

11317

MODELES D'UN ESTUAIRE PARTIELLEMENT STRATIFIE

APPLICATION A LA CIRCULATION RESIDUELLE ET A L'ETUDE DE L'ENVASEMENT DANS L'ESCAUT

par

Jacques C. J. NIHOUL (1) et François C. RONDAY

Institut de Mathématique, Université de Liège

1. Introduction

La dynamique d'un estuaire comme celui de l'Escaut est profondément marquée par la stratification liée aux variations verticales, latérales et longitudinales de la salinité. Les équations hydrodynamiques tridimensionnelles sont, au départ, plus complexes que celles qui s'appliquent à une mer continentale peu profonde et bien mélangée.

La géométrie particulière du support (limité en largeur comme en profondeur et s'étendant essentiellement dans le sens du fleuve) permet cependant de simplifier considérablement les équations et de concevoir des modèles à deux ou une dimension en intégrant sur la largeur et (ou) sur la profondeur. Ces modèles simplifiés diffèrent souvent d'un estuaire à l'autre; des caractéristiques particulières du fleuve déterminant les effets importants et ceux qui peuvent être négligés.

On discute dans ce chapitre les modèles applicables à l'Escaut. Les simplifications faites sont basées sur une étude d'ordres de grandeur suggérés par la banque de données existant actuellement et sont susceptibles d'être revues si la confrontation des modèles avec les observations révélait d'autres préséances.

2. Les équations de Boussinesq

Dans le cas d'un estuaire partiellement stratifié, on peut admettre les hypothèses de Boussinesq selon lesquelles

(i) l'équation de continuité peut être remplacée par la condition d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (1)$$

(1) Egalement à l'Institut d'Astronomie et de Géophysique de l'Université de Louvain.

- (ii) la masse spécifique de l'eau peut être prise égale à la valeur constante de référence ρ_m dans tous les termes, sauf dans la force de pesanteur où $\rho - \rho_m$ est multiplié par g qui est considérablement plus grand que les accélérations verticales typiques du fluide
- (iii) la poussée

$$b = g \frac{\rho - \rho_m}{\rho_m} \quad (2)$$

satisfait à l'équation de conservation d'un scalaire passif.

Autrement dit, si a est la valeur moyenne de b (sur une période de temps de l'ordre de la minute de manière à écrémer les fluctuations turbulentes homogènes) et si λ est la diffusivité turbulente (correspondant à la fréquence de coupure)

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u} a = \nabla \cdot (\lambda \nabla a) \quad (3)$$

Cette équation est le résultat d'une série d'hypothèses qu'on peut résumer comme suit : la poussée est, dans l'ordre d'importance, fonction de la salinité, de la température, de la turbidité et de la pression et les variations de masses spécifiques étant faibles, on peut les représenter par les premiers termes d'un développement en série de Taylor des variations de ces paramètres.

On peut négliger l'influence de la pression $\left(\rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial p} \sim 10^{-5} \right)$. Salinité, température et turbidité satisfont chacune, dans le cadre de l'équation (1) à une équation de conservation avec, éventuellement, des coefficients de diffusion moléculaire différents, mais vraisemblablement des coefficients de dispersion turbulente suffisamment voisins pour que les trois équations puissent être combinées linéairement pour produire une unique équation de conservation pour b .

Les sources de volume (source de chaleur par exemple suite à des réactions chimiques, source de turbidité suite au déversement de produits de dragage) sont négligeables. L'essentiel des apports extérieurs se fait aux frontières de l'estuaire (rejets thermiques d'une centrale à la berge, échanges avec l'atmosphère) et ceux-ci interviennent dans les conditions aux limites et non dans l'équation de conservation.

Dans le cadre des hypothèses de Boussinesq, le champ de vitesse \underline{u} du fluide satisfait à l'équation (l'axe vertical \underline{e}_3 pointant vers le haut)

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u} \underline{u} + 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{u} = - \nabla q - a \underline{e}_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_3} \right) \quad (4)$$

On a négligé d'emblée la dispersion horizontale due à la turbulence « propre » (homogène et isotrope) car, les distances caractéristiques de variations horizontales étant beaucoup plus grandes que les distances verticales, cet effet est toujours négligeable devant la dispersion turbulente verticale. Il existe cependant une importante dispersion horizontale mais elle est le fait de courants irréguliers et variables et est cachée, dans l'équation (4) dans le terme d'advection.

On a posé

$$q = \frac{p}{\rho_m} + g x_3 \quad (5)$$

où p est la pression.

Si r_α est la masse spécifique du « constituant α » c'est-à-dire soit la masse par unité de volume d'un traceur approprié, soit la masse par unité de volume d'un compartiment (salinité, biomasse du phytoplancton...) soit la masse par unité de volume d'un élément choisi dans un compartiment donné (azote dissous, teneur en mercure du zooplancton...) la conservation de la masse permet d'écrire pour r_α l'équation

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u} r_\alpha = Q_\alpha + I_\alpha + \sigma_\alpha \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\kappa \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_3} \right) \quad (6)$$

où Q_α et I_α représentent respectivement le taux de production (ou destruction) de α par agents extérieurs (déversements) et interactions internes, σ_α est la vitesse de migration verticale (comptée positivement dans le sens de la sédimentation) κ la diffusivité turbulente verticale (la dispersion horizontale proprement turbulente étant directement négligée).

On note que (3) peut être considéré comme un cas particulier de cette équation, dans (3) également la dispersion horizontale proprement turbulente peut être négligée

et le membre de droite se réduit à $\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial a}{\partial x_3} \right)$.

3. Le modèle hydrodynamique tri-dimensionnel

Les équations (1), (3) et (4) constituent un système de cinq équations scalaires pour les variables u_1 , u_2 , u_3 , q et a .

Il est convenant de choisir un système d'axes « quasi rectangulaires » où l'axe des x_1 est tangent à la ligne moyenne du fleuve, l'axe des x_2 transversal et l'axe des x_3 vertical vers le haut.

Dans les tronçons rectilignes, ces axes sont les axes rectangulaires classiques et les équations (1), (3) et (4) s'écrivent :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 a) + \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 a) + \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 a) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial a}{\partial x_3} \right) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (u_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (u_1 u_3) \\ + 2 (\Omega_2 u_3 - \Omega_3 u_2) = - \frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 u_2) + 2 (\Omega_3 u_1 - \Omega_1 u_3) = - \frac{\partial q}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 u_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 u_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 u_3) + 2 (\Omega_1 u_2 - \Omega_2 u_1) = - \frac{\partial q}{\partial x_3} - a + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (11)$$

Dans les coudes, ces équations doivent être corrigées pour tenir compte de la rotation du système d'axes.

Il est raisonnable de penser, cependant, que le rayon de courbure R est toujours beaucoup plus grand que la longueur caractéristique l_2 des variations transversales et la plupart des termes correctifs peuvent être négligés. (Par exemple, dans l'équation

$$(7), \text{ on peut négliger un terme } \frac{u_2}{R} \text{ vis-à-vis de } \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \sim \frac{u_2}{l_2} \text{).}$$

En se limitant aux termes les plus importants, on voit facilement que les corrections peuvent se résumer à ajouter, à la composante verticale de la rotation de la terre, une rotation de vitesse angulaire $-\frac{v_c}{R}$ où v_c est la vitesse circonférentielle (2).

On posera

$$f = 2 \Omega_3 - \frac{v_c}{R} \quad (12)$$

Pour une vitesse v_c de l'ordre de 1 m/s et un rayon de courbure de l'ordre de 10 km,

$$\frac{v_c}{R} \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

La correction ne modifie donc pas l'ordre de grandeur de f

$$(2 \Omega_1 \sim 2 \Omega_2 \sim 2 \Omega_3 \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1})$$

Dans les tronçons rectilignes, R est infini et la correction disparaît.

On peut estimer les ordres de grandeur des différents termes des équations (7) à (11) pour différentes valeurs des variables dans la gamme des valeurs observées dans l'Escaut. On constate que certains termes sont toujours beaucoup plus petits que les autres et peuvent être négligés.

(2) On peut prendre pour v_c la vitesse axiale moyenne sur la section droite affectée du signe + ou du signe - selon le sens du coude.

On peut le montrer très simplement en considérant un cas typique.

Soient en unités MKS (Jäger 1973)

$$u_1 \sim 1; u_2 \sim 3 \cdot 10^{-2}; u_3 \sim 3 \cdot 10^{-4}; a \sim 10^{-1}$$

les valeurs caractéristiques des composantes de la vitesse et de la poussée, et

$$l_1 \sim 3 \cdot 10^4; l_2 \sim 10^3; l_3 \sim 10; t_c \sim 10^4 \sim f^{-1}$$

des longueurs caractéristiques des variations spatiales selon x_1 , x_2 et x_3 et un temps caractéristique des variations temporelles. Le nombre de Richardson

$$Ri = \frac{\frac{\partial a}{\partial x_3}}{\left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|^2} \quad (13)$$

est une mesure de la stratification verticale. Avec les valeurs données plus haut, on trouve

$$Ri \sim 1$$

La séparation entre les variables moyennes u , a et leurs fluctuations turbulentes homogènes (dont on ne souhaite conserver que leur effet global de dispersion sans les étudier en détail) est effectuée en intégrant sur une période de temps τ de l'ordre d'une ou deux minutes ($\tau \sim 10^2$).

Selon la théorie de Kolmogorov, on globalise ainsi tous les tourbillons de dimensions inférieures à

$$l_\tau \sim \varepsilon^{1/2} \tau^{3/2} \quad (14)$$

(où ε est le taux de transfert d'énergie turbulente).

En l'absence de stratification, il y correspond une viscosité turbulente

$$v_o \sim \varepsilon \tau^2 \quad (15)$$

Dans des eaux stratifiées, la viscosité turbulente v et la diffusivité turbulente λ sont fonctions du nombre de Richardson. On peut écrire (Munk et Anderson 1948) :

$$v = \frac{v_o}{(1 + 10 Ri)^{1/2}} \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{v_o}{(1 + 3,33 Ri)^{3/2}} \quad (17)$$

Le taux de transfert de l'énergie turbulente ε est typiquement de l'ordre de $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$, dans une mer continentale peu profonde à fortes marées. Dans l'estuaire, les contraintes latérales et les irrégularités marquées du fond contribuent à intensifier la turbulence et donc à augmenter la valeur de ε ($\varepsilon \sim 10^{-5}$).

Pour un nombre de Richardson de l'ordre de 1, on obtient

$$v \sim 3 \cdot 10^{-2}$$

$$\lambda \sim 10^{-2}$$

Ces valeurs sont en bon accord avec les observations (Bowden 1965, Fischer 1972).

Examinant l'ordre de grandeur des différents termes des équations (7) à (11), on peut faire les constatations suivantes :

(i) les trois termes de l'équation (7) sont du même ordre de grandeur

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sim \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \sim \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \sim 3 \cdot 10^{-5}$$

(ii) les termes d'advection sont du même ordre de grandeur dans chacune des équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 a) &\sim \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 a) \sim \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 a) \sim 3 \cdot 10^{-6} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 u_1) &\sim \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 u_1) \sim \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 u_1) \sim 3 \cdot 10^{-5} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 u_2) &\sim \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 u_2) \sim \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 u_2) \sim 10^{-6} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 u_3) &\sim \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 u_3) \sim \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 u_3) \sim 10^{-8} \end{aligned}$$

(iii) les termes de diffusion turbulente sont de l'ordre de

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial a}{\partial x_3} \right) &\sim 10^{-5} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) &\sim 3 \cdot 10^{-4} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) &\sim 10^{-5} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &\sim 10^{-7} \end{aligned}$$

(iv) les termes de Coriolis et de courbure de la ligne du fleuve sont de l'ordre de

$$\begin{aligned} 2 \Omega_2 u_3 - f u_2 &\sim -f u_2 \sim 3 \cdot 10^{-6} \\ f u_1 - 2 \Omega_1 u_3 &\sim f u_1 \sim 10^{-4} \\ 2 \Omega_1 u_2 - 2 \Omega_2 u_1 &\sim 10^{-4} \end{aligned}$$

(v) les dérivées temporelles sont de l'ordre de

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &\sim 10^{-5} \quad ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} \sim 10^{-4} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &\sim 3 \cdot 10^{-6} \quad ; \quad \frac{\partial u_3}{\partial t} \sim 3 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

Ces chiffres ne sont évidemment qu'illustratifs et chaque terme peut varier selon des circonstances locales ou occasionnelles. (Par exemple $f u_1$ évalué à 10^{-4} est évidemment beaucoup plus petit au moment du renversement de la marée, des particularités du lit du fleuve peuvent engendrer des vitesses transversales plus importantes...).

On convient cependant que lorsqu'il existe au moins un facteur 100 entre les valeurs caractéristiques de deux termes, le plus petit peut être négligé, ses valeurs extrêmes n'excédant vraisemblablement jamais, quelques pourcents du plus grand sur une distance ou un intervalle de temps significatifs.

Dans ces conditions, dans l'équation (11), tous les termes évalués (maximum 10^{-7}) sont totalement négligeables devant la poussée a ($\sim 10^{-1}$). Celle-ci doit donc être équilibrée par $\frac{\partial q}{\partial x_3}$, soit

$$a = - \frac{\partial q}{\partial x_3} \quad (18)$$

Dans l'équation (10), il semble raisonnable de négliger les termes non-linéaires d'advection ($\sim 10^{-6}$) devant $f u_1$ ($\sim 10^{-4}$) et la diffusion verticale ($\sim 10^{-5}$). La dérivée temporelle ($\sim 3 \cdot 10^{-6}$) pourrait éventuellement être négligée en première approximation. En réalité, l'intérêt de cette équation est essentiellement de permettre d'apprécier l'importance du gradient transversal de pression.

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} \lesssim 10^{-4} \quad (19)$$

Dans l'équation (9), les effets de rotation de la terre et de courbure du fleuve ($\sim 3 \cdot 10^{-6}$) peuvent être négligés vis-à-vis de la diffusion verticale ($\sim 3 \cdot 10^{-4}$). Les autres termes doivent être conservés et il en est de même de tous les termes des équations (8) et (7).

Afin d'estimer le gradient longitudinal de pression, il est avantageux d'écrire q sous la forme

$$q = q_1 + q_v + q_t \quad (20)$$

où q_1 est la moyenne de q sur la section droite de l'estuaire et ne dépend que de t et x_1 ; q_v est la moyenne de la différence $q - q_1$ sur la largeur et ne dépend que de t , x_1 et x_3 ; q_t enfin est la différence $q - q_1 - q_v$ fonction de t , x_1 , x_2 et x_3 .

Substituant dans (18) et (19), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_t}{\partial x_2} &\lesssim 10^{-4}; \quad q_t \lesssim 10^{-1} \\ a &= - \frac{\partial q_v}{\partial x_3} - \frac{\partial q_t}{\partial x_3} \\ &\sim - \frac{\partial q_v}{\partial x_3} \end{aligned}$$

car le second terme du membre de droite est au moins 10 fois plus petit que a . Celui-ci est donc équilibré par le premier terme. On a donc

$$q_v \sim 0 \quad (l_3 a) \sim 1$$

Pour estimer q_1 , on peut se baser sur la valeur de q à la surface libre

$$q = \frac{p_a}{\rho_m} + g \zeta \quad (21)$$

où ζ est l'élévation de la surface.

Pour des élévations de l'ordre du mètre,

$$q_1 \sim 10; \quad \frac{\partial q}{\partial x_1} \sim \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \sim 3 \cdot 10^{-4}$$

Ce terme est donc comparable à la diffusion verticale ($\sim 3 \cdot 10^{-4}$), à la dérivée temporelle ($\sim 10^{-4}$) et aux termes d'advection qui, cumulés, atteindraient également cet ordre de grandeur.

En résumé, les équations d'un modèle hydrodynamique tridimensionnel pourraient s'écrire :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0; \quad a = - \frac{\partial q}{\partial x_3} \quad (22) \quad (23)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u}a = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial a}{\partial x_3} \right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u}u_1 = - \frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (25)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \underline{f}u_1 = - \frac{\partial q}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad (26)$$

Ces équations forment un système complet pour les cinq inconnues u_1 , u_2 , u_3 , a , q .

4. Les modèles bidimensionnels postulant la quasi homogénéité transversale

Dans les premiers modèles mathématiques d'estuaires, il était traditionnel de supposer une homogénéité transversale suffisamment bien établie pour pouvoir négliger dans les équations tous les termes contenant des dérivées par rapport à x_2 (e.g. Pritchard, 1967).

Ces termes, dans les équations (22), (24) et (25) contenant également la vitesse transversale u_2 , cette hypothèse revient à considérer que, dans la section précédente, soit la vitesse u_2 a été surestimée, soit la longueur l_2 a été sousestimée.

Si tel est le cas, l'équation (22) se réduit à :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \tag{27}$$

et il est possible d'introduire une fonction de courant telle que

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} ; u_3 = - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \tag{28} \tag{29}$$

et de réduire le système des équations hydrodynamiques aux trois équations

$a = - \frac{\partial q}{\partial x_3} \tag{30}$	
$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial a}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial a}{\partial x_3} \right) \tag{31}$	
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = - \frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right) \tag{32}$	

pour les trois variables ψ , a , q ; cette dernière étant considérée également comme une fonction de t , x_1 et x_3 uniquement.

L'équation (26) est ignorée, dans ce type de modèle, puisqu'elle fait intervenir des variables devenues sans intérêt u_2 et q_t .

En examinant cependant cette équation, on s'aperçoit que dans le cas de l'Escaut, ces modèles simplifiés doivent être pris avec énormément de réserve.

En effet, le terme $f u_1$, atteignant des valeurs de 10^{-4} et devant être équilibré par un autre terme au moins, si l_2 est plus grand (un ordre de grandeur, au moins) que 10^3 , il faut soit que q_t soit plus important ($q_t \sim 1$ au lieu de 10^{-1}), soit que u_2 soit plus grand. Dans le premier cas, q_t intervient à part entière dans des équations comme (23) et il n'est pas possible de considérer que q ne dépend pas de x_2 . Dans le second cas, l'augmentation de u_2 compensant celle de l_2 , il est vraisemblable que

les termes contenant $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ ou $u_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ ne puissent plus être négligés.

Le modèle simplifié resterait valable si u_2 était petit ($u_2 \ll 3 \cdot 10^{-2}$) mais les observations semblent indiquer que, dans l'Estuaire de l'Escaut, il est loin d'en être ainsi à plusieurs endroits.

5. Les modèles intégrés sur la largeur

Si on ne s'intéresse pas, au premier chef, aux variations transversales, il est intéressant d'intégrer les équations d'évolution d'une berge à l'autre et d'étudier l'évolution longitudinale et verticale de grandeurs moyennes ou intégrées sur la largeur.

Soient

$$x_2 = D(x_1, x_3) \quad (33)$$

$$x_2 = -\Delta(x_1, x_3) \quad (34)$$

les équations des berges.

Celles-ci n'étant pas perméables, elles doivent constituer des surfaces de courants

$$u_1 \frac{\partial D}{\partial x_1} + u_3 \frac{\partial D}{\partial x_3} = u_2 \quad \text{en} \quad x_2 = D \quad (35)$$

$$u_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} + u_3 \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = -u_2 \quad \text{en} \quad x_2 = -\Delta \quad (36)$$

Soient

$$V_1 = L \bar{u}_1 = \int_{-\Delta}^D u_1 dx_2 \quad (37)$$

$$V_3 = L \bar{u}_3 = \int_{-\Delta}^D u_3 dx_2$$

$$A = L \bar{a} = \int_{-\Delta}^D a dx_2 \quad (39)$$

où une barre désigne une valeur moyenne sur la largeur et

$$L = \Delta + D \quad (40)$$

Désignant par \sim les déviations par rapport à la moyenne, on écrit

$$u_1 = \bar{u}_1 + \tilde{u}_1 \quad (41)$$

$$u_3 = \bar{u}_3 + \tilde{u}_3 \quad (42)$$

$$a = \bar{a} + \tilde{a} \quad (43)$$

Intégrant l'équation (22) de $-\Delta$ à D , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{-\Delta}^D \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dx_2 + (u_2)_D - (u_2)_\Delta \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \underbrace{(u_1)_D \frac{\partial D}{\partial x_1}}_{\text{}} - \underbrace{(u_1)_\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial x_1}}_{\text{}} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \\ & \quad - \underbrace{(u_3)_D \frac{\partial D}{\partial x_3}}_{\text{}} - \underbrace{(u_3)_\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial x_3}}_{\text{}} + \underbrace{(u_2)_D}_{\text{}} - \underbrace{(u_2)_\Delta}_{\text{}} \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

les termes soulignés se détruisant en vertu de (35) et (36).

Intégrant l'équation (24) de $-\Delta$ à D , on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\Delta}^D \left\{ \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 a) + \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 a) \right\} dx_2 + (u_2 a)_D - (u_2 a)_\Delta \\
 & - \int_{-\Delta}^D \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \lambda \frac{\partial a}{\partial x_3} \right) dx_2 = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\Delta}^D u_1 a dx_2 \\
 & - \underbrace{(u_1 a)_D}_{\frac{\partial D}{\partial x_1}} - \underbrace{(u_1 a)_\Delta}_{\frac{\partial \Delta}{\partial x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-\Delta}^D u_3 a dx_2 \\
 & - \underbrace{(u_3 a)_D}_{\frac{\partial D}{\partial x_3}} - \underbrace{(u_3 a)_\Delta}_{\frac{\partial \Delta}{\partial x_3}} + (u_2 a)_D - (u_2 a)_\Delta \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial A}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\lambda \left(a_D \frac{\partial D}{\partial x_3} + a_\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} \right) \right] \\
 & + \left(\lambda \frac{\partial a}{\partial x_3} \right)_D \frac{\partial D}{\partial x_3} + \left(\lambda \frac{\partial a}{\partial x_3} \right)_\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = \frac{\partial A}{\partial t} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_1} (L^{-1} V_1 A) + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\Delta}^D \tilde{u}_1 \tilde{a} dx_2 \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_3} (L^{-1} V_3 A) + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-\Delta}^D \tilde{u}_3 \tilde{a} dx_3 \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial A}{\partial x_3} \right) = 0 \tag{45}
 \end{aligned}$$

les termes soulignés s'éliminant en vertu de (35) et (36) et les 4 derniers termes étant négligeables devant $\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial A}{\partial x_3} \right)$. En effet

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial A}{\partial x_3} \right) \sim 0 \left(\frac{\lambda a L}{l_3^2} \right) \sim 10^{-2}$$

tandis que, par exemple

$$\left(\lambda \frac{\partial a}{\partial x_3} \right)_D \frac{\partial D}{\partial x_3} \sim 0 \left(\frac{\lambda a}{l_3} \frac{\partial D}{\partial x_3} \right) \sim 10^{-4}$$

en admettant un maximum de 10 mètres de variation de L sur la profondeur.

Par un raisonnement analogue, en intégrant (25), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (L^{-1} V_1 V_1) + \frac{\partial}{\partial x_3} (L^{-1} V_1 V_3) \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\Delta}^D \tilde{u}_1 \tilde{u}_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-\Delta}^D \tilde{u}_1 \tilde{u}_3 dx_2
 \end{aligned}$$

$$= -L \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) \quad (46)$$

On a tenu compte de ce que, q_1 étant négligeable, on pouvait faire $q \sim \bar{q} -$. Cette simplification est issue de (26) qui pour le reste n'est plus utile dans le modèle intégré.

Intégrant (23), il vient, avec la même approximation

$$A = -L \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_3} \quad (47)$$

On voit apparaître dans (45) et (46) les intégrales des produits des déviations autour de la moyenne. L'observation révèle que ces termes (dont la structure rappelle celle des tensions de Reynolds) sont responsables d'une dispersion longitudinale et verticale semblable à une dispersion turbulente mais considérablement plus efficace.

Sur le modèle de la diffusion turbulente, on pose

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\Delta}^D (-\tilde{u}_1 \tilde{a}) dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\Lambda_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) \quad (48)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-\Delta}^D (-\tilde{u}_3 \tilde{a}) dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial A}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\Lambda_3 \frac{\partial A}{\partial x_3} \right) \quad (49)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\Delta}^D (-\tilde{u}_1 \tilde{u}_1) dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) \quad (50)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-\Delta}^D (-\tilde{u}_1 \tilde{u}_3) dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(N_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) \quad (51)$$

où N_1 , N_3 , Λ_1 , Λ_3 sont de nouvelles diffusivités.

Selon les observations, (e.g. Ronday 1975) *

$$N_1 \sim 10^2 \text{ à } 10^3 \text{ m}^2/\text{s}; \Lambda_1 \sim 10^2 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$N_3 \sim 10^{-2} \text{ à } 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}; \Lambda_3 \sim 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$$

L'équation (44) suggère d'introduire une fonction ψ telle que

$$V_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \quad (52)$$

$$V_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (53)$$

L'équation (44) est alors identiquement satisfaite. Les équations (45), (46) et (47) s'écrivent :

* N_1 , N_3 , Λ_1 et Λ_3 ne sont en général pas constants le long de l'estuaire. Il faut les regarder comme des paramètres de commande à déterminer par des réflexions théoriques et des exercices de simulation alimentés par la banque de données.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} A \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} A \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\Lambda_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\Lambda_3 \frac{\partial A}{\partial x_3} \right) \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) = -L \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(N_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right) \quad (55)$$

$$A = -L \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_3} \quad (46)$$

Ces équations constituent un système complet pour les trois variables ψ , A et \bar{q} .

6. Les modèles intégrés sur la profondeur

La simplicité des modèles intégrés sur la largeur était en grande partie le résultat des hypothèses qui s'étaient avérées possibles sur les variations latérales de q .

Il est naturel de penser à compléter les informations fournies par un modèle de ce type par celles que peut apporter un modèle intégré sur la profondeur et faisant apparaître la distribution latérale du champ de vitesse.

Malheureusement, l'intégration sur la profondeur tend à masquer les effets de la stratification verticale qui joue dans le champ de pesanteur, un rôle beaucoup plus important que la stratification transversale et on peut se demander si les informations que l'on gagne sur les courants transverses compensent celles que l'on perd sur les courants de gravité.

Il faut dire également que les modèles bidimensionnels obtenus par intégration sur la profondeur sont plus compliqués que les modèles bidimensionnels obtenus par intégration sur la largeur. On a vu en effet que ces derniers admettaient toujours une fonction de courant permettant de réduire de 1 le nombre de variables. Ceci n'est vrai, dans les modèles intégrés sur la profondeur, que dans le cas stationnaire.

En effet, si $x_3 = \zeta$ et $x_3 = -h$ représentent les équations de la surface et du fond respectivement, on doit avoir

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = u_3 \quad \text{en} \quad x_3 = \zeta \quad (57)$$

$$u_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = -u_3 \quad \text{en} \quad x_3 = -h \quad (58)$$

Définissant

$$U_1 = \int_{-h}^{\zeta} u_1 \, dx_3 \tag{59}$$

$$U_2 = \int_{-h}^{\zeta} u_2 \, dx_3 \tag{60}$$

et intégrant (22) de $-h$ à ζ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dx_3 + (u_3)_\zeta - (u_3)_{-h} \\ &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - (u_1)_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - (u_1)_{-h} \frac{\partial h}{\partial x_1} + (u_3)_\zeta \\ &+ \frac{\partial U_2}{\partial x_2} - (u_2)_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - (u_2)_{-h} \frac{\partial h}{\partial x_2} - (u_3)_{-h} \\ &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \tag{61}$$

en faisant usage de (57) et (58).

Dans des estuaires bien mélangés et suffisamment larges pour qu'on s'intéresse aux distributions et aux vitesses transversales, il peut être intéressant de joindre au modèle intégré sur la largeur, un modèle intégré sur la profondeur en faisant l'approximation $a \sim 0$.

Ce modèle est alors le même pour l'estuaire et pour la mer continentale peu profonde. Il est décrit en détail ailleurs (Nihoul 1975) et n'est pas repris ici.

On peut aller plus loin si on possède suffisamment d'information sur la distribution verticale de a (par exemple, le profil est connu expérimentalement ou bien on peut remplacer a par sa valeur moyenne, quitte à diviser la hauteur d'eau en plusieurs couches). Sans cela, l'intégration sur la profondeur transformant les

équations aux dérivées partielles en équations intégrales (parce que $q = \frac{P_a}{\rho_m} + g\zeta + \int_{x_3}^{\zeta} a \, dx_3$) la simplification qu'elle apporte, en réduisant les dimensions du problème, devient illusoire et le modèle bidimensionnel intégré sur la profondeur cesse d'être compétitif avec le modèle à trois dimensions.

7. Les modèles intégrés sur la section droite

L'intégration sur la section droite efface le détail des variations verticales et transversales et pour des modèles intégrés de cette façon, il est suffisant d'écrire

$$q = \frac{P_a}{\rho_m} + g\zeta \tag{62}$$

où ζ est considéré comme une fonction de t et x_1 seulement et où p_a est la pression atmosphérique moyenne sur la surface d'élévation ζ .

Les équations (22), (24) et (25) peuvent se mettre sous une forme commune.

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u} m = \nabla \cdot \underline{\omega} \tag{63}$$

où

$$m = 1, \quad \underline{\omega} = 0 \tag{pour 22}$$

$$m = a, \quad \underline{\omega} = \lambda \frac{\partial a}{\partial x_3} \underline{e}_3 \tag{pour 24}$$

$$m = u_1, \quad \underline{\omega} = - \left(\frac{p_a}{\rho_m} + g\zeta \right) \underline{e}_1 + v \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \underline{e}_3 \tag{pour 25}$$

Si on désigne par \underline{v} la vitesse moyenne sur la section droite et par \underline{v}' la déviation autour de cette moyenne, (63) peut s'écrire

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{v} m + \nabla \cdot \underline{v}' m = \nabla \cdot \underline{\omega} \tag{64}$$

Soit Ω un volume « transporté par le courant moyen \underline{v} » de base \mathcal{A} et d'épaisseur Δx dans le sens de l'écoulement (fig. 1).

Intégrant sur ce volume, on a par définition

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial m}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{v} m \right) d\Omega &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} m d\Omega \sim \frac{d}{dt} (\Delta x \int m d\mathcal{A}) \\ &\sim \frac{d}{dt} (\Delta x m \mathcal{A}) = \Delta x \frac{d}{dt} (m \mathcal{A}) + m \mathcal{A} \frac{d \Delta x}{dt} \end{aligned} \tag{65}$$

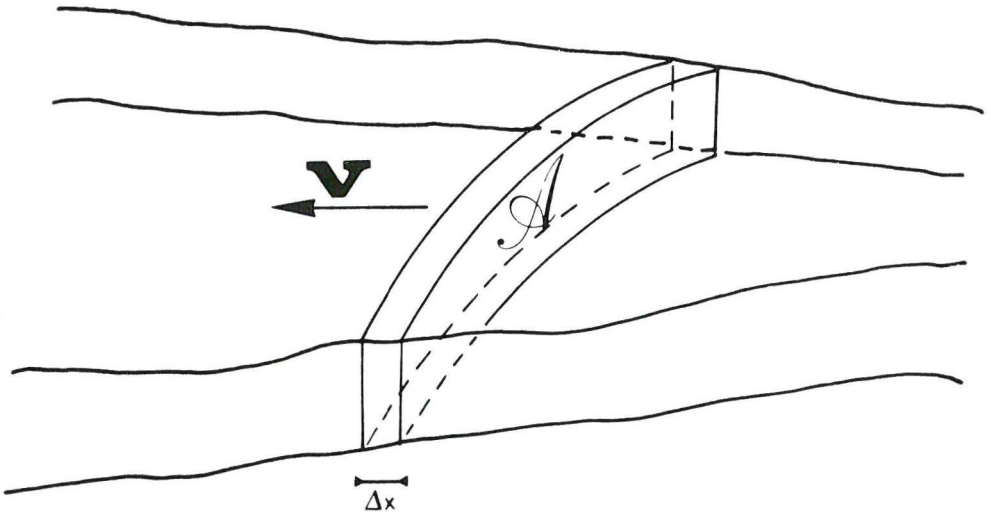


Fig. 1.

tenant compte de ce que Δx étant choisi petit, m varie peu sur une distance Δx et notant \bar{m} la moyenne de m sur la section droite.

D'autre part, Σ étant la surface totale englobant Ω

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{\omega} \, d\Omega = \int_{\Sigma} \underline{\omega} \cdot d\underline{\xi} = \Phi_n + \frac{\Delta\phi}{\Delta x} \Delta x \quad (66)$$

où Φ_n représente le flux du vecteur $\underline{\omega}$ à travers la surface latérale et $\Delta\phi$ la différence des flux sur les sections droites en x et $x + \Delta x$.

De la même façon

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (-v' m) \, d\Omega = \int_{\Sigma} (-v' m) \cdot d\underline{\xi} = \psi_n + \frac{\Delta\psi}{\Delta x} \Delta x \quad (67)$$

ψ_n est le flux du vecteur $(-v' m)$ à travers la surface latérale et $\Delta\psi$ la différence entre les flux sur les sections droites en x et $x + \Delta x$.

Intégrant (64) en tenant compte de (65), (66) et (67), on obtient :

$$\Delta x \frac{d}{dt} (m \mathcal{A}) + m \mathcal{A} \frac{d \Delta x}{dt} = \Phi_n + \psi_n + \frac{\Delta\phi}{\Delta x} \Delta x + \frac{\Delta\psi}{\Delta x} \Delta x \quad (68)$$

Δx étant petit, on a

$$\begin{aligned} \frac{d \Delta x}{dt} &\sim \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \\ \frac{\Delta\phi}{\Delta x} &\sim \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad \frac{\Delta\psi}{\Delta x} \sim \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}$$

D'autre part, par définition

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$$

Divisant (9) par Δx , on a dès lors

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \mathcal{A}) + \frac{\partial}{\partial x} (v m \mathcal{A}) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} + \hat{\phi}_n + \hat{\psi}_n \quad (69)$$

où $\hat{\phi}_n$ et $\hat{\psi}_n$ sont les flux latéraux par unité de longueur.

Appliquant (69) aux équations (22), (24) et (25), on obtient

(i) pour (22) $m = \bar{m} = 1$, $m' = 0$, $\phi = 0$, $\psi = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v \mathcal{A}) = 0 \quad (70)$$

(ii) pour (24) $m = a$, $\underline{\omega} = \lambda \frac{\partial a}{\partial x_3} \underline{e}_3$

$$\psi = \int_{\mathcal{A}} (-v' m') \, d \mathcal{A} = \Lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (a \mathcal{A}) \quad (71)$$

(en tenant compte de l'effet dispersif de ψ associé à la moyenne sur la section droite du produit des déviations et en paramétrisant ce terme sur le modèle de la dispersion turbulente à l'aide d'une « diffusivité équivalente $\Lambda \sim 10^2 \text{ m}^2/\text{s}$)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \hat{\phi}_n = 0, \hat{\psi}_n = 0$$

(en observant que ω n'a pas de composante suivant x , en admettant que la poussée est essentiellement liée à la salinité et en négligeant les échanges de sel avec l'atmosphère, les berges et le fond).

Par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial t} (a \mathcal{A}) + \frac{\partial}{\partial x} (v a \mathcal{A}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Lambda \frac{\partial}{\partial x} (a \mathcal{A}) \right]$$

(iii) pour (25) $m = u_1$, $m = v$

$$\begin{aligned} \omega &= - \left(\frac{p_a}{\rho_m} + g\zeta \right) \mathbf{e}_1 + v \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \\ \psi &= \int_{\mathcal{A}} (-v' v') d\mathcal{A} = N \frac{\partial}{\partial x_1} (v \mathcal{A}) \end{aligned} \quad (72)$$

(en raisonnant comme précédemment et en introduisant une viscosité équivalente $N \sim 10^2$ à $10^3 \text{ m}^2/\text{s}$).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{A} \left(\frac{p_a}{\rho_m} + g\zeta \right) \right] \\ \hat{\phi}_n + \hat{\psi}_n &= \tau_s - \tau_b - \left(\frac{p_a}{\rho_m} + g\zeta \right) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \end{aligned}$$

(en introduisant les tensions moyennes τ_s et τ_b sur la surface d'une part, les berges et le fond d'autre part et en tenant compte du fait que si, la surface \mathcal{A} varie entre x et $x + \Delta x$, la surface latérale n'est pas un cylindre de génératrices parallèles à \mathbf{e}_1 et il y a un flux latéral de $\left(\frac{p_a}{\rho_m} + g\zeta \right) \mathbf{e}_1$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (v \mathcal{A}) + \frac{\partial}{\partial x} (v v \mathcal{A}) &= - \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho_m} + g\zeta \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[N \frac{\partial}{\partial x} (v \mathcal{A}) \right] \end{aligned} \quad (73)$$

On a, par ailleurs

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} + \zeta L \quad (74)$$

où \mathcal{S} est la section droite « géométrique » du fleuve lorsque $\zeta = 0$.

Comme \mathcal{S} est considérablement plus grand que ζL , on peut remplacer \mathcal{A} par \mathcal{S} dans tous les termes, sauf dans

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = L \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Les équations deviennent alors

$$L \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{S} v) = 0 \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{S} v) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{S} v v) = & - \mathcal{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_a}{\rho_m} + g\zeta \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial}{\partial x} (v \mathcal{S}) \right) \end{aligned} \quad (76)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{S} a) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{S} v a) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Lambda \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{S} a) \right) \quad (77)$$

Ces équations forment un système complet pour les variables ζ , v et a . [ζ et v peuvent être déterminés au préalable par (67) et (68) et substitués dans (69) pour déterminer a].

Les coefficients de mélange longitudinal N et Λ ne sont évidemment pas nécessairement constants tout au long de l'estuaire. En réalité, ils doivent être regardés comme des paramètres de commande à déterminer par des réflexions théoriques et des exercices de simulation alimentés par la banque de données.

8. Modèle de la circulation résiduelle

Application à l'étude de l'envasement de l'Escaut

La circulation résiduelle peut être définie comme la circulation moyenne sur une période de temps suffisamment longue pour éliminer les oscillations de marées et les courants transitoires dûs aux coups de vent.

Elle est liée essentiellement au débit du fleuve et aux courants de gravités associés à la stratification. On peut la décrire par un modèle bidimensionnel intégré sur la largeur.

Si V_1 , V_3 et A représentent respectivement les intégrales de u_1 , u_2 et a sur la largeur, on peut écrire, en vertu de (44), (45) et (46)

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0 \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (L^{-1} V_1 A) + \frac{\partial}{\partial x_3} (L^{-1} V_3 A) \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\Lambda_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\Lambda_3 \frac{\partial A}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (79)$$

$$A = -L \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_3} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (L^{-1} V_1 V_1) + \frac{\partial}{\partial x_3} (L^{-1} V_1 V_3) \\ = -L \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(N_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (81)$$

Si $\langle \rangle$ désigne une moyenne sur un temps Θ couvrant plusieurs marées et si

$$U_i = \langle V_i \rangle \quad i = 1, 2 \quad (82)$$

$$V_i = U_i + W_i \quad i = 1, 2 \quad (83)$$

$$B = \langle A \rangle \quad (84)$$

$$A = B + C \quad (85)$$

$$\pi = \langle \bar{q} \rangle \quad (86)$$

on a, intégrant les équations (78) à (81) sur (83) (et supposant Θ suffisamment long pour négliger la contribution de la dérivée temporelle)

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0 \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (L^{-1} U_1 B) + \frac{\partial}{\partial x_3} (L^{-1} U_3 B) \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \Lambda_1 \frac{\partial B}{\partial x_1} + L^{-1} \langle -W_1 C \rangle \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \Lambda_3 \frac{\partial B}{\partial x_3} + L^{-1} \langle -W_3 C \rangle \right\} \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (L^{-1} U_1 U_1) + \frac{\partial}{\partial x_3} (L^{-1} U_1 U_3) = -L \frac{\partial \pi}{\partial x_1} \\ + \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ N_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + L^{-1} \langle -W_1 W_1 \rangle \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ N_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + L^{-1} \langle -W_3 W_1 \rangle \right\} \end{aligned}$$

$$B = -L \frac{\partial \pi}{\partial x_3} \quad (90)$$

On constate que la moyenne des termes quadratiques donne, une nouvelle fois, deux contributions; la première constituée par le produit des moyennes, la seconde par la moyenne du produit des fluctuations. Cette seconde contribution contribue à la dispersion et s'ajoute aux actions de la turbulence et de l'effet cisailant. En première approximation, on peut paramétriser l'ensemble des actions dispersives, sur le modèle de dispersion turbulente, en introduisant de nouveaux coefficients de dispersion K_1 , K_3 , M_1 , M_3 tels que

$$\Lambda_1 \frac{\partial B}{\partial x_1} + L^{-1} \langle -W_1 C \rangle = K_1 \frac{\partial B}{\partial x_1} \quad (91)$$

$$\Lambda_3 \frac{\partial B}{\partial x_3} + L^{-1} \langle -W_3 C \rangle = K_3 \frac{\partial B}{\partial x_3} \quad (92)$$

$$N_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + L^{-1} \langle -W_1 W_1 \rangle = M_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \quad (93)$$

$$N_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + L^{-1} \langle -W_3 W_1 \rangle = M_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \quad (94)$$

avec, d'après les observations (MKS) (e.g. Runday 1975)

$$K_1 \sim 10^2; K_3 \sim 10^{-2}; M_1 \sim 10^3; M_3 \sim 10^{-1}$$

En réalité, K_1 , K_3 , M_1 et M_3 doivent être regardés comme des paramètres de commande à déterminer par inspection de la base de donnée. Ce sont, en général, des fonctions de x_1 . On peut les supposer, en première instance, indépendants de x_3 .

Si l_1 et l_3 désignent des longueurs caractéristiques des variations horizontales et verticales du champ de vitesse, on doit avoir, en vertu de (87)

$$\frac{U_1}{l_1} \sim \frac{U_3}{l_3}$$

Dans l'équation (89) les termes du membre de gauche sont de l'ordre de

$$\frac{L^{-1} U_1 U_1}{l_1}$$

Le second terme du membre de droite est, utilisant (93) de l'ordre de

$$\frac{M_1 U_1}{l_1^2}$$

tandis que le dernier terme du membre de droite, en vertu de (94) est de l'ordre

$$\frac{M_3 U_1}{l_3^2}$$

Prenant (Runday 1975),

$$l_3 \sim 10; l_1 \sim 10^4; L^{-1} U_1 \sim 10^{-2}$$

on voit que le terme de dispersion verticale est 100 à 1 000 fois plus grand que les termes d'advection et de dispersion horizontale et doit être, par conséquent, équilibré

$$\text{par } -L \frac{\partial \pi}{\partial x_1}.$$

Une simplification analogue n'est pas, en général, possible dans l'équation (88) qui ne contient pas de terme analogue au gradient de pression et où le terme de dispersion verticale est comparativement beaucoup moins important; les gradients verticaux de salinité étant considérablement moins marqués que les gradients verticaux de vitesse.

L'équation (87) permet l'introduction d'une fonction de courant résiduelle ψ_o telle que

$$U_1 = \frac{\partial \psi_o}{\partial x_3} \tag{95}$$

$$U_3 = - \frac{\partial \psi_o}{\partial x_1} \tag{96}$$

Eliminant U_1 , U_3 et B , on obtient

$$\frac{\partial \psi_o}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial \psi_o}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ K_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(L \frac{\partial \pi}{\partial x_3} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ K_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(L \frac{\partial \pi}{\partial x_3} \right) \right\} \tag{97}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(M_3 \frac{\partial^2 \psi_o}{\partial x_3^2} \right) = L \frac{\partial \pi}{\partial x_1} \tag{98}$$

Les équations (97) et (98) constituent un système complet pour les variables ψ_o et π . Dans ces équations L , K_1 , K_3 et M_3 doivent être regardés comme des paramètres de commande à déterminer par réflexions théoriques et exercices de simulation fondés sur la base de donnée.

La figure 2 montre, par exemple, la variation selon x_1 du coefficient de dispersion longitudinale K_1 calculé à partir des résultats expérimentaux de Wollast. L'allure générale de la courbe a été interprétée théoriquement par Ronday (1975).

La figure 3 représente, pour un tronçon de l'Escaut allant du Ruppel à la Mer, les lignes d'égaies vitesses horizontales calculées par le modèle dans le cas d'un débit égal à quatre fois le débit d'étiage.

Les courants sont exprimés en mètres par seconde. La courbe en traits d'axes (notée $n = 4$) indique la ligne de courant résiduel nul pour ce débit. On constate sur l'échelle de salinité imprimée sur la partie supérieure du diagramme (et correspondant au même débit) que le courant résiduel s'annule au fond à l'endroit où une salinité de quelques ‰_{oo} est observée.

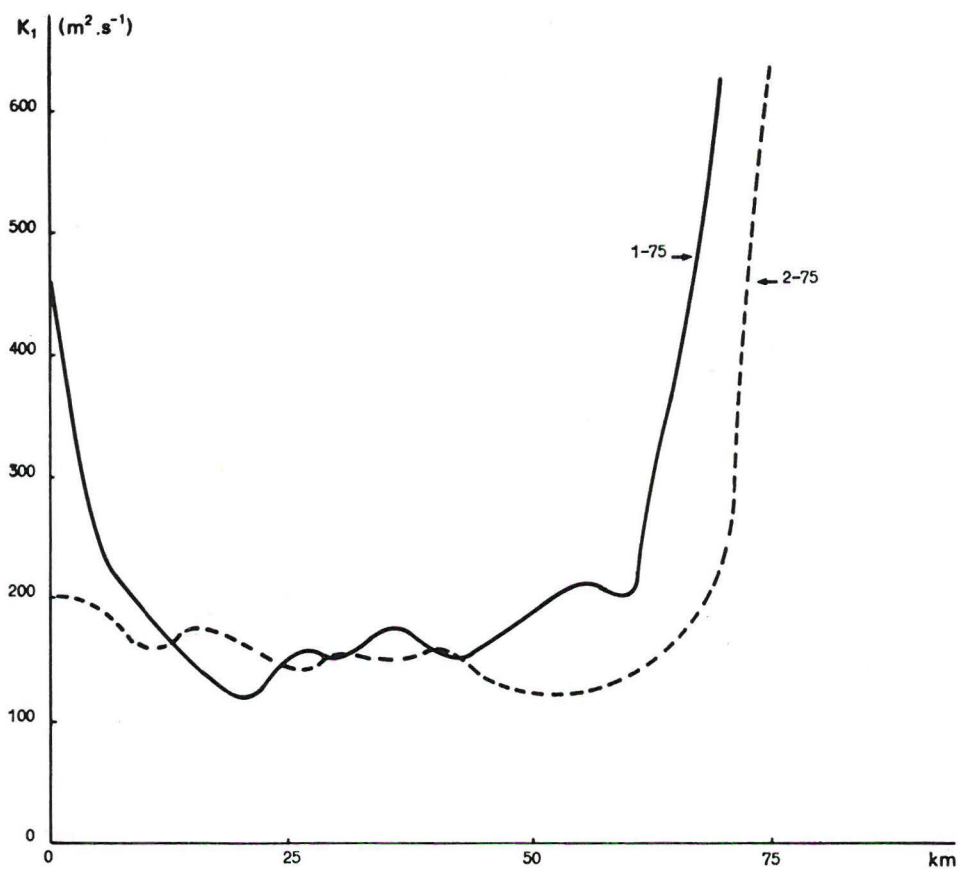


Fig. 2.

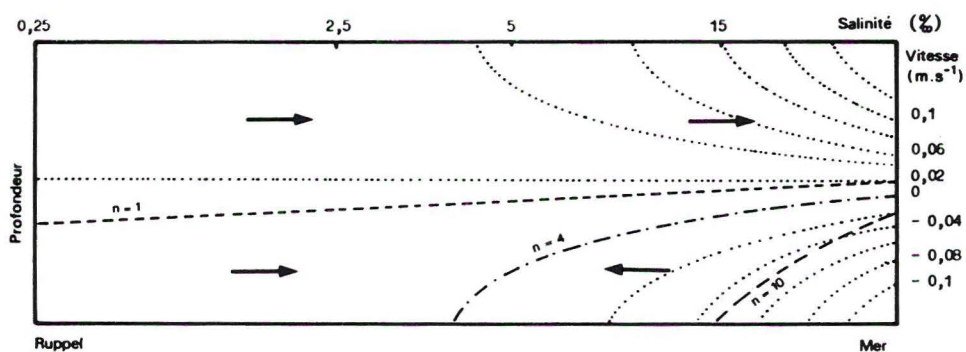


Fig. 3.

C'est pour cette valeur que la floculation des suspensions se produit. Celles-ci précipitent par conséquent dans une région où le charriage est négligeable et s'accablent ainsi au point de sédimentation.

A titre de référence, deux courbes en traits barres, notées $n = 1$ et $n = 10$, indiquent les lignes de courant nul pour des débits respectivement égaux au débit d'étiage et à 10 fois celui-ci.

L'échelle de salinité est évidemment décalée de façon correspondante et la zone de précipitation apparaît se déplacer avec la région où le courant de fond s'annule.

Lorsque le débit augmente ou diminue et revient à des valeurs typiques, $n \sim 4$, les courants de fond aux endroits du dépôt correspondant à $n = 1$ et $n = 10$ sont opposés et tendent comme le montrent les flèches sur la figure à ramener les sédiments fraîchement déposés dans la zone médiane.

Ceci explique l'accumulation des dépôts sédimentaires vaseux dans une région de l'Escaut relativement limitée.

9. Les modèles chimiques et écologiques

L'équation (6) n'a pas été discutée. En réalité, elle se traite exactement comme l'équation pour la poussée avec cette différence qu'il faut tenir compte des termes de sources Q_α , d'interactions I_α , de sédimentation $\sigma_\alpha \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_3}$ et des transferts aux

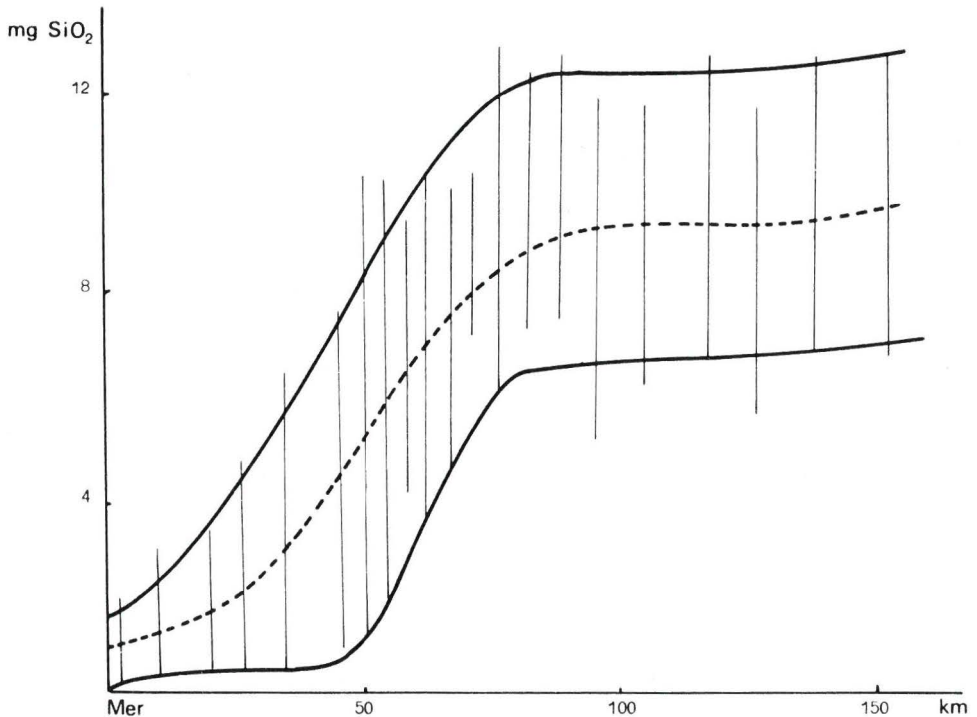


Fig. 4.

frontières. (Selon la nature de r_α , il peut y avoir des apports atmosphériques ou des échanges avec les sédiments de fond, par exemple).

Ces contributions additionnelles éventuelles doivent être paramétrisées dans chaque cas particulier.

Dans le cas de traceurs passifs ou semi-passifs comme la silice dissoute (pour laquelle il suffit d'introduire, dans les équations, un terme de consommation par les diatomées et, dans les conditions aux limites — apparaissant dans les équations intégrées sur la section droite — un terme d'apport latéral), les équations écrites pour la poussée sont adaptées sans difficulté.

La figure 4 (Wollast 1973) montre par exemple les profils longitudinaux de silice dissoute dans l'estuaire de l'Escaut calculés dans trois situations caractéristiques : hiver (courbe supérieure), été (courbe inférieure) et une situation moyenne (courbe intermédiaire), à l'aide d'un modèle intégré sur la section droite. Les barres verticales représentent les variations locales observées.

REMERCIEMENTS

Cette étude a été menée dans le cadre du Projet Mer du Programme National sur l'Environnement Physique et Biologique. Les auteurs tiennent à exprimer leur reconnaissance aux Services de la Programmation et de la Politique Scientifique pour le soutien apporté à leurs recherches.

RÉFÉRENCES

- BOWDEN K. F. (1965). *J. Fluid Mech.* 21, 83.
 FISCHER HUGO B. (1972). *J. Fluid Mech.* 53, 671.
 JÄGER Ph. (1973). Programme National sur l'Environnement Physique et Biologique, Projet Mer, Rapport N19 (compilé d'après Stormvloed en op de Schelde, 1966, Ministerie van Openbare Werken vol. II, IV, V).
 MUNK W. H. and ANDERSON E. R. (1948). *J. Mar. Res.* 7, 276.
 NIHOUL J. C. J. (1975). *Modelling of Marine Systems* Elsevier Publ. Amsterdam.
 PRITCHARD D. W. (1967). *Estuaries*, AAAS Publ., U.S.A.
 RONDAY F. C. (1975). *Annales des Travaux Publics de Belgique* 4, 1.
 WOLLAST R. (1973). Dans *Math. Modelsea*, I.C.E.S. Fisheries Improvement Committee, CM 1973-E: 9.