and κ , for the present models ($d = 1, 2, 3, 4$), follow nearly linear relation given by $\kappa \simeq 1.4 - 3.98(q - 1)^{1.15}$ (continuous straight line). The up most value of q is $7/5$, yielding $\kappa = 0.01$ ($\forall d$).

Role of dimensionality in preferential attachment growth in the Bianconi–Barabási model

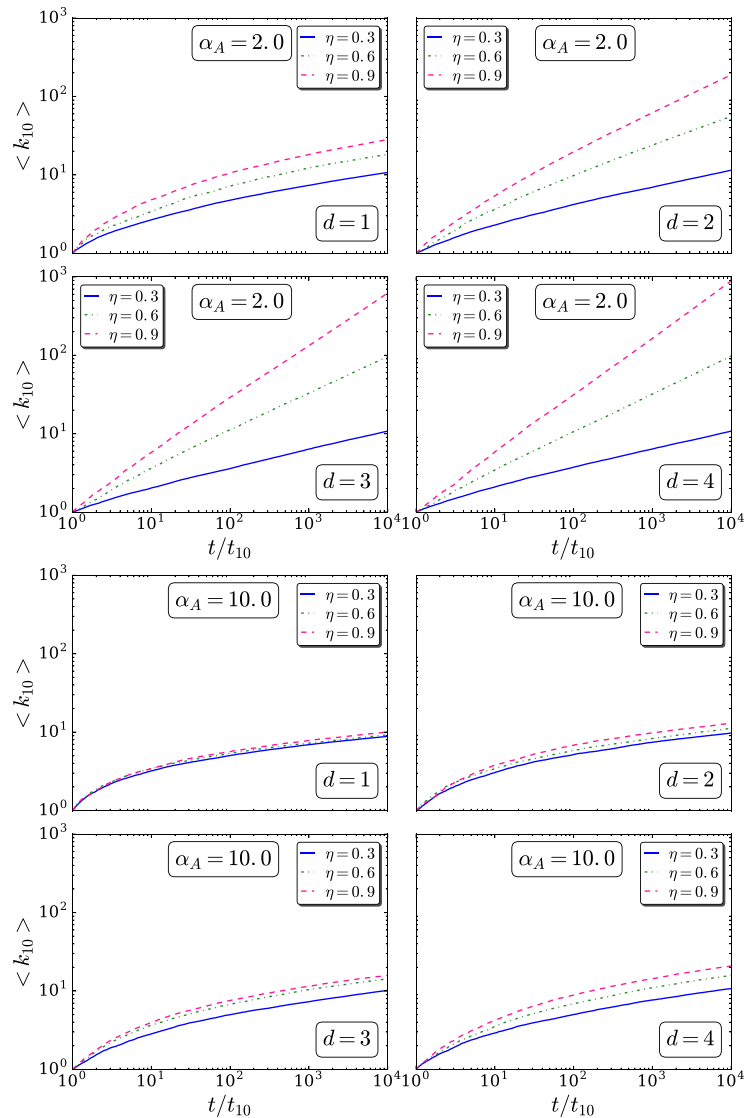


Figure 7. Connectivity time evolution of the site $i = 10$ for two α_A values ($\alpha_A = 2$ and $\alpha_A = 10$). In this figure, we show how the connectivity of this site evolves with η , α_A and d . We can see that the slope of the curves increases with d and η , however, decreases one with α_A .

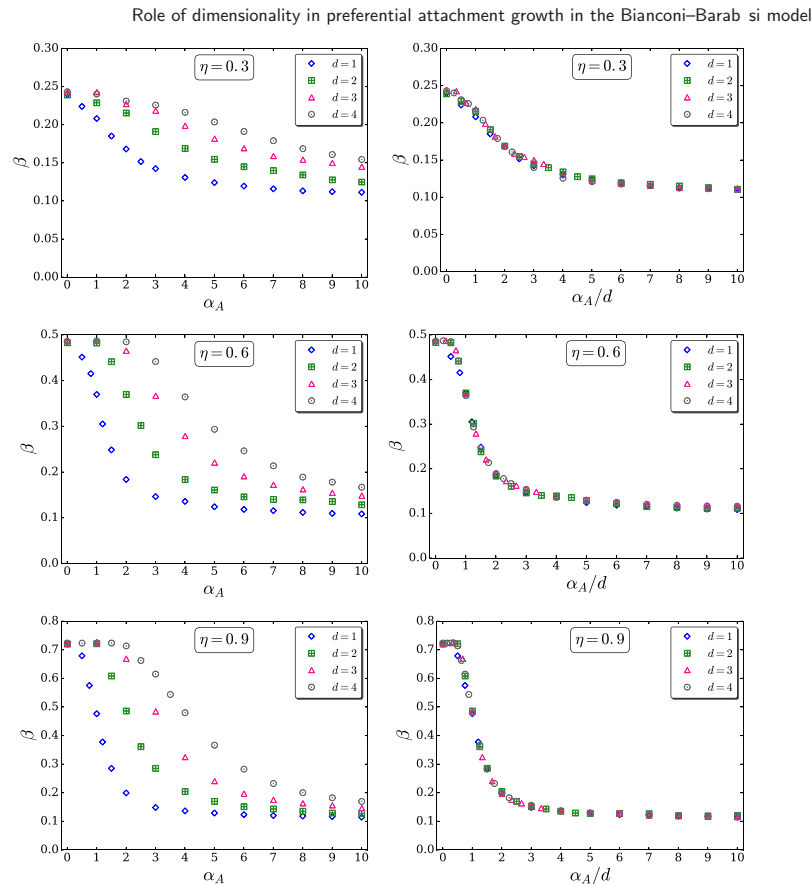


Figure 8. β versus α_A graph for the site $i = 10$ with $\eta = 0.3$, $\eta = 0.6$ and $\eta = 0.9$. We can see that β depends on α_A and d . In β versus α_A/d graph we can see that this result exhibits the β universality. However, we have different universal β curves for different η values. The simulations have been run for 10^3 samples of $N = 10^5$ sites each.

d. We can see in the figure 4 that there is a special value of α_A ($\alpha_A = d$) from which q decreases with α_A while, in contrast, κ increases. In the figure 5 we can see that, although both indices q and κ depend on α_A and d , they present remarkably enough universal curves with respect to the scaled variable α_A/d . When $0 \leq \alpha_A/d \leq 1$ the system presents long-range interactions and, except for $\alpha_A = 0$, it is characterized by $q = 7/5$ and $\kappa = 0.01$. When $\alpha_A/d > 1$ the nearly exponential behavior gradually emerges for q and κ . Both q and κ quickly approach to their corresponding BG limits ($q = 1$) for $\alpha_A/d \rightarrow \infty$. Moreover, the same exponential $e^{-\alpha_A/d}$ appears in both expressions for q and κ .

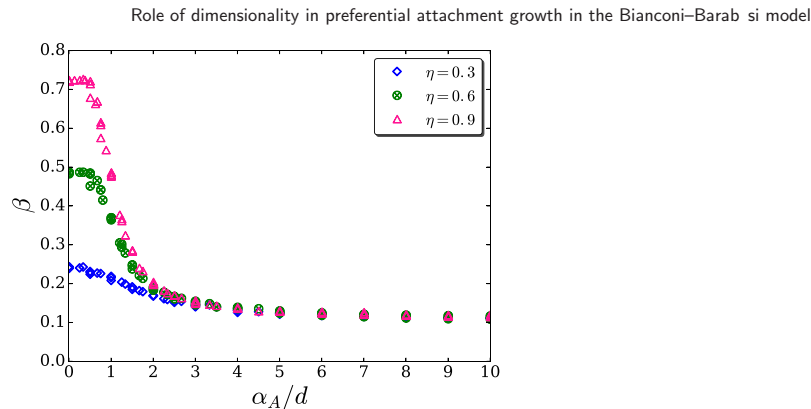


Figure 9. Illustration of the β versus α_A/d curves for three different values of η including all dimensions ($d = 1, 2, 3, 4$). For $\alpha_A/d = 0$ our results agree with the Bianconi–Barabási model with $\beta \simeq 0.8\eta$; for $\alpha_A/d \rightarrow \infty$, the β exponent appears to approach a constant value close to 0.1 for all values of η .

Consequently, the following nearly linear⁷ relation can be established:

$$\kappa \simeq 1.4 - 3.98(q - 1)^{1.15}. \quad (6)$$

In fact, this simple relation is numerically quite well satisfied as can be seen in the figure 6. Similarly, a nearly linear relation between q and κ was found in another model [22]. This fact expresses a frequent peculiarity of q -statistics. We can see, once again, that κ is not a free parameter, but it is instead an intrinsic characteristic of the system.

The connectivity time evolution $k_i(t)$ was calculated and it is indicated in the figure 7. We have chosen the site $i = 10$ for our analysis, but the connectivity time evolution is independent of the choice of site i . We have shown that the connectivity time evolution varies only with α_A , η and d . Our data for $k_i(t)$ obey the function:

$$k_i(t) \propto \left(\frac{t}{t_i}\right)^{\beta(\alpha_A, \eta_i, d)} \quad t \geq t_i. \quad (7)$$

We can see that the β exponent increases with d and η , but decreases with the α_A parameter.

In the figure 8 we show the exponent $\beta(\alpha_A, \eta_i, d)$ versus α_A and versus α_A/d for some typical values of η . To analyze the β exponent, we fixed the value of η for the site $i = 10$ (η is randomly chosen for all the sites excepting that one for which we want to compute the connectivity time evolution), and we observed how β varies with α_A , d and η . Our results show that β depends of α_A , d and η . However, interestingly enough, for any fixed value of η , the β curves have an universal behavior with respect to the scaled variable α_A/d .

In the figure 9 we can see the collapse of the β curves versus α_A/d for different η values. The values of the β exponent for $\alpha_A/d \gtrsim 2$ show that the fitness parameter

⁷In the same spirit, the linear relation between q and κ , found by Brito *et al* [22], can be improved with the following nearly linear relation $\kappa \simeq 1.45 - 4.06(q - 1)^{1.15}$.

does not influence the connectivity time evolution of the sites. In this limit, it does not matter if the site has a large or small fitness, the rate at which it acquires links will be the same.

4. Conclusion and discussion

Along the lines of the paper [22], we have introduced a d -dimensional growth model which, within the preferential attachment rule, includes connectivity, metrics, and fitness. The importance of the distance in the preferential attachment rule is more pronounced for increasing values of α_A . We saw that the connectivity distribution and the dynamical β exponent are substantially influenced by both α_A and d . We have shown that the degree distribution $P(k)$ is (numerically) very well fitted by the q -exponential function that naturally emerges from nonextensive statistics. When $0 < \alpha_A/d \leq 1$ all degree distributions are characterized by the same q -exponential function, displaying in this limit the same universality with $q = 7/5$. Our most remarkable results show that q , κ and β present universal curves with respect to the scaled variable α_A/d . Finally, we verified that there is a regime, $\alpha_A/d \gtrsim 2$, where the fitness parameter does not influence the connectivity time evolution of the sites in these networks. Summarizing, our results reveal a strong connection between (asymptotically) scale-free networks (with either short- or long-range interactions) and nonextensive statistical mechanics. Another important fact that our results exhibit is the intriguing ubiquity of the α_A/d variable, whose deep meaning in complex networks needs to be further explored.

Acknowledgments

We gratefully acknowledge partial financial support from CAPES, CNPq, Funpec, the Brazilian ministries MEC and MCTIC, Faperj (Brazilian agencies) and from the John Templeton Foundation-USA.

References

- [1] Strogatz S H 2001 Exploring complex networks *Nature* **410** 268–76
- [2] Newman M E J 2003 The structure and function of complex networks *SIAM Rev.* **45** 167–256
- [3] Albert R and Barabási A L 1999 Emergence of scaling in random networks *Science* **286** 509–12
- [4] Watts D J and Strogatz S H 1998 Collective dynamics of ‘small-world’ networks *Nature* **393** 440–2
- [5] Barthélemy M 2011 Spatial networks *Phys. Rep.* **499.1** 1–101
- [6] Bianconi G and Christoph R 2016 Network geometry with flavor: from complexity to quantum geometry *Phys. Rev. E* **93** 032315
- [7] Soares D J B, Tsallis C, Mariz A M and da Silva L R 2005 Preferential attachment growth model and nonextensive statistical mechanics *Europhys. Lett.* **70** 70–6
- [8] de Meneses M D, da Cunha S D, Soares D J and da Silva L R 2006 Preferential attachment scale-free growth model with random fitness and connection with Tsallis statistics *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **162** 131–7
- [9] Turner S and Tsallis C 2005 Nonextensive aspects of self-organized scale-free gas-like networks *Europhys. Lett.* **72** 197–203
- [10] Tsallis C 1988 Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics *J. Stat. Phys.* **52** 479–87
(For full bibliography see <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>)
- [11] Gell-Mann M and Tsallis C 2004 *Nonextensive Entropy—Interdisciplinary Applications* (New York: Oxford University Press)

- [12] Tsallis C 2009 *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics—Approaching a Complex World* (New York: Springer)
- [13] Ergun G and Rodgers G J 2002 Growing random networks with fitness *Phys. A: Stat. Mech. Appl.* **303** 261–72
- [14] Newman M E J 2010 *Networks: an Introduction* (Oxford: Oxford University Press)
- [15] Bianconi G and Barabási A L 2001 Competition and Multiscaling in Evolving Networks *Europhys. Lett.* **54** 436–42
- [16] Adare A *et al* 2011 Production of ω mesons in p + p, d + Au, Cu + Cu, and Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV *Phys. Rev. C* **84** 044902
- [17] Wong C Y and Wilk G 2013 Tsallis fits to p T spectra and multiple hard scattering in p p collisions at the LHC *Phys. Rev. D* **87** 114007
- [18] Marques L, Andrade E II and Deppman A 2013 Nonextensivity of hadronic systems *Phys. Rev. D* **87** 114022
- [19] Aaij R *et al* 2016 Study of the production of Λ^0 and B^0 hadrons in pp collisions and first measurement of the $\Lambda^0 \rightarrow J/\psi p K^0$ -branching fraction *Chin. Phys. C* **40** 011001
- [20] Douglas P, Bergamini S and Renzoni F 2006 Tunable Tsallis distributions in dissipative optical lattices *Phys. Rev. Lett.* **96** 110601
- [21] Liu B and Goree J 2008 Superdiffusion and non-Gaussian statistics in a driven-dissipative 2D dusty plasma *Phys. Rev. Lett.* **100** 055003
- [22] Brito S, da Silva L R and Tsallis C 2016 Role of dimensionality in complex networks *Sci. Rep.* **6** 27992