HÁROMSZÖGEK SZÖGEINEK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGÉRŐL

H. MOLNÁR SÁNDOR

Ismeretes, hogy ha egy c természetes szám primhatványtényezős felbontásában nem szerepel $4k + 3$ alakú primszám páratlan hatványon, akkor c felírható két négyzetszám összegeként: $c = u^2 + v^2$ (lásd pl [1] 102—105. oldal).

Ha $uv > 0$ akkor $a = 2uv$, $b = |u^2 - v^2|$ és c oldalakkal egészoldalú derékszögű háromszög szerkeszthető. Az ilyen tulajdonságú számhármast a továbbiakban (a_i, b_i, c_i)-vel jelöljük, az a_i, b_i, c_i egészoldalú derékszögű háromszög egyik hegyesszögét pedig

$$\Theta_i\text{-vel}\ \left(\Theta_i = \operatorname{arctg}\frac{a_i}{b_i}\quad \text{vagy}\ \Theta_i = \operatorname{arctg}\frac{b_i}{a_i}\right)$$

A továbbiakban feltesszük, hogy az a_i, b_i, c_i egészek relatív primek. Ha $c = 4k + 1$ alakú prim, akkor pontosan egy (a, b, c) számhármas van fenti tulajdonsággal, mert szempontunkból (a, b, c) és (b, a, c) egyenlőnek tekinthető.

Tekintsük a $4k + 1$ alakú primek egy n elemű halmazát és a hozzájuk mint átfogókhoz tartozó egészoldalú derékszögű háromszögek egy-egy Θ_i hegyesszögét. S. Chovla, P. Hartung és G. Sterling [2]-ben a következő kérdést vetette fel. Teljesül-e

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \Theta_i = 0 \tag{1}$$

racionális r_i számokkal a triviális $r_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ esettől eltekintve? A problémára a választ is megadták. Az $n = 2$ esetben bizonyították, hogy ha Θ_1 és Θ_2 egy p, illetve q átfogójú egészoldalú derékszögű háromszög hegyesszöge, ahol p és q különböző $4k + 1$ alakú primszámok, akkor Θ_1 és Θ_2 lineárisan függetlenek a racionális számok teste fölött, vagyis $r_1 \Theta_1 + r_2 \Theta_2 = 0$ racionális r_1, r_2 esetén akkor és csak akkor teljesül, ha $r_1 = r_2 = 0$. Utalnak rá, hogy tetszőleges $n > 2$ esetén analóg módon lehet bizonyítani.

A [3]-ban olyan egészoldalú derékszögű háromszögek hegyesszögeivel foglalkoztunk, melyeknek az átfogói nem feltétlenül primszámok. Megmutattuk, hogy a [2]-ben felvetett problémára a válasz nem nyilvánvaló. Bizonyítottuk ugyanis, hogy ha k és m tetszőlegesen adott pozitív egészek, akkor a $k\,\Theta_1 - m\,\Theta_2 = 0$ egyenletnek végtelen sok Θ_1, Θ_2 megoldása van az egészoldalú derékszögű háromszögek hegyesszögeinek a halmazában. Megmutattuk, hogy ha az adott $r_1, r_2, \ldots, r_n$ racionális számok között van pozitív is és regatív is, akkor (1) megoldható az egészoldalú derékszögű háromszögek hegyesszögeinek a halmazában. Bizonyítottuk azonban azt is, hogy páronként relatív prim átfogók esetén (1)-ből $r_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ következik, ami a [2]-ben megfogalmazott tétel általánosítása. Az $n = 2$ esetben megmutatuk, hogy a feltétel egy gyengébbel helyettesíthető, nevezetesen: Legyen Θ_1 és Θ_2 az (a_1, b_1, c_1), illetve az (a_2, b_2, c_2) egészoldalú derékszögű háromszög egy-egy hegyesszöge. Ha van olyan p primszám, mely a c_1 és c_2 átfogók közül pontosan az egyiknek osztója, akkor Θ_1 és Θ_2 lineárisan függetlenek a racionális számtest felett.

A [3]-ban még nem adtuk meg annak szükséges és elégséges feltételét, hogy két egészoldalú derékszögű háromszög egy-egy hegyesszöge lineárisan függő legyen a racionális számok teste fellett. A kritériumot jelen dolgozatban közöljük. Általánosítjuk továbbá a [3]-ban elért néhány eredményünket. Elégséges feltételt adunk arra, hogy két egészbefogójú derékszögű háromszög (melyek átfogójának mérőszáma lehet irracionális szám is) egy-egy hegyesszöge lineárisan független legyen a racionális számok teste fölött.

Elégséges feltételt adunk továbbá arra, hogy két egészoldalú, nem feltétlen derékszögű háromszög egy-egy 90°-tól különböző szöge lineárisan független legyen a racionális számok teste felett.

A továbbiakban (a, b, c)-vel, illetve (a_i, b_i, c_i)-vel jelöljük azt a háromszöget, mely oldalainak mérőszámai a, b, c, illetve a_i, b_i, c_i, függetlenül attól, hogy a háromszög derékszögű-e vagy sem, illetve attól, hogy az oldalak mérőszáma egész szám-e, vagy sem. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy az egészoldalú háromszögek oldalainak mérőszámai relatív primek, továbbá, ha (a, b, c) egy derékszögű háromszög, melyben a és b egész, akkor a és b relatív primek.

Az alábbi tételeket bizonyítjuk:

1. Tétel. Legyen Θ_1, illetve Θ_2 az (a_1, b_1, c_1), illetve az (a_2, b_2, c_2)egészoldalú derékszögű háromszög a_1, illetve a_2 befogóval szemközti szöge. A Θ_1 és Θ_2 akkor és csak akkor lineárisan függő a racionális számok teste felett, ha vannak olyan k és m pozitív egészek, melyekkel:

1°

$$c_1^k = c_2^m$$

2°

$$\sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \binom{k}{2j+1} (-1)^j \left(\frac{b_1}{c_1}\right)^{k-2j-1} \left(\frac{a_1}{c_1}\right)^{2j+1} = \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} \binom{m}{2j+1} (-1)^j \left(\frac{b_2}{c_2}\right)^{m-2j-1} \left(\frac{a_2}{c_2}\right)^{2j+1}$$

és

$$\sum_{j=0}^{[k/2]} \binom{k}{2j} (-1)^j \left(\frac{b_1}{c_1}\right)^{k-2j} \left(\frac{a_1}{c_1}\right)^{2j} = \sum_{j=0}^{[m/2]} \binom{m}{2j} (-1)^j \left(\frac{b_2}{c_2}\right)^{m-2j} \left(\frac{a_2}{c_2}\right)^{2j}$$

3°

$$|k\Theta'_1 - m\Theta'_2| < 1$$

feltételek teljesülnek, ahol Θ'_1 az $\arcsin \frac{a_1}{c_1}$ -nek a $[\lg k] + 1$-dik tizedesjegyig, míg a Θ'_2 az $\arcsin \frac{a_2}{c_2}$-nek a [lg m] + 1-dik tizedesjegyig kiszámított közelítő tizedestörtje.

2. Tétel. Legyen Θ_1, illetve Θ_2 az (a_1, b_1, c_1), illetve az (a_2, b_2, c_2) derékszögű háromszög egy-egy hegyesszöge, ahol az a_1, b_1, a_2, b_2 befogók egész számok, a c_1, c_2, átfogók pedig valós számok.
Ha van olyan p páratlan primszám, mely a c_1^2 és c_2^2 pozitív egész számok közül pontosan az egyiknek osztója, akkor Θ_1 és Θ_2 lineárisan függetlenek a racionális számtest felett.
3. Tétel. Legyen $\Theta_1 \neq 90°$ és $\Theta_2 \neq 90°$ az (a_1, b_1, c_1), illetve az (a_2, b_2, c_2) egészoldalú, nem feltétlen derékszögű háromszög egy-egy szöge. (Föltehetjük, hogy Θ_1 az a_1-el, Θ_2 pedig az a_2-vel szemközti szög.) Legyen

$$\frac{b_i^2 + c_i^2 - a_i^2}{2 \cdot b_i c_i} = \frac{s_i}{t_i}, \quad \text{ahol } (s_i, t_i) = 1, \ (i = 1,2).$$

Ha van olyan p páratlan primszám, mely a t_1 és t_2 közül pontosan az egyiket osztja, akkor Θ_1 és Θ_2 lineárisan függetlenek a racionális számtest felett.
A tételek bizonyításához két segédtételre van szükségünk.
1. Lemma. Legyenek az (a, b, c) derékszögű háromszög a, b befogói egészek, c átfogója egy valós szám és $(a, b) = 1$. Jelölje Θ a háromszög egyik hegyesszögét. Legyen $c^2 = 2^\alpha \cdot q$, q páratlan, α pedig nem negatív egész. Tetszőleges $k \neq 0$ egész szám esetén $\cos^2 k\Theta$ racionális szám és redukált alakjának nevezője páratlan c^2 esetén $c^{2|k|}$, páros c^2 esetén pedig $2^\beta \cdot q^k$ alakú, ahol β valamely $|\alpha k|$-nél kisebb nem-negatív egész.
2. Lemma. Legyen az (a, b, c) egészoldalú, nem feltétlen derékszögű háromszög a-val szemközti Θ szöge nem derékszög, és legyen

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{s}{t} \qquad (s, t) = 1.$$

Legyen $t = 2^\alpha \cdot q$ ahol q páratlan, α pedig nem-negatív egész szám.
Tetszőleges $k \neq 0$ egész szám estén $\cos k\Theta$ racionális szám és redukált alakjának nevezője páratlan t esetén $t^{|k|}$, páros t esetén pedig $= 2^\beta q^{|k|}$ alakú, ahol β valamely $|k\,\alpha|$-nél kisebb nem-negatív egész.
Rátérünk a bizonyításokra.

Az 1. Lemma bizonyítása: Feltehetjük, hogy Θ az a oldallal szemközti szöget jelöli, így $\cos \Theta = \frac{b}{c}$

Legyen először $k > 0$.
Ismert, hogy

(2)

$$\cos k\,\Theta = \binom{k}{0}\cos^k\Theta - \binom{k}{2}\cos^{k-2}\Theta\sin^2\Theta + \binom{k}{4}\cos^{k-4}\Theta\sin^4\Theta - + - \dots$$

ahonnan a $\sin^2\Theta = 1 - \cos^2\Theta$ összefüggés felhasználása után

$$\cos k\Theta = \pm 2^{k-1}\cos^k\Theta + P_{k-2}(\cos\Theta) = \frac{\pm 2^{k-1}b^k + c^2P'_{k-2}(b)}{c^k} \tag{3}$$

adódik, hogy $P_{k-2}(\cos\Theta)$ a $\cos\Theta$-nak, míg $P'_{k-2}(b)$ a b változónak k—2-ed fokú egész együtthatós polinomja. (3)-ból

$$\cos^2 k\Theta = \frac{2^{2k-2}b^{2k} \pm 2^k b^k c^2\,P'_{k-2}(b) + c^4P'^2_{k-2}(b)}{c^{2k}} \tag{4}$$

adódik. Mivel $(a, b) = 1$ miatt $(b^2, c^2) = 1$, így legfeljebb $2\alpha^k$-vel, vagy 2-nek α k-nál kisebb kitevős hatványával lehet egyszerűsíteni a (4) jobb oldalát. Tehát páratlan c^2 esetén (4) redukált alakjának nevezője c^{2k}, páros c^2 esetén a számláló minden tagja osztható 2-nek valamely pozitív egész kitevős hatványával. A tört egyszerűsítése után tehát a nevező $2^\beta q^k$ alakú lesz, ahol $0 \leq \beta < \alpha k$, ami az 1. Lemmát igazolja $k > 0$ esetben.
A $k < 0$ esetben $\cos(x) = \cos(-x)$ miatt igaz az állítás.

A 2. Lemma bizonyítása: Legyen először $k > 0$.
Az 1. Lemma bizonyításánál kapott (3) egyenlőség megfelelője most

$\cos\Theta = \frac{s}{t}$ miatt

$$\cos k\Theta = \frac{\pm 2^{k-1}s^k + t^2P'_{k-2}(s)}{t^k} \tag{5}$$

alakú, ahol $P'_{k-2}(s)$ az s változónak k—2-ed fokú egész együtthatós polinomja.

Ha t páros az $(s, t) = 1$ miatt, csak 2-nek α k-nál nem nagyobb pozitív egész kitevős hatványával lehet egyszerűsíteni. Páratlan t esetén (5) jobb oldalán $\cos k\,\Theta$ redukált alakja áll. Ebből hasonlóan, mint az 1. Lemma bizonyításánál, már következik az állítás.

Az 1. Tétel bizonyítása:
Tegyük fel, hogy

$$r_1\Theta_1 + r_2\Theta_2 = 0 \tag{6}$$

ahol r_1, r_2 zérustól különböző racionális számok, továbbá $\cos\Theta_1 = \frac{b_1}{c_1}$

$\cos\Theta_2 = \frac{b_2}{c_2}$, Ekkor vannak olyan k és m pozitív egészek, melyekkel

$$k\,\Theta_1 = m\,\Theta_2, \tag{7}$$

azaz

$$\cos k\,\Theta_1 = \cos m\,\Theta_2 \tag{8}$$

Felhasználva, hogy a háromszög oldalai relatív primek — s ilyenkor c_1 és c_2 páratlan — a 2. Lemma alapján $\cos k\,\Theta_1$ redukált alakja valamely d_1 egésszel

$$\cos k\,\Theta_1 = \frac{d_1}{c_1^k} \tag{9}$$

a $\cos m\,\Theta_2$ redukált alakja pedig valamely d_2 egésszel

$$\cos m\,\Theta_2 = \frac{d_2}{c_2^m} \tag{10}$$

A (8)-ból

$$\frac{d_1}{c_1^k} = \frac{d_2}{c_2^m} \tag{11}$$

adódik.

(11) mindkét oldalán redukált törtek állnak, ezért csak akkor állhat fenn egyenlőség, ha

$$c_1^k = c_2^m \tag{12}$$

s így 1° szükségességét igazoltuk.

A $k\,\Theta_1 = m\,\Theta_2$ esetén természetesen $\sin k\,\Theta_1 = \sin m\,\Theta_2$ és $\cos k\,\Theta_1 = \cos m\Theta_2$, ami ismert összefüggés szerint ekvivalens a 2°-ban szereplő két egyenlettel. így 2° szükségességét beláttuk.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\Theta''_1 = \Theta_1 - \Theta'_1 \qquad \text{és} \qquad \Theta''_2 = \Theta_2 - \Theta'_2$$

Mivel

$$0 < k\Theta''_1 < 1 \qquad \text{mert} \qquad 0 < \Theta''_1 < 10^{-[\lg k]-1}$$

és

$$0 < m\Theta''_2 < 1 \qquad \text{mert} \qquad 0 < \Theta''_2 < 10^{-[\lg m]-1}$$

és

$$k\Theta_1 - m\Theta_2 = 0, \quad \text{ezért}$$

$$|k\Theta'_1 - m\Theta'_2| = k(\Theta_1 - \Theta''_1) - m\,(\Theta_2 - \Theta''_2)| = \tag{12'}$$
$$= |m\Theta''_2 - k\Theta''_1| < 1$$

ami 3° szükségességét igazolja.

Tehát a feltételek valóban szükségesek. Bizonyítjuk, hogy elégségesek is.

Tegyük fel, hogy 1°, 2° és 3° feltételek teljesülnek.

A 2° feltétel ekvivalens a

$$\sin k\,\Theta_1 = \sin m\,\Theta_2$$

és

$$\cos k\,\Theta_1 = \cos m\,\Theta_2$$

feltételekkel, melyekből

$$k\,\Theta_1 \equiv m\,\Theta_2 \pmod{2\pi}$$

következik.
Másrészt 3°-ból

$$|k\Theta_1 - m\Theta_2| = |k\Theta'_1 + k\Theta''_1 - m\Theta'_2 - m\Theta''_2| \leqq$$
$$\leqq |k\Theta'_1 - m\Theta'_2| + |k\Theta''_1 - m\Theta''_2| < 1 + 1 = 2$$

adódik.
De

$$k\,\Theta_1 \equiv m\,\Theta_2 \pmod{2\pi}$$

és

$$|k\,\Theta_1 - m\,\Theta_2| < 2$$

viszont csak úgy teljesülhet egyidejűleg, ha

$$k\,\Theta_1 = m\,\Theta_2$$

vagyis Θ_1 és Θ_2 valóban lineárisan függőek a racionális számtest felett.

A 2. Tétel bizonyítása:

Tegyük fel, hogy vannak olyan $\frac{p}{q}$ és $\frac{r}{s}$ zérustól különböző racionális számok, hogy

$$\frac{p}{q}\,\Theta_1 + \frac{r}{s}\,\Theta_2 = 0. \tag{13}$$

Akkor vannak olyan *k* és *m* pozitív egész számok is $(k, m) = 1$ feltétellel úgy, hogy $k\,\Theta_1 = m\,\Theta_2$ és így

$$\cos^2 k\,\Theta_1 = \cos^2 m\,\Theta_2. \tag{14}$$

Az 1. Lemma alapján $\cos^2 k\,\Theta_1$ redukált alakjának nevezője c_1^2 összes páratlan primtényezőjével, a $\cos^2 m\,\Theta_2$ redukált alakjának nevezője pedig c_2^2 összes páratlan primtényezőjével osztható. Ekkor viszont nem állhat fenn a $\cos^2 k\,\Theta_1 = \cos^2 m\,\Theta_2$ egyenlőség, mert redukált alakjaik nevezői a tételben szereplő *p* tényezőben különböznek.

A 3. Tétel bizonyítása:

Tegyük fel, hogy a zérustól különböző $\frac{p}{q}$ és $\frac{s}{r}$ racionális számokkal fennáll a

$$\frac{p}{q}\Theta_1 + \frac{r}{s}\Theta_2 = 0$$

egyenlőség.
Ekkor találhatunk olyan *k* és *m* pozitív egész számokat, melyek relatív primek és melyekkel

$$k\,\Theta_1 = m\,\Theta_2,$$

és így

$$\cos k\,\Theta_1 = \cos m\,\Theta_2$$

teljesül.,

A 2. Lemma alapján $\cos k\,\Theta_1$ redukált alakjának nevezőjét a t_1 minden páratlan primtényezője, a $\cos m\,\Theta_2$ redukált alakjának nevezőjét pedig t_2 minden páratlan primtényezője osztja. De akkor a $\cos k\,\Theta_1 = \cos m\,\Theta_2$ egyenlőség nem állhat fenn, mert redukált alakjaik nevezői a tételben szereplő p tényezőben különböznek.

IRODALOM

1. Niven—Zuckerman: Bevezetés a számelméletbe, Műszaki Könyvkiadó Bp. 1978.
2. S. Chowla, P. Hartung, G. Sterling: On The Linear independence of certain numbers over the field of rationals Theori, and computing Boca Raton 1979, vol. I. Congr. Numeratium 23, pp. 261—262. (1979).
3. H. Molnár Sándor: Egészoldalú derékszögű háromszögek szögeiről, Matematikai Lapok (megjelenés alatt).

ON THE LINEAR INDEPENDENCE OF ANGLES OF TRIANGLES

by Sándor Molnár

(Summary)

Let a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ be sides of rectangular triangles so that
— a_i, b_i, c_i are integers and c_i, a_i, b_i are coprime
— c'_i s are distinct prime integers
— Θ_i is one of the acute angles of a triangle with sides a_i, b_i, c_i.

It is shown in [2] that Θ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ are linearly independent over the rational field. We studied this problem in [3] when c_i' s are not necessarily prime integers.

In this paper — in case $n = 2$ — we give a necessary and sufficient condition for the sides so that Θ'_i s are linearly dependent over the rationals. If the c_i' s are not necessarily integers then we prove a sufficient condition for the sides so that Θ_i $(i = 1, 2)$ are linearly independent over the rationals.

Among others we prove the following result.

Let a_1, b_1, c_1 and a_2, b_2, c_2 be sides of two arbitrary distinct triangles, let a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2)$ be integers and

$$\Theta_i = \arc\cos \frac{b_i^2 + c_i^2 - a_i^2}{2b_i\, c_i} = \arc\cos \frac{s_i}{t_i} \neq 90^\circ,$$

where $(s_i, t_i) = 1$ $(i = 1, 2)$. If there is an odd prime integer p, which divides exactly one of t_1 and t_2, then Θ_1 and Θ_2 are lincarly independent over the rationals.