Kandinsky, *Composición X*, Óleo sobre lienzo, 1939.

GEOMETRÍA FRACTAL Y GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Vera W. de Spinadel

RESUMEN RÉSUMÉ ABSTRACT PALABRAS CLAVE
REVISTA EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
RESUMEN RÉSUMÉ ABSTRACT PALABRAS CLAVE

RESUMEN

GEOMETRÍA FRACTAL Y GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Los *elementos de la geometría euclidiana son puntos, líneas, curvas, etc., esto es, entes ideales concebidos por el hombre para modelizar los fenómenos naturales y cuantificarlos midiendo longitudes, áreas o volúmenes. Pero estos entes pueden ser tan complejos e irregulares que la medición usando la métrica euclidiana deja de tener sentido. Sin embargo, hay una manera de medir él grado de complejidad e irregularidad, evaluando cuan rápido aumenta la longitud, la superficie o el volumen, si lo medímos en escalas cada vez más pequeñas. Este enfoque fue el adoptado por Mandelbrot, matemático polaco, que en 1980 acuñó el término fractal para designar entes muy irregulares, pero autosemejantes.*

GEOMETRÍE FRACTALE ET GEOMETRÍE EUCLIDIENNE

Les *points, les ligues, les courbes—Ce sont les éléments de la géométrie euclidienne, ca veut diré, des créatures idéales concues par l'homme afin de modéliser les phénoménes untareis el les quantifier en mesurant des longueurs, des surfaces et des voluntes. Mais ees éléments peuvent étre si complaces et si irréguliers que les mesurer par le biais (fuñe métrique euclidienne ría aucun sens. Néanmoins, il existe une maniere de mesurer le degré de complexité et áirrégularité, en évaluant la vitesse a laquelle la longueur, la surface et le volunte augmentent-ils, si on les mesure a des échelles toujours plus petites. Cette approche a été adoptée par Mandelbrot, mathématicien polonats, qui, en 1980 a creé i'cxpression fractal pour désigner des éléments tres irréguliers mais auto semblables.*

FRACTAL GEOMETRY AND EUCLIDIAN GEOMETRY

The elements of the Euclidian Geometry are points, Unes, cuntes, spheres and so on, that is, ideal objeets introduced by men to model natural phenomena and quantify them measuring length surfaces or volumes. But these objeets could be so complex and irregular that measurcment using the Euclidian geometry is senseless. However, títere is a way ¡o evalúate the degree of complexity and irregularity, calcttlating hozvfast the length or the surface or the volunte ¡aereases ifzve measurc them using each time smaller scales. Tkis approach was introduced by Mandelbrot, a polish mathematician, ivho in 1980 invented the term "fractal" to desígnate very irregular but self-similar objeets.

PALABRAS CLAVE

Geometría fractal, geometría euclidiana, complejidad
Fractal Geometry, Euclidian Geometry, complexity

GEOMETRÍA FRACTAL Y GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Vera W. de Spinadel*

La geometría fractal cambiará afondo su visión de las cosas.
Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente
la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias,
hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices y de muchas otras cosas.
Jamás volverá a recuperar las interpretaciones
de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares.

Michael Barnsley (1988)

INTRODUCCIÓN

La geometría fractal, una teoría matemática moderna que se aparta radicalmente de la geometría eucli-diana tradicional, describe objetos geométricos que son autosemejantes o simétricos en escala. Esto significa que, cuando se amplifican tales objetos, sus partes guardan una semejanza exacta con el todo, prolongándose la similitud con las partes de las partes y así hasta el infinito. Los fractales, que es el nombre que se les da a estos objetos, carecen de simetría traslatoria, esto es, carecen de la suavidad asociada con líneas, planos y esferas euclidia-nas. En cambio, mantienen en cualquier escala un contorno rugoso y mellado. La palabra *fractal* proviene del verbo latino *frangere* (romper) y el adjetivo correspondiente *fractus* (irregular y fragmentado).

Fue Benoit B. Mandelbrot, matemático nacido en 1924 en Varsovia, Polonia, quien abrió nuestros ojos a la geometría fractal de la naturaleza. La geometría fractal es un nuevo lenguaje cuyos elementos son algoritmos que computacionalmente pueden expresarse en formas y estructuras. La esencia del mensaje de Mandelbrot es que muchas estructuras naturales con una aparente complejidad (tales como nubes, montañas, costas marinas, fallas tectónicas, sistemas vasculares, superficies fracturadas de distintos materiales, etc.), están caracterizadas por una invariancia de escala geométrica cuya dimensión fractal provee una adecuada descripción matemática del fenómeno en cuestión.

El fractal geométrico más simple es el conjunto ternario de Cantor (introducido por el brillante matemático alemán del siglo pasado Georg Cantor), que se muestra en la figura 1. Este conjunto se construye tomando un segmento cualquiera, se divide en tres partes iguales y se extrae la parte central. Este pro-

Directora del Centro de Matemática y Diseño, Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo, Universidad de Buenos Aires.
Dirección electrónica: vspinade@fibertel.com.ar; vwinit@fadu.uba.ar
Página web: http://www.fadu.uba.ar/mavdi

ceso se aplica reiterativamente en cada una de las dos partes restantes, luego en las cuatro siguientes y así sucesivamente, hasta que el objeto tenga un número infinito de partes, cada una de las cuales es infinitamente pequeña. El fractal geométrico así obtenido es autosemejante, ya que en cada iteración se han repetido los mismos pasos.

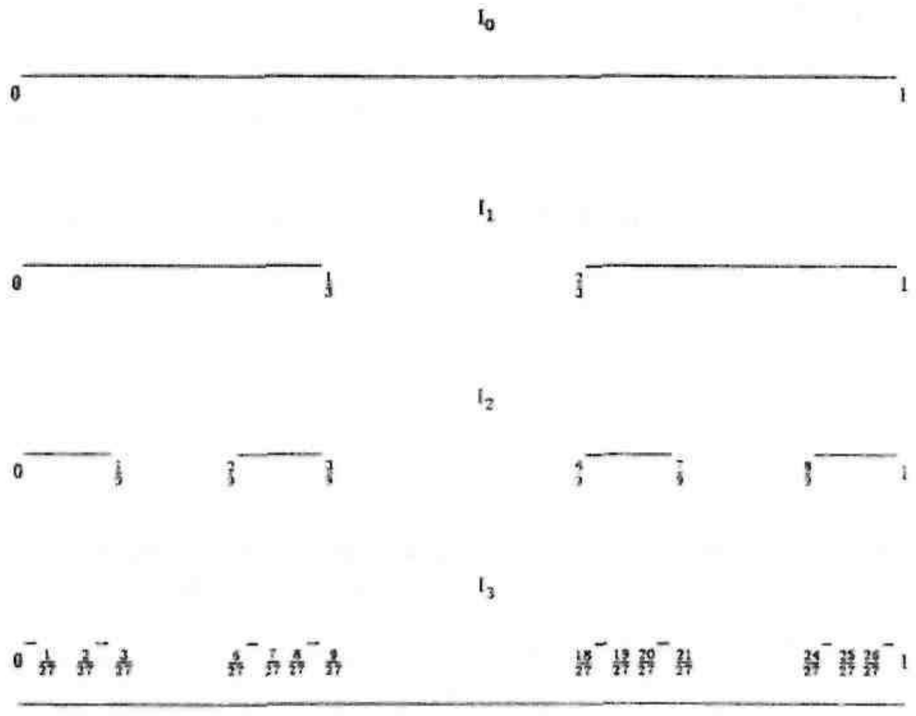


Figura 1. Conjunto ternario de Cantor

Fuente: SPINADEL, Vera W. de. *From de Golden Mean to Chaos.* Buenos Aires: Nueva Librería, 1998.

Los fractales no quedan, obviamente, relegados exclusivamente al reino de las construcciones matemáticas. Si se amplía un poco el concepto, tales objetos pueden ser identificados virtualmente en cualquier parte del mundo natural. La diferencia consiste en que los fractales "naturales" no son exactamente autosemej antes, sino tan sólo al azar, en forma estadística o estocástica. La forma rugosa revelada en una escala guarda únicamente una similitud aproximada con la obtenida en otra escala. Además, en los fractales naturales existen límites inferiores y superiores para el rango de escalas en las cuales estos objetos son verdaderamente fractales. Por debajo y por encima de este rango, las formas son rugosas (pero no autosemejantes) o suaves; en otras palabras, convencionalmente euclidianas.

Sean naturales o geométricos, todos los frac-tales poseen dimensiones fraccionarias. No coinciden, en general, con las dimensiones euclidianas que se miden con números enteros (0 es la dimensión de un punto, 1 es la dimensión de una línea, 2 es la dimensión de una figura plana, 3 es la dimensión de un cuerpo espacial). Esta dimensión fractal indica el grado según el cual el objeto fractal llena la dimensión euclidiana en la que está inmerso, esto es, la dimensión fractal es una medida de la irregularidad. Un fractal natural de dimensión 2,8, por ejemplo, tendría una forma de esponja aproximadamente tridimensional en apariencia. En cambio, un fractal natural de dimensión 2,2, sería un objeto mucho más suave que estaría muy cerca de parecer plano.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

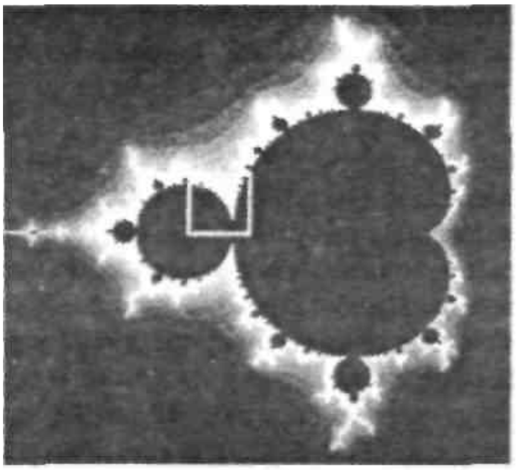
Los orígenes de la geometría fractal se remontan a fines del siglo XIX, cuando los matemáticos comenzaron a poner en tela de juicio los principios de Euclides. Las dimensiones fraccionarias no fueron discutidas hasta 1919, cuando el matemático alemán Félix Hausdorff se atrevió a conectar esta idea con la estructura a pequeña escala de formas matemáticas. Seguida por la dimensión inventada por el matemático ruso A. S. Besicovitch, la dimensión introducida por Hausdorff fue la antecesora directa de la dimensión fractal. La idea, totalmente revolucionaria, no fue, sin embargo, aceptada por otros matemáticos coetáneos, que consideraron dichas formas extrañas como "patologías" sin ninguna importancia.

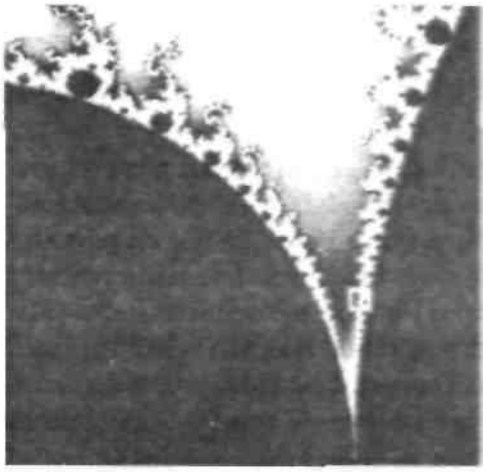
Esta actitud persistió hasta mediados del siglo XX, cuando Benoit B. Mandelbrot, que había emigrado de su Polonia natal a Francia, se mudó a Estados Unidos en 1958. Su trabajo sobre las semejanzas en las fluctuaciones a pequeña y gran escala en los precios del mercado de valores, publicado en 1961, fue seguido por una investigación sobre aquellos fenómenos que involucraban escalas no tradicionales, incluyendo el movimiento turbulento de los fluidos y la distribución de las galaxias en el Universo. Un trabajo publicado en 1967, debido al excéntrico meteorólogo inglés Lewis F. Richardson, demostró que la medida de la longitud de la costa de Inglaterra en diferentes escalas indicaba que las líneas costeras eran fractales cuya longitud aumentaba al incrementar el grado de detalle medible. En efecto, un mapa con una escala de 1:10.000.000 (1 cm corresponde a 100 km) simplemente mostraba menos detalle que uno en escala 1: 100.000. La conclusión obvia era que a medida que se ven más detalles, la longitud de la costa se hace más y más grande. Por supuesto, esto es cierto solamente si la forma de la costa se repite en cada escala y esto es lo que sucede en la realidad, estando caracterizadas las líneas costeras por dimensiones fractales que oscilan entre 1,15 y 1,25.

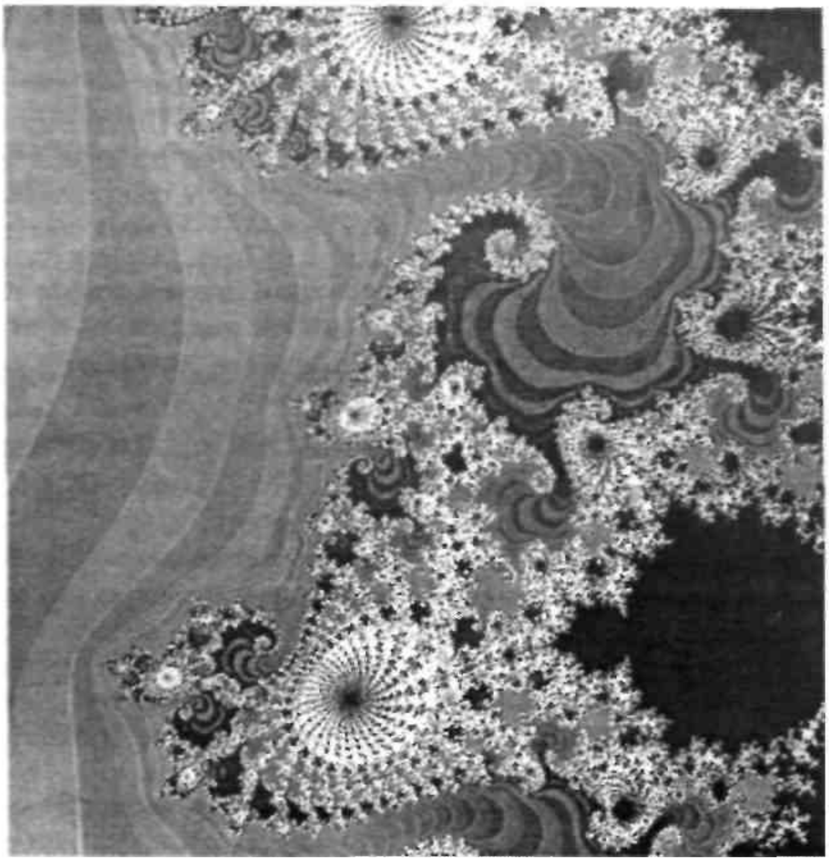
En 1975, Mandelbrot ya había desarrollado una caracterización de los fractales, como autosemejantes y de dimensión no necesariamente entera. Comenzó analizando iterativamente el fenómeno no lineal más simple posible, que es aquél en el que a cada punto de la pantalla de la computadora se le hace corresponder su cuadrado. El resultado se conoce con el nombre de *hombrecito-manzana* o *conjunto de Mandelbrot.* Siempre aparece coloreado en negro y su aspecto es el de la figura 2, en la cual es posible apreciar la auto-semejanza, a través de sucesivas ampliaciones. Sus propias investigaciones, más las de sus seguidores, hicieron que la geometría fractal se hiciera comprensible para una amplia audiencia. El tema comenzó a ganar importancia aceleradamente, tanto en las ciencias como en las artes.

Más tarde, Mandelbrot investigó otro tipo de fractales: formas distorsionadas al pasar de una escala a otra. Tales fractales son conocidos hoy en día como *multifractales,* ya que las relaciones entre sus partes están sujetas a cambios en cada iteración. Retienen algún tipo de autosemejanza, pero es una característica más local que global. La definición general de un fractal exige ser refinada para indicar con mayor precisión qué tipos de estructuras quedan incluidas en el término y cuáles no.

El más seductor de todos los fractales es sin duda alguna el conjunto de Mandelbrot, nombre propuesto por los físicos John Hubbard y Adrien Douady, en homenaje a su creador. Cuanto más se amplifica este conjunto, más impredictible se hace, hasta que la impredictibilidad domina la forma de cardioide (forma de corazón), que es el elemento mayor de estabilidad del mismo. El conjunto de Mandelbrot se ha convertido en el origen de numerosas y atractivas imágenes de *gráfica cotnputarizada.* Ello no obstante, este conjunto es importante también en otras disciplinas tales como la física, debido al rol preponderante que juega en la teoría de sistemas dinámicos no lineales.







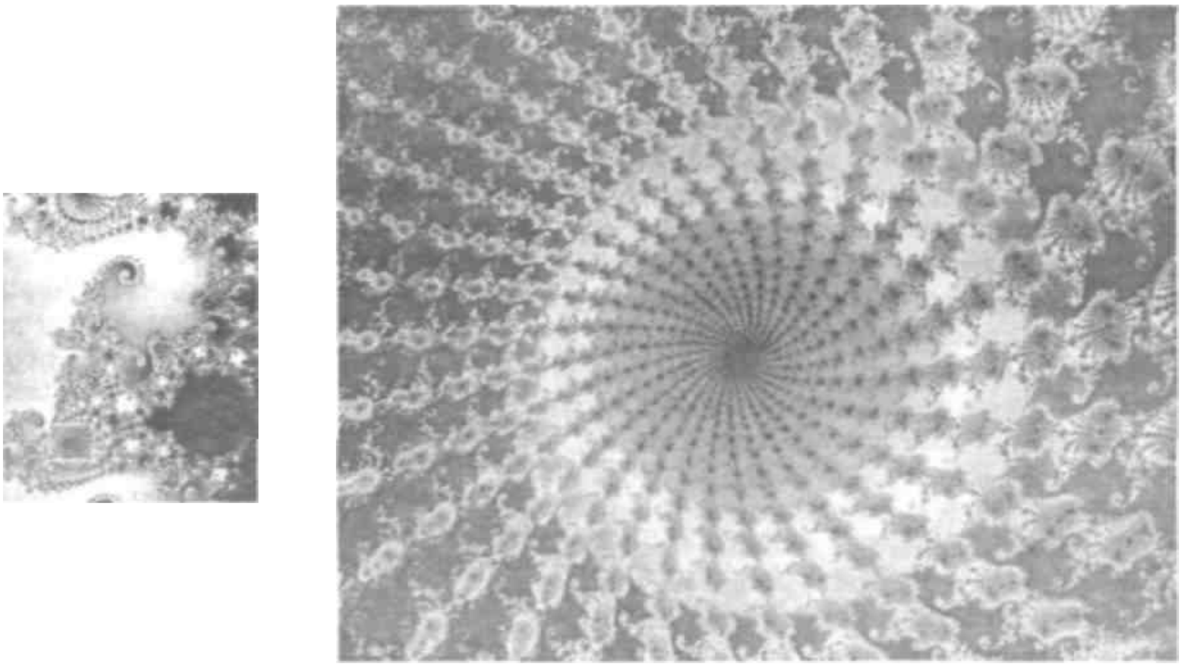


Figura 2.
Conjunto de Mandelbrot y sus sucesivas ampliaciones

El conjunto de Mandelbrot es, en realidad, un catálogo completo de objetos matemáticos dinámicos, esto es, objetos generados a través de un proceso iterativo llamado *proceso de Julia.* Este nombre deriva del trabajo de tesis realizado por el matemático francés Gastón Julia, en la década del veinte, sobre la iteración de transformaciones no lineales en el plano complejo. Interesante es mencionar que dicho trabajo de tesis no presenta *ningún* gráfico. Recién con el advenimiento de la tecnología informática, fue factible desarrollar este tema y admirar todo el esplendor de sus imágenes coloreadas.

IMPACTO EN LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

Los científicos de todo el mundo han comenzado a investigar el carácter fractal de un amplio espectro de fenómenos. Los investigadores se interesan en este tema, por la razón eminentemente práctica de que el comportamiento de una forma fractal puede diferir enormemente del de una forma euclidiana. De lejos, la disciplina más afectada por el descubrimiento de la geometría fractal ha sido la física.

En la física de la materia condensada o del estado sólido, por ejemplo, el modelo de *racimos de percolación,* usado para describir fenómenos críticos involucrados en las transiciones de fase y en las mezclas de átomos con propiedades opuestas, es claramente fractal. Esta circunstancia tiene, por supuesto, implicaciones y atributos que ayudan a comprender la verdadera esencia de los fenómenos físicos. El modelo de percolación puede, asimismo, aplicarse al análisis de la estructura atómica de los vidrios, geles y otros materiales amorfos. La importancia de este análisis radica en el hecho de que su naturaleza fractal puede conferirles a esos materiales propiedades de transporte de calor que pueden ser muy bien explotadas desde el punto de vista tecnológico.

Otra área fundamental de la física de la materia condensada en la cual se invoca el concepto de autosemejanza es la de *crecimiento cinético,* en el cual las partículas se agregan gradualmente a una estructura de manera tal que una vez que se adhieren a la misma, ni se despegan ni se reubican. En el caso del modelo más simple de crecimiento cinético, el fenómeno físico más preponderante al que se aplica el análisis fractal es la formación de los llamados *dedos* en la inferíase de un fluido menos viscoso (agua) con uno más viscoso (petróleo), estando alojados ambos en una sustancia porosa (barro y otros tipos de rocas). En esta técnica se basa la llamada *recuperación secundaria del petróleo.*

La física-matemática, por su lado, tiene un interés especial en los fractales. Cuando los sistemas dinámicos -sistemas que cambian su comportamiento con el tiempo- se convierten en totalmente impredictibles o *caóticos,* los físicos describen la ruta que se sigue para pasar del orden al caos mediante los fractales. Y en la detección de estos caminos utilizan los llamados *atractores extraños:* estos objetos no son entidades físicas reales, sino abstracciones que existen en el *espacio de las fases,* un espacio con tantas dimensiones como precisan los físicos para describir el comportamiento dinámico. Ün punto del espacio de las fases representa una sola medición del estado de un sistema dinámico, a medida que evoluciona con el transcurso del tiempo. Cuando todos estos puntos se unen entre sí, forman una trayectoria que se encuentra sobre la superficie de un atractor extraño. La mayoría de los físicos que estudian experimentalmen-te el caos, lo hacen a través de cuidadosas experiencias de laboratorio con flujos turbulentos de fluidos. Algunos atractores extraños han sido identificados en estos casos, sugiriendo la existencia de numerosas rutas que van del orden al caos.

Aunque no tan estrechamente conectadas con los fractales como la física, otras ciencias los han descubierto y aplicado. En biología, la velocidad de relajación térmica anómala de proteínas que contienen hierro, se explica tomando una estructura fractal para la cadena de polímeros que incluye todas las proteínas. El esquema de distribución de átomos sobre la superficie de la proteína también resulta ser de índole fractal.

Muchos otros fractales han sido detectados en geología, incluyendo tanto superficies exteriores estocásticas -por ejemplo, montañas y valles- como superficies interiores en la corteza terrestre, tales como la famosa falla tectónica de San Andrés en California, Estados Unidos.

Los terremotos de magnitud menor que 6 en la escala de Richter, también resultan ser procesos fractales en el tiempo, así como en el espacio, ya que estos movimientos sísmicos se producen en racimos autosemejantes y no a intervalos regulares.

La meteorología nos proporciona otro tipo de fractal espacio-temporal: el contorno del área sobre el cual caen lluvias tropicales es netamente autosemejante y la cantidad de agua que cae varía con el tiempo también en la misma forma.

Finalmente, en la inferíase de la ciencia y el arte, los especialistas en gráficas computa-rizadas, usando una original *técnica de recur-sión,* han producido nuevas imágenes fractales de gran complejidad estadística. Los paisajes construidos de esta manera han sido utilizados como fondo de muchos escenarios en obras de teatro, cine, video y televisión, en forma estática o animada.

CONCLUSIONES

La geometría fractal prueba que, a partir de la investigación, es posible establecer un puente entre el pensamiento científico racional y la emoción estética: estos dos modos de cognición de la especie humana están comenzando a concurrir en su estimación de lo que constituye la Naturaleza en la cual estamos inmersos.

La ciencia y la estética concuerdan en lo que falta en la actualidad a los objetos técnicos, cuando se los compara con los objetos naturales: falta el complemento de una dosis apropiada de irregularidad, desorden e impredictibilidad.

Esta nueva perspectiva podría quizás ayudarnos a conferirle a la tecnología, de la cual dependemos cada vez más para nuestra supervivencia, un aspecto más humano.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARNSLEY, Michael (1988). *Fractals everywhere.* Academic Press, Inc.

BIBLIOGRAFÍA

BUNDE, Armin y HAVLIN, Shlomo (ed.). *Fractals in Science.* Heidelberg: Springer-Verlag Berlín, 1994.

FLEISCHMANN, M; TILDESLEY, D. J. y BALL, R. C. (eds.). *Fractals in the Natural Sciences.* Princeton: Princeton University Press, 1989.

GLEICK, James. *Chaos, Making a New Science.* New York: Viking, 1987.

MANDELBROT, Benoit B. *The Fractal Geometry of Nature.* New York: W. H. Freeman and Co, 1982.

PEITGEN, H. O.; JUERGENS, H. y SAUPE, D. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science.* New York: Springer-Verlag Inc., 1992.

PERERA, J. G.; PERERA, J. H. y SPINADEL, Vera W. de. *Geometría fractal.* Buenos Aires: Editorial Nueva Librería, 1993.

RICHARDSON, Lewis F. "The problem of contiguity: An appendix of Statistics of deadly quarrels". In: *General Systems Yearbook.* Vol. 6. 1961. pp. 139-187.

SCHROEDER, Manfred. *Fractals, Chaos, Power Laws.* New York: W. H. Freeman and Co., 1991.

_________ *Number theory in Science and communication,* 3a ed. Springer-Verlag Berlin: Heidelberg, 1997.

SPINADEL, Vera W. de. *From the Golden Mean to Chaos.* Buenos Aires, Argentina: Nueva Librería, 1998.

VICSEK, Tamas. *Fractal Growth Phenomena.* Singapore: World Scientific Pubüshing Co., 1989.

REFERENCIA Q

SPINADEL, Vera W de. "Geometría fractal y geometría euclidiana". En: *Revista Educación y Pedagogía.* Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, No. 35, (enero-abril), 2003. pp. 85-91.

Original recibido: junio 2002

Aceptado: julio 2002