PERGE IMRE főiskolai tanársegéd:

NOMOGRAMMOK ALKALMAZÁSA AZ ELSŐRENDŰ KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK IRÁNYMEZEJÉNEK AZ ÁBRÁZOLÁSÁRA

Tekintsük az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenletet, ahol $f(x,y)$ az x, y sík egy bizonyos tartományán értelmezett függvény. Ez a differenciálegyenlet a tartomány minden egyes $P(x, y)$ pontjához egy iránytényezőt rendel, amellyel a differenciálegyenlet megoldása által meghatározott görbe érintője abban a pontban rendelkezik. Ha a tartomány minden egyes $P(x, y)$ pontjában az $f(x, y)$ érték által meghatározott érintő, irányát egy egyenesszakasszal, irányegyenesel ábrázoljuk, akkor egy iránymezőt nyerünk.

Az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet geometriai képe így azonban nem elég szemléletes. Bizonyos rendet vihetünk ebbe az értelmezésbe. Erre többféle lehetőség adódik. Ilyen például az a közismert módszer, miszerint csak azokat a görbéket vizsgáljuk, amelyeken

$$y' = f(x, y) = \text{const}$$

Ezeket a görbéket, amelyekhez azonos irányt rendel az adott differenciálegyenlet, izoklináknak nevezzük. Az izoklinák serege a differenciálegyenlet irányegyeneseit többé-kevésbé áttekinthető rendbe foglalja.

Heinrich Helmut egyik dolgozatában igen érdekes módszert ad az

$$y' = \frac{A_1 f_1 + B_1 g_1 + C_1}{A_2 f_2 + B_2 g_2 + C_2}$$

típusú differenciálegyenletek grafikus integrálására. Az iránymezőt nomogrammokkal jellemzi. Ezt követőleg 1938-ban megjelent dolgozatában ismét néhány eljárást közöl a differenciálegyenletek iránymezejének az ábrázolására, illetve annak geometriai leképzésére vonatkozóan. Az ő eredményeire támaszkodva foglalom össze, most már teljesen általános értelemben az

$$y' = f(x, y)$$

típusú közönséges differenciálegyenletek iránymezejének az ábrázolását nomogrammok segítségével. Előnye ennek az eljárásnak — amint az a később ismertetett feladatokból is kiderül —, hogy az esetek túlnyomó részében igen egyszerűen szolgáltatja a megoldásgörbéket.

Az iránymező általános fogalma alapján

$$y' = \operatorname{tg} \alpha \qquad \text{és} \qquad \operatorname{tg} \alpha = f(x, y)\,.$$

Az irányegyenes rögzítéséhez csak valamelyik két pontjának az ismerete szükséges. Legyen az u, v derékszögű koordinátarendszer tengelye az x, y tengellyel párhuzamos. Rendeljük továbbá a P_1 és P_2 pontokat az u, v rendszerben a $P(x, y)$ ponthoz olymódon, hogy $\overline{P_1P_2}$ irányegyenes legyen.

$$P_1 \text{ koordinátái } u = u_1 \quad ; \quad v = v_1$$
$$P_2 \text{ koordinátái } u = u_2 \quad ; \quad v = v_2$$

Ezek általában x és y függvényei, amelyekről feltételezzük, hogy egy bizonyos tartományban folytonosak, differenciálhatók és egyértelműek. Ez az

$$u = u_i(x, y) \quad ; \quad v = v_i(x, y) \qquad i = 1, 2$$

függvénypár az x, y síkot egyértelműen képezi le az u, v síkra. Az irányegyenes iránytényezője a mondottak alapján a $P(x, y)$ pontban

$$\operatorname{tg} \alpha \quad \frac{v_1(x, y) - v_2(x, y)}{u_1(x, y) - u_2(x, y)}$$

A $\overline{P_1P_2}$ irányegyenes által meghatározott iránymezőhöz tartozó differenciálegyenlet pedig

$$y' = \frac{v_1(x, y) - v_2(x, y)}{u_1(x, y) - u_2(x, y)}$$

Világos, hogy minden $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet ilyen alakú, vagy ilyen alakra hozható. Az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet iránymezejét viszont ilyen alakban P_1 és P_2 segítségével nomogrammokkal jellemezhetjük. A nomogrammok pedig gyakran olyan áttekinthetők, hogy segítségükkel közvetlenül, szemléletesen az integrálgörbe alakjára következtethetünk. Pl.

$$y' = f(x)$$

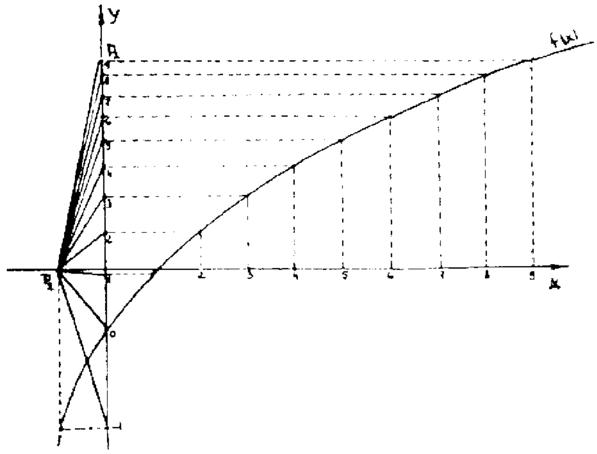
Legyenek az $u_1 = 0 \qquad v_1 = f(x) \quad ; \quad u_2 = -1 \qquad v_2 = 0$

vagyis $\qquad P_1(0, f(x) \qquad$ és $\qquad P_2(-1, 0)$

Ebben az esetben az u és v tengelyek egybeesnek az x, y tengellyel. Nyilvánvaló, hogy az

$$y' = \frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2} = f(x)$$

iránymezejét a $P_2(-1, 0)$ pont és az y tengelyen alkotott függvényskálája tökéletesen jellemzi



Általános értelemben — mivel leképezésről van szó — a leképező függvények tulajdonsága és így a nomogramm képe is a

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{és a} \quad D_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

leképezőmátrixok viselkedésétől függ. Általában egy ilyen

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

függvénymátrix rangja 0,1 vagy 2, aszerint, hogy

a) mind a négy eleme azonosan nulla,

b) a D determináns értéke azonosan nulla, de legalább egy eleme nem nulla,

c) a D determináns értéke nem nulla.

Az első esetben

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad u = \text{const}\,; \qquad v = \text{const}$$

vagyis az összes $P(x, y)$ pontnak a képpontja ugyanaz.

$$P'(u = \text{const}\,,\ v = \text{const})$$

A második esetben három lehetőség adódik:

1. u és v csak az x függvényei. Tehát

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u(x)}{\partial x} & 0 \\ \dfrac{\partial v(x)}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

vagyis a $P(x, y)$ pontok képpontjai egy — az x szerint számozott — görbén helyezkednek el.

2. Analóg eset az elsővel, amennyiben u és v csak az y függvényei és x és y szerepét kell felcserélni.

3. Az u és v mindketten x és y függvényei. Azonban a D determináns értéke nulla, ezért az analízis egyik közismert tétele alapján az u és v nem függetlenek egymástól.

Azaz $\qquad u = u(t); \qquad v = v(t) \qquad$ ahol $\qquad t = \varphi(x, y)$

vagyis a $P(x, y)$ pontok képgörbéjének paraméteres alakja $u = u(t)$; $v = v(t)$. t minden értékére megfelel egyrészt a képgörbe egy pontja, másrészt a $\varphi(x, y) = \text{const}$ görbesereg egy görbéje.

A harmadik esetben a determináns értéke nem nulla. Ennek következtében mivel a determináns értéke általában ismét csak x és y függvénye az x, y sík egy bizonyos tartományában nem vált előjelet. Ebben a tartományban egy görbehálónak, mint kép, ismét egy görbeháló felel meg. Különösen fontosak a koordinátarendszerek karakterisztikus görbeseregei, vagyis az $x = \text{const}$ és $y = \text{const}$, illetve polárkoordinátákban az $r = \text{const}$ és $\varphi = \text{const}$ vonalak.

Ha ilymódon a taglalt három lehetőséget figyelembe vesszük, akkor a mátrix rangja szerint,, mivel az x, y sík két különböző leképzése szerepel, az

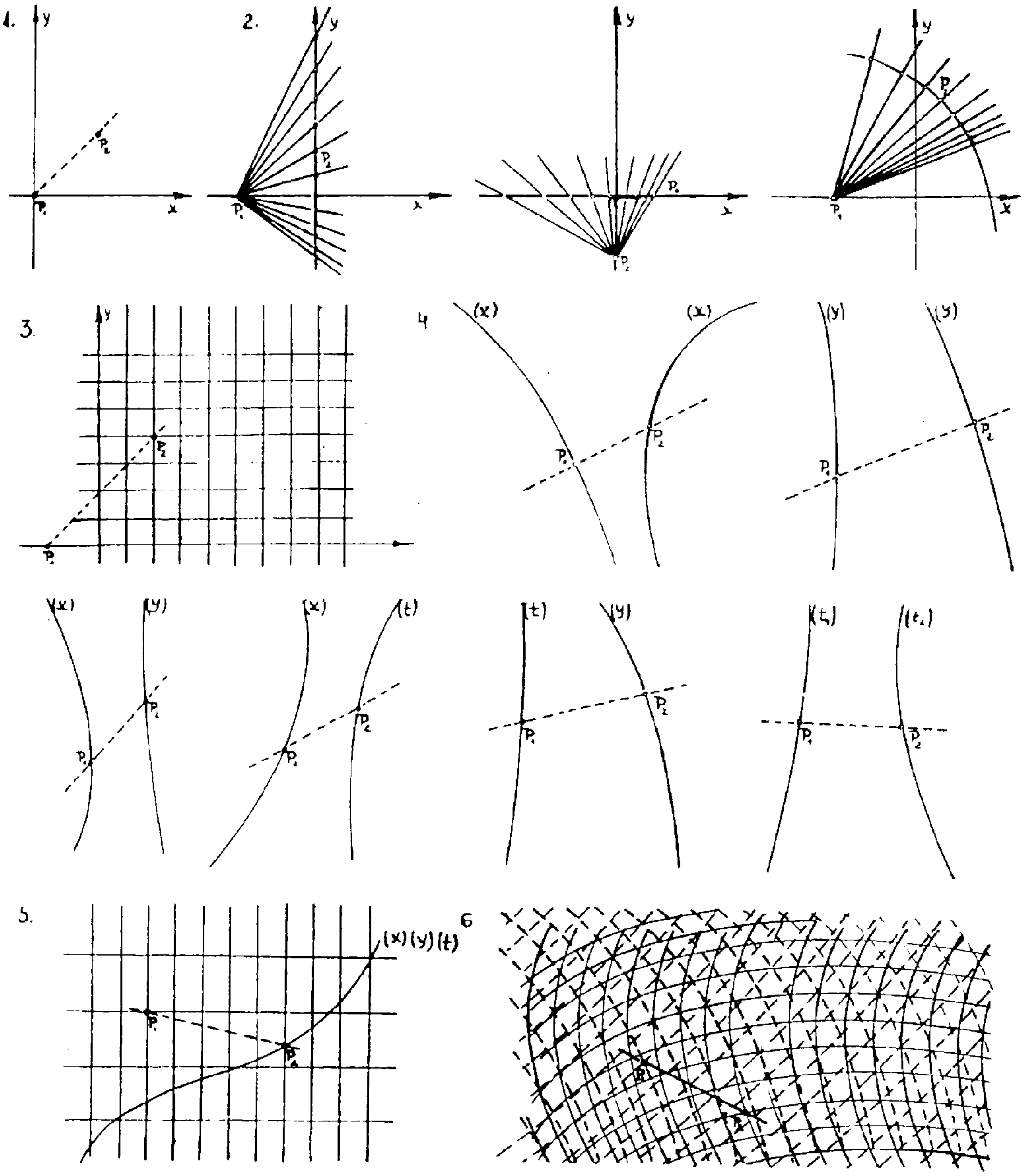
$$y' = \frac{v_1(x, y) - v_2(x, y)}{u_1(x, y) - u_2(x, y)}$$

differenciálegyenletben hat esettel számolhatunk:

Eset	1	2		3		4	5		6
Rang D_1	0	0	1	0	2	1	1	2	2
Rang D_2	0	1	0	2	0	1	2	1	2

1. Rang $D_1 = 0$ és rang $D_2 = 0$, ezért P_1 és P_2 két fix pont, azaz az összes irányegyenesek egybeesnek. A hozzátartozó differenciálegyenlet

$$y' = \text{const}.$$



2. Rang $D_1 = 0$ és rang $D_2 = 1$, vagy fordítva. $P_1(u_1 = \text{const}, v_1 = \text{const})$ egy rögzített pont. Az irányegyenesek P_2-vel e ponton át sugársort képeznek. A P_2 pont pedig egy görbén helyezkedik el. Emellett a következő a), b) és c) esetet különböztetjük meg.

a) $u_2 = u_2(x)$, $v_2 = v_2(x)$. Az iránysugár csak az x függvénye. Az iránymező nomogrammja egy P_1 fix pont és egy x szerint számozott függvényskála. A hozzátartozó differenciálegyenlet pedig

$$y' = \frac{v_1 - v_2(x)}{u_1 - u_2(x)} = f(x)$$

b) $u_2 = u_2(y)$, $v_2 = v_2(y)$. Az előzővel analóg eset.

c) $u_2 = u_2(t)$, $v_2 = v_2(t)$.

3. Rang $D_1 = 0$ és rang $D_2 = 2$ vagy fordítva. P_1 ismét egy fix pont az irányegyenesek serege egy sugársort képez. A differenciálegyenlet a következő alakú:

$$y' = \frac{u_1 - u_2(x, y)}{v_1 - v_2(x, y)}.$$

Az $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ leképzőfüggvények pedig egy vonalsereges nomogrammot határoznak meg.

4. Rang $D_1 = 1$ és rang $D_2 = 1$. Itt meglehetősen sok eset adódik. P_1 és P_2 vagy csak x, vagy csak y, vagy x és y függvénye. Az összes P_1 pontok egy görbén fekszenek és az összes P_2 pontok egy másik görbén és a két görbe mindegyike lehet x és y szerint skálázva, vagy $t = \varphi(x, y)$ szerint. Ebbe a csoportba tartozó differenciálegyenletek közül különösen fontos az

$$y' = \frac{v_1(x) - v_2(y)}{u_1(x) - u_2(y)}$$

típusú. A gyakorlatban leginkább előforduló differenciálegyenletek ebbe sorolhatók. A nomogrammok alkalmazása itt különösen nagy előnyt biztosít a grafikus integrálással szemben. A függvényskálák sok esetben egyenesek és az iránymezőt így különösen egyszerű előállítani.

5. Rang $D_1 = 1$ és rang $D_2 = 2$ vagy fordítva. Az idetartozó differenciálegyenlet iránymezejét jellemző nomogramm egy görbéből és egy görbehálóból áll.

6. Rang $D_1 = 2$ és rang $D_2 = 2$. A nomogramm itt két görbehálóból áll.

Említésre méltó még, hogy minden $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet

$$y' = \frac{v(x, y) - y}{u(x, y) - x}$$

alakra is hozható. Ezen összefüggés alapján az iránymező jellemzése az

$$u_1 = u(x, y) \quad ; \quad v_1 = v(x, y)$$

és

$$u_2 = x \qquad v_2 = y$$

leképezőfüggvények segítségével történik. Az iránymező P pontjai egyúttal a P_2 pont szerepét veszik át és a P_1 pontokkal együtt a $P(x, y)$ pontokhoz tartozó irányegyeneseket határozzák meg.

A problémához tartozik még annak a vizsgálata, hogy a differenciálegyenlet jobb oldalának a megváltoztatása milyen változást eszközöl az iránymezőben. Ennek a változtatásnak két igen fontos esete a következő:

a) Legyen $a(x, y)$ és $b(x, y)$ két tetszőleges függvény.

Tegyük fel, hogy

$$\bar{u}_i(x, y) = u_i(x, y) + a(x, y)$$
$$\bar{v}_i(x, y) = v_i(x, y) + b(x, y) \qquad i = 1, 2$$

akkor az

$$y' = \frac{v_1(x, y) - \bar{v}_2(x, y)}{u_1(x, y) - \bar{u}_2(x, y)}$$

differenciálegyenlet új ábrázolását kapjuk. Az iránymezőt most az u, v síkban

$$u = \bar{u}_1(x, y) \quad ; \quad v = v_1(x, y) \qquad P_1 \text{ képpontok}$$

és

$$u = u_2(x, y) \quad ; \quad v = \bar{v}_2(x, y) \qquad P_2 \text{ képpontok}$$

leképzésével ábrázoljuk. Az a és b geometriailag azt jelenti, hogy minden $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ pontpárt a P_1, P_2 megfelelő pontjaiból parallel eltolással kapjuk. Mivel pedig a és b mindkét pont ugyanazon eltolódását eszközli, ezért a $\bar{P}_1\bar{P}_2$ és P_1P_2 irányegyenesek párhuzamosak.

A $\bar{D}$ és D leképzőmátrixok különböző rangúak lehetnek. Jelöljük

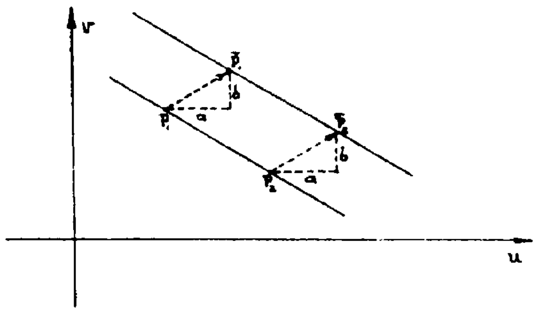
$$\Delta = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial a}{\partial y} \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix}$$

akkor

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial (u + a)}{\partial x} & \dfrac{\partial (u + a)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial (v + b)}{\partial x} & \dfrac{\partial (v + b)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + a_x & u_y + a_y \\ v_x + b_x & v_y + b_y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} = D + \Delta .$$

Tehát érvényes a $\bar{D} = D + \Delta$ mátrixegyenlet.



A leképződetermináns pedig

$$\det \bar{D} = \begin{vmatrix} u_x + a_x & u_y + a_y \\ v_x + b_x & v_y + b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} + \frac{\partial(a, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)}$$

vagyis a $$\det \bar{D} = \det D + \det A + \frac{\partial(a, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)}$$

egyenletet kapjuk. Jelentéktelen, ha $a = \text{const}$ és $b = \text{const}$, akkor ugyanis

$$\det \bar{D} = \det D, \qquad \text{illetve} \qquad \bar{D} = D.$$

Tehát semmi változást nem eszközöl. Gyakran előfordul azonban, hogy a differenciálegyenlet jobb oldalán csak a számlálót, vagy csak a nevezőt akarjuk átalakítani. Ez megfelel annak az esetnek, hogy vagy $a(x, y) = 0$ vagy $b(x, y) = 0$.

Ha $$a = 0\,,$$

akkor $$\det \bar{D} = \det D + \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)},$$

és ha $$b = 0\,,$$

akkor $$\det \bar{D} = \det D + \frac{\partial(a, v)}{\partial(x, y)}.$$

b) A második lehetséges átalakítás a multiplikátor segítségével történhet. Ha $m(x, y)$ egy tetszés szerinti nem azonosan nulla függvény, úgy

$$\bar{u}_i(x, y) = m(x, y)\, u_i(x, y)$$

és $$\bar{v}_i(x, y) = m(x, y)\, v_i(x, y) \qquad i = 1, 2$$

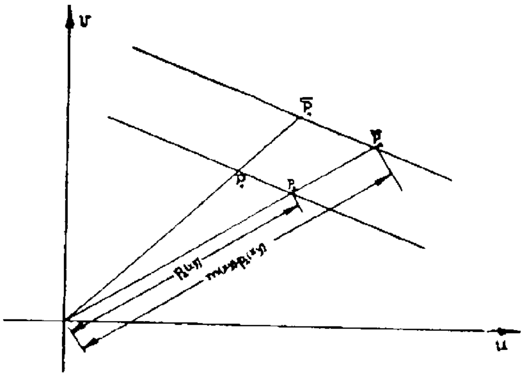
az $$y' = \frac{\bar{v}_1(x, y) - \bar{v}_2(x, y)}{\bar{u}_1(x, y) - \bar{u}_2(x, y)}$$

iránymezejének az ábrázolását adja, amelyet az u, v síkban az

$$u = \bar{u}_i(x, y) \quad ; \quad v = \bar{v}_i(x, y) \qquad \bar{P}_i \qquad i = 1, 2$$

képpontokkal ábrázolunk.

Az átalakítás geometriai jelentése egy, a nullpontból, mint középpontból kiinduló hasonlósági transzformáció, mely a P_1, P_2 pontpárt a megfelelő $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ pontpárba transzformálja, mégpedig olymódon, hogy a P_1P_2 és $\bar{P}_1\bar{P}_2$ egyenesek iránya azonos.



A leképzés itt is a leképzőmátrix rangjának a megváltoztatását eszközli

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(m \cdot u)}{\partial x} & \dfrac{\partial(m \cdot u)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial(v \cdot m)}{\partial x} & \dfrac{\partial(m \cdot v)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\det \bar{D} = \begin{vmatrix} m_x u + u_x m & m_y u + u_y m \\ m_x v + v_x m & m_y v + v_y m \end{vmatrix} =$$

$$= m \left| m\left(u_x v_y - v_x u_y\right) + u\left(m_x v_y - v_x m_y\right) - v\left(m_x u_y - u_x m_y\right) \right| =$$

$$= m \cdot \left\{ m \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} + u \begin{vmatrix} m_x & m_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} - v \begin{vmatrix} m_x & m_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix} \right\}$$

$$= m \left\{ m \cdot \det D + u \frac{\partial(m, v)}{\partial(x, y)} - v \frac{\partial(m, u)}{\partial(x, y)} \right\}$$

vagy más alakban

$$\det \bar{D} = \frac{\partial(m u, m v)}{\partial(x, y)} = m \begin{vmatrix} m & m_x & m_y \\ -u & u_x & u_y \\ -v & v_x & v_y \end{vmatrix}$$

Az $m = \text{const}$ eset azt jelenti, hogy az u, v síkban minden irányban egyenlő mértékváltozás történik.

$$\det \bar{D} = m \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ -u & u_x & u_y \\ v & v_x & v_y \end{vmatrix} = m^2 \cdot \det D$$

vagy

$$\bar{D} = m^2 D .$$

Magától értetődik, hogy egy differenciálegyenletben a két átalakítást egyidejűleg vagy egymásután is végrehajthatjuk. Ebben az esetben a leképződiterminánsra azt kapjuk, hogy

$$\det \overline{D} = \frac{\partial(m u + a,\ m v + b)}{\partial(x, y)} = m \begin{vmatrix} m & m_x & m_y \\ -u & u_x & u_y \\ v & v_x & x_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & m_x & m_y \\ -u & a_x & a_y \\ -v & b_x & b_y \end{vmatrix} +$$

$$- m \frac{\partial(a, v)}{\partial(x, y)} - m \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)},$$

amely $m = 1$ esetén az eltolásnak és $a = 0$; $b = 0$ esetén a hasonlósági transzformációnak felel meg.

Példák: 1.

Az

$$y' = \frac{y - x}{y + 2x}$$

differenciálegyenlet iránymezejét az

$$u_1 = y \quad ; \quad v_1 = y \qquad \text{vagyis } v_1 = u_1$$

$$u_2 = -2x \ ; \quad v_2 = x \qquad \text{vagyis } v_2 = \frac{-u_2}{2}$$

leképzőfüggvények segítségével egy x és egy y szerint számozott pontsoros nomogramm jellemzi.

2.

Az

$$y' = \frac{4x - y + 7}{2x + y - 1}$$

differenciálegyenletet

$$y' = \frac{-y - (-4x - 7)}{y - (-2x + 1)}$$

alakra hozva az iránymezejét az

$$u_1 = y \ ; \qquad v_1 = -y \ ; \qquad u_2 = -2x + 1 \ ; \qquad v_2 = -4x - 7$$

leképzőfüggvények segítségével két függvényskálával ábrázolhatjuk, amelyek a $v_1 = -u_1$ és $v_2 = 2u_2 - 9$ egyenesek.

3.

Az

$$y' = \frac{x^2 - y - 13}{x^2 + y^2 - 25}$$

differenciálegyenlet nomogrammja egy

$$v_2 = u_2 + 12 \qquad \text{egyenes}$$

és az

$$u_1 = -v^2{}_1 \qquad \text{parabola}$$

mely az

$$u_1 = -y^2 \qquad\qquad u_2 = x^2 - 25$$
$$v_1 = y \qquad \text{és az} \qquad v_2 = x^2 - 13$$

leképzőfüggvények segítségével nyerhető.

4.

Az

$$y' = \frac{2 - y^2}{x^2 - y}$$

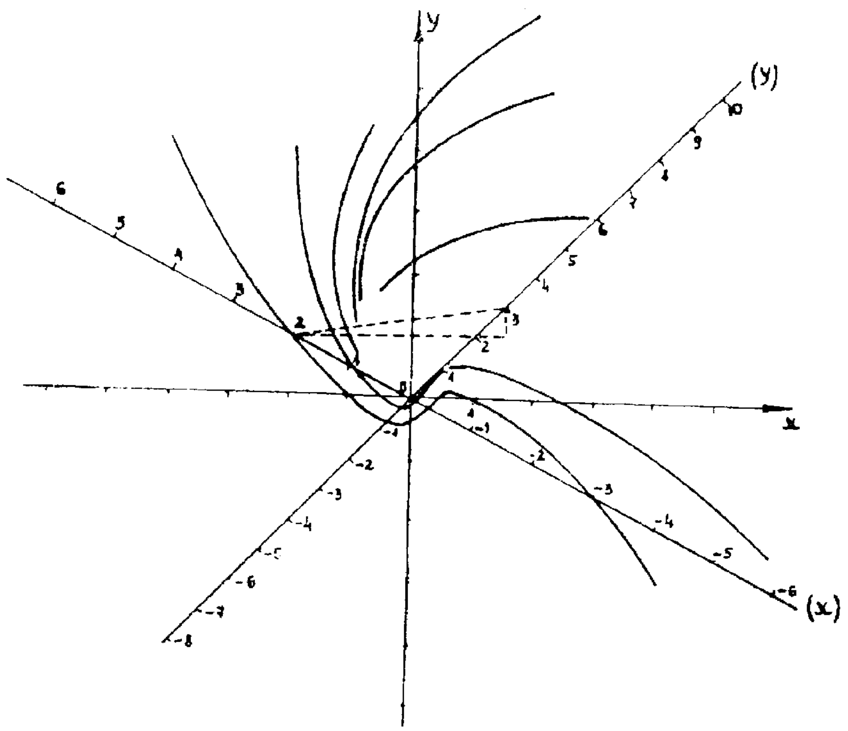
iránymezejét szintén két pontsoros nomogrammal jellemezhetjük, ahol

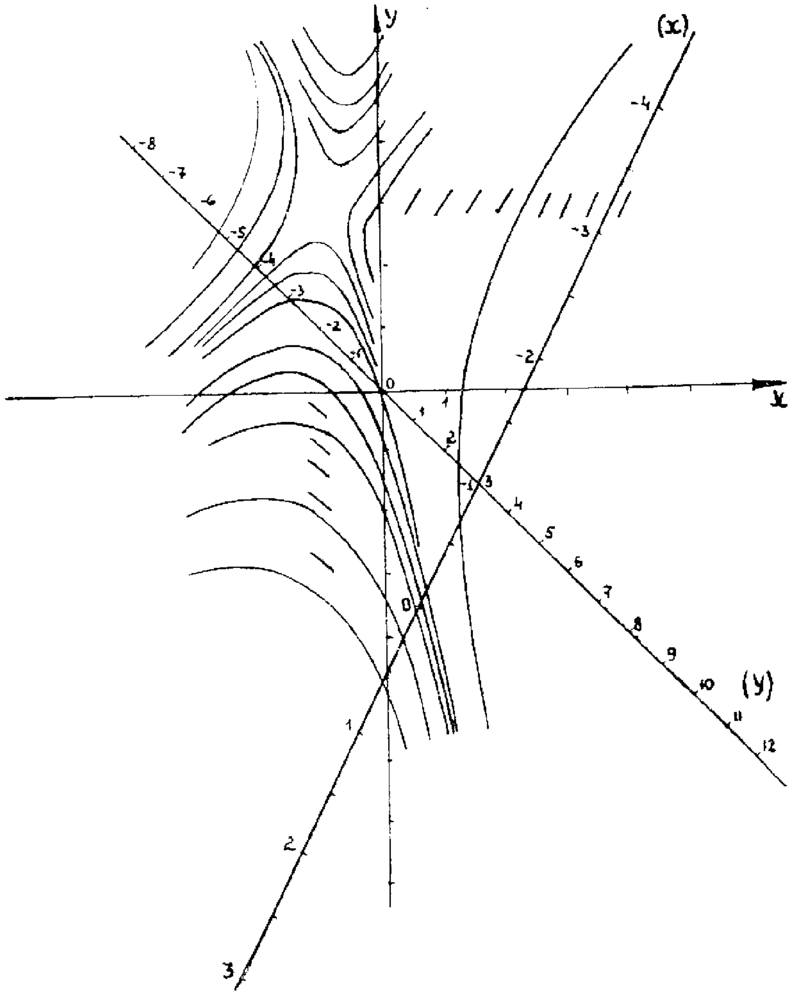
$$u_1 = -2 \qquad\qquad u_2 = y^2$$
$$v_1 = x^2 \qquad\qquad v_2 = y$$

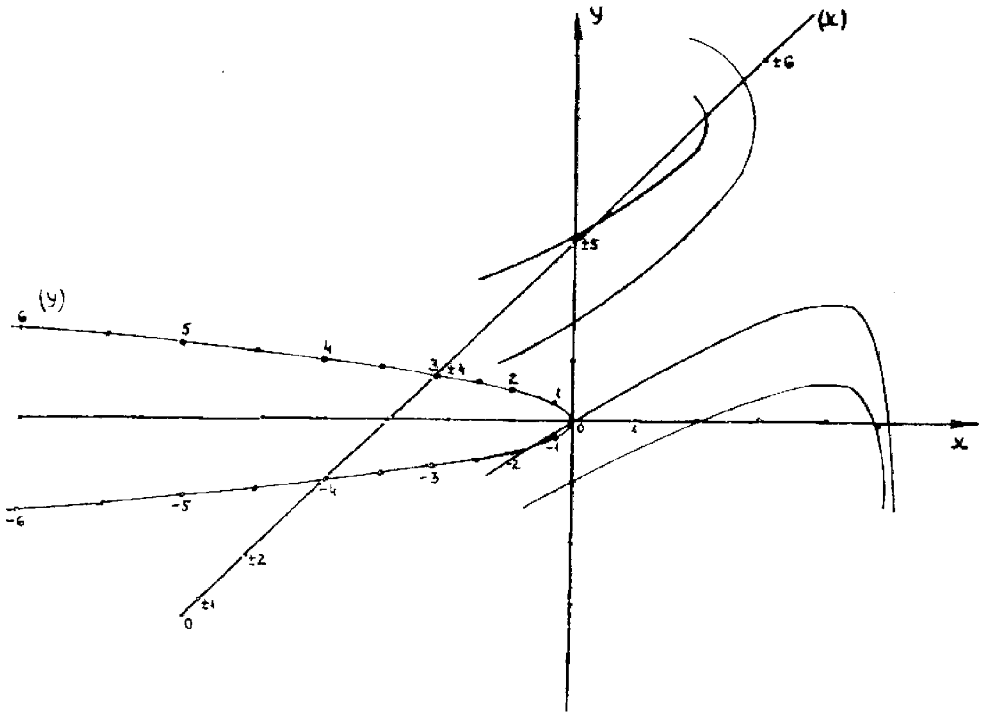
azaz

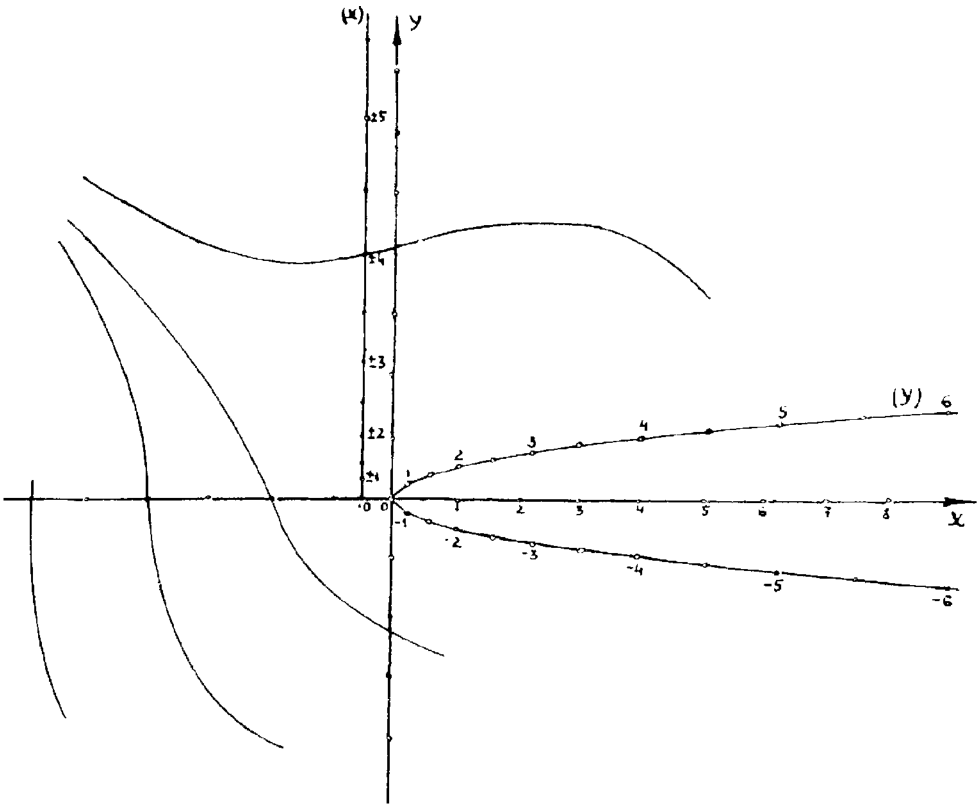
$$v_2 = \pm \sqrt{u_2}\,.$$

Az említett példák természetesen más osztályokba is sorolhatók. Az ábrákon nomogrammok segítségével megrajzolt integrálgörbék is láthatók első megközelítésben.




y
(x)
x
(y)
3
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
1
2
4
5
6
7
8
9
10
11
12


y
(x)
x
(y)
±6
±5
±4
±2
±1
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3
-4
-5
-6



IRODALOM

Heinrich: Die graphische integration von Differencialgleichungen

$$y' = \frac{A_1 f_1 + B_1 g_1 + C_1}{A_2 f_2 + B_2 g_2 + C_2}$$

mit nomographischen Hilfsmitteln.

W. Richter: Verwendung nomographischer Hilfsmittel für eine graphische Bestimmung der Bahnkurven bei der Längsbewegung eines Flugzeuges. Deutsche Math. 1938.

Kamke: Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen.