

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

## UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Thèse présentée en vue de l'obtention du Diplôme de  
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES  
Option : ANALYSE NUMÉRIQUE ET OPTIMISATION  
Présentée par

**Ismahène Sehili**

TITRE

---

### Méthodes spectrales pour les problèmes aux limites.

(Méthodes numériques pour la résolution des EDP avec conditions limites).

---

Soutenue devant le jury composé de :

Zohir	Mokhtari	Pr	Univ.Biskra	Président
Abdelhamid	Zerroug	MCA	Univ.Biskra	Directeur de thèse
Azedine	Rahmoune	MCA	Univ.BBA	Co-directeur de thèse
Abdelbaki	Merouani	Pr	Univ.BBA	Examineur
Khelil	Nacer	MCA	Univ.Biskra	Examineur

---

# On Numerical Resolution of Boundary Value Problems Using Spectral Methods.

---

- ◇ Creation Of Two-Dimensional Legendre Basis And Some Properties.
- ◇ Bivariate Legendre Approximation.
- ◇ Two-dimensional Spectral Approximation.

AM Laboratory, University of Biskra, Algeria.

**Abstract.** In this work, we introduce a new two-dimensional polynomial basis for approximating bivariate functions. We start this construction by searching the eigenvalues of the Legendre differential equation in 2D, then this basis was constructed using a Rodrigues formula.

Efficient numerical results are obtained by the approximation of some bivariate functions in this basis, and compared by the least squares method with the Chebyshev polynomials. We propose, also, a generalization of the spectral Tau method in dimension 2, this method is generalized by the use of a new two-dimensional polynomial basis constructed by a three terms recurrence relation. We also present an estimation of error committed by the proposed method.

**Key words.** Two-dimensional Legendre basis, Rodrigues construction, Recurrence construction Approximation in 2D, Bi-spectral method, Error Estimation, Stability.

**Abstrait.** Dans ce travail, nous introduisons une nouvelle base polynomiale bidimensionnelle pour l'approximation des fonctions bivariées. Nous commençons cette construction en recherchant les valeurs propres de l'équation différentielle de Legendre en 2D, puis cette base a été construite en utilisant une formule de Rodrigues.

Des résultats numériques efficaces sont obtenus par l'approximation de certaines fonctions bivariées dans cette base, et comparés par la méthode des moindres carrés avec les polynômes de Chebyshev. Nous proposons, aussi, une généralisation de la méthode spectrale Tau en dimension 2, cette méthode est généralisée par l'utilisation d'une nouvelle base polynomiale bidimensionnelle construite par une relation de récurrence à trois termes. Nous présentons également une estimation de l'erreur commise par la méthode proposée.

**Mots clés.** Base bidimensionnelle de Legendre, Construction de Rodrigues, Construction de récurrence, Approximation en 2D, Méthode bi-spectrale, Estimation d'erreur, Stabilité.

# Remerciement

---

Je tiens tout d'abord à remercier Allah de m'avoir donné la patience pour accomplir ce petit travail.

Je voudrais remercier vivement mon promoteur **Dr.Abdelhamid ZERROUG** pour avoir accepté de diriger ce travail, pour sa gentillesse, sa bonne volonté, sa disponibilité et sa patience ainsi ces orientations et ces guidances avisés et son soutien indéfectible durant la préparation de ce travail, dès le début de sa confiance à mon égard et à mon travail m'a donnée une énergie et une inspiration de soulever toutes les difficultés.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à mon co-encadreur **Dr.Azedine RAHMOUNE** pour les conseils qu'il m'a prodigué durant mon parcours universitaire et le temps précieux qu'il m'a consacré durant ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à monsieur **Pr.Zohir MOKHTARI**, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.

Je remercie chaleureusement, monsieur **Pr.Abdelbaki MEROUANI**, et **Dr.Khelil NACER** de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de ce jury.

Mes remerciements vont à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail et plus particulièrement à monsieur **Naziheddine BELKACEM** et monsieur **Adel ABESS**.

Merci à toutes les personnes qui sont venues assister à ma soutenance.

# Dédicace

---

*À mon papa, mon marie Diddine  
et mon frère Ach.*

*À mes sœurs Loulou, Assoum  
et Minou.*

*À l'âme de ma mère ...*

*À ma petite Rahaf :)*

*Je dédie ce travail*

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1	Généralités sur les équations aux dérivées partielles . . . . .	5
1.1.1	Exemples d'équations aux dérivées partielles . . . . .	8
1.1.2	Conditions de Dirichlet, de Neumann et de Robin . . . . .	10
1.1.3	Modélisation, discrétisation et simulation numérique . . . . .	12
1.1.4	Consistance, convergence et stabilité . . . . .	13
1.1.5	Notion de stabilité . . . . .	13
1.2	Exemples de fonctions de base . . . . .	14
1.2.1	Polynômes orthogonaux de Chebychev . . . . .	15
1.2.2	Polynômes de Legendre . . . . .	20
1.2.3	Polynômes de Laguerre . . . . .	21
1.2.4	Polynômes de Hermite . . . . .	22
1.3	Fondements des méthodes spectrales . . . . .	23
1.3.1	Pourquoi les méthodes spectrales ? . . . . .	26
1.3.2	Décomposition spectrale . . . . .	26
1.3.3	Choix des fonctions de base . . . . .	28
1.3.4	Les deux royaumes . . . . .	30
1.3.5	La non-linéarité . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Méthodes spectrales de base</b>	<b>32</b>
2.1	Méthode de Galerkin . . . . .	33
2.2	Méthode Tau . . . . .	38
2.3	Méthode de collocation . . . . .	41
2.4	Méthode Tau-Collocation . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Exemples des méthodes spectrales</b>	<b>47</b>
3.1	Méthode de Fourier-Galerkin pour l'équation d'onde . . . . .	47
3.1.1	Stabilité et convergence . . . . .	50
3.2	Méthode de collocation Chebychev pour l'équation de la chaleur . . .	51
3.2.1	Stabilité et convergence . . . . .	55

3.3	Méthode de Tau-Legendre pour l'équation de Poisson . . . . .	58
3.4	Méthode spectrale de collocation pour les (EDP) paraboliques avec des conditions aux limites de Neumann . . . . .	61
3.4.1	Méthode pseudo-spectrale de Chebychev . . . . .	61
3.4.2	Résolution d'une équation parabolique . . . . .	63
3.4.3	Résultats numériques . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Base bidimensionnelle de Legendre et Approximation</b>	<b>67</b>
4.1	Introduction . . . . .	67
4.2	Première construction . . . . .	68
4.3	Construction de Rodrigues . . . . .	71
4.4	Construction récursive . . . . .	73
4.5	Formules de base . . . . .	73
4.6	Orthogonalité . . . . .	75
4.7	Différenciation d'un développement bidimensionnel de Legendre . . .	77
4.8	Exemples illustratifs . . . . .	78
4.9	Approximation de Tau-Legendre . . . . .	81
4.9.1	Contexte théorique . . . . .	81
4.9.2	Estimation d'erreur . . . . .	82
	<b>Bibliographie</b>	<b>103</b>

# Table des figures

---

1.1	Consistance, Convergence et Stabilité . . . . .	13
1.2	Premiers polynômes de Chebychev pair de la première espèce . . . . .	16
1.3	Premiers polynômes de Chebychev impair de la première espèce . . . . .	16
1.4	La suite $c_n$ . . . . .	17
1.5	La suite $d_n$ . . . . .	17
1.6	Premiers polynômes de Chebychev pair de la second espèce. . . . .	18
1.7	Premiers polynômes de Chebychev impair de la second espèce. . . . .	19
1.8	Premiers polynômes de Legendre pair . . . . .	20
1.9	Premiers polynômes de Legendre impair . . . . .	21
1.10	(solide) Solution exacte, (cercles) approximation à trois coefficients. . . . .	28
1.11	$u - u_2$ . . . . .	28
1.12	Approximation de la solution du problème (1.3.6), (1.3.7) . . . . .	28
1.13	Comparaison de solutions exacte et approximative (équation de diffusion non linéaire). . . . .	31
2.1	Segment de droite $D_k$ dans le carré $\varphi$ et la droite $\mathfrak{D}_k$ . . . . .	36
2.2	Projection de collocation d'une fonction $\nu \in \mathcal{H}$ . . . . .	42
2.3	Calcul des $b_k$ connaissant les $b_K$ . . . . .	43
3.1	Erreurs maximales pour le problème hyperbolique linéaire à $t = 2\pi$ pour le schéma Fourier-Galerkin et plusieurs schémas des différences finie. . . . .	50
3.2	Solutions numériques pour le problème hyperbolique linéaire à $t = 2\pi$ pour $N = 16$ par la méthode de Fourier Galerkin et plusieurs schémas des différences finie. . . . .	50
3.3	Erreurs maximales pour le problème de l'équation de la chaleur à $t = 1$ pour la collocation de Chebyshev et plusieurs schémas de différence finie. Le résultat de la troncature de Chebyshev est montré pour comparaison. . . . .	55
3.4	Erreurs maximales pour le problème de Poisson avec la méthode de Tau-Legendre et un schéma de différence finies du second ordre. . . . .	60
4.1	$P_{0,1}$ . . . . .	74
4.2	$P_{0,2}$ . . . . .	74



4.3	$P_{0,3}$	74
4.4	$P_{1,0}$	74
4.5	$P_{1,1}$	74
4.6	$P_{1,2}$	74
4.7	$P_{1,3}$	74
4.8	$P_{2,0}$	74
4.9	$P_{2,1}$	74
4.10	$P_{2,2}$	74
4.11	$P_{2,3}$	74
4.12	$P_{3,0}$	74
4.13	$P_{3,1}$	74
4.14	$P_{3,2}$	74
4.15	$P_{3,3}$	74
4.16	Premiers polynômes bidimensionnels de Legendre	74
4.17	Approx avec $N = 2$	80
4.18	Approx avec $N = 3$	80
4.19	Approx avec $N = 4$	80
4.20	Approx avec $N = 2, N = 3$ et $N = 4$	80
4.21	$f(x, y) = y e^x$	80
4.22	Approx avec $N = 12$	80
4.23	$f(x, y) = y^2 e^x$	81
4.24	Approx avec $N = 11$	81
4.25	$f(x, y) = xy \cos(y)$	81
4.26	Approx avec $N = 2$	81
4.27	$f(x, y) = y e^x$	81
4.28	Approx avec $N = 11$	81
4.29	$f(x, y) = \exp(x + y)$	81
4.30	Approx avec $N = 2^3$	81

# Liste des tableaux

---

1.1	Choix des fonctions de base. . . . .	29
2.1	Domaines d'application des méthodes spectrales. . . . .	45
2.2	Essai de classification du choix de la méthode pour des applications pratiques. . . . .	46
2.3	Fonctions de bases usuelles. . . . .	46
3.1	Erreur absolue pour différentes valeurs de $x$ et $t$ , PB(1). . . . .	66
3.2	Erreur absolue pour différentes valeurs de $x$ et $t$ , PB(2). . . . .	66
3.3	Erreur absolue pour différentes valeurs de $x$ et $t$ , PB(3). . . . .	66
4.1	Premiers polynômes de Legendre bidimensionnels . . . . .	71
4.2	Erreur d'approximation absolue et relative. . . . .	78
4.3	Erreur d'approximation quadratique. . . . .	79

# Introduction générale

---

Très peu d'équations différentielles sont solutionnées analytiquement. De plus chaque type d'équations requiert une méthode particulière de résolution. Par-suite, la résolution de la plupart de ces équations nécessite l'utilisation de méthodes numériques. Un aspect très intéressant de ces méthodes est que chacune d'elles peut-être appliquée à la résolution d'un très grand nombre d'équations différentielles.

Les méthodes numériques de résolution des équations différentielles jouent un rôle très important dans plusieurs domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de computation numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour résoudre les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui étaient difficiles à résoudre dans le passé.

Comme un outil pour les calculs à grande échelle en dynamique des fluides, les méthodes spectrales ont été initialement proposées en 1944 par *Blinova*, d'abord mis en œuvre en 1954 par *Silberman*, pratiquement abandonné au milieu des années 1960, ressuscité en 1969–70 par *Orszag* et par *Eliason*, *Machenhauer* et *Rasmussen*, développé pour des applications spécialisées dans les années 1970, doté des premières fondements mathématiques par les travaux séminaux de *Gottlieb* et *Orszag* en 1977, élargi à une classe plus large de problèmes dans les années 1980, et est entré dans le courant dominant du calcul scientifique en 1990.

Les promoteurs originaux des méthodes spectrales étaient des météorologues qui étudiaient la modélisation météorologique mondiale et des dynamistes des fluides qui étudient la turbulence isotrope. Les convertis qui ont été inspirés par les succès de ces pionniers sont restés, pour la plupart, confinés à ces domaines et étroitement liés tout au long des années 1970. Au cours de cette décennie, les méthodes spectrales semblaient bien adaptées uniquement aux problèmes régis par des équations différentielles ordinaires ou par des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites périodiques. Et, bien sûr, la solution elle-même devait être lisse. La théorie et les algorithmes des méthodes spectrales classiques (domaine unique) pour les problèmes lisses étaient déjà raisonnablement matures au milieu des années 1980. Du point de vue théorique, les résultats de la théorie d'approximation étaient disponibles pour des problèmes périodiques et non périodiques, des analyses de stabilité et de convergence étaient disponibles pour des problèmes linéaires stables et stationnaires, et des analyses numériques détaillées avaient été produites pour diverses applications de dynamique des fluides, et en particulier pour les équations de Navier-Stokes incompressibles.

Les progrès singuliers ont en effet été réalisés au cours des deux dernières décennies dans l'extension des méthodes spectrales à des géométries arbitraires, permettant ce que certains considéreraient comme le nirvana mathématique d'une méthode

d'ordre arbitrairement élevé pouvant s'appliquer à des problèmes de géométrie arbitraire. À cet égard, la trajectoire des méthodes spectrales au cours des 20 dernières années converge vers celle des méthodes d'éléments finis hp.

Ce processus de migration des méthodes spectrales mono-domaine vers multi-domaines a nécessité l'injection de nouveaux outils mathématiques et stimulé les directions d'investigation originales. Les mathématiques ont eu un impact profond sur la conception et l'interprétation correctes des méthodes, et dans certains cas, elles ont inspiré le développement de méthodes spectrales discontinues (telles que la méthode discontinue de Galerkin) même pour des problèmes continus.

L'un des changements les plus prononcés est que la forme forte des équations différentielles a perdu sa primauté en tant qu'ancre de la discrétisation du problème. Les méthodes spectrales multi-domaines sont abordées plus facilement et de manière fiable, à la fois algorithmiquement et théoriquement, à partir de formulations faibles des équations différentielles. De plus, l'utilisation de nombreux sous-domaines a motivé l'utilisation de degrés polynomiaux modérés dans chaque sous-domaine - petits du point de vue des méthodes spectrales classiques, mais larges du point de vue des méthodes des différences finies et des éléments finis. D'un point de vue théorique, de nouvelles estimations d'erreur ont été établies pour lesquelles les rôles du degré polynomial local et la taille géométrique des éléments locaux sont tous deux capturés. D'un point de vue algorithmique, le rôle des matrices a été étudié en détail.

Malgré ce changement de perspective majeur, les nouvelles méthodes spectrales multidomaines conservent certaines des caractéristiques (les plus souhaitables) des méthodes spectrales classiques - formules d'intégration gaussiennes, la dispersion faible et la facilité de pré-conditionnement par des matrices de discrétisation d'ordre bas.

Au cours des vingt dernières années, l'attrait des méthodes spectrales pour des applications telles que la dynamique des fluides computationnelle s'est développé, à la mesure de l'érosion de la plupart des obstacles à leur application plus large. Au-delà des techniques spécifiques, la culture des méthodes de haut niveau est entrée dans la connaissance de base des analystes numériques. Les méthodes spectrales ont été traditionnelles dans l'enseignement académique depuis les années 1990 et ont commencé à pénétrer les applications industrielles cette décennie. En effet, les méthodes spectrales sont aujourd'hui utilisées avec succès pour des applications très diverses, telles que la propagation des ondes (acoustiques, élastiques, sismiques et électromagnétiques), l'analyse solide et structurale, l'ingénierie marine, la biomécanique, l'astrophysique et même l'ingénierie financière. Dans l'environnement industriel (extra-académique), les codes spectraux sont appréciés, et souvent préférés, en raison des faibles erreurs de dissipation et de dispersion, de la manière soignée de traiter les conditions aux limites et, aujourd'hui, de la disponibilité de solveurs algébriques efficaces. un compromis favorable entre précision et coût de calcul.

Le but de ce travail est d'insister sur la pluridisciplinarité des méthodes rencontrées que l'on peut regrouper selon quatre axes :

- ◇ La modélisation mathématique, essentiellement la modélisation d'un problème de la physique, la mécanique des fluides, . . . , sous forme d'une équation différentielle.
- ◇ La théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations différentielles qui permet d'analyser le problème et d'exhiber des mé-

thodes efficaces d'approximation.

- ◊ L'analyse numérique, qui étudie ces méthodes, principalement dans le cadre des mathématiques discrètes (approximation des quantités qui se présentent sous le signe de différentiation via une décomposition spectrale, puis l'approximation numériques des systèmes différentielles.
- ◊ La programmation sur machine, qui retranscrit ses méthodes sous forme d'algorithmes efficaces.

Suivant ces axes normaux, ce travail est partagé en cinq parties

Chapitre 1 : Un petit rappel sur les équations différentielles aux dérivées partielles. Ce chapitre est une introduction à la terminologie et à la classification des équations différentielles aux dérivées partielles, qui a pour objectif, de familiariser le lecteur de cette thèse avec le concept d'équation différentielles aux dérivées partielles. Ainsi, nous y exposons certains modèles typiques pour voir où de telles équations sont issues. il est destiné aussi à fournir les outils de base nécessaire à la recherche sur les méthodes de résolution approchée.

Le deuxième chapitre fixe le cadre théorique de notre étude, représentant une introduction générale aux méthodes spectrales, notamment on verra l'aspect d'une méthode spectrale. Nous y discutons notamment les avantages de ces méthodes par rapport aux autres méthodes, les inconvénients, le principe général des méthodes spectrales, les méthodes spectrales et pseudo-spectrales, . . .

Dans le troisième chapitre, on décrit quelques méthodes spectrales (la méthodes de Galerkin et la méthode de Lanczos) et d'autres méthodes qu'on appelle les méthodes pseudo-spectrales (la méthode de collocation et de Tau-collocation). Ces techniques sont couramment utilisées pour la résolution d'un large éventail d'équations aux dérivées partielles. On essaye d'exposer à la fois la formulation intrinsèque de ces méthodes et leur application pratique à l'aide d'exemples.

Le quatrième chapitre traite l'application de certaines méthodes pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles, dans lequel nous illustrons la validation de ces méthodes par des exemples instructifs. Ainsi, une nouvelle méthode pour la résolution numérique des EDP paraboliques avec des conditions aux limites de Neumann, en utilisant une formule de collocation pour le calcul d'une matrice de différenciation dans les points de Chebychev-Gauss-Lobatto. Les résultats numériques obtenus par cette technique sont comparées avec la solution exacte pour voir l'efficacité de cette méthode.

Dans le dernier chapitre, nous introduisons une nouvelle base polynomiale bidimensionnelle pour l'approximation des fonctions bivariées. Nous commençons cette construction en recherchant les valeurs propres de l'équation différentielle de Legendre en 2D, puis cette base a été construite en utilisant une formule de Rodrigues. Des résultats numériques efficaces sont obtenus par l'approximation de certaines fonctions bivariées dans cette base, et comparés par la méthode des moindres carrés avec les polynômes de Chebychev. ce travail est publié sous le titre "*Creation of two-dimensional Legendre basis and some properties*" [*Asian Journal of Mathematics and Computer Research*].

Un autre article publié a la revue [*Journal of Applied Computer Science & Mathematics*], intitulé par "*Two-dimensional Spectral Approximation*", Nous présentons dans cet article une étude théorique de la stabilité et une estimation de l'erreur de la méthode spectrale polynômiale *Tau* dans la base bidimensionnelle construite.

On a aussi proposé une nouvelle formule pour la construction de la base bidi-

mensionnelle de Legendre par une relation de récurrence a trois termes, ainsi des formules des coefficients spectraux des dérivées d'ordre  $n$  d'une fonction a deux variables développée dans la base construite, se travail est publié sous le titre *Bivariate Legendre approximation [International Journal of Applied Mathematical Research]*.

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations différentielles aux dérivées partielles. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'(EDP) que l'on a pu les comprendre et aussi de comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises pour plusieurs phénomènes [9].

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des (EDP), c'est que la plupart de ces équations ne sont pas soluble explicitement. Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est à dire si une ou plusieurs solutions existent, on peut avoir les approximations numériquement.

L'apparition d'ordinateurs extrêmement puissants permet néanmoins aujourd'hui d'obtenir des solutions approchées pour des équations différentielles aux dérivées partielles (même très compliquées). Et le rôle des mathématiciens sera alors de construire des schémas numériques d'approximation.

## 1.1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles

### Quand sont apparues les (EDP) ?

Elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17<sup>ème</sup> siècle (*Newton, Leibniz, ...*). Ensuite le "catalogue" des (EDP) s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'*Euler*, puis ceux de *Navier* et *Stokes*, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de *Fourier* pour l'équation de la chaleur, de *Maxwell* pour celles de l'électromagnétisme, de *Schrödinger* et *Heisenberg* pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr d'*Einstein* pour les (EDP) de la théorie de la relativité.

L'étude systématique des (EDP) est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20<sup>ème</sup> siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal

nécessaire. Un pas de géant a été accompli par *L. Schwartz* lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est dû à *L. Hörmander* pour la mise au point du calcul pseudo-différentiel (au début des années 1970).

Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des (EDP) reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21ème siècle. D'ailleurs ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes [9, 10].

## Définitions

En calcul différentielles, **une équation aux dérivées partielles** (EDP) est une équation dont les solutions sont des fonctions vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.

Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables

$$(x, y, \dots) \mapsto u(x, y, \dots).$$

Une (EDP) est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de  $u$ .

- Une (EDP) à souvent de très nombreuses solutions, les conditions aux limites restreignent l'ensemble des solutions.

Une équation différentielle très simple est :  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , où  $u$  est une fonction inconnue de  $x$  et  $y$ , cette relation implique que les valeurs  $u(x, y)$  sont indépendantes de  $x$ . Les solutions de cette équation sont  $u(x, y) = f(y)$ .

L'équation ordinaire :  $\frac{du}{dx} = 0$  a pour solution  $u(x) = c$ , avec  $c$  une valeur constante (indépendante de  $x$ ).

- Ces deux exemples illustrent qu'en général, la solution d'une (EDO) met en jeu une constante arbitraire, tandis que les (EDP) mettent en jeu des fonctions arbitraires.
- Dans le cas de deux variables, une (EDP) **d'ordre 1** s'écrit sous la forme

$$F(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)) = 0. \quad (1.1.1)$$

- Une équation du **second ordre** s'écrit comme

$$F(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)) = 0. \quad (1.1.2)$$

Plus généralement, on peut considérer des équations mettant en jeu des dérivées  $\partial_x^{m_j} \partial_y^{n_j} u$

- **L'ordre** d'une (EDP) est alors le plus grand ordre de dérivation  $m_j + n_j$  qui apparaît dans l'équation.
- **Résoudre** une (EDP) dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d$  est le nombre de variables), c'est de trouver une fonction suffisamment différentiable dans  $\Omega$ , telle que l'équation soit satisfaite pour toutes les valeurs des variables dans  $\Omega$ .
- Comme pour les (EDO), on parle d'(EDP) **linéaires** ou **non-linéaires**. Pour mieux comprendre de quoi il s'agit, il est commode de parler de l'opérateur



aux dérivées partielles associé à une (EDP). Il s'agit de l'application qui à une fonction  $u$  associe le membre de gauche de l'(EDP).

On dit que l'(EDP) est **linéaire** lorsque l'opérateur  $P$  qui lui est associé l'est, c'est à dire que, pour toutes fonctions  $u, v$  « gentilles » et

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad P(\alpha u + \beta v) = \alpha P(u) + \beta P(v).$$

- On parle également d'(EDP) linéaire **homogène** lorsque la fonction nulle  $u = 0$  est solution. En d'autres termes tous les termes de l'équation contiennent la fonction inconnue ou l'une de ses dérivées partielles.
- Comme pour les (EDO), les (EDP) linéaires homogènes ont une propriété particulière, communément appelé **principe de superposition** : toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution.
- Enfin lorsque l'on ajoute à une solution d'une (EDP) linéaire inhomogène une solution quelconque de l'(EDP) homogène associée, on obtient encore une solution de l'(EDP) inhomogène.

## Classification des (EDP) linéaires du second ordre

Nous allons contenter d'(EDP) linéaires du second ordre.

On pose  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , une équation aux dérivées partielles du second ordre sera de la forme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(X) + \sum_{i=1}^n B_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = G(X),$$

avec  $A_{i,j}, B_i, C, G$  des fonctions indépendantes de  $u$  ne s'annulant pas toutes simultanément dans  $\mathbb{R}^n$ . Si nous nous limitons dans  $\mathbb{R}^2$ , c'est à dire  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  l'égalité précédemment posée prend la forme de

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y),$$

la classe d'une telle équation est déterminée par le calcul de

$$\Delta = B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0).$$

1. Si  $\Delta < 0$ , on parle d'une équation **elliptique**.
2. Si  $\Delta = 0$ , l'(EDP) est dite **parabolique**.
3. Si  $\Delta > 0$ , on a une équation **hyperbolique**.

### Remarque 1.1

la terminologie utilisée dans cette définition est basée sur la classification des coniques du plan. On rappelle que la conique d'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

est une hyperbole (resp. une parabole, une ellipse) si et seulement si  $B^2 - 4AC$  est positif (resp. nul, négatif) [21].

## Équations elliptiques

Les équations elliptiques régissent les problèmes stationnaires, d'équilibre, généralement définis sur un domaine spatial borné  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites, le plus souvent de type Dirichlet ou Neumann. Le problème elliptique type est celui fourni par l'équation de Laplace (ou de Poisson) soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0 & \text{dans } \Gamma. \end{cases}$$

## Équations paraboliques

Les équations paraboliques régissent les problèmes d'évolution ou instationnaires dans lesquels intervient le mécanisme de diffusion ou de dissipation. Ces problèmes sont généralement définis sur un domaine spatial borné  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites du même type qu'en elliptique (quelquefois elles-mêmes instationnaires), ainsi qu'à des conditions initiales.

Le problème elliptique type est celui fourni par l'équation de la chaleur soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet, ainsi qu'à des conditions initiales :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{dans } \Omega, \\ T = T_0 & \text{dans } \Gamma, \\ T(x, 0) = f(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

## Équations hyperboliques

Les équations hyperboliques modélisent la propagation d'ondes sans dissipation.

**En linéaire**, c'est par exemple la propagation du son dans un milieu homogène. En électromagnétisme, les équations de Maxwell sont hyperboliques et linéaires.

**En non linéaire**, les équations hyperboliques sont l'expression de lois de conservation. Par exemple, les équations d'Euler expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale dans un fluide parfait compressible.

### 1.1.1 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Voici quelques exemples d'équations sur lesquelles peuvent facilement être testées les méthodes dont il sera question dans les chapitres suivants [34]

#### 1. Équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

où  $u(x, y, z)$  désigne la fonction inconnue.

#### 2. Équation de propagation (ou équation des cordes vibrantes)

Cette EDP, appelée équation de propagation des ondes, décrit les phénomènes de propagation des ondes sonores et les ondes électromagnétiques.

La fonction d'onde inconnue est notée par  $u(x, y, z, t)$ ,  $t$  représente le temps :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

le nombre  $c$  représente la vitesse de propagation de l'onde  $u$ .

En notation d'analyse vectoriel, en utilisant l'opérateur Laplacien  $\Delta$  ; Soit  $\psi \equiv u(x, y, z)$  fonction d'onde, alors l'EDP de Laplace sera :

$$\Delta\psi = 0,$$

et l'équation de propagation sera :

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

### 3. Équation de Fourier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t},$$

cette EDP est également appelée équation de la chaleur. La fonction  $u$  représente la température, la dérivée d'ordre 1 par rapport au temps traduit l'irréversibilité du phénomène. Le nombre  $\nu$  appelé diffusivité thermique du milieu.

On notation d'analyse vectoriel l'équation de la chaleur est :

$$\Delta\psi = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

### 4. Équation de Poisson

En analyse vectorielle, l'équation de Poisson<sup>1</sup> est l'équation aux dérivées partielles du second ordre suivante

$$\Delta u = f,$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien et  $f$  est une fonction généralement donnée. Sur un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  et de frontière régulière, le problème de trouver  $u$  à partir de  $f$  et satisfaisant certaines conditions aux limites appropriées est un problème bien posé (la solution existe et unique).

L'équation de Poisson étant insensible à l'ajout sur  $u$  d'une fonction satisfaisant l'équation de Laplace, une condition aux limites est nécessaire pour espérer l'unicité de la solution, par exemple les conditions de Dirichlet, celles de Neumann, ou des conditions mixtes sur des portions de frontière

### 5. Équation de Burgers

L'équation de Burgers est une équation aux dérivées partielles fondamentale issue de la mécanique des fluides. Elle apparaît dans divers domaines des mathématiques appliquées, comme la modélisation de la dynamique des gaz ou du trafic routier. Elle doit son nom à Johannes Martinus Burgers (1895 – 1981).

En notant  $u$  la vitesse, et  $\nu$  le coefficient de viscosité, la forme générale de l'équation de Burgers est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

quand  $\nu = 0$ , l'équation de Burgers devient l'équation de Burgers sans viscosité :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

---

1. Nommée en l'honneur du mathématicien et physicien français Siméon Denis Poisson

## 6. Équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger, conçue par le physicien autrichien Erwin Schrödinger en 1925, est une équation fondamentale en mécanique quantique. Elle décrit l'évolution dans le temps d'une particule massive non relativiste, et remplit ainsi le même rôle que la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique. La forme générale de l'équation de Schrödinger est :

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right] \psi.$$

### 1.1.2 Conditions de Dirichlet, de Neumann et de Robin

#### Conditions de Dirichlet

En mathématiques, *une condition aux limites de Dirichlet* est imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine.

Pour une équation différentielle ordinaire, par exemple

$$y'' + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle  $[a, b]$  s'exprime par :

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres donnés.

Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple

$$\Delta y + y = 0,$$

où  $\Delta$  est le Laplacien (opérateur différentiel), la condition aux limites de Dirichlet sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  s'exprime par

$$y(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

où  $f$  est une fonction connue définie sur la frontière  $\partial\Omega$ .

#### Conditions de Neumann

En mathématiques, *une condition aux limites de Neumann*<sup>2</sup> est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine.

Pour une équation différentielle, par exemple

$$y'' + y = 0,$$

la condition aux limites de Neumann sur l'intervalle  $[a, b]$  s'exprime par

$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta.$$

---

2. nommée d'après Carl Neumann

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres donnés.

Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple

$$\Delta y + y = 0,$$

où  $\Delta$  est le Laplacien (opérateur différentiel), la condition aux limites de Neumann sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  s'exprime par :

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}}(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

où  $f$  est une fonction scalaire connue définie sur la limite  $\partial\Omega$  et  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la frontière  $\partial\Omega$ . La dérivée normale dans le membre de gauche de l'équation, est définie par

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}}(x) = \overrightarrow{\text{grad}} y(x) \cdot \vec{n}(x).$$

## Conditions de Robin

En mathématique, *une condition aux limites de Robin*<sup>3</sup> (ou de troisième type) est un type de condition aux limites .

Elle est également appelée *condition aux limites de Fourier*. Imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles, il s'agit d'une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine [33].

*Une condition aux limites de Robin* est une combinaison pondérée d'une *condition aux limites de Dirichlet* et d'une *condition aux limites de Neumann*. Ceci contraste avec la condition aux limites mêlée, constituée de conditions aux limites de types différents imposées chacune sur une partie du bord du domaine. La condition aux limites de Robin est aussi appelée condition d'impédance, en raison de son rôle dans les problèmes d'électromagnétisme [33, 34].

Si  $O$  est un domaine dans lequel une équation doit être résolue, et si  $\partial O$  désigne le bord du domaine, la condition aux limites de Robin est de la forme

$$au + b \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial O,$$

où  $a$ ,  $b$  et  $g$  sont des fonctions définies sur  $\partial O$ . Ici,  $u$  est la solution définie dans  $O$  que l'on cherche à déterminer et  $\frac{\partial u}{\partial n}$  désigne la dérivée par rapport à la normale extérieure sur le bord.

En dimension un, si, par exemple,  $O = [0, 1]$ , la condition aux limites de Robin s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} au(0) - bu'(0) &= g(0), \\ au(1) + bu'(1) &= g(1). \end{aligned}$$

Remarquons que le signe devant le terme dérivé change selon la partie du bord considérée : la raison est que le vecteur normal à  $[0, 1]$  au point 0 pointe vers la direction négative (gauche), tandis qu'en 1 ce vecteur pointe vers les positifs.

---

3. portant le nom du mathématicien français Victor Gustave Robin (1855 – 1897)

## 1.1.3 Modélisation, discrétisation et simulation numérique

### Qu'est-ce qu'un modèle ?

Le principe d'un modèle est de remplacer un système complexe en un objet ou opérateur simple reproduisant les aspects ou comportements principaux de l'original (exemple : modèle mathématique ou numérique).

### Pourquoi faut-il modéliser ?

Dans la nature, les systèmes et les phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres non-linéaires interagissant entre eux (la météorologie, la turbulence des fluides...).

### Qu'est-ce qu'un modèle mathématique

On peut construire un modèle mathématique permettant la représentation du phénomène physique. Ces modèles utilisent très souvent des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires dont on ne connaît pas de solutions analytiques en général. Il faut alors résoudre le problème numériquement en transformant les équations continues de la physique en un problème discret sur un certain domaine de calcul (un maillage).

### De la modélisation à la simulation numérique

Les différentes étapes pour modéliser un système complexe sont

- ◇ Recherche d'un modèle mathématique représentant la physique. Mise en équation.
- ◇ Élaboration d'un maillage. Discrétisation des équations de la physique.
- ◇ Résolution des équations discrètes (souvent systèmes linéaires à résoudre).
- ◇ Transcription informatique et programmation des relations discrètes.
- ◇ Simulation numérique et exploitation des résultats.

### Aspect fini des ordinateurs

La solution exacte d'un problème d'(EDO) ou d'(EDP) est une fonction continue. Les ordinateurs ne connaissent que le fini et le discret. En effectuant un calcul numérique, un ordinateur ne peut retenir qu'un nombre fini de chiffres pour représenter les opérands et les résultats des calculs intermédiaires. Les solutions approchées seront calculées comme des ensembles de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel. La représentation des nombres dans un ordinateur introduit la notion d'*erreur d'arrondi ou de troncature*. Ces erreurs peuvent se cumuler sur un calcul et la solution numérique finale pourra s'avérer très éloignée de la solution exacte.

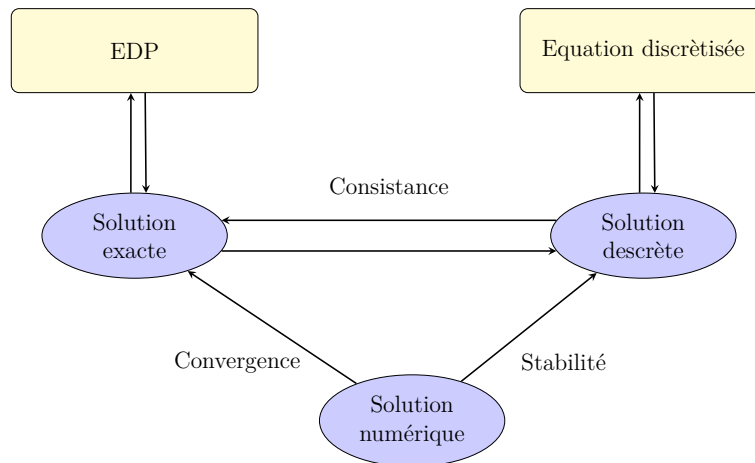


FIGURE 1.1: Consistance, Convergence et Stabilité

### 1.1.4 Consistance, convergence et stabilité

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les trois principales sont la convergence, la stabilité et la consistance. Ces trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue.

**la stabilité**, c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.

**la consistance**, c'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque le pas de discrétisation ( $\Delta t$  et  $\Delta x$ ) tendent vers zéro.

**la convergence**, c'est la propriété qui assure que la solution numérique tende vers la solution exacte des équations continues. C'est évidemment la propriété la plus recherchée !

### 1.1.5 Notion de stabilité

On distingue trois types de stabilité

- ◇ La stabilité d'un problème physique.
- ◇ La stabilité d'un problème mathématique.
- ◇ La stabilité numérique d'une méthode de calcul.

#### Stabilité d'un problème physique : système chaotique

##### Définition 1.1

Un problème est dit *chaotique* si une petite variation des données initiales entraîne une variation totalement imprévisible des résultats. Cette notion de chaos, liée à la physique d'un problème, est indépendante du modèle mathématique utilisé et encore plus de la méthode numérique utilisée pour résoudre ce problème mathématique. De nombreux problèmes sont chaotiques, par exemple la turbulence des fluides.

## Stabilité d'un problème mathématique : sensibilité

### Définition 1.2

Un problème est dit *sensible* ou *mal conditionné* si une petite variation des données ou des paramètres entraîne une grande variation des résultats. Cette notion de conditionnement, liée au problème mathématique, est indépendante de la méthode numérique utilisée pour le résoudre. Pour modéliser un problème physique qui n'est pas chaotique, on construira un modèle mathématique qui sera le mieux conditionné possible.

## Stabilité d'une méthode numérique

### Définition 1.3

Une méthode est dite *instable* si elle est sujette à une propagation importante des erreurs numériques de discrétisation et d'arrondi. Un problème peut être bien conditionné alors que la méthode numérique choisie pour le résoudre est instable. Dans ce cas, il est impératif de changer de méthode numérique. Par contre, si le problème de départ est mal conditionné, aucune méthode numérique ne pourra y remédier. Il faudra alors essayer de trouver une formulation mathématique différente du même problème.

## 1.2 Exemples de fonctions de base

Beaucoup de problèmes peuvent être résolus plus facilement, et plus précisément en changeant la base de la représentation des données, généralement en termes d'ensembles de fonctions de base orthogonales.

Voici quelques exemples de fonctions de base orthogonales (les plus utilisables dans les méthodes spectrales).

### 1. Polynômes orthogonaux

Une grande partie de l'analyse numérique des méthodes spectrales fait appel à une base de polynômes orthogonaux dont on rappelle ici leurs principales propriétés et quelques exemples.

#### Définition 1.4

Une suite de polynôme orthogonaux<sup>4</sup> est une suite infinie de polynômes  $P_0(x)$ ,  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ , ... à coefficients réels, dans laquelle chaque  $P_n(x)$  est de degré  $n$ , et telle que les polynômes de la suite sont orthogonaux deux à deux pour un produit scalaire donné.

Le produit scalaire de fonctions le plus simple est l'intégrale du produit de ces fonctions, sur un intervalle borné

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (1.2.1)$$

---

4. Le domaine des polynômes orthogonaux a été développé durant le XIX<sup>e</sup> siècle par Stieltjes, comme outil de la théorie analytique des fractions continues. De multiples applications en ont découlé en mathématiques et en physique.



Plus généralement, on peut introduire "une fonction poids"  $w(x)$  dans l'intégrale (sur un intervalle d'intégration  $]a, b[$   $w$  doit être à valeurs finies et strictement positives, et l'intégral du produit de la fonction poids par un polynôme doit être fini, les bornes  $a, b$  peuvent être infinies).

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx, \quad (1.2.2)$$

avec cette définition du produit scalaire, deux fonctions sont orthogonales entre elles si leur produit scalaire est égale à zéro. L'intervalle d'intégration est appelé intervalle d'orthogonalité.

### 1.2.1 Polynômes orthogonaux de Chebychev

Les polynômes de Chebychev, nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe *Lvovich Chebychev*<sup>5</sup>

#### Polynômes de Chebychev de la première espèce $T_n$ .

Soit  $n$  un entier naturel. Il existe un et un seul polynôme noté  $T_n$  tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

#### Unicité

$T_n$  est déterminé sur  $[-1, 1]$  qui est infini et donc uniquement déterminé.

#### Existence

Soient  $n$  un entier naturel et  $\theta$  un réel.

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(e^{in\theta}) \\ &= \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^n) \\ &= \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_n^k (\cos \theta)^{n-k} (i \sin \theta)^k \right) \\ &= \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p \mathcal{C}_n^{2p} (\cos \theta)^{n-2p} (\sin \theta)^{2p} \\ &= \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p \mathcal{C}_n^{2p} (\cos \theta)^{n-2p} (1 - \cos^2 \theta)^p, \end{aligned}$$

et le polynôme  $\sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p \mathcal{C}_n^{2p} (X)^{n-2p} (1 - X^2)^p$  convient.

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p \mathcal{C}_n^{2p} (X)^{n-2p} (1 - X^2)^p.$$

---

5. Pafnoutii Lvovich Tchebychev, mathématicien russe, (né à Borovsk en 1821 et mort à Saint-Pétersbourg en 1894).

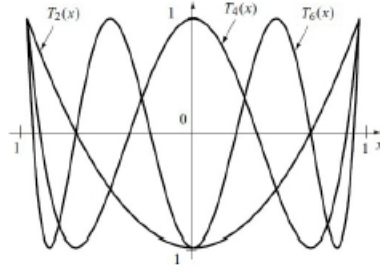


FIGURE 1.2: Premiers polynômes de Chebychev pair de la première espèce

### Propriétés simples

- $T_n(1) = 1$ ,
- $T_n(-1) = (-1)^n$ ,
- $T_n$  est une fonction paire si  $n$  est pair, impaire si  $n$  est impair,
- $T'_n(1) = n^2$ ,
- $T'_n(-1) = (-1)^{n-1}n^2$ .

En effet

$$T'_n(x) = \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{d\theta} \cos n\theta = n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}.$$

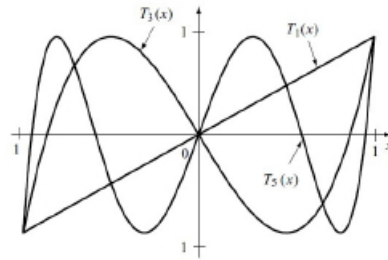


FIGURE 1.3: Premiers polynômes de Chebychev impair de la première espèce

### Orthogonalité

Les polynômes  $T_n$ , orthogonaux sur l'intervalle de support  $[-1, 1]$  avec la fonction poids  $w(x)$  définie par

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -1 < x < 1, \\ 0 & x \geq 1. \end{cases}$$

et sont normalisés par l'exigence que  $T_n(1) = 1$ .

$T_n$  satisfait la relation de récurrence à trois termes suivante

$$\text{pour } n \geq 1 \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

avec les valeurs de départ

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

## Relations de récurrence entre les polynômes $T_n$

Définissons quelques suites qui permettront de condenser les relations de récurrence en des formulations valables pour  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad c_n &= 0 \quad \text{si } n < 0, \quad c_0 = 2, \quad c_n = 1 \quad \text{si } n > 0. \\ (d_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad d_n &= 0 \quad \text{si } n < 0, \quad d_n = 1 \quad \text{si } n \geq 0. \end{aligned}$$

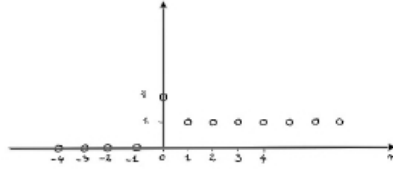


FIGURE 1.4: La suite  $c_n$

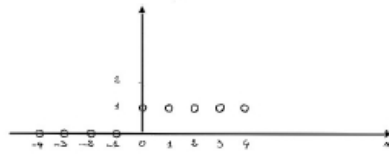


FIGURE 1.5: La suite  $d_n$

1.

$$c_n T_{n+1}(x) + d_{n-1} T_{n-1}(x) = 2x T_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cette relation résume les égalités suivantes :

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2x T_n(x) \quad n \geq 1. \\ 2T_1(x) &= 2x T_0(x) \end{cases}$$

2.

$$c_n \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} + d_{n-2} \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} = 2x T_n(x) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cette relation résume les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} &= 2T_n(x) \quad n \geq 2 \\ \frac{T'_2(x)}{2} &= 2T_1(x) \\ 2T'_1(x) &= 2T_0(x). \end{cases}$$

Pour  $k \geq 1$  le changement de variable  $x = \cos \theta$  permet de calculer :

$$T'_k(x) = \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{d\theta} \cos k\theta = k \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}.$$

D'où pour  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} &= \frac{\sin[(n+1)\theta] - \sin[(n-1)\theta]}{\sin \theta} \\ &= 2 \cos n\theta \\ &= 2T_n(x). \end{aligned}$$

## Polynômes de Chebychev de la second espèce $U_n$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Il existe un et un seul polynôme noté  $U_n$  tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin \theta \times U_n(\cos \theta) = \sin(n\theta).$$

### Unicité

$U_n$  est déterminé sur  $[-1, 1]$  qui est infini et donc uniquement déterminé.

### Existence

Soient  $n$  un entier naturel et  $\theta$  un réel.

$$\begin{aligned} \sin(n\theta) &= \text{Im}(e^{in\theta}) \\ &= \text{Im}((\cos \theta + i \sin \theta)^n) \\ &= \text{Im} \left( \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^{n-k} (i \sin \theta)^k \right) \\ &= \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} (\cos \theta)^{n-(2p+1)} (\sin \theta)^{(2p+1)} \\ &= \sin \theta \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} (\cos \theta)^{n-2p-1} (1 - \cos^2 \theta)^p, \end{aligned}$$

et le polynôme  $\sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} (X)^{n-2p-1} (1 - X^2)^p$  convient.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} (X)^{n-2p-1} (1 - X^2)^p.$$

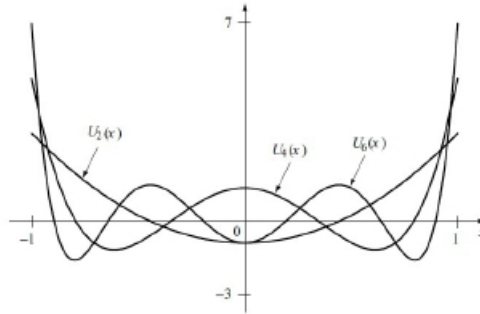


FIGURE 1.6: Premiers polynômes de Chebychev pair de la second espèce.

## Orthogonalité

Les polynômes  $U_n$ , sont orthogonaux sur l'intervalle de support  $[-1, 1]$  avec la fonction poids

$$w(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et sont normalisés par l'exigence que  $U_n(1) = n + 1$ .

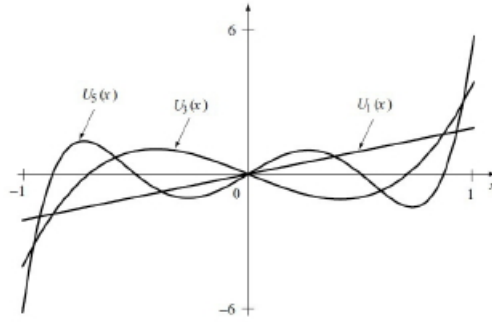


FIGURE 1.7: Premiers polynômes de Chebychev impair de la second espèce.

Et satisfait la relation de récurrence à trois termes

$$\text{pour } n \geq 1 \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),$$

avec les valeurs de départ

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

### Relation entre $T_n$ et $U_n$

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Pour tout réel  $\theta$ , on a  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ . En dérivant cette relation, pour tout réel  $\theta$  on obtient

$$-\sin \theta T_n'(\cos \theta) = -n \sin(n\theta),$$

ou encore

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin \theta \left( \frac{1}{n} T_n' \right)'(\cos \theta) = \sin(n\theta).$$

Par unicité de  $U_n$ , on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{1}{n} T_n'$$

### Polynômes de Chebyshev du troisième espèce

Les polynômes de la troisième espèce  $V_n$ , sont orthogonaux sur l'intervalle de support  $[-1, 1]$  avec la fonction poids  $w(x)$  donnée par

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1, \\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} & \text{si } -1 < x < 1. \end{cases}$$

et sont normalisés par l'exigence que  $V_n(1) = 1$ .

$V_n$  satisfait la relation de récurrence à trois termes

$$\text{pour } n \geq 1 \quad V_{n+1}(x) = 2xV_n(x) - V_{n-1}(x),$$

avec les valeurs de départ

$$V_0(x) = 1, \quad V_1(x) = 2x - 1.$$

## Polynômes de Chebyshev du quatrième espèce

Les polynômes de la quatrième espèce  $W_n$ , sont orthogonaux sur l'intervalle de support  $[-1, 1]$  avec la fonction de poids

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & -1 < x < 1, \\ 0 & x \geq 1. \end{cases}$$

et sont normalisés par l'exigence que  $W_n(1) = 2n + 1$ .

Les polynômes  $W_n$  satisfait la relation de récurrence à trois termes suivante

$$\text{pour } n \geq 1 \quad W_{n+1}(x) = 2xW_n(x) - W_{n-1}(x),$$

avec les valeurs de départ

$$W_0(x) = 1, \quad W_1(x) = 2x + 1.$$

## 1.2.2 Polynômes de Legendre

### — Équation différentielle de Legendre

Les polynômes de Legendre satisfait l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,$$

définit sur l'intervalle  $[-1, 1]$  avec  $n = 0, 1, 2, \dots$

### — Formule de Rodrigues pour les $L_n$

Les polynômes de Legendre  $L_n(x)$  de degré  $n$  sont donnés par la formule de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

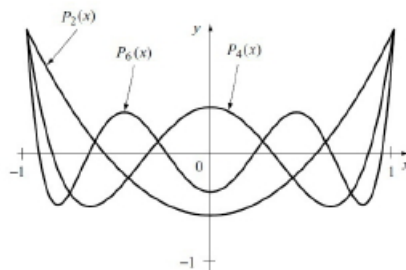


FIGURE 1.8: Premiers polynômes de Legendre pair

### — Relation d'orthogonalité pour les $L_n$

La fonction poids pour les polynômes de Legendre est  $w(x) = 1$ , et la relation d'orthogonalité est

$$\int_{-1}^1 L_m(x)L_n(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{pour } m = n. \end{cases} \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

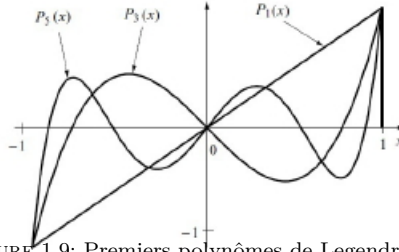


FIGURE 1.9: Premiers polynômes de Legendre impair

— **Relations de récurrences satisfaites par les  $L_n$**

1.  $(n + 1)L_{n+1}(x) = (2n + 1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$ .
2. On a

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)\frac{d}{dx}[L_n(x)] &= nxL_n(x) - nL_{n-1}(x), \\ &= \frac{n(n+1)}{2n+1}[L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)]. \end{aligned}$$

3.  $\frac{d}{dx}[L_{n+1}(x)] - x\frac{d}{dx}[L_n(x)] = (n+1)L_n(x)$ .
4.  $x\frac{d}{dx}[L_n(x)] - \frac{d}{dx}[L_{n-1}(x)] = nL_n(x)$ .
5.  $\frac{d}{dx}[L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)] = (2n+1)L_n(x)$ .

### 1.2.3 Polynômes de Laguerre

— **Équation différentielle satisfaite par les  $l_n$**

Les polynômes de Laguerre satisfaisaient l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

définit sur l'intervalle  $[0, \infty[$ , avec  $n = 0, 1, 2, \dots$

— **Formule de Rodrigues pour les  $l_n$**

Les polynômes de Laguerre  $l_n(x)$  de degré  $n$  sont donnés par la formule de Rodrigues

$$l_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^n].$$

— **Relation d'orthogonalité pour les  $l_n$**

La fonction poids pour les polynômes de Laguerre est  $w(x) = e^{-x}$ , et la relation d'orthogonalité est

$$\int_0^\infty e^{-x} l_m(x) l_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n, \\ 1 & \text{pour } m = n. \end{cases} \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

— **Relations de récurrences satisfaites par les  $l_n$**

1.  $(n + 1)l_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)l_n(x) - nl_{n-1}(x)$ .
2.  $x\frac{d}{dx}[l_n(x)] = nl_n(x) - nl_{n-1}(x)$ .

## 1.2.4 Polynômes de Hermite

### — Équation différentielle satisfaite par les $H_n$

Les polynômes de Hermite  $H_n$  satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0,$$

défini sur l'intervalle  $]-\infty, \infty[$ , tel que  $n = 0, 1, 2, \dots$

### — Formule de Rodrigues pour les $H_n$

Les polynômes de Hermite  $H_n(x)$  de degré  $n$  sont donnés par la formule de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}].$$

### — Relation d'orthogonalité pour les $H_n$

La fonction poids pour les polynômes de Hermite de degré  $n$  est  $w(x) = e^{-x^2}$ , et la relation d'orthogonalité est

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n, \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & \text{pour } m = n. \end{cases}$$

### — Relations de récurrences satisfaites par les $H_n$

1.  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ .
2.  $\frac{d}{dx}[H_n(x)] = 2nH_{n-1}(x)$ .
3.  $nH_n(x) = -n \frac{d}{dx}[H_{n-1}(x)] + x \frac{d}{dx}[H_n(x)]$ .
4.  $2xH_{n-1}(x) - \frac{d}{dx}[H_{n-1}(x)]$ .

## 2. Séries de Fourier

La série de Fourier d'une fonction générale  $u(x)$  est

$$u(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx). \quad (1.2.3)$$

où les coefficients sont

$$\begin{aligned} a_0 &= (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} u(x) dx, \\ a_n &= (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \sin(nx) dx. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

### Première note

puisque les **sinus** et **cosinus** sont des fonctions périodiques de période  $2\pi$ , on peut aussi calculer le développement de Fourier dans un intervalle  $x \in [0, 2\pi]$ . La seule modification est que les limites de l'intégration (4.3.4) sont également modifiés de  $[-\pi, \pi]$  à  $[0, 2\pi]$ .



## Deuxième note

La série générale de Fourier peut aussi s'écrire sous forme complexe

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inx), \quad (1.2.5)$$

où les coefficients sont

$$c_n = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \exp(-inx) dx.$$

Les identités

$$\begin{aligned} \cos(x) &\equiv (\exp(ix) + \exp(-ix))/2, \\ \sin(x) &\equiv (\exp(ix) - \exp(-ix))/2i. \end{aligned}$$

montrer que (1.2.3) et (1.2.5) sont parfaitement équivalentes et nous utilisons celui qui est commode.

Les coefficients des deux formes sont liées par

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0, \quad n = 0 \\ c_n &= \begin{cases} (a_n - ib_n)/2, & n > 0 \\ (a_n + ib_n)/2, & n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 1.3 Fondements des méthodes spectrales

Comme de nombreuses dénomination scientifiques, le terme '*spectre*' nous vient d'un aller-retour du latin ou de l'ancien français vers l'anglais, puis de l'anglet vers le français. C'est en effet Newton qui introduit en 1671 ce terme '*spectrum*' dans le langage scientifique après qu'il eut décomposé la lumière au moyen d'un prisme, choisissant ce qualificatif probablement parce qu'il pouvait ainsi observer à travers (la lumière). Ce terme a donc attribué en premier lieu à la décomposition de la lumière en raies de différentes longueurs d'ondes ou fréquence, il est alors naturellement resté lié à la physique des ondes au cours de son évolution, et généralement à toute décomposition de type fréquentiel. Ces dernières sont représentées mathématiquement sous forme d'intégrales, ou de manière discrète, de séries; à partir de quoi s'est encore étendu ce terme de '*spectral*' pour recouvrir aussi les représentations de quantités au moyen de séries s'appuyant, pour rester général, sur des bases de fonctions *globales* de l'espace de définition de la quantité représentée, et qui vérifient des propriétés de convergence rapide. C'est dans ce dernier sens qu'on entend généralement l'utilisation de '*méthodes spectrales*'. Les méthodes incluses dans cette catégorie s'appliquent à un vaste éventail de problèmes.

## Tour d'horizon

Dans les applications pratiques, la résolution des équations aux dérivées partielles d'un problème aux limites ne peut être réalisée qu'au moyen de techniques numériques. Les principales techniques utilisées sont *les éléments finis (EF)*, *les volumes finis (VF)* et *les différences finies (DF)*, Ces techniques sont applicables à un

très grand nombre de problèmes. Et plus récemment est apparue l'utilisation de *techniques spectrales (TS)*, qui se sont pas elles aussi largement applicables.

Les deux critères principaux de choix d'une approche numérique sont souvent, d'une part **la complexité de la géométrie du domaine**, et d'autre part **le niveau de précision** requis.

La technique la plus adaptée pour les géométries les plus complexes est la méthode des éléments finis ; les différences finies quant à elles ont un comportement intéressant dans une large gamme de niveaux de précision requis, et pour des domaines pouvant être relativement complexes.

Les techniques spectrales ne sont cependant applicables qu'à des résolutions dans des domaines de formes simples, où elles peuvent en revanche apporter des niveaux de précision supérieurs à toutes les autres méthodes.

Même si toutes ces approches sont en relation, une nette distinction sépare les (TS) des autres approches dans son application. En effet les (EF),(VF) et les (DF) sont des méthodes *locales*, i.e. l'approximation des dérivées des quantités en un point du domaine n'est obtenue qu'à partir des valeurs dans un voisinage proche de ce point. L'idée sous-jacente est que la dérivée d'une fonction étant une propriété justement définie localement (*sur un voisinage de taille limite nulle*), il est 'raisonnable' de reproduire cela dans des techniques numériques discrètes, l'information à l'autre bout du domaine n'étant d'aucune utilité.

Or justement, les techniques spectrales prennent le contre-pied de ce raisonnement, car elles sont *globales* et l'idée qui préside à leur utilisation est tout à fait différente.

Quand on travaille avec des *méthodes locales*, la géométrie du domaine ailleurs qu'à l'endroit où l'on se trouve **ne revêt aucune importance**. En revanche, pour les (TS) la géométrie du domaine est **capitale**, puisqu'elles reposent en effet sur un *changement d'espace* entre l'espace physique du domaine de calcul, et un espace de fonctions qui :

- sont définies sur tout le domaine de calcul,
- sont connues analytiquement et le plus régulières possible, de manière à pouvoir être différenciées exactement,
- et enfin, forment une base de représentation convergente des fonctions de l'espace physique.

Ainsi, une fonction  $u$  de l'espace physique peut-être exprimée sous forme

$$u(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k \varphi_k(x), \quad (1.3.1)$$

où les  $\varphi_k$  seront par exemple des fonctions trigonométriques ou bien des polynômes orthogonaux.

Dans le contexte de la résolution d'équations aux dérivées partielles dépendantes du temps, cette approche présente des atouts notables :

- elle présente une erreur qui décroît rapidement avec  $N$ , jusqu'à un taux exponentiel pour les fonctions les plus régulières,
- elle conserve un comportement remarquable dans le cas où la solution est non régulière (discontinue par exemple),
- et spécialement dans un espace à plusieurs dimensions, des discrétisations relativement grossières lui suffisent à satisfaire des niveaux de précision requis élevés, permettant des simulations efficaces à coûts de calcul et de mémoire faible.

Bien sûr, ces (TS) sont nettement limitées par la nécessité d'obtenir le jeu de fonctions de base précédent, qui est intimement dépendant de la simplicité et de la régularité géométriques du domaine de calcul. Les autres facteurs limitant de ces méthodes sont :

- l'impossibilité d'avoir des niveaux de résolution différents dans parties différentes du domaine (pas de raffinement local de la discrétisation, d'augmentation locale du niveau de précision de la modélisation, etc),
- une mauvaise tolérance aux chocs,
- et une compréhension théorique encore seulement partielle.

Historiquement, ces méthodes n'ont connu un essor qu'à partir des années 1970, après que *Cooley & Tukey* ont proposé en 1965 le premier algorithme (FFT) de résolution rapide des transformées de Fourier (TF).

Maintenant qu'on a exposé que ces techniques spectrales consistent en une décomposition en série sur une base de fonction globales, restent à déterminer d'une part les classe de fonctions  $\varphi_k$  qu'il est possible, et d'autre part de quelle manière on procédera pour obtenir les coefficients d'amplitude  $\tilde{u}_k$  affectés à cette base pour qu'elle représente notre fonction  $u$ . Pour ce qui est de la classe de fonctions choisie, elle doit être telle que :

- la série précédente (1.3.1) converge rapidement vers la fonction  $u(x)$  en tout point  $x$ , au moins pour des fonctions  $u$  suffisamment régulières,
- les coefficients  $\tilde{u}_k$  étant donnés, on doit pouvoir calculer facilement des coefficients  $\alpha_k$  tels que

$$\forall x, \quad \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k \varphi_k(x) \right) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \varphi_k(x). \quad (1.3.2)$$

- et enfin, on doit pouvoir passer rapidement (à faible coût) des amplitudes  $\{\tilde{u}_k\}_{k=0,\dots,N}$  aux valeurs de la fonction  $u$  prise sur un ensemble de nœuds dans le domaine physique :  $\{u_i\}_{i=0,\dots,N}$ .

Dans la pratique, les classes de fonctions répondant à ces critères résident parmi celle des fonctions *orthogonales*, ce sont soit des fonctions trigonométriques pour des problèmes périodiques, soit des polynômes orthogonaux de Jacobi pour des problèmes plus généraux, tels ceux de Chebychev ou de Legendre. Ensuite, pour ce qui est de la détermination des amplitudes  $\tilde{u}_k$ , il existe trois techniques principales, visant toutes à minimiser le résidu obtenu quand on substitue, dans les équations du problème, l'expansion en série précédente (1.3.1) à la fonction  $u$  exacte :

- la première méthode, dite *Tau*, impose que les  $\tilde{u}_k$  soient choisis de telle manière que les conditions aux limites ne soient pas satisfaites, et rend le résidu orthogonal à autant de fonctions de base que possible,
- la second, de *Galerkin*, combine les fonctions de base originales en un nouvel ensemble de manière à ce qu'elle satisfassent individuellement les conditions aux limites, puis impose de la même manière que le résidu soit orthogonal à autant de ces nouvelles fonctions de base que possible,
- enfin, la technique de *collocation* est similaire à la méthode Tau, mais au lieu de rendre le résidu orthogonal à des fonctions de base, elle impose qu'il soit *nul* en un maximum de points (adéquatement choisis) de l'espace physique.

Cette dernière approche est aussi nommée *pseudo-spectrale* d'après *Orszag* en 1972 (pour distinction d'avec la méthode de Galerkin). C'est à cette classe des méthodes pseudo-spectral (de collocation) qu'appartient notre méthode, dans laquelle les fonctions de base employée sont trigonométriques.

### 1.3.1 Pourquoi les méthodes spectrales ?

Il y a plusieurs avantages des méthodes spectrales par rapport aux approches alternatives, telles que les éléments finis ou les différences finies.

Principalement on peut dire que :

La discrétisations spectrales des équations différentielles, basées par exemple sur les bases de Fourier ou les polynômes orthogonaux de (Chebychev, Legendre, Hermite, ...) fournis des erreurs d'approximations très faibles. Dans de nombreux cas, ces approches peuvent convergent de façon *exponentielle* pour un développement spectral d'ordre  $N$ , la différence entre la solution analytique (exacte) et la solution numérique tend vers zéros rapidement avec l'augmentation de l'ordre de développement spectrale.

Deuxièmement, puisque la précision numérique des méthodes spectrales est tellement élevée, le nombre de points de grille nécessaires pour atteindre une précision souhaitée est très petit, donc une méthode spectrale nécessite moins de mémoire que les autres méthodes. Cette minimisation est vraiment crucial, surtout pour l'exécution d'algorithmes.

Il existe une haute performance d'implémentations des algorithmes nécessaires à la transformation de base pour la plupart des méthodes spectrales, et le développeur d'une méthode spectrale n'a pas besoin d'appliquer ces codes.

Les méthodes spectrales peuvent être utilisées pour la résolution d'équations différentielles ordinaires (EDO), des équations aux dérivées partielles (EDP) et des problèmes de valeurs propres concernant les équations différentielles.

Lorsqu'on applique les méthodes spectrales sur des (EDP) dépendantes du temps, la solution est généralement écrite comme une somme de fonctions de base avec des coefficients dépendants du temps, la substitution dans l'(EDP) fournit un système d'(EDO) qui peuvent être résolu soit analytiquement, soit en utilisant un schéma numérique pour les (EDO)(Euler, Hain, Range-Kutta,...)

Les méthodes spectrales sont moins coûteuse que les éléments finis, mais deviennent moins précises pour des problèmes avec des géométries complexes et des coefficients discontinus. Cette augmentation de l'erreur est une conséquence du phénomène de Gibbs.

### 1.3.2 Décomposition spectrale

Les méthodes spectrales sont utilisé beaucoup pour la discrétisation d'équations différentielles. L'idée de base est d'exprimer la solution  $u(x)$  d'une équation différentielle comme une somme de certaines « fonctions de base  $\varphi_k$  » (par exemple, bases de Fourier, polynômes orthogonaux ...), puis de choisir les coefficients de cette somme afin de satisfaire l'équation différentielle et les conditions initiales et aux bords, aussi bien que possible.

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k \varphi_k(x). \quad (1.3.3)$$

Lorsque cette série est substituée dans l'équation

$$Lu = f(x), \quad (1.3.4)$$

où  $L$  représente un opérateur de différentiation, alors le résultat est appelé « la fonction résiduelle »

$$R(x, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N) = Lu_N - f. \quad (1.3.5)$$

Telle-que la fonction de résidu  $R(x, \tilde{u}_k)$  est identiquement égal à zéro pour la solution exacte, alors le défi est de choisir les coefficients  $\{\tilde{u}_k\}_{k=0,\dots,N}$  qui minimise la fonction résiduelle.

Les différentes méthodes **spectrales** et **pseudo-spectrales** diffèrent principalement par leur stratégies de minimisation.

Ces idées abstraites peuvent être concrétisée par des problèmes simples comme l'exemple suivant.

### Premier exemple

l'exemple est un problème aux limites, linéaire, unidimensionnelle [27].

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) - (x^6 + 3x^2)u = 0, \quad (1.3.6)$$

$$u(-1) = u(1) = 1. \quad (1.3.7)$$

La solution exacte est :

$$u(x) = \exp([x^4 - 1]/4). \quad (1.3.8)$$

Des approximations polynomiales sont recommandés pour la plupart des problèmes, alors nous choisirons une solution spectrale pour cette équation. Afin de satisfaire les conditions aux limites indépendamment des coefficients spectraux inconnus, il est commode d'écrire l'approximation comme

$$u_2(x) = 1 + (1 - x^2)(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1 x + \tilde{u}_2 x^2), \quad (1.3.9)$$

où la décision de ne garder que trois degrés de liberté est arbitraire.

Le résidu de cette approximation est

$$R(x, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x) - (x^6 + 3x^2)u_2(x).$$

$$R(x, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (2\tilde{u}_2 + 2\tilde{u}_0) - 6\tilde{u}_1 x - (3 + 3\tilde{u}_0 + 12\tilde{u}_2)x^2 - 3\tilde{u}_1 x^3 + 3(\tilde{u}_0 - \tilde{u}_2)x^4 + 3\tilde{u}_1 x^5 + (-1 - \tilde{u}_0 + 3\tilde{u}_2)x^6 - \tilde{u}_1 x^7 + (\tilde{u}_0 - \tilde{u}_2)x^8 + \tilde{u}_1 x^9 + 10\tilde{u}_2 x^{10}.$$

Comme des conditions de minimisation d'erreur, nous choisissons de mettre le résidu égal zéro à un ensemble de points en nombre égal aux coefficients indéterminés dans  $u_2(x)$ . C'est ce qu'on appelle les méthodes de « collocation » ou bien les méthodes « pseudo-spectrales ».

Si on choisi arbitrairement les points  $x_i = (-1/2, 0, 1/2)$ , ça nous donne les trois équations

$$\begin{aligned} eq1 &= -\frac{659}{256}\tilde{u}_0 + \frac{1683}{512}\tilde{u}_1 - \frac{1171}{1024}\tilde{u}_2 - \frac{49}{64}, \\ eq2 &= -2(\tilde{u}_0 - \tilde{u}_2), \\ eq3 &= -\frac{659}{256}\tilde{u}_0 + \frac{1683}{512}\tilde{u}_1 - \frac{1171}{1024}\tilde{u}_2 - \frac{49}{64}. \end{aligned}$$

Les coefficients sont ensuite déterminés en résolvant  $eq1 = eq2 = eq3 = 0$ ; rendements

$$\tilde{u}_0 = -\frac{784}{3807}, \quad \tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{u}_2 = \tilde{u}_0.$$

La figure (1.12) montre que cette approximation faible est tout à fait exacte.

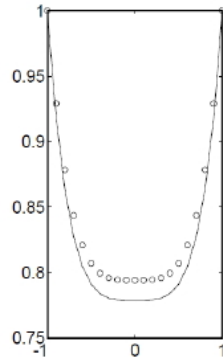


FIGURE 1.10: (solide) Solution exacte, (cercles) approximation à trois coefficients.

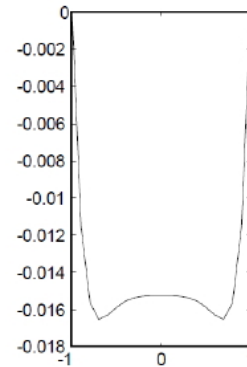


FIGURE 1.11:  $u - u_2$

FIGURE 1.12: Approximation de la solution du problème (1.3.6), (1.3.7)

L'exemple soulève plusieurs questions

1. Quel est le choix optimal de fonctions de base ?
  2. Pourquoi on choisi la "collocation" comme condition de minimisation des résidus ?
  3. Quels sont les points de collocation optimales ?
  4. Comment pouvons-nous résoudre un problème algébrique des coefficients, lorsque les logiciels de résolution (comme Maple par-exemple) ne sont pas disponibles ?
- La réponse de la première question est que le choix de puissance de  $x$  comme une base est en fait assez dangereux à moins que  $N$  le degrés de liberté est petit ou les calculs sont effectués en arithmétique exacte.
  - La deuxième réponse est : la collocation représente le choix le plus simple qui est garanti pour un bon fonctionnement, et si c'est bien fait, rien d'autre n'est supérieur. Pour comprendre pourquoi, cependant, il faut comprendre à la fois la théorie de Fourier et de série de Chebyshev et les méthodes de Galerkin.
  - La troisième réponse est la suivante : Une fois que l'ensemble de base a été choisie, il y a seulement deux ensembles optimaux des points d'interpolation pour chaque base (les points de Gauss-Chebyshev ou bien les points de Gauss-Lobatto).
  - La quatrième réponse est : les équations algébriques peuvent être écrites (pour une équation différentielle linéaire) comme une équation matricielle, qui peut alors être résolu par plusieurs logiciels.

### 1.3.3 Choix des fonctions de base

**Une question importante :** Quel "base fonctionnelle"  $\varphi_n(x)$  va marcher ?  
Il est évident que nous aimerons que notre base est caractérisé par un certain nombre

de propriétés, un calcul facile, une convergence rapide, et qu'elle soit complet. Ce qui signifie que toute solution peut être représentée avec une précision arbitrairement grande en prenant la troncature  $N$  suffisamment grande.

Bien que nous discuterons de nombreux types de fonctions de base, le meilleur choix pour 95% d'applications est les bases de Fourier, ou bien les bases de Fourier cachées. Où "caché" signifie un changement de variable qui transforme les *sinus* et les *cosinus* d'une série de Fourier en fonctions différentes. Le déguisement le plus important est celui porté par les *polynôme de Chebychev*, qui sont définis par :

$$T_n(\cos\theta) \equiv \cos(n\theta), \quad (1.3.10)$$

tel que les  $T_n(x)$  sont des polynôme en  $x$ , et sont généralement considéré comme des espèces distinctes de fonctions de base. Une série de Chebychev est vraiment juste un développement de *cosinus* de Fourier avec un changement de variables.

### Choix selon les conditions aux limites

Normalement, les conditions aux limites et initiales ne sont pas la complication majeur dans les méthodes spectrales. Par exemple, lorsque les conditions aux limites exigent que la solution soit spatialement périodique, les **sinus** et les **cosinus** d'une base de Fourier (qui sont les fonctions de base naturels pour tous les problèmes périodiques) automatiquement satisfaire les conditions aux limites. Par conséquence, notre seule tâche restante est de choisir les coefficients de la série de Fourier afin de minimiser la *fonction résiduelle*.

<b>Périodique</b> Fourier $\theta \in [0, 2\pi]$	<b>Non périodique</b> Chebychev ou Legendre $x \in [-1, 1]$
<b>Semi infini</b> Chebychev rationnel ou Laguerre $x \in [0, \infty[$	<b>Infini</b> Chebychev rationnel ou Hermite $x \in ] - \infty, \infty[$

TABLE 1.1: Choix des fonctions de base.

- ◇ **En haut à gauche** : sur un intervalle périodique, utilisez les *sinus* et les *cosinus*.
- ◇ **En haut à droite** : un intervalle fini, qui peut toujours être remis à l'échelle et traduit en  $x \in [-1, 1]$ . Les *polynômes de Chebyshev* ou de *Legendre* sont optimales.
- ◇ **En bas à gauche** : un intervalle semi-infini  $x \in [0, \infty[$ . Les fonctions *rationnel de Chebyshev* sont les choix générique, mais les fonctions de *Laguerre* sont parfois plus commode pour des problèmes particuliers.
- ◇ **En bas à droite** :  $x \in ] - \infty, \infty[$ . Les fonctions *rationnelle de Chebychev* sont les plus générales, mais les fonctions *sinc* et *Hermite* sont largement utilisés, et ont des propriétés semblables de convergence.

### 1.3.4 Les deux royaumes

Les méthodes spectrales se répartissent en deux grandes catégories, la plupart de ces derniers peuvent être classés comme des méthodes *d'interpolation* et de *non-interpolation*. La classification mathématique peut être ambiguë, parce que certains algorithmes mélangent les idées des deux royaumes.

Les méthodes *d'interpolation* ou les méthodes « pseudo-spectral » associent une grille de points avec chaque ensemble de base. Les coefficients d'une fonction  $u$  se trouvent en exigeant que la série tronquée soit identique avec  $u$  en chaque point de la grille. De même, les coefficients  $\tilde{u}_k$  d'un rapprochement pseudo-spectral à la solution d'une équation différentielle se trouvent en exigeant que la fonction résiduelle soit nulle dans les points de la grille

$$R(x_i, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

En d'autres termes, une méthode *pseudo-spectral* exige que l'équation différentielle soit exactement satisfaite à un ensemble de points connus sous le nom des points de *collocation* ou les points *d'interpolation*.

On peut supposer que, comme le résidu  $R(x, \tilde{u}_k)$  est obligé de disparaître à un grand nombre de points discrets, il sera plus petit et plus faible dans les interstices entre les points de collocation, et donc  $u_N(x)$  converge vers  $u(x)$  lorsque  $N$  augmente.

Dans la royaume des algorithmes de la *non-interpolation* qui comprend (*la méthode de Galerkin* et *la méthode Tau de Lanczos*). Il n'y a aucune grille de points d'interpolation. Au lieu de cela, les coefficients d'une fonction inconnue  $u$  sont calculés en multipliant cette dernière par une fonction de base donnée puis en effectuant une intégration.

Il est tentant de décrire la différence entre les deux royaumes algorithmiques par l'intégration et l'interpolation, mais malheureusement ce n'est un peu simpliste. Beaucoup de livres anciens, tels que Fox et Parker (1968), montrent comment on peut utiliser les propriétés des fonctions de base (les relations de récurrence, les identités trigonométriques, ...) pour calculer les coefficients sans effectuer explicitement des intégrations.

Historiquement, les méthodes de la « non-interpolation » ont été développés en premier. Pour cette raison, le label « spectral » est parfois utilisé dans un sens étroit comme une étiquette collective pour ces méthodes.

### 1.3.5 La non-linéarité

La non-linéarité n'est pas la complication majeure des méthodes spectrales en soi. Par souci de simplicité d'exposé, nous allons concentrer généralement sur des algorithmes linéaires, en particulier pour l'explication des idées de base. L'extension aux *problèmes non linéaires* généralement ne nécessite que des petites modifications.

Pour illustrer cela, nous ferons un problème de valeurs aux limites non linéaire très simple. Dans cet exemple, on applique une méthode spectrale. La seule différence à partir d'un problème linéaire est que le système d'équations algébriques des coefficients est non linéaire [27].

Le problème aux limites non linéaire est

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \alpha u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0. \quad (1.3.11)$$



Sous les conditions aux limites

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

Nous prendrons la solution approchée  $u_2(x)$  comme étant un polynôme quadratique. Le polynôme quadratique le plus général qui satisfait les conditions aux limites est

$$u_2 = x + \tilde{u}_2(x^2 - x).$$

Comme il n'y a qu'un seul coefficient  $\tilde{u}_2$  indéterminée, un seul point de collocation est nécessaire. Le choix évident, le point milieu de l'intervalle.

La fonction résiduelle est

$$R(x, \tilde{u}_2) = \tilde{u}_2^2 \alpha [6x^2 - 6x + 1] + 2\tilde{u}_2 [3\alpha x + 1 - \alpha] + \alpha.$$

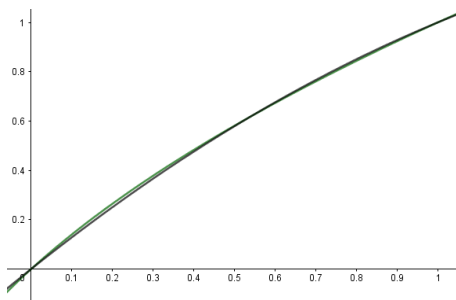


FIGURE 1.13: Comparaison de solutions exacte et approximative (équation de diffusion non linéaire).

La condition que  $R(x = 1/2, \tilde{u}_2) = 0$  donne alors l'équation quadratique

$$\tilde{u}_2^2 \alpha [-1/2] + 2\tilde{u}_2 [\alpha/2 + 1] + \alpha = 0.$$

Nous constatons un fait amusant : même si les méthodes pseudo-spectral sont généralement considérées uniquement comme des techniques numériques, nous avons en fait obtenu une solution analytique à ce problème non linéaire. Pour voir comment elle est précise, nous spécialiser  $\alpha = 1$  pour lequel la solution exacte est

$$u(x, \alpha = 1) = -1 + (1 + 3x)^{1/2}. \quad (1.3.12)$$

Il y a deux racines de l'équation quadratique, bien sûr, mais on donne un flux de chaleur non physique vers la source en  $x = 1$ , de sorte qu'il peut être rejetée.

La solution approchée

$$u_2(x, \alpha = 1) = x - 0.317(x^2 - x). \quad (1.3.13)$$

La figure (1.13) compare les solutions exactes et approchées.

La valeur maximale de  $u(x)$  est de 1.00, l'erreur absolue maximale de la solution pseudo-spectral (au point 1) est seulement 0.014.

La figure montre que même si les formes fonctionnelles de (1.3.12) et (1.3.13) ne ressemblent pas évident, les deux graphiques diffèrent si peu qu'il est difficile de les distinguer. Dans les problèmes de la vie réelle, bien sûr, la solution exacte n'est pas connue, mais l'exactitude d'une solution approchée peut être testée en répétant le calcul avec un grand  $N$ . Ce problème est particulièrement difficile car il est non linéaire, donc pour tout  $N$ , nous allons toujours se retrouver avec une équation algébrique non linéaire ou d'un ensemble d'équations pour déterminer la solution.

Une des grandes vertus de la méthode pseudo-spectral est la facilité avec laquelle elle peut être appliquée à des équations différentielles non linéaires.

Une formulation générale d'un problème d'EDP :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= F(u)(x, t) + f(x, t) & x \in \Omega & \quad t \geq 0, \\ Bu(x, t) &= g(t) & x \in \partial\Omega & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) & x \in \Omega. & \end{aligned}$$

- $\Omega$  : un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\partial\Omega$ .
- On cherche  $u(x, t)$  fonction du temps à valeur dans un espaces de Hilbert  $\mathcal{H}$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ .
- $f$  : un élément de  $\mathcal{H}$ .
- $F$  : une fonction de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ .
- $B$  : un opérateur de trace, déterminant les conditions aux limites, on l'omettra si le domaine est périodique.
- $u_0(x)$  : une condition initiale.

Les méthodes spectrales consistent à décomposé les éléments de  $\mathcal{H}$  sur une base de fonctions  $(\varphi_k)_{k=1\dots\infty}$ .

On cherche :

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k \varphi_k(x),$$

élément de l'espace  $B_N$  engendré par les  $N$  premières fonctions de base, de telle sorte que cette fonction approxime la vraie solution du problème.

On défini le *résidu* associé à l'approximation  $u_N$  par

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - F(u_N) - f,$$

ce résidu serait nul si  $u_N$  était la vraie solution. On cherche donc à le rendre "petit". Pour cela on impose que  $R_N$  soit nul en projection sur un sous-espace de  $\mathcal{H}$  de dimension  $N$ . Cette projection  $P_N$  dépend de la méthode spectrale employée [44]. On a donc remplacé le problème initial par le problème approché

$$\text{Trouver } u_N \in B_N \text{ tel que } P_N R_N = 0.$$

On est alors ramené notre problème à la résolution de  $N$  équations différentielles en temps dont les inconnues sont les  $\tilde{u}_k$ .

## 2.1 Méthode de Galerkin

En mathématiques, dans le domaine de l'analyse numérique, les méthodes de Galerkin forment une classe de méthodes permettant de transformer un problème continu (par exemple une équation différentielle) en un problème discret. Cette approche est attribuée aux ingénieurs russes *Ivan Boubnov*<sup>1</sup> (1911) et *Boris Galerkin*<sup>2</sup>(1913)[28]-[45].

### Principe de la méthode :

La méthode de *Galerkin* est applicable pour les équations avec des conditions aux limites *périodiques* ou *homogènes*.

Soit  $\mathcal{B} = \{\nu \in \mathcal{H}, B\nu = 0\}$  le sous-espace des fonctions de  $\mathcal{H}$  vérifiant les conditions aux limites. Dans cette méthode les  $(\varphi_k)_{k=1\dots\infty}$  forment une base de  $\mathcal{B}$ . En cherchant

$$u_N = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n \varphi_n,$$

dans  $B_N$  engendré par les  $(\varphi_k)_{k=1\dots N}$ , on est sûr de trouver une fonction (une solution) vérifiant les conditions aux limites.

Soit  $P_N^\perp$  la projection orthogonale de  $\mathcal{H}$  sur  $B_N$ . La méthode de Galerkin consiste à résoudre le problème approché suivant

$$u_N = \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k \varphi_k \in B_N \quad \text{tel que} \quad P_N^\perp R_N = 0$$

$$\text{avec} \quad R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - F(u_N) - f.$$

### Exemple 1

*Équation de la chaleur avec des conditions périodiques aux bords (de type Dirichlet).*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(0, \pi)$  avec les fonctions de base

$$\varphi_k(x) = \sin kx, \quad k = 1, \dots, \infty,$$

qui vérifient les conditions aux limites.

On a

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin kx,$$

---

1. Ivan Grigorievitch Boubnov (18 janvier 1872 à Nijni Novgorod - 13 mars 1919 à Péetrograd), ingénieur naval de la marine militaire russe, est le principal concepteur des premiers sous-marins russes.

2. Boris Galerkin (Boris Grigorievitch Galiorkin), né le 20 février 1871 à Polotsk (Biélorussie) et mort le 12 juillet 1945, est un mathématicien et un ingénieur russe. Son nom reste lié à une méthode de résolution approchée des structures élastiques.

et on cherche

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k(t) \sin kx.$$

Calculons le résidu

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{\partial u_N}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} - f \\ &= \sum_{k=1}^N \left( \frac{d\tilde{u}_k}{dt} + k^2 \tilde{u}_k \right) \sin kx - \sum_{k=1}^N f_k \sin kx. \end{aligned}$$

Dire que  $R_N$  est orthogonal à  $B_N$  revient à poser les  $N$  équations :

$$\frac{d\tilde{u}_k}{dt} = -k^2 \tilde{u}_k + f_k \quad k = 1, \dots, N.$$

On décompose

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k^0 \sin kx,$$

ce qui donne  $N$  conditions initiales

$$\tilde{u}_k(0) = \tilde{u}_k^0 \quad \text{pour } k = 1 \dots N.$$

On résoud alors ces  $N$  équations différentielles, soit par un schéma numérique, soit analytiquement lorsque cela est simple comme ici :

$$\tilde{u}_k(t) = \frac{f_k}{k^2} (1 - e^{-k^2 t}) + a_0 e^{-k^2 t}$$

## La mise en oeuvre de l'exemple (1) En Maxima

```
Galerkin(EDP, base, X, a, b, ua, ub, t0, u0, N) := block (
```

```
/* Entrer une EDP, une base(expression), list de variables,
   les bords du domaines, les conditions aux bords,
   la condition initiale), l'ordre du développement.*/
```

```
[l: [], v: []],
```

```
if (ev (base, map("=", X, a)) # ua) or (ev (base, map("=", X, b)) # ub)
  then
```

```
/* Pour assurer que la base choisi
   vérifie les conditions aux limites.*/
```

```
(
print ("Entrer une base qui vérifie les conditions aux bords")
)
```

```
else
```

```
(
print ("f_N = ", 'sum(f(k)* sin (k*x), k, 1, N) = nusum(f(k)* sin (k*x), k, 1, N)),
print ("u_N = ", 'sum(u(k)* sin (k*x), k, 1, N) = nusum(u(k)* sin (k*x), k, 1, N)),
```

```

print ("R_N = ", 'diff('sum(u(k)* sin (k*x),k,1,N),t) -
      c* 'diff('sum(u(k)* sin (k*x),k,1,N),x,2) - ('sum(f(k)* sin (k*x),k,1,N))

for i:1 thru N do
(
atvalue(u(t),t=t0,u0),
l : cons(diff(u[i](t),t)+i^2*u[i](t)-f[i],l),
v : cons(u[i](t),v)
),
print ("Les coefficients spectraux de cette décomposition sont : "),
      desolve(l, v))
)
);
/* L'appel de la fonction Galerkin pour notre exemple */
Galerkin ('diff(u,t)= c*'diff(u,x,2)+f, sin(k*x), [k*x], [0], [%pi],0,0,0,0,5);

```

### Remarque 2.1

Remarquons que la vraie solution

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k \sin nx,$$

se décompose avec les mêmes coefficients (modulo de troncature) que ceux de la solution approchée  $u_N$ , qui se trouve être par conséquent la projection orthogonale de  $u$  sur  $B_N$ . Ce n'est pas le cas lorsque  $F$  est non linéaire comme dans l'exemple suivant.

### Exemple 2

*Équation de Burgers périodique*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in \Gamma \text{ cercle unité } [0, 2\pi] \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Gamma, \mathbb{C})$  avec les fonctions de base  $\varphi_k(x) = e^{ikx}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

On pose  $N = 2K + 1$ . Soit  $B_N$  engendré par  $\{e^{ikx}\}_{-K \leq k \leq K}$ .

On cherche

$$u_N = \sum_{k=-K}^K a_k(t) e^{ikx}.$$

Pour calculer le résidu

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} + u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} - f.$$

Il faut effectuer le produit de convolution discret :

$$\begin{aligned} u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} &= \left( \sum_{p=-k}^k a_p e^{ipx} \right) \left( \sum_{q=-k}^k i q a_q e^{iqx} \right) \\ &= \sum_{(p,q) \in \varphi} i q a_p a_q e^{i(p+q)x}. \end{aligned}$$

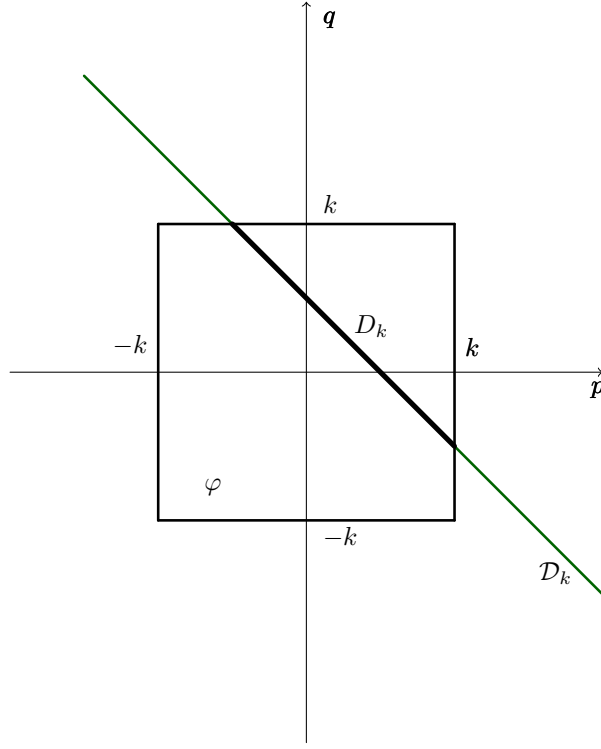


FIGURE 2.1: Segment de droite  $D_k$  dans le carré  $\varphi$  et la droite  $\mathfrak{D}_k$ .

où  $\varphi$  désigne le carré  $[-K, K] \times [-K, K]$ .

En factorisant  $e^{ikx}$  on regroupe les termes  $(p, q) \in D_k$  où  $D_k$  désigne l'intersection de la droite  $p + q = k$  avec le carré :  $D_k = \{(p, q) \in \varphi, p + q = k\}$ .

$$u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} = \sum_{k=-2K}^{2K} \left( \sum_{(p,q) \in D_k} i_q a_p a_q \right) e^{ikx}.$$

En effectuant la projection orthogonale sur  $B_N$  de cette expression il ne reste que les termes  $k \in [-K, K]$  de la sommation.

La méthode de Galerkin conduit donc au système :

$$\frac{da_k}{dt} + \sum_{(p,q) \in D_k} i_q a_p a_q = -\nu k^2 a_k + f_k \quad k \in [-K, K].$$

Comparons les coefficients  $a_k$  avec ceux de la vraie solution

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(t) e^{ikx}$$

qui vérifient :

$$\frac{dA_k}{dt} + \sum_{(p,q) \in \mathfrak{D}_k} i_q A_p A_q = -\nu k^2 A_k + f_k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

où  $\mathfrak{D}_k$  désigne la droite de  $\mathbb{Z}^2$   $p + q = k$  toute entière.

On voit que contrairement au cas où  $F$  est linéaire  $u_N$  n'est pas la projection orthogonale de  $u$ . En effet dans le cas approché le couplage des équations s'effectue par le segment de droite  $D_k$  au lieu de la droite toute entière  $\mathfrak{D}_k$  dans le cas du vrai problème.

## Problèmes non périodiques

Pour des problèmes non périodiques, les ensembles de fonctions choisies comme bases des solutions pour certaines équations différentielles, les solutions des *problèmes de Sturm-Liouville singulier* [ voir [44], Chap 2].

**Par exemple**, l'ensemble des polynômes de Chebyshev définis par

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)),$$

sont des solutions de l'équation différentielle suivante dans l'intervalle  $[-1, 1]$

$$-(\sqrt{1-x^2}T'_k(x))' = \frac{k^2}{\sqrt{1-x^2}}T_k(x).$$

Il est facile de prouver que ces fonctions sont en effet polynômes, puisque  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$ , et à l'aide les identités trigonométriques, on peut arriver à la relation de récurrence

$$T_{k+1} = 2xT_k - T_{k-1}.$$

Le développement prend la forme

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k T_k(x),$$

avec

$$\tilde{u}_k = \int_{-1}^1 u(x)T_k(x)w(x)dx,$$

et

$$w(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Notez que, après le changement de variable  $x = \cos(\theta)$ , Les polynômes de Chebyshev devenir des fonctions *cosinus*.

Si une fonction  $u$  est développée dans la base de Chebyshev comme

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k T_k(x),$$

la dérivée peut également être exprimée comme une série de Chebyshev

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k^{(1)} T_k(x),$$

dont les coefficients  $\tilde{u}_k^{(1)}$  sont calculés à l'aide de la relation de récurrence

$$2T_k(x) = \frac{1}{k+1}T'_{k+1}(x) - \frac{1}{k-1}T'_{k-1}(x), \quad k \geq 1. \quad (2.1.1)$$

Pour plus d'informations [voir l'annexe].

**Par exemple**, lorsque l'on considère une approximation  $u_N$  comme ci-dessus, nous avons de (2.1.1) que

$$2k\tilde{u}_k = c_{k-1}\tilde{u}_{k-1}^{(1)} - \tilde{u}_{k+1}^{(1)}, \quad \text{pour } k \geq 1$$

avec  $c_k = 2$  pour  $k = 0, \dots, N$  et 1 sinon.

Nous avons aussi  $\tilde{u}_k^{(1)} = 0$ , pour  $k \geq N$ , et les coefficients restants peuvent être calculées par ordre décroissant

$$2k\tilde{u}_k = c_{k-1}\tilde{u}_{k-1}^{(1)} - \tilde{u}_{k+1}^{(1)}, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N-1$$

Cette relation peut être facilement généralisée pour obtenir des dérivés d'ordre supérieur.

Un autre ensemble d'une grande utilité est *l'ensemble des polynômes de Legendre*, définis comme les solutions du problème de Sturm-Liouville

$$-((1-x^2)L'_k(x))' = k(n+1)L_k(x).$$

Les coefficients spectraux du développement

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k L_k(x),$$

sont définis comme

$$\tilde{u}_k = \int_{-1}^1 u(x) L_k(x) dx,$$

où la fonction de poids  $w(x) = 1$  rend beaucoup plus facile à démontrer des théorèmes pour cet ensemble que pour les polynômes de Chebyshev.

## 2.2 Méthode Tau

### Principe de la méthode :

La méthode *Tau* de *Lanczos*<sup>3</sup> est applicable pour les équations avec des conditions aux limites *non périodiques*.

Si  $F$  (l'opérateur de différentiation) contient des dérivations d'ordre  $k$  les conditions aux limites sont au nombre de  $k$  :  $Bu = g$  ( $g$  ayant  $k$  composantes).

Soit  $(\varphi_n)_{n=1 \dots \infty}$  une base orthogonale *ne vérifiant pas les conditions aux limites*.

La méthode consiste à chercher

$$u_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n,$$

dans  $B_N$  tel que

$$\begin{aligned} P_{N-k}^\perp R_N &= 0 & N-k & \text{équations} \\ Bu_N &= 0 & k & \text{équations} \end{aligned}$$

- $P_{N-k}^\perp R_N$  désigne la projection orthogonal de  $\mathcal{H}$  sur  $B_{N-k}$ .
- $u_N$  est alors déterminé par  $N$  équations différentielles.

---

3. Cornelius Lanczos, (né le 2 février 1893 à Székesfehérvár et décédé le 25 juin 1974 à Budapest) est un mathématicien et physicien hongrois.



### Exemple 3

Équation de la chaleur avec des conditions non périodiques

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in [-1, 1] \quad t \geq 0 \\ u(-1, t) = g_1 ; u(1, t) = g_2 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2([-1, 1], dx/\sqrt{1-x^2})$ , avec comme fonctions de base les polynômes de Chebyshev  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On cherche

$$u_N = \sum_{n=0}^N a_n(t) T_n(x),$$

dans  $B_N$  de dimension  $N + 1$ .

On pose

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{(2)}(t) T_n(x).$$

Les coefficients  $a_n^{(2)}$  sont donnée par la formule

$$a_n^{(2)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ \text{step2}}}^N p a_p \quad \text{avec } c_0 = 2 \quad \text{et} \quad c_n = 1.$$

[voir L'annexe : Calcul des coefficients de Chebyshev de  $F(u)$ ].

Donc

$$R_N = \sum_{n=0}^N \left( \frac{da_n}{dt} - \nu a_n^{(2)} \right) T_n + \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_n.$$

Comme  $k = 2$  on pose nulle la projection de ce résidu sur  $B_{N-2}$  :

$$\frac{da_n}{dt} = \nu a_n^{(2)} + f_n \quad n = 0 \dots, N-2 \quad N-1 \text{ équations.}$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n T_n(-1) = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n = g_1, \\ \sum_{n=0}^N a_n T_n(1) = \sum_{n=0}^N a_n = g_2. \end{cases} \quad 2 \text{ équations}$$

Ces  $N + 1$  équations permettent de trouver les  $(N + 1)$   $a_n(t)$ , en utilisant les conditions initiales

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 T_n(x).$$

Mise en oeuvre de l'exemple (3) En Maxima

```
Tau(EDP,N,k,t0,u0,c):=block(
[1:[ ],v:[ ],a2:[ ] ],
```

```
print( "L'approximation de la solution est donnée par u_N =",
'sum(a[n]* cos(n*acos(x)),n,0,N)=nusum(a[n]* cos(n*acos(x)) ,n,0,N)),
```

```

print("L'approximation du second membre est donnée par f_N =",
'sum(f[n]* cos(n*acos(x)),n,1,N)= nusum(f[n]* cos(n*acos(x)),n,1,N)),

          /*calculé des coefficients a2*/
S0:0,
  for q:1 step 2 thru N do (
    S0:S0+q*a[q](t)
  ),

a2:endcons(S0,a2),
  for n:1 thru N-1 do (
    S:0,
    for p:n+1 step 2 thru N do (
      S:S+p*a[p](t)
    ),
    a2: endcons(2*S,a2)
  ),

print("Les coefficients de Chebychev de la dérivé second sont :",a2),
Som:0,

  for z:1 thru N do (
    Som:Som+a2[z]*cos(z*acos(x))
  ),

print ("L'approximation de la dérivé second par rapport
à x est donnée par :", Som),
print ("La fonction résiduelle est donné par R_N = ",
'sum( 'diff(a(n),t)-c*Som+ f(n)) *cos(n(acos(x))) , n,0,N ) ),

          /*Détermination des N-k equations ordinaires*/

  for i:1 thru N-k do (
    atvalue(a(t),t=0,0),
    l:endcons(diff(a[i](t),t)-c*a2[i]-f[i],l),
    v:endcons(a[i](t),v)
  ),

          /*Détermination des 02 equations algebriques*/

e1:0,e2:0,
  for n:1 thru N do (
    e1:e1+((-1)^n)*a[n](t),
    e2:e2+a[n](t)
  ),

E1:e1-g1,
E2:e2-g2,

```

```

/*Formulation du système final*/

l:endcons(diff(E1,t),1),
l:endcons(diff(E2,t),1),

    for i:N-k+1 thru N do (
        v:endcons(a[i](t),v)
    ),

print("Les coefficients spectraux sont",desolve(l,v)),
    for i :1 thru N do (
        S:S+reverse(desolve(l,v)[i])*cos(i*acos(x))
    ),

print("L'approximation par la méthode Tau est donnée par u_N(x,t) = ",S)
);

/* L'appel de la fonction Tau pour notre exemple */

Tau('diff(u,t)= 4*'diff(u,x,2)+f, 5,2,0,0,4 );

```

## 2.3 Méthode de collocation

### Principe de la méthode :

Comme la méthode de Galerkin, elle est applicable pour les problèmes où les conditions aux limites sont périodiques ou bien homogènes. Et comme pour la méthode de Galerkin les  $(\varphi_k)_{k=1,\dots,\infty}$  forment une base complète de  $\mathcal{B}$ , et vérifiant donc les conditions aux limites.

On se donne de plus  $(x_i)_{i=1,\dots,N}$  ( $N$  points) dits de *collocation* dans  $\Omega$  tels que la matrice  $(\varphi_n(x_i))_{N \times N}$  soit inversible.

La méthode consiste à chercher

$$u_N = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n,$$

dans  $B_N$  (engendré par les  $N$  fonctions de base) tel que son résidu

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} + F(u_N) - f,$$

vérifier les  $N$  conditions

$$R_N(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N.$$

Ces  $N$  conditions s'écrivent encore

$$P_N^c R_N = 0$$

où  $P_N^c$  désigne la projection de collocation définie comme suit :

Soit  $v \in \mathcal{H}$ , et

$$v_i = v(x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

les valeurs de cette fonction aux points de collocation.

Il existe une seule fonction  $P_N^c$  de  $B_N$  prenant les mêmes valeurs aux mêmes points de collocation.

En pratique cette projection s'effectue simplement à condition de savoir inverser la matrice

$$\mathcal{M} = (\varphi_n(x_i)).$$

Pour en bien comprendre le mécanisme introduisant deux isomorphismes

$$\begin{aligned} \Phi_{sp} : B_N &\longrightarrow \delta_p = \mathbb{C}^N \\ w = \sum_{n=1}^N b_n \varphi_n &\longmapsto (b_1, b_2, \dots, b_N) \\ \Phi_{ph} : B_N &\longrightarrow \mathfrak{S}_h = \mathbb{C}^N \\ w &\longmapsto (w_1, w_2, \dots, w_N) \quad \text{avec } w_i = w_{x_i}. \end{aligned}$$

On appelle  $\delta_p$  "l'espace spectrale" et  $\mathfrak{S}_h$  "l'espace physique".

De ces deux isomorphismes on déduit un troisième de  $\delta_p$  dans  $\mathfrak{S}_h$  défini par

$$\sum_{n=1}^N b_n \varphi_n(x_i) = w_i \quad i = 1, \dots, N.$$

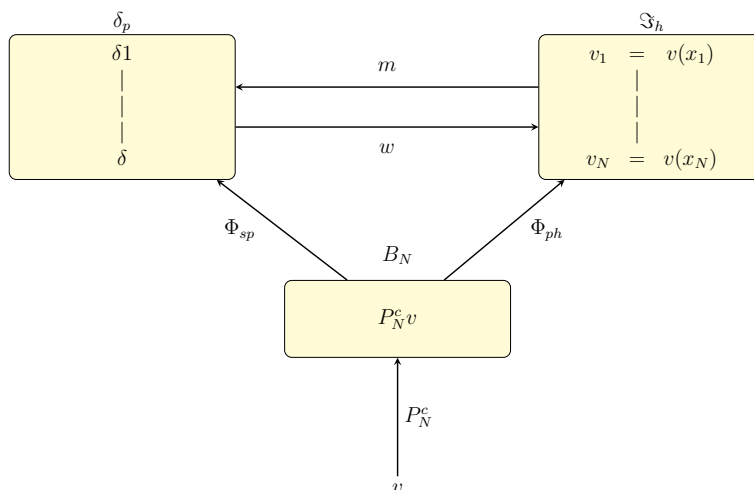


FIGURE 2.2: Projection de collocation d'une fonction  $v \in \mathcal{H}$ .

Sa matrice pour les bases canonique est donc

$$\mathcal{M} = (\varphi_n(x_i)).$$

Ces isomorphismes  $\delta_p \sim B_N \sim \mathfrak{S}_h$  permettent de décomposer la projection de collocation.

Étant donnée une fonction  $v \in \mathcal{H}$ , les  $N$  valeurs  $v_i = v(x_i)$  déterminent la projection  $P_n^c$  dans l'espace physique et en appliquant  $\mathcal{M}^{-1}$  on obtient ses coefficients dans l'espace spectral.

• La puissance de la méthode de collocation réside dans la simplicité de la projection des termes non linéaires[44].

**Par exemple**, la projection de collocation de  $v^2$  est donnée par  $(v_i)_{i=1, \dots, N}^2$ , celle de

sin  $v$  par  $\sin(v_i)_{i=1,\dots,N}$  etc  $\dots$ .

De plus toute fonction de  $B_N$  se projette en elle même.

On calcule donc facilement la projection de collocation du résidu  $R_N$  en effectuant des allers et retours entre l'espace spectral où sont calculées les dérivations et l'espace physique où sont projetés les termes non linéaires.

#### Exemple 4

Équation de Burgers périodique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, & x \in \Gamma(\text{cercle unité } [0, 2\pi]), \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Gamma, \mathbb{C})$ , avec la base  $(e^{ikx})_{k \in \mathbb{Z}}$ .

$B_N$  est engendré par les  $(e^{ikx})_{-K \leq k \leq K}$ , alors  $N = 2K + 1$  Sur  $\Gamma = [0, 2\pi]$ .

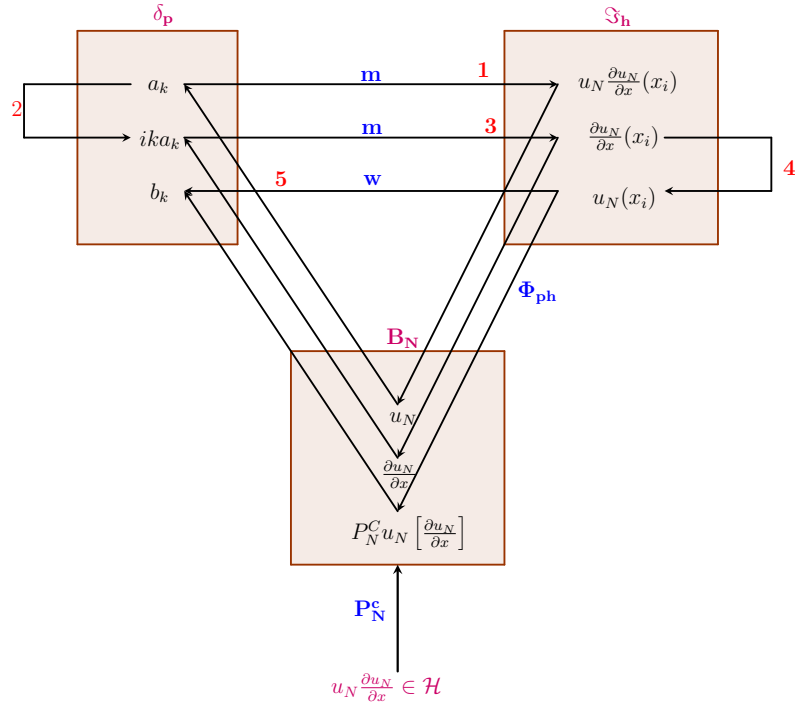


FIGURE 2.3: Calcul des  $b_k$  connaissant les  $b_K$ .

Les points de collocation sont choisis à intervalles réguliers :

$$x_i = \frac{2\pi i}{N}, \quad i = 1, \dots, N.$$

On a

$$\mathcal{M} = (\exp^{ikx_i})$$

matrice  $N \times N$ .

L'inconnue est

$$u_N = \sum_{k=-K}^K a_k \exp^{ikx}.$$

Il faut calculer la projection du résidu

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} - u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} - f.$$

Les deux premiers termes appartiennent à  $B_N$  et sont invariants par  $P_N^c$ .

Pour projeter  $u_N \frac{\partial u_N}{\partial x}$  qui n'est pas un élément de  $B_N$  on procède comme suit :

Des  $(a_k)_{-K \leq k \leq K}$  coefficients spectraux de  $u_N$  on déduit très simplement  $(i k a_k)_{-K \leq k \leq K}$  coefficients de  $\frac{\partial u_N}{\partial x}$ .

En appliquant la matrice  $\mathcal{M}$  à ces deux vecteurs on en déduit

$$[u_N(x_i)]_{i=1, \dots, N}$$

et

$$\left[ \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i) \right]_{i=1, \dots, N}$$

les coefficients de  $u_N$  et  $\frac{\partial u_N}{\partial x}$  dans l'espace physique.

Les coefficients de

$$P_N^c \left( u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} \right).$$

dans l'espace physique sont

$$\left[ u_N(x_i) \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i) \right]_{i=1, \dots, N}.$$

En y appliquant la matrice  $\mathcal{M}^{-1}$  on calcule les  $(b_k)_{-K \leq k \leq K}$  coefficients spectraux de cette projection, ce qui a coûté au total deux multiplication par  $\mathcal{M}$  et une par  $\mathcal{M}^{-1}$ . Le problème approché de la méthode de collocation s'écrit alors dans l'espace spectral :

$$P_N^c = 0 \iff \frac{da_k}{dt} + b_k = -\nu k^2 a_k + f_k \quad k = -k, \dots, k.$$

## 2.4 Méthode Tau-Collocation

### Cas d'applications :

Sont les mêmes que pour la méthode *Tau*. Conditions aux limites non périodiques.

### Principe de la méthode

- Comme pour la méthode *Tau*  $(\varphi_n)_{n=1, \dots, \infty}$  est une base orthogonale ne vérifiant pas les  $k$  conditions aux limites.

- Comme pour la méthode de *collocation*  $(x_i)_{i=1, \dots, N}$  sont les  $N$  points du domaine  $\Omega$  et l'on sait appliquer rapidement  $\mathcal{M} = (\varphi_n(x_i))$  et son inverse.

On calcule la projection  $P_N^c R_N$  avec allers et retours entre l'espace spectral et l'espace physique.

Soit  $P_{N-k}^\perp$  la projection orthogonale sur  $B_{N-k}$ . Les  $N$  conditions déterminant  $u_N \in B_N$  par cette méthode sont

$$\begin{aligned} P_{N-k}^\perp P_N^c R_N &= 0 \\ B u_N &= 0. \end{aligned}$$

### Exemple 5

Équation de Burgers non-périodique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in [-1, 1] \quad t \geq 0 \\ u(-1, t) = g_1 \quad u(1, t) = g_2 & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2\left([-1, 1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  base des polynômes de Chebychev.

En choisissant comme points de collocation les

$$x_j = \cos\left(j \frac{2\pi}{N+1}\right)_{j=0, \dots, N},$$

et  $N$  pair on peut utiliser l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide pour appliquer la matrice

$$\mathcal{M} = (T_n x_j) = \cos\left(nj \frac{2\pi}{N+1}\right).$$

Les  $N+1$  équations du problème approché s'écrivent :

Trouver

$$u_N = \sum_{n=0}^N a_n T_n,$$

dans  $B_N$  (de dimension  $N+1$  ici), tel que

$$\begin{cases} \frac{da_n}{dt} + b_n = \nu a_n^{(2)} + f_n & n = 0, \dots, N-2 \\ \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n = g_1 \\ \sum_{n=0}^N a_n = g_2 \end{cases}$$

avec

$$a_n^{(2)} = \sum_{\substack{p=n+1 \\ \text{step 2}}}^N p a_p,$$

et  $b_n$  coefficients spectraux de  $P_N^c\left(u_N \frac{\partial u_N}{\partial x}\right)$ .

Quelle méthode utiliser ?

**Tableau 2.1** résume les conditions d'application des quatre méthodes spectrales précédentes.

Méthodes	Domaines d'application
Galerkin et collocation	conditions aux limites périodiques ou homogènes
Tau et Tau-collocation	conditions aux limites non périodiques

TABLE 2.1: Domaines d'application des méthodes spectrales.

**Tableau 2.2** donne une indication sur le choix d'une méthode. Ce tableau n'a rien

de catégorique et il sert juste à fixer les idées. Lorsque  $F$  est linéaire la méthode de Galerkin (resp Tau) est identique à la méthode de collocation (resp Tau-collocation). Lorsque  $F$  est non linéaire<sup>4</sup> ces dernières sont plus rapides en temps de calcul, à condition de posséder un algorithme de transformation rapide entre espace spectral et espace physique. **Tableau 2.3** indique les principales fonctions de bases

$C.L \backslash F$	<b>F linéaire à coefficients constant</b>	<b>F quelconque</b>
Périodiques	Galerkin (exemple : chaleur périodique)	Collocation (exemple : Burgers périodique)
Non périodiques	Tau ou Galerkin (exemple : chaleur non périodique)	Tau-collocation (exemple : Burgers non périodique)

TABLE 2.2: Essai de classification du choix de la méthode pour des applications pratiques.

pour lesquelles il existe de tels algorithmes de transformation. : Orszag a mis au point des algorithmes rapides pour les polynômes de Legendre ou de Laguerre [voir [50]].

<b>Conditions aux limites</b>	<b>Méthodes</b>	<b>Domaines et fonctions de base</b>
Périodiques	Galerkin et collocation	$x \in \Gamma$ cercle unité $[0, 2\pi]$ $(e^{ikx})_{k \in \mathbb{Z}}$ , $(\sin nx)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , ou $(\cos nx)_{n \in \mathbb{N}}$
Non périodiques	Tau et Tau-collocation	$x \in [-1, 1]$ Polynôme de Chebychev, Legendre ou Laguerre

TABLE 2.3: Fonctions de bases usuelles.

---

4. ou linéaire avec des coefficients dépend de  $x$ .



Les méthodes spectrales ne distinguent non seulement par le type de la méthode (Galerkin, collocation, Galerkin avec intégration numérique, Tau), mais aussi par le choix particulier des fonctions testes (fonctions d'essai). Les fonctions d'essai les plus souvent utilisées sont les polynômes trigonométriques, les polynômes de Chebychev et de Legendre.

Dans [15]-[16]-[17] les auteurs présentent une approche assez générale de l'analyse de stabilité et de convergence des méthodes spectrales. Il peut être utile de spécifier précisément ce que l'on entend ici par la stabilité d'une approximation spatiale basée sur une méthode spectrale : Un schéma sera appelé stable s'il est possible de contrôler la solution discrète par les données de manière indépendante du paramètre de discrétisation  $N$  (le degré des polynômes utilisés). Cela signifie qu'une norme appropriée de la solution est bornée par un multiple constant d'une norme appropriée des données, et toutes les normes impliquées, ainsi que la constante, ne dépendent pas de  $N$ . En d'autres termes, pour une donnée fixe, toutes les solutions discrètes produites par le schéma spectral, comme  $N$  tend vers l'infini, se trouvent dans un sous-ensemble borné d'un espace linéaire normé.

Nous commençons par un réexamen de certains exemples. L'objectif ici est d'introduire les aspects saillants des différentes méthodes d'analyse.

### 3.1 Méthode de Fourier-Galerkin pour l'équation d'onde

La plus part d'équations d'évolution s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{M}(u), \quad (3.1.1)$$

où  $u(x, t)$  est la solution, et  $\mathcal{M}(u)$  est un opérateur (linéaire ou non-linéaire) qui contient toutes les dérivées spatiales de  $u$ . L'équation (3.1.1) doit être couplée avec une condition initiale  $u(x, 0)$  et des conditions aux limites.

Pour simplifier, supposons qu'il existe une seule dimension spatiale et que le domaine spatiale est  $[0, 2\pi]$ , et que les conditions aux limites sont périodiques.

La solution approchée est représentée par

$$u_N(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k(t) \phi_k(x). \quad (3.1.2)$$

Les  $\phi_k$  sont des fonctions d'essai, tandis que les  $a_k$  sont les coefficients du développement. En général,  $u_N$  ne satisfait pas (3.1.1), i.e., le résidu

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} - \mathcal{M}(u_N)$$

ne disparaîtra pas partout. L'approximation est obtenue par la sélection d'un ensemble de fonctions tests  $\psi_k$  et en exigeant que

$$\int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial u_N}{\partial t} - \mathcal{M}(u_N) \right] \psi_k(x) dx = 0 \quad \text{pour } k = -N/2, \dots, N/2, \quad (3.1.3)$$

où les fonctions tests déterminent le poids du résidu.

La méthode spectrale la plus simple pour les problèmes avec conditions aux limites périodique est basée sur les polynômes trigonométrique.

$$\phi_k(x) = e^{ikx}, \quad (3.1.4)$$

$$\psi_k(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-ikx}. \quad (3.1.5)$$

Les fonctions d'essai et les fonctions test sont pratiquement les mêmes, et elles satisfaisaient la condition de la bi-orthogonalité

$$\int_0^{2\pi} \phi_k(x) \psi_l(x) dx = \delta_{kl}. \quad (3.1.6)$$

Si c'était simplement un problème d'approximation, alors (3.1.2) serait la série de Fourier tronquée de la fonction connue  $u(x, t)$  avec

$$a_k(t) = \int_0^{2\pi} u(x, t) \psi_k(x) dx \quad (3.1.7)$$

être simplement les coefficients de Fourier. Pour une (EDP), cependant,  $u(x, t)$  n'est pas connue. L'approximation (3.1.2) est déterminée par (3.1.3).

Pour le problème linéaire hyperbolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1.8)$$

i.e., pour

$$\mathcal{M}(u) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.1.9)$$

la condition (3.1.3) devient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{l=-N/2}^{N/2} a_l(t) e^{ilx} \right] e^{-ikx} dx = 0.$$

Les deux étapes suivantes sont la différenciation analytique (spatiale) des fonctions d'essai

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{l=-N/2}^{N/2} \left( \frac{da_l}{dt} - ila_l \right) e^{ilx} \right] e^{-ikx} dx = 0,$$

et l'intégration analytique de cette expression, qui produit le système dynamique

$$\frac{da_k}{dt} - ika_k = 0, \quad k = -N/2, \dots, N/2. \quad (3.1.10)$$

Les conditions initiales pour ce système d'équations différentielles ordinaires (EDO) sont les coefficients de développement de la condition initiale. Pour l'approximation de Galerkin,

$$a_k(0) = \int_0^{2\pi} u(x, 0)\psi_k(x)dx \quad (3.1.11)$$

Pour la méthode de Galerkin stricte, les intégrales telles que celles qui apparaissent dans (3.1.11) doit être calculé analytiquement. La condition initiale

$$u(x, 0) = \sin(\pi \cos x) \quad (3.1.12)$$

est utilisé pour illustrer la précision de la méthode de Fourier-Galerkin pour (3.1.8). La solution exacte

$$u(x, t) = \sin[\pi \cos(x + t)], \quad (3.1.13)$$

a le développement de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t)e^{ikx}, \quad (3.1.14)$$

où les coefficients de Fourier sont

$$a_k(t) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)J_k(\pi)e^{ikt}, \quad (3.1.15)$$

et  $J_k(t)$  est la fonction de Bessel d'ordre  $k$ .

Les propriétés asymptotiques des fonctions de Bessel impliquent que

$$k^p a_k(t) \longrightarrow 0 \quad \text{Quand} \quad k \longrightarrow \infty \quad (3.1.16)$$

Pour tous entier positif  $p$ . Par conséquent, la série tronquée

$$u_N(x, t) = \sum_{-N/2}^{N/2} a_k(t)e^{ikx}, \quad (3.1.17)$$

converge plus vite que toute puissance finie de  $1/N$ . Cette propriété est souvent appelée par *la convergence spectrale*. Une illustration de la précision supérieur disponible à partir d'une méthode spectrale est fourni dans (??).

La figure (3.2) illustre l'erreur maximale fourni par la méthode spectrale de Galerkin après une période à ( $t = 2\pi$ ). La méthode des différences finies d'ordre 2, la méthode (explicite) des différences finies d'ordre 4 et la méthode compact d'ordre 4 et 6.

L'entier  $N$  représente le degré du développement (3.1.17) pour la méthode de Fourier-Galerkin et le nombre de points de grille pour les différences finies et la méthode compact.

La discrétisation en temps est faite par la méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4, et les coefficients exactes initiaux de Fourier ont été utilisés pour la méthode spectrale. Dans tous les cas, le pas du temps à été choisi tel que l'erreur de la discrétisation temporelle était négligeable.

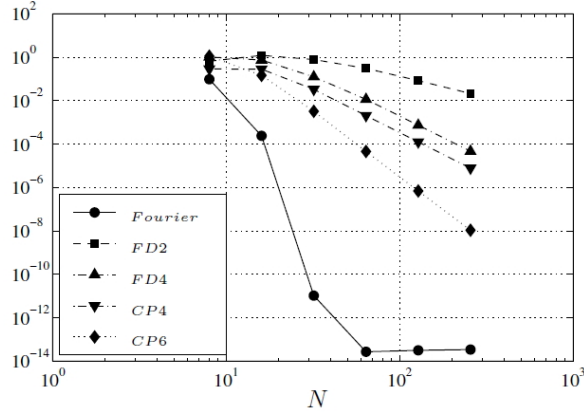


FIGURE 3.1: Erreurs maximales pour le problème hyperbolique linéaire à  $t = 2\pi$  pour le schéma Fourier-Galerkin et plusieurs schémas des différences finie.

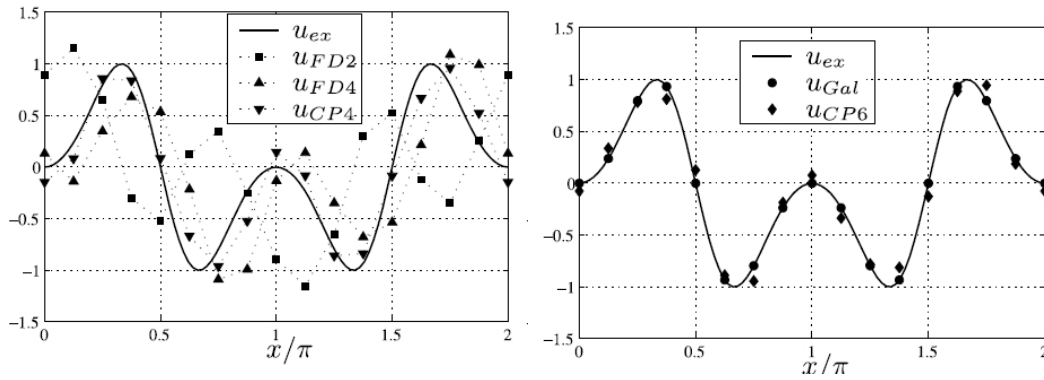


FIGURE 3.2: Solutions numériques pour le problème hyperbolique linéaire à  $t = 2\pi$  pour  $N = 16$  par la méthode de Fourier Galerkin et plusieurs schémas des différences finie.

### 3.1.1 Stabilité et convergence

Le problème linéaire hyperbolique

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & 0 < x < 2\pi, & \quad t > 0 \\ u(x, t) &2\pi \text{ périodique en } x, & t > 0 & \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 < x < 2\pi & \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

est approximé précédemment par un schéma de Galerkin (3.1.3). Pour tout  $t \geq 0$ ,  $u_N(x, t)$  est un polynôme trigonométrique de degré  $N$  en  $x$ , i.e.,  $u_N(t) \in S_N$ , où

$$S_N = \text{span}\{e^{ikx} / -N \leq k \leq N-1\}$$

La solution  $u_N$  satisfait la relation intégrale suivante

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \overline{\nu(x)} dx = 0 \quad \text{pour tout } \nu \in S_N, \quad t > 0. \quad (3.1.19)$$

qui est équivalente à (3.1.3) où les  $\psi_k$  forment une base en  $S_N$ , et, par la condition initiale (3.1.11)

$$u_N(0) = P_N u_0 = \sum_{k=-N}^{N-1} \hat{u}_{0,k} e^{ikx}.$$

Pour tout  $t > 0$ , on pose  $\nu(x) = u_N(x, t)$  en (3.1.19). Une intégration par partie donne

$$\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, t) \bar{u}_N(x, t) dx = \frac{1}{2} \{ |u_N(2\pi, t)|^2 - |u_N(0, t)|^2 \} = 0$$

par la condition de périodicité. Il en résulte que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} |u_N(x, t)|^2 dx = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_N}{\partial t}(x, t) \bar{u}_N(x, t) dx = 0,$$

i.e., la norme  $\mathcal{L}^2$  (dans l'espace) de la solution spectrale est constante dans le temps. Donc pour tout  $t > 0$

$$\int_0^{2\pi} |u_N(x, t)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |P_N u_0(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |u_0(x)|^2 dx.$$

et comme le coté droit est une constante, le schéma Galerkin (3.1.3) est stable.

D'autre part, la projection de l'équation  $\left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \right)$  sur  $S_N$  donne le résultat que la série de Fourier tronquée  $P_N u$  de la solution exacte  $u$  satisfait à tout  $t > 0$ ,

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial t} P_N u - \frac{\partial}{\partial x} P_N u \right) (x, t) \nu(x) dx = 0, \quad \text{pour tout } \nu \in S_N.$$

Ceci est la même équation variationnelle qui définit  $u_N$ . comme  $u_N = P_N u$  en  $t = 0$ , il en résulte que

$$u_N = P_N u \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Puisque  $P_N u$  converge vers  $u$  lorsque  $N$  tend vers l'infini, l'approximation est convergente.

## 3.2 Méthode de collocation Chebychev pour l'équation de la chaleur

Les séries de Fourier, malgré leurs simplicités et leurs familiarités, ne sont pas toujours le bon choix pour les fonctions d'essai. En fait, les séries de Fourier ne sont recommandées que pour des problèmes avec des conditions aux limites périodiques. Un ensemble plus polyvalent de fonctions d'essai se compose par les polynômes de Chebychev, qui sont défini sur  $[-1, 1]$  par

$$T_k(x) = \cos(k \cos^{-1} x), \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots \quad (3.2.1)$$

Considérons l'équation de la chaleur (linéaire)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.2.2)$$

i.e.,

$$\mathcal{M}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.2.3)$$

dans  $[-1, 1]$  avec des conditions aux limites homogènes de Dirichlet,

$$u(-1, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \quad (3.2.4)$$

et le choix des fonctions d'essai

$$\phi_k(x) = T_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (3.2.5)$$

la solution approchée a la représentation

$$u_N(x, t) = \sum_{k=0}^N a_k(t) \phi_k(x). \quad (3.2.6)$$

Dans l'approximation de collocation, l'exigence est que (3.2.2) soit satisfaite exactement par (3.2.6) sur un ensemble de points de collocation  $x_j$  dans  $[-1, 1]$

$$\left. \frac{\partial u_N}{\partial t} - \mathcal{M}(u_N) \right|_{x=x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (3.2.7)$$

Les conditions aux limites

$$u_N(-1, t) = 0, \quad u_N(1, t) = 0 \quad (3.2.8)$$

et la condition initiale

$$u_N(x_k, t) = u(x_k, 0), \quad k = 0, \dots, N, \quad (3.2.9)$$

accompagne (3.2.7)

Les équations (3.2.7) sont basés sur une formulation forte de l'équation différentielle, puisque la solution approchée est nécessaire pour satisfaire exactement l'équation différentielle à un ensemble de points discrets, dans ce cas appelés les points de collocation. Formellement, les mêmes équations à partir d'une formulation faible du problème en prenant comme fonctions test les fonctions delta-Dirac (distributions) peut être obtenues.

$$\psi_j(x) = \delta(x - x_j), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (3.2.10)$$

sous les conditions

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial u_N}{\partial t} - \mathcal{M}(u_N) \right] \psi_j(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (3.2.11)$$

Un choix particulièrement pratique pour les points de collocation  $x_j$  est

$$x_j = \cos \frac{\pi j}{N}. \quad (3.2.12)$$

Ce choix non seulement produire des approximation de haute précision, mais il est aussi économique, noter que

$$\phi_k(x_j) = \cos \frac{\pi j k}{N}. \quad (3.2.13)$$

Cela permet d'utiliser la transformée de Fourier rapide (FFT) dans l'évaluation de  $\mathcal{M}(u_N) \Big|_{x=x_j}$ . Cela est discuté en détail dans (Sec. 2, 4 [15])

Pour la condition initiale particulière

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad (3.2.14)$$

La solution exacte est

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x. \quad (3.2.15)$$

Elle a le développement infini de Chebychev

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t) T_k(x), \quad (3.2.16)$$

où

$$b_k(t) = \frac{2}{c_k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) J_k(\pi) e^{-\pi^2 t}, \quad (3.2.17)$$

avec

$$c_k = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ 1, & k \geq 1. \end{cases} \quad (3.2.18)$$

À cause de la décomposition rapide du facteur  $J_k(\pi)$ , la série tronquée converge avec un rythme exponentiel. Une méthode de collocation bien conçue fera la même chose (puisque la série infinie (3.2.6) n'est pas simplement la troncature de la série infinie (3.2.16) à l'ordre  $N$ , les coefficients du développement  $a_k(t)$  et  $b_k(t)$  ne sont pas identique).

Contrairement à la méthode de Galerkin, qui dans sa version classique est généralement mis en œuvre en termes de coefficients d'expansion  $a_k(t)$ , une méthode de collocation est mis en œuvre en termes de valeurs nodales  $u_j(t) = u_N(x_j, t)$ . En effet, en plus de (3.2.6), nous avons le développement

$$u_N(x, t) = \sum_{j=0}^N u_j(t) \phi_j(x),$$

où  $\phi_j$  maintenant désigne les fonctions delta discrète, à savoir, les polynômes de degré  $n$  unique satisfaisant  $\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$  pour  $0 \leq i, j \leq N$  (Ces fonctions particulières seront le plus souvent désignés par le symbole  $\psi_j$  dans la suite et renvoyé aux polynômes de Lagrange comme caractéristiques. Les coefficients d'expansion sont utilisés que dans une étape intermédiaire, à savoir dans la différentiation analytique (par rapport à  $x$ ) de (3.2.6).

Les coefficients du développement sont données par

$$a_k(t) = \frac{2}{N \bar{c}_k} \sum_{l=0}^N \bar{c}_l^{-1} u_l(t) \cos \frac{\pi l k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (3.2.19)$$

où

$$\bar{c}_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \text{ ou } N, \\ 1, & 1 \leq k \leq N - 1. \end{cases} \quad (3.2.20)$$

La dérivée exacte de (3.2.6) est

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(t) = \sum_{k=0}^N a_k^{(2)}(t) T_k(x), \quad (3.2.21)$$

où

$$\begin{aligned} a_{N+1}^{(1)}(t) &= 0, & a_N^{(1)}(t) &= 0, \\ \bar{c}_k a_k^{(1)}(t) &= a_{k+2}^{(1)} + 2(k+1)a_{k+1}(t) & k &= N-1, N-2, \dots, 0, \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

et

$$\begin{aligned} a_{N+1}^{(2)}(t) &= 0, & a_N^{(2)}(t) &= 0, \\ \bar{c}_k a_k^{(2)}(t) &= a_{k+2}^{(2)}(t) + 2(k+1)a_{k+1}^{(1)}(t) & k &= N-1, N-2, \dots, 0. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Les coefficients  $a_k^{(2)}$  dépend de toute évidence de façon linéaire sur des valeurs nodales  $u_l$ ; par conséquent, il existe une matrice  $D_N^2$  de telle sorte que

$$\left. \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}(t) \right|_{x=x_j} = \sum_{k=0}^N a_k^{(2)}(t) \cos \frac{\pi j k}{N} = \sum_{l=0}^N (D_N^2)_{jl} u_l(t) \quad (3.2.24)$$

(voir la section 2.4.2 [16] pour plus de détails). Par (3.2.8) nous avons effectivement  $u_0(t) = u_N(t) = 0$ . En substituant l'expression ci-dessus en (3.2.7), on aboutit à un système d'équations différentielles ordinaires pour les inconnues nodales

$$\frac{du_j}{dt}(t) = \sum_{l=0}^N (D_N^2)_{jl} u_l(t), \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (3.2.25)$$

Complété par les conditions initiales (3.2.9), le système d'équations différentielles ordinaires précédent pour des valeurs nodales de la solution est facile à intégrer dans le temps.

Les erreurs maximales en  $t = 1$  pour les solutions numériques de la méthode de collocation-Chebyshev, les différences finie d'ordre 2 et la méthode compacte d'ordre 4 sont données dans la figure (3.3), ainsi que les erreurs maximales pour la série de Chebyshev tronquée de la solution exacte en  $t = 1$ . La méthode de Chebyshev utilise  $N + 1$  points de collocation non uniformément distribués (3.2.12), alors que les méthodes des différences finies utilisent  $N + 1$  points uniformément réparties. Les erreurs maximales ont été normalisées par rapport à la valeur maximale de la solution en  $t = 1$ . Les schémas d'ordre 4 est le rapprochement classique

$$u_{i-1}'' + 10u_i'' + u_{i+1}'' = \frac{12}{(\Delta x)^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.2.26)$$

complété par un rapprochement compact de troisième ordre aux points limites, (voir Lele (1992))

$$u_0'' + 11u_1'' = \frac{1}{(\Delta x)^2} (13u_0 - 27u_1 + 15u_2 - u_3), \quad i = 0. \quad (3.2.27)$$

avant de quitter cet exemple, voici une équation plus générale que (3.2.2),

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.2.28)$$

où  $\kappa$  est le coefficient de conductivité varie en  $[-1, 1]$  et peut même dépendre de la solution  $u$ . Dans ce cas, il n'est pas commode d'appliquer le schéma de collocation (3.2.7) à l'équation (3.2.8) directement, comme cela exigerait la différentiation exacte du flux de chaleur  $\mathcal{F}(u_N) = \kappa \frac{\partial u_N}{\partial x}$ . Au lieu de cela, il faut calculé d'abord les valeurs nodales  $\mathcal{F}_l(t) = \mathcal{F}(u_N)(x_l)$ ,  $l = 0, \dots, N$ , de ce flux, applique ensuite une transformation analogue à (3.2.19), et suit cela avec une différentiation du flux comme dans (3.2.28); l'expansion résultante de la dérivée est ensuite évaluée aux



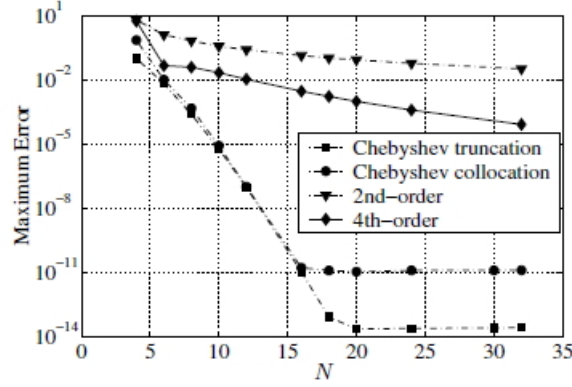


FIGURE 3.3: Erreurs maximales pour le problème de l'équation de la chaleur à  $t = 1$  pour la collocation de Chebyshev et plusieurs schémas de différence finie. Le résultat de la troncature de Chebyshev est montré pour comparaison.

points de collocation. Ce processus équivaut à différencier exactement le flux numérique  $\mathcal{F}_N(u) = I_N(\mathcal{F}(u^N))$ , qui est obtenu en interpolant le flux  $\mathcal{F}^N(u_N)$  aux points de collocation par un polynôme algébrique global de degré  $N$  (Ici,  $I_N$  est un symbole général qui désigne un opérateur d'interpolation). Le schéma de collocation résultant se lit comme suit

$$\left. \frac{\partial u^N}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} I_N \left( \kappa \frac{\partial u^N}{\partial x} \right) \right|_{x=x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (3.2.29)$$

De manière équivalente, nous avons

$$\frac{du_j}{dt}(t) = \sum_{l=0}^N (D_N)_{jl} \mathcal{F}_l(t), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (3.2.30)$$

où  $D_N$  est la matrice des dérivées de collocation de Chebychev.

L'approche utilisée pour la discrétisation de (3.2.28) met en évidence une stratégie qui adoptée pour les méthodes de collocation : La différenciation est appliquée à une fonction seulement après que l'argument de la fonction est interpolé par un polynôme global à un ensemble approprié de points de collocation. De toute évidence, lorsque l'argument est lui-même est un polynôme de degré  $\leq N$ , comme dans l'équation de chaleur à coefficient constant (3.2.2), l'interpolation renvoie la valeur de l'argument.

### 3.2.1 Stabilité et convergence

Considérons maintenant l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -1 < x < 1, \quad t > 0 \quad (3.2.31)$$

avec les conditions homogènes de Dirichlet

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.2.32)$$

et la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -1 < x < 1 \quad (3.2.33)$$

Le schéma collocation de Chebychev a été discuté pour ce problème dans la section précédente pour  $t > 0$ , la solution spectrale  $u_N$  est un polynôme algébrique de degré  $N$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , il est défini par l'équation de collocation

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}(x_k, t) - \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x_k, t) = 0, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (3.2.34)$$

et la condition initiale

$$u_N(x_k, 0) = u_0(x_k), \quad k = 0, \dots, N \quad (3.2.35)$$

Les points de collocation sont donnés par  $x_k = \cos(\frac{k\pi}{N})$  (voir 3.2.12 ou ((2.4.14) [15]). Ils sont les nœuds de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto relatif au poids de Chebychev  $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ , dont les poids sont donnés par  $w_N = \pi/2N$  et  $w_k = \pi/N$ , si  $k = 1, \dots, N-1$  (voir (2.4.14) [16]). Cette propriété sera constamment utilisée dans l'analyse ultérieure des méthodes de Collocation-Chebychev.

La  $k$ -ème équation (3.2.34) est multipliée par  $u_N(x, t)$  et une sommation sur  $k$  a été effectuée

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^N [u_N(x_k, t)]^2 w_k - \sum_{k=0}^N \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x_k, t) u_N(x_k, t) w_k = 0 \quad (3.2.36)$$

il est autorisé à inclure les points limites de la somme car  $u_N$  disparaît là. Le produit  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) u_N$  est un polynôme de degré  $2N-2$ ; par conséquent, par l'exactitude de la formule de quadrature,

$$-\sum_{k=0}^N \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x_k, t) u_N(x_k, t) w_k = -\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x, t) u_N(x, t) w(x) dx$$

Dans la section 7.1.2 [15] il est prouvé, en tant que partie d'un résultat général, que le membre droit est positif et domine en fait une "énergie" pondérée de la solution, i.e,

$$-\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x, t) u_N(x, t) w(x) dx \geq \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, t) \right]^2 w(x) dx.$$

Puis à partir de (3.2.36), il en résulte que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^N [u_N(x_k, t)]^2 w_k + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, t) \right]^2 w(x) dx \leq 0;$$

d'où

$$\sum_{k=0}^N [u_N(x_k, t)]^2 w_k + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, s) \right]^2 w(x) dx ds \leq \sum_{k=0}^N [u_0(x_k)]^2 w_k.$$

La somme sur le côté gauche représente la norme  $\mathcal{L}^2$  de la solution par rapport au poids Chebychev. Elle ne coïncide pas avec la norme  $\mathcal{L}^2$  continue  $\int_{-1}^1 [u_N(x, t)]^2 w(x) dx$  car  $(u_N)^2$  est un polynôme de degré  $2N$ , il est uniformément équivalent à cette norme, i.e,

$$\int_{-1}^1 [u_N(x, t)]^2 w(x) dx \leq \sum_{k=0}^N [u_N(x_k, t)]^2 w_k \leq 2 \int_{-1}^1 [u_N(x, t)]^2 w(x) dx.$$

D'autre part, la somme sur le membre droit peut être fixé, par exemple, par deux fois le carré du maximum des données sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Donc, pour tout  $t > 0$

$$\int_{-1}^1 [u_N(x, t)]^2 w(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial u_N}{\partial x}(x, s) \right]^2 w(x) dx ds \leq 2 \max_{-1 \leq x \leq 1} |u_0(x)|^2$$

Cela prouve que le schéma collocation de Chebychev est stable.

La convergence de l'approximation peut être prouver par un simple, bien que brut, argument. Supposons que la solution exacte  $u$  est assez régulière. Son interpolant  $\tilde{u} = I_N u$ , défini dans la section 2.2.3, satisfait les équations de collocation

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x_k, t) - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x_k, t) = r(x_k, t), \quad t > 0, k = 1, \dots, N-1 \quad (3.2.37)$$

avec l'erreur de troncature  $R = (\partial^2/\partial x^2)(u - \tilde{u})$ . Par conséquent, la différence  $e = \tilde{u} - u$ , qui est un polynôme de degré  $N$  disparaît au niveau des points limites, satisfait les équations

$$\frac{\partial e}{\partial t}(x_k, t) - \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(x_k, t) = r(x_k, t) \quad t > 0, k = 1, \dots, N-1 \quad (3.2.38)$$

et la condition initiale,  $e(x_k, 0) = 0 \quad k = 0, \dots, N$ . La même analyse précédemment utilisée des rendements

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^N [e(x_k, t)]^2 w_k + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial e}{\partial x}(x, t) \right]^2 w(x) dx \\ & \leq \sum_{k=0}^N r(x_k, t) e(x_k, t) w_k \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [r(x_k, t)]^2 w_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [e(x_k, t)]^2 w_k \end{aligned}$$

Ici, l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir A.2), et le lemme de Gronwal (voir (A.15)) donne

$$\sum_{k=0}^N [e(x_k, t)]^2 w_k + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial e}{\partial x}(x, s) \right]^2 w(x) dx ds \leq \exp(t) \sum_{k=0}^N [r(x_k, s)]^2 w_k ds. \quad (3.2.39)$$

Si le second terme du coté gauche est obtenu, une estimation de la norme  $\mathcal{L}^2$  discrète de l'erreur  $u - \tilde{u}$  aux points de collocation est obtenue

$$\sum_{k=0}^N [u(x_k, t) - u_N(x_k, t)]^2 w_k \leq \exp(t) \int_0^t \sum_{k=0}^N [r(x_k, s)]^2 w_k ds$$

Par conséquent, le schéma est converge pourvu que l'erreur de troncature disparaît lorsque  $N$  tend vers l'infini.

Maintenant

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^N [r(x_k, s)]^2 w_k &= \sum_{k=0}^N [I_N r(x_k, s)]^2 w_k \\
&\leq 2 \int_{-1}^1 [I_N r(x, s)]^2 w(x) dx \\
&= 2 \int_{-1}^1 \left[ \left( I_N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (I_N u) \right) (x, s) \right]^2 w(x) dx \\
&\leq 4 \int_{-1}^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - I_N \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (x, s) \right]^2 w(x) dx \\
&\quad + 4 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (u - I_N u)(x, s) \right]^2 w(x) dx
\end{aligned}$$

où l'équivalence ((5.3.2) [15]) entre la norme  $\mathcal{L}^2$  discrète et continue à été utilisée. Appliquant l'estimation ((5.5.26) [15]) lors de l'évaluation du membre droit

$$\left( [u(x_k, t) - u_N(x_k, t)]^2 w_k \right)^{\frac{1}{2}} \leq CN^{3-m} \exp\left(\frac{t}{2}\right) \left( \int_0^t |u(s)|_{H_w^{m;N}[-1,1]} ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'utilisation de (3.2.39) une fois de plus, donne une estimation de la dérivée spatiale de l'erreur, i.e,

$$\left( \int_0^t \int_{-1}^1 \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_N}{\partial x} \right] (x, s) \right]^2 w(x) dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq CN^{3-m} \exp\left(\frac{t}{2}\right) \left( \int_0^t |u(s)|_{H_w^{m;N}[-1,1]} ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette inégalité prouve que l'approximation est convergente et l'erreur se décroît plus vite que la manière algébrique lorsque la solution est infiniment régulière.

### 3.3 Méthode de Tau-Legendre pour l'équation de Poisson

Les méthodes spectrales sont également applicable aux équations indépendantes du temps. Le problème aux limites général est donné par

$$\mathcal{M}(u) = f \tag{3.3.1}$$

à résoudre dans un domaine déterminé, avec les conditions aux limites

$$\mathcal{B}(u) = 0. \tag{3.3.2}$$

Comme un premier exemple d'étude des problèmes aux limites c'est l'équation de Poisson sur  $[-1; 1] \times [-1; 1]$  avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Le choix de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{B}$  dans (3.3.1) et (3.3.2) est comme suit :

$$\mathcal{M}(u) = - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{3.3.3}$$

$$\beta_1(u) = u(x, -1), \quad (3.3.4)$$

$$\beta_2(u) = u(x, +1), \quad (3.3.5)$$

$$\beta_3(u) = u(-1, y), \quad (3.3.6)$$

$$\beta_4(u) = u(+1, y). \quad (3.3.7)$$

Il est préférable d'utiliser le signe négatif pour les opérateurs de second dérivée tels que (3.3.3) de sorte que  $\mathcal{M}(u)$  soit un facteur positif au lieu que négatif.

Les polynômes de Legendre et de Chebychev sont des fonctions appropriées d'essai. Un développement de Legendre bidimensionnelle est produit par le choix du produit tensoriel

$$\phi_{kl}(x, y) = L_k(x)L_l(y), \quad k, l = 0, 1, \dots, N, \quad (3.3.8)$$

où  $L_k$  est le polynôme de Legendre de degré  $k$ . La solution approximative est

$$u_N(x, y) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_{kl} L_k(x) L_l(y). \quad (3.3.9)$$

Les fonctions d'essai ne satisfont pas les conditions aux limites individuellement. (Dans la plupart des méthodes de Galerkin, les fonctions d'essai satisfont les conditions aux limites). Dans ce cas, deux ensembles distincts de fonctions test sont utilisés pour vérifier l'EDP et les conditions aux limites. Pour l'EDP, les fonctions test sont

$$\psi_{kl}(x, y) = Q_k(x)Q_l(y), \quad k = 0, 1, \dots, N - 2,$$

où

$$Q_k(x) = \frac{2k+1}{2} L_k(x);$$

Pour les conditions aux limites, ils sont

$$\mathcal{X}_k^i(x) = Q_k(x) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \\ k = 0, 1, \dots, N, \end{array} \quad (3.3.10)$$

$$\mathcal{X}_l^i(y) = Q_l(y) \quad \begin{array}{l} i = 3, 4, \\ l = 0, 1, \dots, N. \end{array} \quad (3.3.11)$$

Les conditions intégrales pour les équations différentielles sont

$$\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 \mathcal{M}(u_N) \psi_{kl}(x, y) dx = 0, \quad k, l = 0, 1, \dots, N - 2, \quad (3.3.12)$$

Tandis que les équations pour les conditions aux limites sont

$$\int_{-1}^1 \mathcal{B}_i(u_N) \mathcal{X}_k^i dx = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \\ k = 0, 1, \dots, N, \end{array} \quad (3.3.13)$$

$$\int_{-1}^1 \mathcal{B}_i(u_N) \mathcal{X}_l^i dy = 0 \quad \begin{array}{l} i = 3, 4, \\ l = 0, 1, \dots, N. \end{array}$$

Les quatre conditions dans (3.3.13) sont linéairement dépendantes des autres; En effet, les conditions aux limites dans chacun des quatre points d'angle ont été appliquées deux fois. Pour l'équation de Poisson, les intégrales ci-dessus peuvent être effectuées analytiquement. Le résultat est

$$- \left( a_{kl}^{(2,0)} + a_{kl}^{(0,2)} \right) = f_{kl} \quad k, l = 0, 1, \dots, N - 2, \quad (3.3.14)$$

$$\sum_{k=0}^N a_{kl} = 0, \quad \sum_{k=0}^N (-1)^k a_{kl} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, N, \quad (3.3.15)$$

$$\sum_{l=0}^N a_{kl} = 0, \quad \sum_{l=0}^N (-1)^l a_{kl} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

où

$$f_{kl} = \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 f(x, y) \psi_{kl}(x, y) dx, \quad (3.3.16)$$

$$a_{kl}^{(2,0)} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \sum_{\substack{p=k+2 \\ p+k \text{ paire}}}^N [p(p+1) - k(k+1)] a_{pl}, \quad (3.3.17)$$

$$a_{kl}^{(0,2)} = \left(l + \frac{1}{2}\right) \sum_{\substack{q=l+1 \\ q+l \text{ paire}}}^N [q(q+1) - l(l+1)] a_{kq}. \quad (3.3.18)$$

Ces deux dernières expressions représentent les expansions de  $\partial^2 u_N / \partial x^2$  et  $\partial^2 u_N / \partial y^2$ , respectivement, en termes de fonctions d'essai. L'approximation de Tau-Legendre

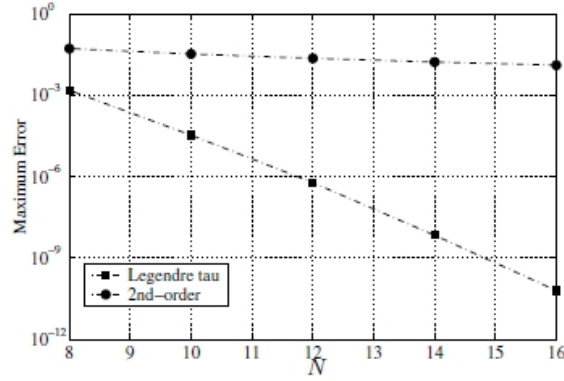


FIGURE 3.4: Erreurs maximales pour le problème de Poisson avec la méthode de Tau-Legendre et un schéma de différence finies du second ordre.

pour l'équation de Poisson est composé en (3.3.14) et (3.3.15). L'exemple particulier qui sera utilisé pour illustrer la précision de cette méthode est

$$f(x, y) = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y, \quad (3.3.19)$$

ce qui correspond à la solution analytique

$$u(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y. \quad (3.3.20)$$

Les résultats sont donnés dans la figure (??), ainsi que les résultats pour un schéma aux différences finies du second ordre. L'entier  $N$  désigne le degré d'expansion (3.3) dans chaque dimension pour la méthode de Tau-Legendre et le nombre d'intervalles uniformes dans chaque dimension pour la méthode des différences finies.

### 3.4 Méthode spectrale de collocation pour les (EDP) paraboliques avec des conditions aux limites de Neumann

Cette section, représente une méthode pour la résolution numérique des équations différentielles aux dérivées partielles paraboliques avec des conditions aux limites de Neumann [voir (1.1.2)], en utilisant une formule de collocation pour le calcul d'une matrice de différenciation pour les points de Chebychev-Gauss-Lobatto.

**Premièrement**, la théorie de l'application d'une méthode de collocation sur les (EDPs) paraboliques. Cette méthode donne un système d'équations ordinaires (EDOs).

**Deuxièmement**, les auteurs de [38] utilisent la formule de Runge-Kutta de quatrième ordre pour l'intégration numérique des système d'(ODEs). Des résultats numériques obtenus par cette technique sont comparées avec la solution exacte pour voir l'efficacité de cette méthode.

Considérons l'équation parabolique de la forme (voir [13]) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(t, x, u(x, t)), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0, \quad (3.4.1)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (3.4.2)$$

et les conditions aux limites de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial t}(a, t) = g_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(b, t) = g_2(t), \quad t \geq 0, \quad (3.4.3)$$

Afin de résoudre (3.4.1)-(3.4.3) numériquement, de nombreux chercheurs ont utilisés diverses méthodes numériques pour résoudre l'équation aux dérivées partielles. **Javidi** [39] a introduit la méthode de collocation spectrale pour la résolution de l'équation de *Burger-Fisher* généralisée. **Darvishi et Javidi** [43] ont étudié une solution numérique de l'équation de *Burger* par la méthode pseudo-spectrale et le pré-conditionnement de **Darvish. Soufyane et Boulmalf** [5] Solution des équations paraboliques linéaires et non linéaires par la méthode de décomposition. **Sapagovas** [40] a présenté des hypothèses sur la solvabilité des équations paraboliques avec des conditions non locales.

Dans ce chapitre, les équations paraboliques sont résolus par une combinaison entre une méthode pseudo-spectrale de collocation et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les résultats numériques sont comparées avec la solution exacte. Les auteurs de [38] démontre (à l'aide d'exemples numériques) que l'erreur absolue est très petite.

#### 3.4.1 Méthode pseudo-spectrale de Chebychev

Une parmi les méthodes les plus utilisables pour la résolution des (EDPs) est la méthode de collocation (ou bien la méthode pseudo-spectrale) (voir[[14]-[41]]). Les méthodes pseudo-spectrales sont devenus très populaires pour la résolution des (EDPs). Dans cette méthode, une approximation  $u_N(x)$  de  $u(x)$  est présentée par  $u_N(x_i) = u(x_i)$  pour des points de collocation  $x_i$ . Après la substitution de  $u_N$  dans

l'équation différentielle, on utilise les dérivées de  $u_N$  aux points de collocation. Une implémentation directe des méthodes de collocation spectrale implique l'utilisation de matrices de différenciation spectrale pour calculer les dérivées aux points de collocation, dans lequel  $\vec{U} = \{u(x_i)\}$  est le vecteur constitué de valeurs de  $u_N$  aux  $N + 1$  points de collocation et  $\vec{U}' = \{u'(x_i)\}$  contient les valeurs des dérivées aux points de collocation, alors la matrice de dérivation de collocation  $D$  est la matrice  $\vec{U} \rightarrow \vec{U}'$ . Les éléments de cette matrice peut être calculer analytiquement. Pour obtenir une convergence optimale, il faut calculer bien ces matrices. Dans [26, 14, 19, 35] les auteurs décrivent très bien le sujet  
Soit  $u(x)$  une fonction de  $[-1, 1]$ . On interpole  $u(x)$  par un polynôme  $u_N(x)$  de degré inférieur à  $N$  de la forme

$$u_N(x) = \sum_{j=0}^N l_j(x)u(x_j). \quad (3.4.4)$$

aux les points de Chebychev-Gauss-Lobatto :

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

avec  $l_j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$  sont des polynômes de degrés inférieur à  $N$  tels que

$$l_j(x_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 0, 1, \dots, N.$$

Il se peut montrer que [14]

$$l_j(x) = \frac{(-1)^{j+1}(1-x^2)T'_N(x)}{c_j N^2(x-x_j)}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (3.4.5)$$

où  $c_0 = c_N = 2$ ,  $c_j = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, N - 1$  et  $T_N(x)$  sont les polynômes de Chebychev.

i.e

$$T_N(x) = \cos(N \cos^{-1} x).$$

Les dérivées de la solution approximée  $u_N(x)$  sont estimées dans les points de collocation par dérivation de (3.4.5) et sont évalué dans l'expression (3.4.4) [14]. Cela donne

$$u_N^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^N l_j^{(n)}(x)u(x_j), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.4.6)$$

ou en notation matricielle

$$U^{(n)} = D^{(n)}U, \quad n = 1, 2, \dots,$$

où

$$U^{(n)} = [u_N^{(n)}(x_0), u_N^{(n)}(x_1), \dots, u_N^{(n)}(x_N)]^T, \\ U = [u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_N)]^T.$$

où  $D^{(n)}$  est une matrice  $(N + 1) \times (N + 1)$  dont les entrées sont données par

$$d_{kj}^{(n)} = l_j^{(n)}(x_k), \quad j, k = 0, 1, \dots, N.$$

La dérivée d'ordre 1 de la matrice de différentiation de Chebychev  $D^{(1)} = D = (d_{kj})$  est donnée par (voir [47, 48, 41, 26, 42]).



$$d_{kj} = \begin{cases} -\frac{c_k}{2c_j} \frac{(-1)^{j+k}}{\sin((k+J)\frac{\pi}{2N}) \sin((k-J)\frac{\pi}{2N})} & k \neq j, \\ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) \left(1 + \cot^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right), & k = j, j \neq 0, N, \\ d_{00} = -d_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6}. & \end{cases}$$

### 3.4.2 Résolution d'une équation parabolique

Voici une description de la méthode pseudo-spectrale de Chebychev pour (3.4.1). Soit  $N$  un entier non négatif et dénote par

$$X_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), i = 0, 1, \dots, N,$$

les points de Chebychev-Gauss-Lobatto dans l'intervalle  $[-1, 1]$  et

$$U(x, t) = V(X, t), x = cX + d, x_i = cX_i + d, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

où

$$c = \frac{b-a}{2}, \quad d = \frac{b+a}{2}.$$

Alors par (3.4.1)

$$\frac{\partial V}{\partial t}(X, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(X, t) + f(t, cX + d, V(X, t)), \quad -1 \leq X \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (3.4.7)$$

avec les conditions initiales et aux limites suivantes

$$V(X, 0) = \varphi(cX + d), \quad X \in [-1, 1]. \quad (3.4.8)$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial X}(-1, t) = cg_1(t), \quad \frac{\partial V}{\partial X}(1, t) = cg_2(t), \quad t \geq 0. \quad (3.4.9)$$

Une discrétisation de (3.4.7) dans l'espace par la méthode des lignes remplaçant  $\frac{\partial V}{\partial X}(X_i, t)$  et  $\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(X_i, t)$  par des approximations pseudo-spectrales données par

$$\frac{\partial V}{\partial X}(X_i, t) \approx \sum_{j=0}^N d_{ij}^{(1)} V(X_j, t), \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (3.4.10)$$

et

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(X_i, t) \approx \sum_{j=0}^N d_{ij}^{(2)} V(X_j, t), \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (3.4.11)$$

Ici

$$D^{(n)} = [d_{ij}^{(n)}]_{i,j=0}^N, \quad n = 1, 2, \dots$$

sont les matrices de différentiation d'ordre  $n$ , posant  $V_i(t) = V(X_i, t)$ . Par substitution de (3.4.10) et (3.4.11) dans (3.4.7) – (3.4.9)

$$V_i'(t) = \frac{1}{c^2} \left( \sum_{j=0}^N d_{ij}^{(2)} V_j(t) \right) + f(t, cX + d, V_i(t)), \quad V_i(0) = \varphi(cX_i + d), \quad (3.4.12)$$

$$\sum_{j=0}^N d_{Nj}^1 V_j(t) = cg_1(t), \quad \sum_{j=0}^N d_{0j}^1 V_j(t) = cg_2(t). \quad (3.4.13)$$

Les équation (3.4.13) peuvent être écrites comme

$$d_{N0}V_0(t) + d_{NN}V_N(t) = cg_1(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{Nj}^{N-1}V_j(t) \quad (3.4.14)$$

$$d_{00}V_0(t) + d_{0N}V_N(t) = cg_2(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{0j}^{N-1}V_j(t).$$

La résolution du système algébrique (3.4.14) donne

$$V_0(t) = \left| \begin{array}{cc} cg_1 - \sum_{j=1}^{N-1} d_{Nj}^{(1)}V_j(t) & d_{NN} \\ cg_2 - \sum_{j=1}^{N-1} d_{0j}^{(1)}V_j(t) & d_{0N} \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cc} d_{N0} & d_{NN} \\ d_{00} & d_{0N} \end{array} \right| \quad (3.4.15)$$

$$= \frac{d_{0N}(cg_1(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{Nj}^{(1)}V_j(t)) - d_{NN}(cg_2(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{0j}^{(1)}V_j(t))}{d_{N0}d_{0N} - d_{00}d_{NN}} \quad (3.4.16)$$

et

$$V_N(t) = \left| \begin{array}{cc} d_{N0} & cg_1 - \sum_{j=1}^{N-1} d_{Nj}^{(1)}V_j(t) \\ d_{00} & cg_2 - \sum_{j=1}^{N-1} d_{0j}^{(1)}V_j(t) \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cc} d_{N0} & d_{NN} \\ d_{00} & d_{0N} \end{array} \right| \quad (3.4.17)$$

$$= \frac{d_{N0}(cg_2(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{0j}^{(1)}V_j(t)) - d_{00}(cg_1(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{Nj}^{(1)}V_j(t))}{d_{N0}d_{0N} - d_{00}d_{NN}} \quad (3.4.18)$$

Par substitution de (3.4.16) et (3.4.18) dans (3.4.12)

$$\begin{aligned} V_i'(t) &= \frac{1}{c^2} \left[ d_{i0} \times \frac{d_{0N} \left( cg_1(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{Nj}^{(1)}V_j(t) \right) - d_{NN} \left( cg_2(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{0j}^{(1)}V_j(t) \right)}{d_{N0}d_{0N} - d_{00}d_{NN}} \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} d_{ij}^{(2)} V_j(t) + d_{iN} \times \frac{d_{N0} \left( cg_2(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{0j}^{(1)}V_j(t) \right) - d_{00} \left( cg_1(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{Nj}^{(1)}V_j(t) \right)}{d_{N0}d_{0N} - d_{00}d_{NN}} \left. \right] \\ &+ f(t, cX + d, V_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Alors le système (3.4.19) peut être écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} V'(t) &= F(t, V(t)), \\ V(0) &= V_0, \end{cases} \quad (3.4.20)$$

où

$$\begin{aligned} V(t) &= [V_1(t), V_2(t), \dots, V_{N-1}(t)]^T, \quad V_0 = [V_1(0), V_2(0), \dots, V_{N-1}(0)]^T, \\ V'(t) &= [V'_1(t), V'_2(t), \dots, V'_{N-1}(t)]^T, \\ F(t, V(t)) &= [F_1(t, V(t)), F_2(t, V(t)), \dots, F_{N-1}(t, V(t))]^T, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_i(t, V(t)) &= \frac{1}{c^2} \left[ d_{i0} \times \frac{d_{0N} \left( cg_1(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{Nj}^{(1)} V_j(t) \right) - d_{NN} \left( cg_2(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{0j}^{(1)} V_j(t) \right)}{d_{N0}d_{0N} - d_{00}d_{NN}} \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1}^{N-1} d_{ij}^{(2)} V_j(t) + d_{iN} \times \frac{d_{N0} \left( cg_2(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{0j}^{(1)} V_j(t) \right) - d_{00} \left( cg_1(t) - \sum_{j=1}^{N-1} d_{Nj}^{(1)} V_j(t) \right)}{d_{N0}d_{0N} - d_{00}d_{NN}} \right] \\ &+ f(t, cX + d, V_i(t)). \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Les équations (3.4.20) forment un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) en temps.

### 3.4.3 Résultats numériques

Dans cette section, des solutions numériques d'(EDP) de la forme (3.4.1) avec condition initiale (3.4.2) et des conditions aux limites de types Neumann (3.4.3) sont cherchées. Pour montrer l'efficacité de la méthode présente pour le problème par rapport à la solution exacte, l'erreur absolue qui est défini par

$$U_{ij} = |\hat{U}(x_i, t_j) - U(x_i, t_j)|,$$

dans le point  $(x_i, t_j)$ , où  $\hat{U}(x_i, t_j)$  est la solution obtenue par (3.4.20) résolu par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et  $U(x_i, t_j)$  est la solution exacte.

Pour des travaux de computation voici les problèmes suivants :

Problème 1.  $N = 16, \Delta t = 0.0001$

**Problème 1.**

Ce problème est l'équation de la chaleur avec des conditions de Neumann

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times (0, 0.25], \quad (3.4.22)$$

avec les conditions aux limites  $\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = \pi e^{-\pi^2} \cos(\pi x)$  dans  $x = 1$ . La condition initiale est consistante avec la solution analytique  $U(x, t) = e^{-\pi^2} \sin(\pi x)$ .

Tableau 3.1 montre l'erreur absolue  $U_{ij}$  pour le problème 1.

**Problème 2.**

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \exp(-2U), \quad (x, t) \in [0, 1] \times (0, 50], \quad (3.4.23)$$

avec les conditions aux limites  $\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{x+t+2}$  en  $x = 0$  et  $x = 1$ . La condition initiale est consistante avec la solution analytique  $U(x, t) = \ln(x+t+2)$ .

Tableau 3.2 représente l'erreur absolue  $U_{ij}$  pour le problème 2.

$x_i/t_j$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
$x[2]$	$2.0327e - 11$	$1.2412e - 11$	$7.5695e - 12$	$4.6261e - 12$	$2.8301e - 12$
$x[5]$	$8.3306e - 13$	$5.0926e - 13$	$3.1007e - 13$	$1.8390e - 13$	$1.0635e - 13$
$x[8]$	$1.2568e - 13$	$6.7724e - 14$	$4.4048e - 14$	$3.3584e - 14$	$2.6673e - 14$
$x[11]$	$1.8952e - 13$	$1.2146e - 13$	$7.1665e - 14$	$3.7151e - 14$	$1.6487e - 14$
$x[14]$	$3.0196e - 12$	$1.8453e - 12$	$1.1260e - 12$	$6.9297e - 13$	$4.2917e - 13$
$x[16]$	$2.0330e - 11$	$1.2414e - 11$	$7.5716e - 12$	$4.6279e - 12$	$2.8314e - 12$

TABLE 3.1: Erreur absolue pour différentes valeurs de  $x$  et  $t$ , PB(1).

$x_i/t_j$	1	10	20	35	50
$x[1]$	$1.7186e-11$	$2.7669e-10$	$6.7247e-10$	$1.3729e-09$	$2.1506e-09$
$x[4]$	$1.1879e-13$	$7.9581e-13$	$2.3230e-12$	$8.5665e-12$	$2.1764e-11$
$x[7]$	$1.0236e-13$	$7.6605e-13$	$2.2857e-12$	$8.5238e-12$	$2.1718e-11$
$x[10]$	$8.5487e-14$	$7.3630e-13$	$2.2480e-12$	$8.4817e-12$	$2.1672e-11$
$x[13]$	$7.8160e-14$	$7.2475e-13$	$2.2311e-12$	$8.4661e-12$	$2.1652e-11$
$x[16]$	$8.7708e-14$	$7.2875e-13$	$2.2355e-12$	$8.4719e-12$	$2.1659e-11$
$x[17]$	$4.8586e-12$	$7.4457e-11$	$1.7924e-10$	$3.6948e-10$	$5.8987e-10$

TABLE 3.2: Erreur absolue pour différentes valeurs de  $x$  et  $t$ , PB(2).

### Problème 3 :

Le problème est

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\pi^2 - 1)U - pU + (pe^{-t} + e^{-pt}) \sin \pi x, \quad (x, t) \in [0, 1] \times (0, 1], \quad (3.4.24)$$

avec les conditions aux limites  $\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = \pi(e^{-t} + e^{-pt}) \cos \pi x$  dans  $x = 0$  et  $x = 1$ . La condition initiale est consistante avec la solution analytique  $U(x, t) = (e^{-t} + e^{-pt}) \sin \pi x$ .

Tableau 3.3 représente l'erreur absolue  $U_{ij}$  pour le problème 3.

$x_i/t_j$	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$x[1]$	$1.1187e-07$	$1.1187e-07$	$1.1187e-07$	$1.1187e-07$	$1.1187e-07$
$x[4]$	$6.9987e-12$	$5.7301e-12$	$4.6914e-12$	$3.8410e-12$	$3.1447e-12$
$x[7]$	$2.2376e-11$	$1.8320e-11$	$1.5000e-11$	$1.2281e-11$	$1.0054e-11$
$x[10]$	$2.5856e-11$	$2.1169e-11$	$1.7332e-11$	$1.4190e-11$	$1.1618e-11$
$x[13]$	$1.2073e-11$	$9.8841e-12$	$8.0925e-12$	$6.6255e-12$	$5.4245e-12$
$x[16]$	$1.4935e-12$	$1.2228e-12$	$1.0011e-12$	$8.1967e-13$	$6.7108e-13$
$x[17]$	$1.1187e-07$	$1.1187e-07$	$1.1187e-07$	$1.1187e-07$	$1.1187e-07$

TABLE 3.3: Erreur absolue pour différentes valeurs de  $x$  et  $t$ , PB(3).

## Base bidimensionnelle de Legendre et Approximation

Dans ce chapitre, nous introduisons une nouvelle base polynômiale bidimensionnelle pour l'approximation des fonctions à deux variables et pour la résolution des problèmes aux limites en dimension 2. En commençant par la recherche des valeurs propres de l'équation différentielle de Legendre en dimension deux, puis on a construit cette base à partir d'une formule de Rodrigues généralisée, et aussi par une relation de récurrence à trois termes. Nous démontrons également l'orthogonalité des polynômes obtenus par rapport à un produit scalaire bien défini.

Des résultats numériques efficaces sont obtenus après l'approximation de certains exemples de fonctions à deux variables dans la base construite. Nous présentons également une étude théorique de la stabilité et une estimation de l'erreur commise par la méthode spectrale Tau-Legendre dans la base construite.

### 4.1 Introduction

Généralement dans les applications de calcul, les fonctions à deux variables ont souvent besoin d'être approchées par d'autres fonctions qui sont mieux comprises ou plus facilement évaluées. Les polynômes sont parmi les fonctions mathématiques les plus simples qui ont la flexibilité pour représenter les relations non linéaires très généraux.

L'approximation des fonctions plus compliquées par des polynômes est un bloc de construction de base pour de nombreuses techniques numériques [8].

L'approximation bidimensionnelle est une extension de l'approximation unidimensionnelle pour les fonctions à deux variables. Généralement, l'idée principale est d'effectuer l'approximation à une dimension d'abord pour une variable, puis à nouveau pour l'autre variable. [9] Bien que chaque étape est une dimension.

Dans [1], les auteurs ont exprimés la fonction solution avec les polynômes bidimensionnels de Legendre produits par un produit tensoriel. La solution approchée est sous la forme

$$U_N(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \hat{U}_{i,j} L_i(x) L_j(y) \quad i, j = 0, \dots, N. \quad (4.1.1)$$

où  $L_i$  est le polynôme de Legendre de degré  $i$ .

Mais avec l'avantage de la création des bases polynomiales multidimensionnelles, la solution peut être développée à une fonction de base multidimensionnelle pour avoir de bonnes approximations pour des solutions de problèmes multidimensionnels.

Dans une première partie, nous avons développé une nouvelle base de polynômes orthogonaux par la résolution de l'EDP suivante

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) + (1-y^2)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) - 2\left[x\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)\right] + [l(l+1) + k(k+1)]U(x,y) = 0 \quad (4.1.2)$$

où  $l, k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Puis, nous avons créé cette base par la formule Rodrigues, et par une relation de récurrence à trois termes.

Nous avons également démontré l'orthogonalité de ces polynômes en utilisant un produit scalaire bien défini sur l'espace des polynômes bidimensionnelles

$$\langle P_{i,j}, P_{l,k} \rangle = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_{i,j}(x,y)P_{l,k}(x,y)dx dy. \quad (4.1.3)$$

L'approximation d'une fonction à deux variables  $f$  (connu ou non) par un polynôme est un processus naturel rencontré dans divers contextes d'analyse, où  $f$  est tout à fait régulière. D'une manière générale, il est possible d'analyser le comportement local, mais aussi dans certains cas, on peut décrire la fonction comme une somme infinie.

Dans les deux situations, la précision avec laquelle on peut approximer  $f$  par un polynôme dépend de la régularité de la fonction. Le théorème de Stone-Weierstrass [10] nous assure que toute fonction continue peut être uniformément approchée sur un domaine compact.

Dans la deuxième partie du chapitre, nous avons fourni quelques exemples numériques d'approximation des fonctions à deux variables dans la base de Legendre.

## 4.2 Première construction

Nous commençons par la résolution analytique de l'équation différentielle (4.1.2) [53], supposons que la solution cherchée est écrite sous la forme d'une série entière

$$U(x,y) \simeq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} a_{i,j} x^i y^j.$$

Les dérivées partielles sont exprimées comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &\simeq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} i a_{i,j} x^{i-1} y^j, & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) &\simeq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} i(i-1) a_{i,j} x^{i-2} y^j, \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &\simeq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} j a_{i,j} x^i y^{j-1}, & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) &\simeq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} j(j-1) a_{i,j} x^i y^{j-2}, \end{aligned}$$

nous pouvons arrêter de prendre les dérivées parce que dans notre cas, nous avons

une équation du second ordre

$$(1-x^2) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} i(i-1)a_{i,j}x^{i-2}y^j - 2x \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} ia_{i,j}x^{i-1}y^j + (1-y^2) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} j(j-1)a_{i,j}x^i y^{j-2} - 2y \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} ja_{i,j}x^i y^{j-1} + [l(l+1) + k(k+1)] \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} a_{i,j}x^i y^j = 0 \quad (4.2.1)$$

Nous avons besoin d'ajuster les exposants et les points de départ, de sorte qu'on aura  $x^i y^j$  dans chaque terme.

Soit  $m = i - 2$  et  $n = j - 2$ , alors,

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} i(i-1)a_{i,j}x^{i-2}y^j = \sum_{m=-2}^{N-2} \sum_{j=0}^{N-(m+2)} (m+2)(m+1)a_{m+2,j}x^m y^j$$

et

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} j(j-1)a_{i,j}x^i y^{j-2} = \sum_{i=0}^N \sum_{n=-2}^{N-(i+2)} (n+2)(n+1)a_{i,n+2}x^i y^n$$

Notez que nous pouvons commencer  $m, n$  de 0 puisque nous obtenons des zéros pour  $m = n = -2$  et  $m = n = -1$  de toute façon.

Après la substitution dans l'équation différentielle

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=0}^{N-(i+2)} [(i+2)(i+1)a_{i+2,j} - i(i-1)a_{i,j} - 2ia_{i,j} + l(l+1)a_{i,j}]x^i y^j \\ & + \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=0}^{N-(i+2)} [(j+2)(j+1)a_{i,j+2} - j(j-1)a_{i,j} - 2ja_{i,j} + k(k+1)a_{i,j}]x^i y^j = 0 \end{aligned}$$

$$\text{then } \begin{cases} a_{i+2,j} = \left[ \frac{i(i+1) - l(l+1)}{(i+2)(i+1)} \right] a_{i,j} \\ a_{i,j+2} = \left[ \frac{j(j+1) - k(k+1)}{(j+2)(j+1)} \right] a_{i,j} \end{cases}$$

Pour chaque pair  $(l, k)$  nous avons un polynôme, cela correspond à  $U = U(x, y)$  où  $i = j = 0, 1, 2, \dots$ , et ils sont désignés par  $P_{i,j}(x, y)$ . Notez que lorsque  $i$  ou  $j$  est pair, la série paire se termine à certains point, mais la série impaire ne se termine pas. Nous allons donc culminer  $a_{1,j}$  ou  $a_{i,1}$  à zéro, même pour les cas de  $i$  ou  $j$ . De même, nous choisissons  $a_{0,j}$  ou  $a_{i,0}$  pour être zéro pour les cas impairs de  $i$  ou  $j$ . Enfin, par convention, nous avons choisi  $a_{0,j}, a_{1,j}, a_{i,0}$  ou  $a_{i,1}$  tel que  $P_{i,j}(1, 1) = 1$ .

— Pour  $(l, k) = (0, 0)$ , nous avons mis  $a_{1,j} = a_{i,1} = 0$  et notez que  $a_{0,j}$  et  $a_{i,0} \neq 0$

$$\begin{cases} a_{i+2,j} = \left[ \frac{i(i+1) - 0(0+1)}{(i+2)(i+1)} \right] a_{i,j} = \left[ \frac{i(i+1)}{(i+2)(i+1)} \right] a_{i,j} \\ a_{i,j+2} = \left[ \frac{j(j+1) - 0(0+1)}{(j+2)(j+1)} \right] a_{i,j} = \left[ \frac{j(j+1)}{(j+2)(j+1)} \right] a_{i,j} \end{cases}$$

Nous sommes donc à la recherche de  $a_{2,j}$  et  $a_{i,2}$ , nous faisons cela par

$$\begin{cases} a_{0+2,j} = \left[ \frac{0(0+1)}{(0+2)(0+1)} \right] a_{0,j} \\ a_{i,0+2} = \left[ \frac{0(0+1)}{(0+2)(0+1)} \right] a_{i,0} \end{cases}$$

ce qui conduit à  $a_2, j = a_{i,2} = 0$ . Le polynôme de Legendre bidimensionnel d'ordre zéro est  $P_{0,0}(x, y) = a_{0,0}$ , avec la convention que pour tout polynôme  $P_{i,j}, P_{i,j}(1, 1) = 1$ , nous avons  $a_{0,0} = 1$  et donc

$$P_{0,0}(x, y) = 1$$

— Pour  $(l, k) = (0, 1)$ , nous avons mis  $a_{i,0} = a_{1,j} = 0$  et notez que  $a_{0,j}$  and  $a_{i,1} \neq 0$

$$\begin{cases} a_{i+2,j} &= \left[ \frac{i(i+1)}{(i+2)(i+1)} \right] a_{i,j} \\ a_{i,j+2} &= \left[ \frac{j(j+1)-2}{(j+2)(j+1)} \right] a_{i,j} \end{cases}$$

Pour trouver  $a_{2,j}$  et  $a_{i,3}$ ,

$$\begin{cases} a_{0+2,j} &= \left[ \frac{0(0+1)}{(1+2)(1+1)} \right] a_{0,j} \\ a_{i,1+2} &= \left[ \frac{1(1+1)-2}{(1+2)(1+1)} \right] a_{i,1} \end{cases}$$

ce qui conduit à  $a_{2,j} = a_{i,3} = 0$ . Le polynôme de Legendre bidimensionnel est

$$P_{0,1}(x, y) = a_{0,0}x^0y^0 + a_{0,1}x^0y,$$

par la convention  $P_{i,j}(1, 1) = 1$ , nous avons  $a_{0,1} = 1$ , et donc  $P_{0,1}(x, y) = y$ . Avec le même procédé, on obtient  $P_{1,0}(x, y) = x$ .

— Pour  $(l, k) = (1, 1)$ , nous avons mis  $a_{0,j} = a_{i,0} = 0$  et notez que  $a_{1,j}$  et  $a_{i,1} \neq 0$

$$\begin{cases} a_{i+2,j} &= \left[ \frac{i(i+1)-2}{(i+2)(i+1)} \right] a_{i,j} \\ a_{i,j+2} &= \left[ \frac{j(j+1)-2}{(j+2)(j+1)} \right] a_{i,j} \end{cases}$$

Nous sommes donc à la recherche de  $a_{3,j}$  et  $a_{i,3}$ , nous faisons cela par

$$\begin{cases} a_{1+2,j} &= \left[ \frac{1(1+1)-2}{(1+2)(1+1)} \right] a_{1,j} \\ a_{i,1+2} &= \left[ \frac{1(1+1)-2}{(1+2)(1+1)} \right] a_{i,1} \end{cases}$$

ce qui conduit à  $a_{3,j} = a_{i,3} = 0$ . Le polynôme bidimensionnel de Legendre est

$$P_{1,1}(x, y) = a_{0,0}x^0y^0 + a_{0,1}x^0y + a_{1,0}xy^0 + a_{1,1}xy,$$

par la convention que  $P_{i,j}(1, 1) = 1$ , on a  $a_{1,1} = 1$  et par conséquent  $P_{1,1}(x, y) = xy$ .

— For  $(l, k) = (2, 2)$ , nous fixons  $a_{i,1} = a_{1,j} = 0$ , et notez que  $a_{i,0}$  et  $a_{0,j} \neq 0$ .

$$\begin{cases} a_{i+2,j} &= \left[ \frac{i(i+1)-2(2+1)}{(i+2)(i+1)} \right] a_{i,j} = \left[ \frac{i(i+1)-6}{(i+2)(i+1)} \right] a_{i,j} \\ a_{i,j+2} &= \left[ \frac{j(j+1)-2(2+1)}{(j+2)(j+1)} \right] a_{i,j} = \left[ \frac{j(j+1)-6}{(j+2)(j+1)} \right] a_{i,j} \end{cases}$$

Pour trouver  $a_{2,j}$  et  $a_{i,2}$ , en mettant  $i = 0$  et  $j = 0$

$$\begin{cases} a_{0+2,j} &= \left[ \frac{0(0+1)-6}{(0+2)(0+1)} \right] a_{0,j} = -3a_{0,j} \\ a_{i,j+2} &= \left[ \frac{0(0+1)-6}{(0+2)(0+1)} \right] a_{i,0} = -3a_{i,0} \end{cases}$$



Ensuite, pour  $a_{i,4}$  et  $a_{4,j}$  mis  $i = 2$  et  $j = 2$

$$\begin{cases} a_{4,j} = \left[ \frac{2(2+1) - 6}{(2+2)(2+1)} \right] a_{2,j} = 0 \\ a_{i,4} = \left[ \frac{2(2+1) - 6}{(2+2)(2+1)} \right] a_{i,2} = 0 \end{cases}$$

Le deuxième polynôme de Legendre bidimensionnel est

$$\begin{aligned} P_{2,2}(x, y) &= a_{0,0} + a_{2,0}x^2 + a_{0,2}y^2 + a_{2,2}x^2y^2 \\ &= a_{0,0} [1 - 3x^2 - 3y^2 + 9x^2y^2] \end{aligned}$$

Par la convention que  $P_{i,j}(1, 1) = 1$ , nous avons  $P_{2,2}(1, 1) = 4a_{0,0} = 1$ , et donc

$$P_{2,2}(x, y) = \frac{9}{4}x^2y^2 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{4}.$$

Les autres polynômes de Legendre à deux dimensions sont obtenues par le même procédé. Le tableau (4.1) ci-dessous résume les premiers polynômes de Legendre bidimensionnels.

<b>j \ i</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>0</b>	1	$x$	$\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$
<b>1</b>	$y$	$xy$	$\frac{3x^2y}{2} - \frac{y}{2}$	$\frac{5x^3y}{2} - \frac{3xy}{2}$
<b>2</b>	$\frac{3y^2}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{3xy^2}{2} - \frac{x}{2}$	$\frac{9x^2y^2}{4} - \frac{3x^2}{4} - \frac{3y^2}{4} + \frac{1}{4}$	...
<b>3</b>	$\frac{5y^3}{2} - \frac{3y}{2}$	$\frac{5xy^3}{2} - \frac{3xy}{2}$	...	...
<b>4</b>	$\frac{35y^4}{8} - \frac{15y^2}{4} + \frac{3}{8}$	...	...	...

TABLE 4.1: Premiers polynômes de Legendre bidimensionnels

Le premier polynôme  $P_{0,0}$  est situé dans le coin supérieur gauche. Une évolution dans la même colonne, ne varie pas le degré des polynômes en fonction de  $x$ . Une évolution en fonction de la colonne de la même ligne varie le degré en fonction de  $y$ .

### 4.3 Construction de Rodrigues

Les polynômes bidimensionnel de Legendre peut être exprimés en utilisant une généralisation de la formule de Rodrigues [55]

$$P_{i,j}(x, y) = \frac{1}{2^{i+j} i! j!} \frac{\partial^i}{\partial x^i} (x^2 - 1)^i \frac{\partial^j}{\partial y^j} (y^2 - 1)^j$$

### Démonstration 4.1

On a démontré dans la section (4.2) que les polynômes de Legendre bidimensionnel sont des solutions de l'équation suivante

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(1-y^2)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial U}{\partial x} - 2y\frac{\partial U}{\partial y} + [i(i+1) + j(j+1)]U = 0 \quad (4.3.1)$$

Soit  $v_1 = (x^2 - 1)^i$  et  $v_2 = (y^2 - 1)^j$ , alors

$$(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}v_1 + 2i v_1 x = 0 \quad (4.3.2)$$

$$(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}v_2 + 2j v_2 y = 0 \quad (4.3.3)$$

Différencier (4.3.2)  $i+1$  fois et (4.3.3)  $j+1$  fois en utilisant la formule de Leibniz [voir L'annexe], nous obtenons après les simplifications

$$(1-x^2)\frac{\partial^{i+2}}{\partial x^{i+2}}v_1 - 2x\frac{\partial^{i+1}}{\partial x^{i+1}}v_1 + i(i+1)\frac{\partial^i}{\partial x^i}v_1 = 0 \quad (4.3.4)$$

$$(1-y^2)\frac{\partial^{j+2}}{\partial y^{j+2}}v_2 - 2y\frac{\partial^{j+1}}{\partial y^{j+1}}v_2 + j(j+1)\frac{\partial^j}{\partial y^j}v_2 = 0$$

Soit  $u_1 = \frac{\partial^i}{\partial x^i}(x^2 - 1)^i = \frac{\partial^i}{\partial x^i}v_1$  et  $u_2 = \frac{\partial^j}{\partial y^j}(y^2 - 1)^j = \frac{\partial^j}{\partial y^j}v_2$

Mettre  $U = u_1 \times u_2$ , par sommation dans l'équation (4.3.4), nous avons (4.3.1), donc

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1 P_{i,j}(x, y) & \text{et} & & u_2 &= c_2 P_{i,j}(x, y) \\ U &= u_1 \times u_2 = C P_{i,j}(x, y) \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

donc,

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}(x^2 - 1)^i = c_1 P_{i,j}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^j}{\partial y^j}(y^2 - 1)^j = c_2 P_{i,j}(x, y)$$

Alors,

$$\begin{aligned} c_1 P_{i,j}(x, y) &= \frac{\partial^i}{\partial x^i}[(x-1)^i (x+1)^i] \\ &= (x-1)^i \frac{\partial^i}{\partial x^i}(x+1)^i + i k_1 i (x-1)^{i-1} \frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}(x+1)^i + \dots + (x+1)^i \frac{\partial^i}{\partial x^i}(x-1)^i \\ &= (x-1)^i (i!) + i k_1 i (x-1)^{i-1} \frac{\partial^i}{\partial x^{i-1}}(x+1)^{i-1}(x+1)^i + \dots + (x+1)^i (i!) \\ &= (i!)(x+1)^i + \text{termes contenant puissance de } (x-1) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} c_2 P_{i,j}(x, y) &= \frac{\partial^j}{\partial y^j}[(y-1)^j (y+1)^j] \\ &= (j!)(y+1)^j + \text{termes contenant puissance de } (y-1) \end{aligned}$$

Si  $(x, y) = (1, 1)$ , nous obtenons

$$U = u_1 \times u_2 = c_1 c_2 P_{i,j}^2(1, 1) = C P_{i,j}^2(1, 1) = (i!)2^i (j!)2^j \Rightarrow C = (i!)2^i (j!)2^j.$$

Mettre en (4.3.5), on aura

$$P_{i,j}(x, y) = \frac{1}{2^{i+j} i! j!} \frac{\partial^i}{\partial x^i}(x^2 - 1)^i \frac{\partial^j}{\partial y^j}(y^2 - 1)^j$$

## 4.4 Construction récursive

L'idée de la modélisation par les polynômes orthogonaux est d'approcher des fonctions réelles par des combinaisons linéaires de fonctions polynomiales bidimensionnelles, par exemple ceux de Legendre. Nous utilisons les polynômes bivariés définis dans  $\mathbb{R}^2$  par

$$P_{K,L}(x, y) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L a_{k,l}(x)^k (y)^l,$$

avec  $K \in \mathbb{N}^+$  est le degré maximal de  $x$ ,  $L \in \mathbb{N}^+$  le degré maximal de  $y$  et  $c_{k,l}$  tous les coefficients réels du polynôme. Le degré du polynôme est de  $K + L$ .

Nous définissons un produit scalaire par

$$\langle F_1(x, y), F_2(x, y) \rangle = \iint_{\Omega} F_1(x, y) F_2(x, y) \omega(x, y) dx dy,$$

avec  $\Omega$  est le domaine de définition et  $\omega(x, y)$  est la fonction poids du produit scalaire. Nous pouvons construire une base bidimensionnelle de Legendre par la formule de récurrence à trois termes suivante [54]

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{-1,j}(x, y) = 0 \\ P_{i,-1}(x, y) = 0 \\ P_{0,0}(x, y) = 1 \\ P_{i+1,j}(x, y) = \frac{2i+1}{i+1} x P_{i,j}(x, y) - \frac{i}{i+1} P_{i-1,j}(x, y) \\ P_{i,j+1}(x, y) = \frac{2j+1}{j+1} y P_{i,j}(x, y) - \frac{j}{j+1} P_{i,j-1}(x, y) \end{array} \right.$$

Il est important de noter que la fonction poids  $\omega(x, y)$  du produit scalaire est égal à 1, ce qui rend le calcul du produit scalaire plus facile et plus rapide, improbable pour de nombreuses bases de polynômes orthogonaux qui ont fonctions de poids qui nécessite beaucoup de temps pour le calcul. Le produit scalaire dans la base des polynômes de Legendre peut être calculée en évaluant seulement deux fonctions au lieu de trois.

## 4.5 Formules de base

Nous présentons ici une collection de formules pour les polynômes de Legendre bidimensionnels [54].

1.  $P_{i,j}(1, 1) = 1, \quad \forall i, j \geq 0.$
2.  $P_{i,j}(-1, -1) = (-1)^{i+j}, \quad \forall i, j > 0.$
3.  $\|P_{i,j}(x, y)\| \leq 1, \quad (-1, -1) \leq (x, y) \leq (1, 1).$
4. Une base bidimensionnelle de degré  $d$  peut être composée par les polynômes de Legendre  $\{P_{i,j}\}$  avec  $i + j \leq d$ .
5. Le nombre de polynômes qui composent une base du degré  $d$  est  $n_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$

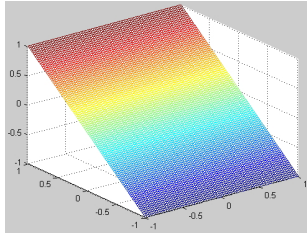


FIGURE 4.1:  $P_{0,1}$

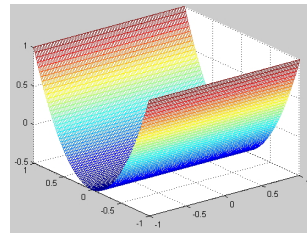


FIGURE 4.2:  $P_{0,2}$

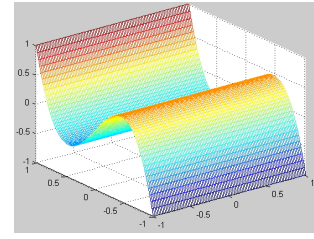


FIGURE 4.3:  $P_{0,3}$

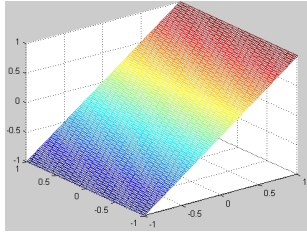


FIGURE 4.4:  $P_{1,0}$

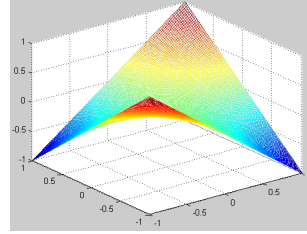


FIGURE 4.5:  $P_{1,1}$

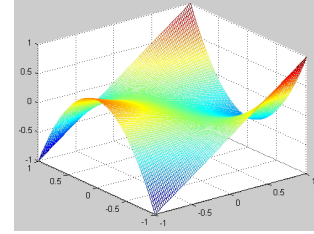


FIGURE 4.6:  $P_{1,2}$

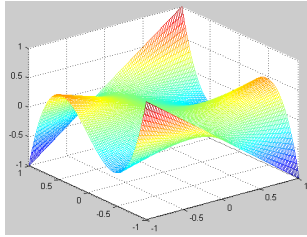


FIGURE 4.7:  $P_{1,3}$

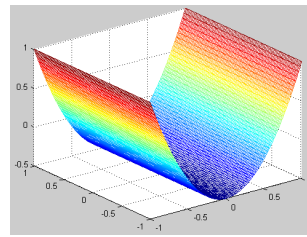


FIGURE 4.8:  $P_{2,0}$

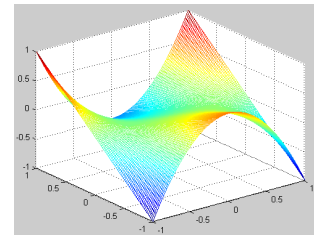


FIGURE 4.9:  $P_{2,1}$

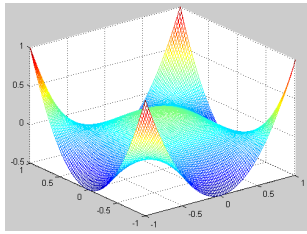


FIGURE 4.10:  $P_{2,2}$

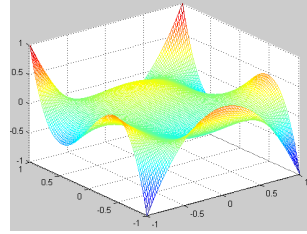


FIGURE 4.11:  $P_{2,3}$

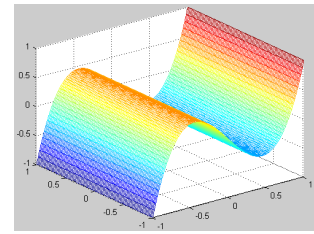


FIGURE 4.12:  $P_{3,0}$

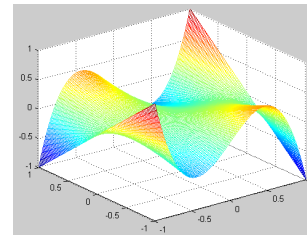


FIGURE 4.13:  $P_{3,1}$

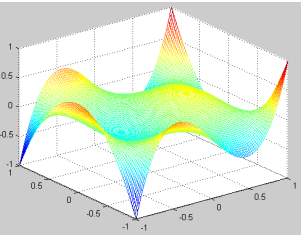


FIGURE 4.14:  $P_{3,2}$

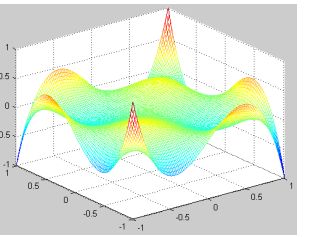


FIGURE 4.15:  $P_{3,3}$

FIGURE 4.16: Premiers polynômes bidimensionnels de Legendre

6. Le domaine d'orthogonalité des polynômes de Legendre bidimensionnels est  $\Omega \in [-1, 1]^2$ .

7.  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_{i,j}^2 dx dy = \left(i + \frac{1}{2}\right)^{-1} \left(j + \frac{1}{2}\right)^{-1}$ . La clé pour prouver cette dernière

formule est

$$\begin{cases} iP_{i,j}(x, y) = x \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P_{i-1,j}}{\partial x}(x, y) \\ jP_{i,j}(x, y) = y \frac{\partial P_{i,j}}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial P_{i,j-1}}{\partial y}(x, y). \end{cases}$$

## 4.6 Orthogonalité

Les polynômes de Legendre à deux dimensions satisfont à l'équation différentielle suivante [54]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x}(x, y) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-y^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial y}(x, y) \right] + [i(i+1) + j(j+1)] P_{i,j}(x, y) = 0 \quad (4.6.1)$$

Dans cette section, on va démontré l'orthogonalité des polynômes de Legendre bi-dimensionnels, i e, on va démontre que

$$\langle P_{i,j}, P_{l,k} \rangle = 0 \quad \text{for} \quad (i, j) \neq (l, k).$$

### Démonstration 4.2

En utilisant le produit scalaire (4.1.3)

Soit  $P_{i,j}$  et  $P_{l,k}$  deux polynômes bidimensionnels de Legendre de degré  $i+j$  et  $l+k$  respectivement, alors, ils satisfont l'équation (4.6.1)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x}(x, y) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-y^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial y}(x, y) \right] = -[i(i+1) + j(j+1)] P_{i,j}(x, y) \quad (4.6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial x}(x, y) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-y^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial y}(x, y) \right] = -[l(l+1) + k(k+1)] P_{l,k}(x, y) \quad (4.6.3)$$

multipliant (4.6.2) par  $P_{l,k}$  et (4.6.3) par  $P_{i,j}$  et en soustrayant

$$\begin{aligned} & [(l(l+1) + k(k+1)) - (i(i+1) + j(j+1))] P_{i,j}(x, y) P_{l,k}(x, y) = \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x}(x, y) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-y^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial y}(x, y) \right] \right] P_{l,k}(x, y) - \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial x}(x, y) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-y^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial y}(x, y) \right] \right] P_{i,j}(x, y) \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

Nous fixons

$$c = [l^2 + l - i^2 - i] + [k^2 + k - l^2 - l] \neq 0, \quad \text{si} \quad (l, k) \neq (i, j).$$

Par intégration des deux membres de (4.6.4) dans le domaine  $[-1, 1] \times [-1, 1]$

$$\begin{aligned} c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_{i,j} P_{l,k} dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-y^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial y} \right] \right] P_{l,k} \right] \\ &- \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-y^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial y} \right] \right] P_{i,j} \right] dx dy \end{aligned}$$

On commence par la première partie

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial x} [(1-x^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [(1-y^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial y}] \right] P_{l,k} \right] dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} [(1-x^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x}] \right] P_{l,k} dx dy + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial y} [(1-y^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial y}] \right] P_{l,k} dx dy \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x, y) [(1-x^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x} (x, y)] \right] P_{l,k}(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[ \left[ P_{l,k}(x, y) (1-x^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x} (x, y) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\partial P_{l,k}}{\partial x} (x, y) (1-x^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x} (x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

d'où

$$I_{1,1} = - \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial P_{l,k}}{\partial x} (x, y) (1-x^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x} (x, y) dx \right] \right] dy \quad (4.6.5)$$

De même

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial y} [(1-y^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial y} (x, y)] \right] P_{l,k}(x, y) dy \right] dx \\ &= - \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \frac{\partial P_{l,k}}{\partial x} (x, y) (1-y^2) \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x} (x, y) dx \right] dy \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Pour la deuxième partie

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} [(1-x^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial x}] P_{i,j} \right] dx dy \\ &\quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial y} [(1-y^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial y}] P_{i,j} \right] dx dy \\ I_{2,1} &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} [(1-x^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial x} (x, y)] \right] P_{i,j}(x, y) dx \right] dy \\ &= - \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \frac{\partial P_{i,j}}{\partial x} (x, y) (1-x^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial x} (x, y) dx \right] dy \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

et aussi

$$\begin{aligned} I_{2,2} &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial y} [(1-y^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial y} (x, y)] \right] P_{i,j}(x, y) dy \right] dx \\ &= - \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \frac{\partial P_{i,j}}{\partial y} (x, y) (1-y^2) \frac{\partial P_{l,k}}{\partial y} (x, y) dy \right] dx \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

par conséquent

$$\begin{aligned} c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_{i,j}(x, y) P_{l,k}(x, y) dx dy &= I_1 - I_2 \\ &= [I_{1,1} + I_{1,2}] - [I_{2,1} + I_{2,2}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

et puisque  $c \neq 0$  pour chaque paire  $(i, j) \neq (l, k)$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_{i,j}(x, y) P_{l,k}(x, y) dx dy &= 0 \\ \langle P_{i,j}, P_{l,k} \rangle &= 0, \quad \text{for } (i, j) \neq (l, k). \end{aligned}$$

d'où le résultat.

## 4.7 Différenciation d'un développement bidimensionnel de Legendre

La différenciation est de calculer le développement de Legendre de la dérivée d'une fonction exprimée comme une combinaison linéaire de polynômes de Legendre bidimensionnelle [53, 54, 50].

Si

$$U_N(X, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \hat{U}_{i,j}(t) P_{i,j}(x, y), \quad X \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Par la relation de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{l} (2i+1)P_{i,j}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} P_{i+1,j}(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} P_{i-1,j}(x, y) \\ (2j+1)P_{i,j}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} P_{i,j+1}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P_{i,j-1}(x, y), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{U}_{i,j}^{(1)} P_{i,j}(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{U}_{i,j}^{(1)}}{2i+1} \frac{\partial}{\partial x} P_{i+1,j}(x, y) - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{U}_{i,j}^{(1)}}{2i+1} \frac{\partial}{\partial x} P_{i-1,j}(x, y) \\ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{U}_{i,j}^{(1)} P_{i,j}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hat{U}_{i,j}^{(1)}}{2j+1} \frac{\partial}{\partial y} P_{i,j+1}(x, y) - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hat{U}_{i,j}^{(1)}}{2j+1} \frac{\partial}{\partial y} P_{i,j-1}(x, y) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\hat{U}_{i-1,j}^{(1)}}{2i-1} \frac{\partial}{\partial x} P_{i,j}(x, y) - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{\hat{U}_{i+1,j}^{(1)}}{2i+3} \frac{\partial}{\partial x} P_{i,j}(x, y) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{U}_{i,j-1}^{(1)}}{2j-1} \frac{\partial}{\partial y} P_{i,j}(x, y) - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{\hat{U}_{i,j+1}^{(1)}}{2j+3} \frac{\partial}{\partial y} P_{i,j}(x, y) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\hat{U}_{i-1,j}^{(1)}}{2i-1} - \frac{\hat{U}_{i+1,j}^{(1)}}{2i+3} \right] \frac{\partial}{\partial x} P_{i,j}(x, y) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{\hat{U}_{i,j-1}^{(1)}}{2j-1} - \frac{\hat{U}_{i,j+1}^{(1)}}{2i+3} \right] \frac{\partial}{\partial y} P_{i,j}(x, y). \end{array} \right.$$

D'autre part, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{U}_{i,j} \frac{\partial}{\partial x} P_{i,j}(x, y), \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{U}_{i,j} \frac{\partial}{\partial y} P_{i,j}(x, y), \end{array} \right.$$

et puisque les dérivées partielles de  $P_{i,j}$  sont linéairement indépendantes

$$\hat{U}_{i,j} = \begin{cases} \frac{\hat{U}_{i-1,j}^{(1)}}{2i-1} - \frac{\hat{U}_{i+1,j}^{(1)}}{2i+3} & i \geq 1 \\ \frac{\hat{U}_{i,j-1}^{(1)}}{2j-1} - \frac{\hat{U}_{i,j+1}^{(1)}}{2j+3} & j \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(pour le développement de } \frac{\partial U}{\partial x}) \\ \text{(pour le développement de } \frac{\partial U}{\partial y}) \end{array}$$

alors

$$\hat{U}_{i,j}^{(1)} = \begin{cases} (2i+1) \left( \sum_{\substack{p=i+1 \\ p+i \text{ impaire}}} \hat{U}_{i,j} \right), & i, j \geq 0, \\ (2j+1) \left( \sum_{\substack{p=j+1 \\ p+j \text{ impaire}}} \hat{U}_{i,j} \right), & i, j \geq 0, \end{cases}$$

L'identité précédente se généralise, avec une notation évidente à

$$\hat{U}_{i,j}^{(q-1)} = \begin{cases} \frac{\hat{U}_{i-1,j}^{(q)}}{2i-1} - \frac{\hat{U}_{i+1,j}^{(q)}}{2i+3} & i \geq 1, \\ \frac{\hat{U}_{i,j-1}^{(q)}}{2j-1} - \frac{\hat{U}_{i,j+1}^{(q)}}{2j+3} & j \geq 1, \end{cases}$$

à partir duquel il est possible d'obtenir des expressions explicites pour les coefficients de Legendre des dérivées d'ordre supérieur.

Pour la dérivée second, on a

$$\hat{U}_{i,j}^{(2)} = \begin{cases} \left( i + \frac{1}{2} \right) \left( \sum_{\substack{p=i+2 \\ p+i \text{ paire}}} [p(p+1) - i(i+1)] \hat{U}_{i,j} \right), & i, j \geq 0, \\ \left( j + \frac{1}{2} \right) \left( \sum_{\substack{p=j+1 \\ p+j \text{ paire}}} [p(p+1) - j(j+1)] \hat{U}_{i,j} \right), & i, j \geq 0, \end{cases}$$

Les extensions précédentes ne sont pas simplement formelle prévue  $U$  est assez régulière.

## 4.8 Exemples illustratifs

### Exemple 6

Afin de donner une première illustration de la performance de notre implémentation de l'approximation bidimensionnelle de Legendre, nous appliquons l'approximation fonctionnelle sur quelques exemples de fonctions a deux variables.

Tableaux (4.2) présente les résultats correspondant à l'application de l'algorithme d'approximation à divers ordre (application de la méthode sur  $[-1; 1]^2$ ). Les erreurs absolues et relatives ont été calculées à l'aide d'une norme appropriée.

$f(x, y)$	$N$	Erreur absolue	Erreur relative
$\cos(x + y)$	$2^0$	$0.6387$	$0.4111$
	$2^1$	$0.3343$	$0.2152$
	$2^2$	$0.0359$	$0.0231$
	$2^3$	$0$	$0$
$\exp(x + y)$	$2^0$	$1.8115$	$0.4995$
	$2^2$	$0.6158$	$0.1698$
	$2^2$	$0.1022$	$0.0282$
	$2^3$	$0.0014$	$3.8565 \times 10^{-4}$

TABLE 4.2: Erreur d'approximation absolue et relative.



### Exemple 7

Pour des raisons de comparaison avec une autre méthode bidimensionnelle largement utilisée (méthode des moindres carrés), nous montrons dans le tableau (4.3) les résultats d'une approximation dans une autre base (base construite par un produit tensoriel des polynômes Chebychev) [7, 52]

$f(x,y)$	$N$	Base de Legendre	Base de Chebychev
$x^2y + y^2x$	$2^0$	0.4869	0.5196
	$2^1$	0.3443	0.4732
	$2^2$	0	0.4218
$y \cos(x)$	$2^0$	0.9848	0.9958
	$2^1$	0.1602	0.3613
	$2^2$	$35 \times 10^{-4}$	0.5389
	$2^3$	$3.0037 \times 10^{-5}$	1.4443
$\sin \pi x \sin \pi y$	$2^0$	1	1
	$2^1$	0.7940	0.8628
	$2^2$	0.6304	0.6439
	$2^3$	0.1322	0.6853
	$2^4$	$3 \times 10^{-4}$	0.8144

TABLE 4.3: Erreur d'approximation quadratique.

La mise en œuvre pratique de la méthode d'approximation bidimensionnel de Legendre suit strictement la construction en (4.3).

- Notez que l'approximation d'une fonction  $N$ -polynomiale par le  $N$ -ième polynôme de Legendre bidimensionnel donne une erreur d'approximation nulle. comme le montrent les résultats obtenus dans le premier exemple  $x^2y + y^2x$ .
- La fonction approximative dans le dernier exemple représente la solution exacte du problème aux limites de Poisson de valeur sur  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  avec des conditions aux limites homogènes de Dirichlet

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y$$

$$u(x, -1) = 0,$$

$$u(x, +1) = 0,$$

$$u(-1, y) = 0,$$

$$u(+1, y) = 0.$$

cela nous permet d'utiliser cette base pour résoudre de nombreux problèmes aux limites en  $D2$ .

### Exemple 8 (Approximation des fonctions polynomiales)

- Les figures ci-dessous représentent les résultats obtenus par l'approximation polynomiale de  $f(x, y) = yx^2 + xy^2$  pour  $N = 2, N = 3$  et  $N = 4$ .

On note que pour  $N = 4$  l'approximation polynômiale est identique au graphe de la fonction.

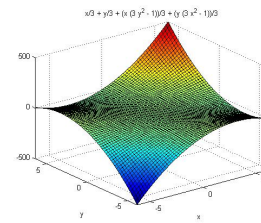
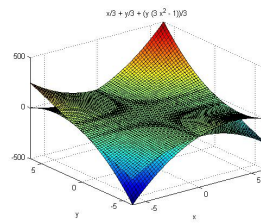
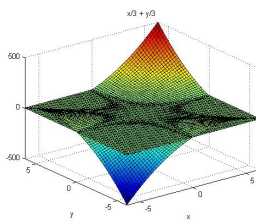


FIGURE 4.17: Approx avec  $N = 2$     FIGURE 4.18: Approx avec  $N = 3$     FIGURE 4.19: Approx avec  $N = 4$

— L'approximation polynômiale de la fonction bvariée  $g(x, y) = x^2 + y^2$  dans la base bidimensionnelle de Legendre donne pour  $N = 4$  la meilleure approximation.

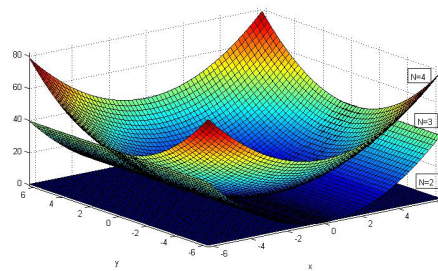


FIGURE 4.20: Approx avec  $N = 2$ ,  $N = 3$  et  $N = 4$

**Exemple 9** (*Approximation des fonctions non-polynomiales*)

Le problème d'approximation d'une fonction  $f$  opérant dans plusieurs situations, comme par exemple,  $f$  est connu, mais difficile à manipuler. L'approximation vise à remplacer  $f$  par une fonction plus simple, plus accessible pour être facile à intégrer, à différencier, etc.

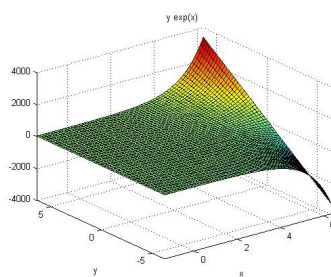


FIGURE 4.21:  $f(x, y) = y e^x$

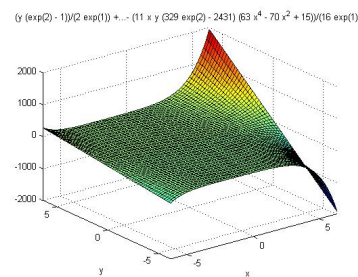


FIGURE 4.22: Approx avec  $N = 12$

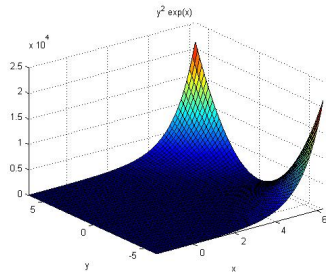


FIGURE 4.23:  $f(x, y) = y^2 e^x$

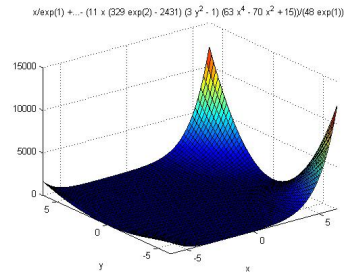


FIGURE 4.24: Approx avec  $N = 11$

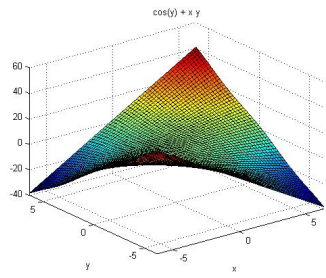


FIGURE 4.25:  $f(x, y) = xy \cos(y)$

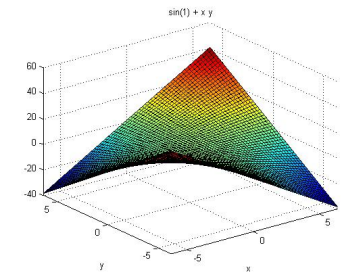


FIGURE 4.26: Approx avec  $N = 2$

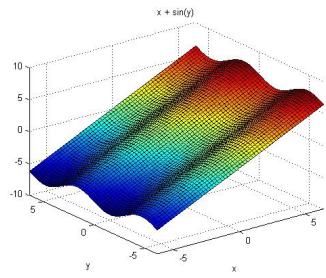


FIGURE 4.27:  $f(x, y) = y e^x$

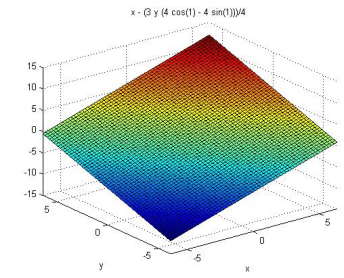


FIGURE 4.28: Approx avec  $N = 11$

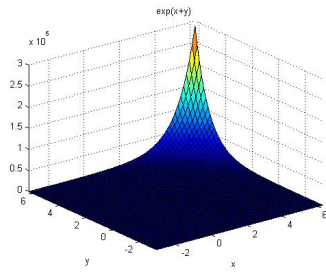


FIGURE 4.29:  $f(x, y) = \exp(x + y)$

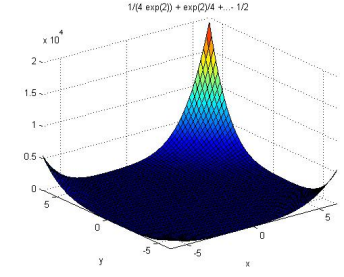


FIGURE 4.30: Approx avec  $N = 2^3$

## 4.9 Approximation de Tau-Legendre

### 4.9.1 Contexte théorique

Soit l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2([-1, 1] \times [-1, 1], \mathbb{C})$ . On considère la formulation

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(X, t) &= \mathcal{M}(U(X, t)) + f(X, t) & X \in \Omega & t \geq 0, \\ \mathcal{C}(U(X, t)) &= g(t) & X \in \partial\Omega & t > 0, \\ U(X, 0) &= U_0(X) & X \in \Omega. \end{cases}$$

- $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  avec la frontière  $\partial\Omega$ .
- $X$  une paire  $(x, y)$ , où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $y \in \mathbb{R}^n$ .
- $U(X, t)$  fonction inconnue dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $f$  élément de  $\mathcal{H}$ .
- $\mathcal{M}, \mathcal{C}$  des opérateurs de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ , où  $\mathcal{C}$  définir les conditions aux limites.

Si  $\mathcal{M}$  contient des dérivées partielles d'ordre  $k$ , les conditions aux limites sont au nombre  $k$  ( $g$  avec  $k$  Composants). Soit  $(P_{i,j})_{i,j=1,\dots,\infty}$  une base de Legendre orthogonale bidimensionnelle qui ne satisfait pas les conditions aux limites.

Nous cherchons une approximation

$$U_N(X, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-i} \hat{U}_{i,j} P_{i,j} \quad \text{with} \quad \hat{U}_{i,j} = \langle U_N, P_{i,j} \rangle \quad (4.9.1)$$

in  $S_N$  (où  $S_N$  représente l'espace engendré par les  $N$  premiers polynômes de Legendre à deux dimensions) tel que

$$\begin{aligned} P_{N-k}^\perp R_N &= 0 & N-k \text{ equations} \\ \mathcal{C} U_N &= 0 & k \text{ equations} \end{aligned}$$

- $R_N$  est la fonction résiduelle de la décomposition spectrale dans la base de Legendre, elle est donnée par

$$R_N = \frac{\partial U_N}{\partial t} - \mathcal{M}(U_N) - f. \quad (4.9.2)$$

- $P_{N-k}^\perp R_N$  désigne la projection orthogonale de  $\mathcal{H}$  sur  $S_{N-k}$ .
- $S_{N-k}$  l'espace engendré par les  $N-k$  premiers polynômes de Legendre bidimensionnels.
- $U_N$  est alors déterminée par  $N$  équations différentielles ordinaires.

## 4.9.2 Estimation d'erreur

Soit  $\mathcal{H}$  un  $\mathbb{C}$ -espace de Hilbert,  $\mathcal{S}$  un sous espace de  $\mathcal{H}$  engendré par les  $(N-k)$  premiers polynômes de Legendre à deux dimensions.  $\dim(\mathcal{S}) = n = (N-k)$ , où  $k$  représente le nombre de conditions aux limites. Notre problème est de trouver une fonction  $U \in \mathcal{H}$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t}(X, t) + \mathcal{M}(U(X, t)) = f \\ \mathcal{C}(U(X, t)) = g \\ U(0) = U_0, \end{array} \right. \quad (4.9.3)$$

où  $f, g$  et  $U_0$  sont des éléments donnés de  $\mathcal{H}$ .

Soit  $f_n \in \mathcal{S}$  une approximation de  $f$ , et  $U_n^0$  une approximation de  $U_0$ , alors le problème (4.9.3) peut être réécrit comme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{P}U_n) + \mathcal{M}(U_n) = f_n, \quad (4.9.4)$$

où  $\mathcal{P}$  représente l'opérateur de projection Tau sur  $\mathcal{S}$ .

Supposant que  $\mathcal{S}$  est un espace normé et sa norme satisfait

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \operatorname{Re}\langle \mathcal{P}s, \mathcal{M}s \rangle \geq \kappa \|s\|^2 \quad (4.9.5)$$

et

$$Re\langle f, g \rangle \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (4.9.6)$$

Nous définissons  $\tilde{f}_n$  par

$$\tilde{f}_n = \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{P}\tilde{U}_n) + \mathcal{M}(\tilde{U}_n),$$

où  $U_n$  la solution du problème (4.9.3) et  $\tilde{U}_n$  n'importe.

Sous les hypothèses (4.9.5) et (4.9.6), nous pouvons prouver le résultat suivant

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{M}(U_n - \tilde{U}_n)\|^2 \leq \|\mathcal{M}(U_n(0) - \tilde{U}_n(0))\|^2 + \frac{1}{\kappa} \\ & + \int_0^t \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n(r))\|^2 dr \end{aligned} \quad (4.9.7)$$

où  $\mathcal{M}^*$  désigne l'adjoint de l'opérateur  $\mathcal{M}$ .

Cette inégalité s'interprète comme un résultat de stabilité, mais elle exige des conditions de régularité.

**Démonstration 4.3** *On pose*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{P}U_n) + \mathcal{M}(U_n) = f_n \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{P}\tilde{U}_n) + \mathcal{M}(\tilde{U}_n) = \tilde{f}_n \quad (4.9.8)$$

alors

$$\mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) + \mathcal{M}(U_n - \tilde{U}_n)\right) = f_n - \tilde{f}_n.$$

Qui est multiplié par  $\mathcal{M}(U_n - \tilde{U}_n)$  pour le produit scalaire sur l'espace  $\mathcal{S}$

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n)\right), \mathcal{M}\left(\frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n)\right) \right\rangle \\ & + \left\langle \mathcal{M}(U_n - \tilde{U}_n), \mathcal{M}\left(\frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n)\right) \right\rangle \\ & = \left\langle f_n - \tilde{f}_n, \mathcal{M}\left(\frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n)\right) \right\rangle, \end{aligned}$$

dont la partie réelle est prise, et puisque  $\frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \in \mathcal{S}$ , il sera

$$\kappa \|U_n - \tilde{U}_n\|^2 \leq Re\left\langle \mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n)\right), \mathcal{M}\left(\frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n)\right) \right\rangle.$$

d'autre part

$$\begin{aligned} & Re\langle f_n - \tilde{f}_n, \mathcal{M}\left(\frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n)\right) \rangle \\ & = Re\langle \mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n), \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \rangle \\ & \leq (\|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)\|) \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \right\| \\ & \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)\|\right) \cdot (\sqrt{\kappa} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \right\|) \end{aligned}$$

Puisque

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)\| - \sqrt{\kappa} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \right\|\right)^2 \geq 0$$

alors

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\kappa} \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)\|^2 + \frac{\kappa}{2} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \right\|^2 \\
& \geq \left( \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)\| \right) \cdot \left( \sqrt{\kappa} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \right\| \right) \\
& \geq \left( \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)\| \right) \cdot \left( \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \right\| \right)
\end{aligned}$$

alors nous avons

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \langle \mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n), \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \rangle \\
& \leq \frac{1}{2\kappa} \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)\|^2 + \frac{\kappa}{2} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \right\|^2.
\end{aligned}$$

La formule (4.9.9) devient

$$\begin{aligned}
& \kappa \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \right\|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\mathcal{M}(U_n - \tilde{U}_n)\|^2 \\
& \leq \frac{1}{2\kappa} \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)\|^2 + \frac{\kappa}{2} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \right\|^2 \\
& \leq \frac{1}{2\kappa} \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)\|^2 + \kappa \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U_n - \tilde{U}_n) \right\|^2.
\end{aligned}$$

d'où

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(U_n - \tilde{U}_n) \right\|^2 \leq \frac{1}{\kappa} \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)\|^2.$$

par l'intégration des deux côtés de cette inégalité, nous avons

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial r} \|\mathcal{M}(U_n - \tilde{U}_n)(r)\|^2 dr \leq \frac{1}{\kappa} \int_0^t \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)(r)\|^2 dr$$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}(U_n - \tilde{U}_n)(t)\|^2 & \leq \|\mathcal{M}(U_n - \tilde{U}_n)(0)\|^2 \\
& \quad + \frac{1}{\kappa} \int_0^t \|\mathcal{M}^*(f_n - \tilde{f}_n)(r)\|^2 dr.
\end{aligned}$$

Nous supposons que  $f$  et  $U$  sont des fonctions régulières. Soit  $\tilde{U}_n$  est une approximation de  $U$  telle que  $\tilde{U}_n(0) = U_n^0$ . Utilisant l'inégalité (4.9.7), nous pouvons obtenir l'estimation d'erreur suivante

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{M}(U - \tilde{U}_n)(t)\| \\
& \leq \max_{0 \leq r \leq t} \|\mathcal{M}(U - \tilde{U}_n)(r)\| + \left( \max_{0 \leq r \leq t} \|\mathcal{M}^*(f - f_n)(r)\| \right. \\
& \quad \left. + \max_{0 \leq r \leq t} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U - \tilde{U}_n)(r) \right\| + \max_{0 \leq r \leq t} \|\mathcal{M}^* \mathcal{M}(U - \tilde{U}_n)(r)\| \right).
\end{aligned}$$

**Démonstration 4.4** On a

$$\|\mathcal{M}(U - U_n)(t)\| \leq \|\mathcal{M}(U - \tilde{U}_n)(t)\| + \|\mathcal{M}(U_n - \tilde{U}_n)(t)\|,$$

on peut estimer  $\|\mathcal{M}(U_n - \tilde{U}_n)(t)\|$  de (4.9.7)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}^*(f_n - f)(t)\| &\leq \|\mathcal{M}^*(f - f_n)(t)\| + \|\mathcal{M}^*(f - \tilde{f}_n)(t)\| \\ &\leq \|\mathcal{M}^*(f - f_n)(t)\| + \|\mathcal{M}^* \frac{\partial}{\partial t}(U - \tilde{U}_n)\| \\ &\quad + \|\mathcal{M}\mathcal{M}^*(U - \tilde{U}_n)\| \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{M}(U - \tilde{U}_n)(t)\| \\ &\leq \max_{0 \leq r \leq t} \|\mathcal{M}(U - \tilde{U}_n)(r)\| + \left( \max_{0 \leq r \leq t} \|\mathcal{M}^*(f - f_n)(r)\| \right. \\ &\quad \left. + \max_{0 \leq r \leq t} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(U - \tilde{U}_n)(r) \right\| + \max_{0 \leq r \leq t} \|\mathcal{M}^* \mathcal{M}(U - \tilde{U}_n)(r)\| \right). \end{aligned}$$

## Conclusion

---

Les méthodes spectrales forment une classe de discrétisations spatiales pour les équations différentielles. Les éléments clés pour leur formulation sont les fonctions d'essai (également appelées fonctions d'expansion ou d'approximation) et les fonctions de test (également appelées fonctions de poids). Les fonctions d'essai, qui sont des combinaisons linéaires de fonctions de base d'essai appropriées, sont utilisées pour fournir la représentation approximative de la solution. Les fonctions de test sont utilisées pour s'assurer que l'équation différentielle et peut-être certaines conditions aux limites sont satisfaites aussi étroitement que possible par l'expansion en série tronquée. Ceci est réalisé en minimisant, par rapport à une norme appropriée, le résidu produit en utilisant l'approximation tronquée au lieu de la solution exacte. Les résidus représentent l'équation différentielle et parfois les conditions aux limites, explicitement ou implicitement. Pour cette raison, ils peuvent être considérés comme un cas particulier de la méthode des résidus pondérés (*Finlayson et Scriven (1966)*). Une exigence équivalente est que le résidu satisfasse une condition d'orthogonalité appropriée par rapport à chacune des fonctions de test. De ce point de vue, les méthodes spectrales peuvent être considérées comme un cas particulier des méthodes de *Petrov-Galerkin* (*Zienkiewicz et Cheung (1967)*, *Babuska (1972)*).

Le choix des fonctions d'essai est l'une des caractéristiques qui distinguent les premières versions des méthodes spectrales des méthodes d'éléments finis et de différences finies. Les fonctions de base d'essai pour ce qu'on peut maintenant appeler des méthodes spectrales classiques - des méthodes spectrales sur un seul domaine tensoriel - sont globales, infiniment différentiables et presque orthogonales, c'est-à-dire que la matrice constituée de leurs produits internes a une très faible bande passante ; dans de nombreux cas, cette matrice est diagonale. (Typiquement les fonctions de base d'essai pour les méthodes spectrales classiques sont les produits tensoriels des fonctions propres des problèmes singuliers de Sturm-Liouville). En revanche, pour la version  $h$  des méthodes d'éléments finis, le domaine est divisé en petits éléments et des fonctions d'essai de poids faible sont spécifiées dans chaque élément. Les fonctions de base d'essai pour les méthodes d'éléments finis ont donc un caractère local et sont encore presque orthogonales, mais pas infiniment différentiables. Les méthodes de différences finies sont généralement considérées à partir d'une perspective d'approximation ponctuelle plutôt que d'une perspective de fonction d'essai/fonction de test.

Le choix des fonctions de test distingue les trois types de schémas spectraux les plus anciens, à savoir les versions de *Galerkin*, *collocation* et *tau*. Dans l'approche de *Galerkin* (1915), les fonctions de test sont les mêmes que les fonctions d'essai. Ce sont donc des fonctions infiniment continues qui satisfont individuellement certaines ou toutes les conditions aux limites. L'équation différentielle est appliquée en exigeant que l'intégrale des temps résiduels de chaque fonction d'essai soit nulle, après



quelques intégrations par parties, en tenant compte dans le processus de toutes les conditions aux limites restantes. Dans l'approche de *collocation*, les fonctions de test sont traduites par des fonctions *delta de Dirac* centrées sur des points de collocation spéciaux. Cette approche nécessite que l'équation différentielle soit satisfaite exactement aux points de *collocation*. Les méthodes *tau* spectrales sont similaires aux méthodes de *Galerkin* dans la manière dont l'équation différentielle est appliquée. Cependant, aucune des fonctions de test ne doit satisfaire aux conditions aux limites. Par conséquent, un ensemble d'équations supplémentaire est utilisé pour appliquer les conditions aux limites.

L'approche de *collocation* semble avoir été utilisée pour la première fois par *Slater* (1934) et par *Kantorovic* (1934) dans des applications spécifiques. *Frazer, Jones et Skan* (1937) l'ont développé comme une méthode générale pour résoudre les équations différentielles ordinaires. Ils ont utilisé une variété de fonctions d'essai et une distribution arbitraire des points de *collocation*. Le travail de *Lanczos* (1938) a établi pour la première fois qu'un bon choix des fonctions d'essai et la distribution des points de collocation est crucial pour l'exactitude de la solution. Peut-être devrait-il être crédité de poser les bases de la méthode de *collocation* orthogonale. Cette méthode a été relancée par *Clenshaw* (1957), *Clenshaw et Norton* (1963) et *Wright* (1964). Ces études ont impliqué l'application d'expansions polynomiales de Chebyshev à des problèmes de valeur initiale. *Villadsen et Stewart* (1967) ont développé cette méthode pour les problèmes aux limites.

Les premières applications de la méthode de *collocation* spectrale à des équations différentielles partielles ont été faites pour des problèmes spatialement périodiques par *Kreiss et Oliger* (1972) (qui l'ont appelée la méthode de Fourier) et *Orszag* (1972) (qui l'a appelé pseudo-spectral). Cette approche est particulièrement intéressante en raison de la facilité avec laquelle elle peut être appliquée à des problèmes à coefficients variables et même non linéaires.

L'approche de *Galerkin* possède la caractéristique esthétique que les fonctions d'essai et les fonctions de test sont les mêmes et que la discrétisation est dérivée d'une forme faible du problème mathématique. Les méthodes d'éléments finis utilisent habituellement cette approche. De plus, la première application sérieuse des méthodes spectrales aux EDP - celle de *Silberman* (1954) pour la modélisation météorologique - était une méthode de *Galerkin*. *Orszag* (1969, 1970) et *Eliassen, Machenhauer et Rasmussen* (1970) ont développé des méthodes de transformation pour évaluer les sommes de convolution résultant des non linéarités quadratiques (les termes non linéaires augmentent également le coût des méthodes des éléments finis, mais pas autant que pour les méthodes spectrales de *Galerkin*.) Pour les problèmes contenant des termes non linéaires plus compliqués, les méthodes spectrales de *Galerkin* à haute résolution restent peu pratiques.

L'approche *tau* est une modification de la méthode de *Galerkin* applicable aux problèmes avec conditions aux limites non périodiques. Elle peut être considérée comme un cas particulier de la méthode dite de *Petrov-Galerkin*. *Lanczos* (1938) a développé la méthode spectrale *tau*, et l'application de la méthode *Chebyshev-tau* par *Orszag* (1971) pour produire des solutions très précises aux problèmes de stabilité linéaire de la dynamique des fluides a inspiré une utilisation considérable de cette technique pour le calcul des valeurs propres.

Au milieu des années 1980, de nouvelles méthodes spectrales, combinant l'approche de *Galerkin* avec des formules de quadrature gaussiennes, sont devenues

courantes. Ces méthodes partagent avec l'approche de *Galerkin* l'application faible de l'équation différentielle et de certaines conditions aux limites. Dans leur version originale, les inconnues sont les valeurs de la solution aux points de quadrature, comme dans une méthode de *collocation*.

La première évaluation mathématique unificatrice de la théorie des méthodes spectrales a été fournie dans la monographie de *Gottlieb* et *Orszag* (1977). La théorie a été étendue pour couvrir une grande variété de problèmes, tels que le coefficient variable et les équations non linéaires. Dans sa monographie, *Mercier* (1981) a avancé la compréhension du rôle des points de quadrature gaussiens pour les polynômes orthogonaux en tant que points de collocation pour les méthodes spectrales, comme cela avait été observé en 1979 par *Gottlieb*. Des analyses de stabilité et de convergence pour les méthodes spectrales ont été produites pour diverses approches. L'analyse théorique des méthodes spectrales en termes de formulations faibles s'est révélée très fructueuse. En fait, cela a ouvert la porte à l'utilisation de techniques d'analyse fonctionnelle pour traiter des problèmes complexes et obtenir les meilleurs résultats. Les développements des applications ont été tout aussi étendus, et à la fin des années 1980, les méthodes spectrales étaient devenues l'outil numérique prédominant pour les études de physique fondamentale de la transition et de la turbulence. Dans l'ensemble, les 10 années qui ont suivi ont été extrêmement fructueuses pour le développement théorique et le déploiement d'applications de méthodes spectrales.

Les développements des cinq premières années qui ont suivi *Gottlieb* et *Orszag* (1977) ont été examinés dans les actes du symposium édités par *Voigt*, *Gottlieb* et *Hussaini* (1984). En effet, ce même colloque en 1982 a inspiré les incarnations juvéniles des auteurs actuels pour produire leur premier texte sur ce sujet (*Canuto*, *Hussaini*, *Quarteroni* et *Zang* (1988)). Par la suite, de nombreux autres textes et articles de revue sur divers aspects des méthodes spectrales sont apparus. *Boyd* (1989, et en particulier la deuxième édition de 2001) contient une mine de détails et de conseils sur les algorithmes spectraux et est une référence particulièrement bonne pour les problèmes sur les domaines non bornés et dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques. Une référence solide pour les aspects théoriques des méthodes spectrales pour les équations elliptiques a été fournie par *Bernardi* et *Maday* (1992, 1997). *Funaro* (1992) et *Guo* (1998) ont discuté de l'approximation des équations différentielles par des expansions polynomiales. *Fornberg* (1996) est un guide pour l'application pratique des méthodes de collocation spectrale, et il contient des exemples illustratifs, des explications heuristiques, des segments de code *Fortran* de base et un chapitre succinct sur les applications aux flux turbulents et aux prévisions météorologiques. *Trefethen* (2000) est une introduction vivante aux méthodes de *collocation spectrale* et inclut de nombreux exemples dans *Matlab*. *Tadmor* (1998) et *Gottlieb* et *Hesthaven* (2001) pour les problèmes hyperboliques de premier ordre, *Cohen* (2002) pour les équations d'onde, et *Bernardi*, *Dauge* et *Maday* (1999) ont fourni des applications ciblées des méthodes spectrales sur des classes particulières de problèmes. Pour des problèmes dans les domaines axisymétriques. *Peyret* (2002) a fourni une discussion assez complète des méthodes spectrales de Fourier et de Chebyshev pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles, en particulier dans les équations primitives et les formulations de tourbillon-flux.

À la fin des années 1980, les méthodes spectrales classiques étaient raisonnablement matures et l'accent sur la recherche s'était clairement orienté vers l'utilisation de méthodes de haut niveau pour les problèmes sur des domaines complexes. *Funaro* (1997) traite les méthodes d'élasticité spectrale dans le contexte de problèmes de

valeurs limites elliptiques, en particulier les écoulements dominés par la convection, et inclut un traitement multidomaine pour la géométrie complexe. Les premiers textes complets sur les méthodes spectrales dans les domaines complexes sont apparus vers l'an 2000. *Karniadakis et Sherwin* (1999) fournissent un cadre unifié pour les méthodes d'éléments spectraux (introduites par *Patera* (1984)) et les méthodes d'éléments finis hp (voir par exemple, *Babuska, Szabo et Katz* (1981)). Il comprend des domaines structurés et non structurés, ainsi que des applications à la fois pour les flux incompressibles et compressibles. Le texte de *Deville, Fischer et Mund* (2002) se concentre sur les méthodes d'ordre supérieur dans l'espace physique (*collocation* et méthodes d'*éléments spectraux*) avec des applications à des écoulements incompressibles. Sa couverture des détails de mise en œuvre de ces méthodes sur les ordinateurs vectoriels et parallèles le distingue des autres livres sur le sujet. Bien qu'il soit spécifiquement consacré à la version hp des méthodes d'éléments finis, le livre de *Schwab* (1998) fournit de nombreux résultats théoriques utiles sur les propriétés d'approximation des polynômes d'ordre élevé dans des domaines complexes.

# Notations

---

$EDO$	Équation différentielle ordinaire.
$EDP$	Équation différentielle partielle.
$EF$	Méthode des éléments finis.
$DF$	Méthode des différences finis.
$TS$	Techniques spectrale.
$P_N, \mathcal{P}_N$	Opérateurs de projection.
$R_N$	Fonction résiduelle.
$P_n(x)$	Polynôme orthogonal de degré $n$ .
$T_n(x)$	Polynôme de Chebychev de la première espèce.
$U_n(x)$	Polynôme de Chebychev de la deuxième espèce.
$V_n(x)$	Polynôme de Chebychev de la troisième espèce.
$W_n(x)$	Polynôme de Chebychev de la quatrième espèce.
$L_n(x)$	Polynôme de Legendre d'ordre $n$ .
$l_n(x)$	Polynôme de Laguerre d'ordre $n$ .
$H_n(x)$	Polynôme de Hermite d'ordre $n$ .
$P_{i,j}(x, y)$	Polynôme de Legendre a deux variables.
$w(x)$	Fonction poids.
$\langle u, v \rangle$	Produit scalaire de $u$ et $v$ .
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker ( $= 0$ si $i \neq j$ , $= 1$ si $i = j$ ).

$u_N(x)$	Approximation spectrale.
$u_0(x)$	Condition initiale.
$\tilde{u}_k$	$k^{ieme}$ coefficient spectral.
$\tilde{u}_k^{(1)}$	$k^{ieme}$ coefficient spectral de la première dérivée.
$\tilde{u}_k^{(2)}$	$k^{ieme}$ coefficient spectral de la deuxième dérivée.
$a_N(t)$	Coefficient spectral dépend du temps.
$(\varphi_k)_{k=1,\dots,\infty}$	Base spectrale.
$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert.
$\Omega$	Domaine borné de $\mathbb{R}^n$ .
$\partial\Omega$	Frontière de $\Omega$ .
$B$	Opérateur de trace.
$\mathcal{B}$	Sous espace fonctionnel de $\mathcal{H}$ .
$B_N$	Espace engendré par les $N$ première fonctions de base.
$P_N^\perp$	Projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur $B_N$ .
$\mathcal{M}$	Matrice de collocation : $\mathcal{M} = (\varphi_n(x_i))$ .
$\delta_p$	Espace spectral.
$\mathfrak{S}_h$	Espace physique.
$\Gamma$	Cercle unité $[0; 2\pi]$ .
$\mathcal{L}^2(\Gamma, \mathbb{C})$	Espace de fonctions de carrées intégrables de $\Gamma$ à valeur complexe.
$\psi_k(x)$	Fonction test.
$\phi_k(x)$	Fonction d'essai.
$\mathcal{M}(u)$	Opérateur (linéaire ou non-linéaire).
$\mathcal{M}$	Opérateurs d $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ .
$\mathcal{M}^*$	L'adjoint de l'opérateur $\mathcal{M}$ .

# Annexe

---

## Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre car elle procède en deux étapes : d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation, d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue.

## Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF, ou FEM pour finite element method en anglais) est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Celles-ci peuvent par exemple représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques (mécaniques, thermodynamiques, acoustiques, etc.).

Concrètement, cela permet par exemple de calculer numériquement le comportement d'objets même très complexes, à condition qu'ils soient continus et décrits par une équation aux dérivées partielles linéaire : mouvement d'une corde secouée par l'un de ses bouts, comportement d'un fluide arrivant à grande vitesse sur un obstacle, déformation d'une structure métallique, etc.

## Méthode des volumes finis.

La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, comme la méthode des différences finies et celle des éléments finis.

Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales. Toutefois, la méthode des volumes finis se base directement sur la forme dite forte de l'équation à résoudre, alors que la méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle de l'équation (on parle aussi de formulation faible).

L'équation aux dérivées partielles est résolue de manière approchée à l'aide d'un maillage constitué de volumes finis qui sont des petits volumes disjoints (en 3D, des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont la réunion constitue le domaine d'étude.

Les volumes finis peuvent être construits autour de points d'un maillage initial, mais ce n'est pas une nécessité.

Les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation hyperboliques, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques.

Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. En utilisant le théorème de flux-divergence, les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface et ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour élaborer une approximation des flux aux interfaces. Puisque le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent, ces méthodes sont conservatives, donc parfaitement adaptées à la résolution de lois de conservation.

Un autre avantage de la méthode des volumes finis est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés car, en matière de discrétisation des lois de conservation, sa formulation ne tient aucun compte de la complexité du maillage. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque des flux diffusifs entrent en jeu.

## Formule de Leibniz

La formule de Leibniz est une formule permettant de calculer la dérivée d'ordre  $n$  d'un produit de deux fonctions. Elle est analogue à la formule du binôme de Newton pour calculer une puissance d'ordre  $n$  d'une somme de deux termes.

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions  $n$  fois dérivables sur  $I$ . Alors  $fg$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \\ &= f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + \dots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} + \dots + f g^{(n)} \end{aligned}$$

## Calcul des coefficients de Chebychev de $F(u)$

Les deux relations de récurrence décrites dans [le paragraphe *Relation de récurrence entre les  $T_n$*  dans le premier chapitre] vont permettre de calculer les coefficients du développement

$$F(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n T_n(x),$$

à partir des coefficients de

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T_n(x),$$

pour de nombreuses fonctions  $\mathbf{F}$  standards.

Voici quelques exemples fondamentaux.

a)  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{x} \mathbf{u}(\mathbf{x})$ .

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x),$$

$$xu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{[1]} T_n(x).$$

On se sert de la relation

$$c_n T_{n+1}(x) + d_{n-1} T_{n-1} = 2x T_n(x) \quad n \in \mathbb{N},$$

dont la combinaison linéaire avec les  $a_n$  donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n T_{n+1}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} d_{n-1} a_n T_{n-1}(x) = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 2xu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1} a_{n-1} T_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n a_{n+1} T_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n-1} a_{n-1} + a_{n+1}) T_n(x). \end{aligned}$$

Pour le premier terme,  $c_{n-1}$  a permis la sommation  $n = 0 \dots \infty$ .

Pour le second  $d_n$  a été remplacé par la sommation  $n = 0 \dots \infty$ .

Donc

$$2b_n^{[1]} = c_{n-1} a_{n-1} + a_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.9.9)$$

**b)  $F(u) = x^2 u(x)$ .**

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x),$$

$$x^2 u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{[2]} T_n(x).$$

On se sert de la relation précédente appliquée aux deux fonctions  $xu(x)$  et  $x^2 u(x)$  :

$$\begin{aligned} 2b_n^{[2]} &= c_{n-1} b_{n-1}^{[1]} + b_{n+1}^{[1]} \quad n \in \mathbb{N}, \\ 4b_n^{[2]} &= c_{n-1} [c_{n-2} a_{n-2} + a_n] + [c_n a_n + a_{n+2}]. \end{aligned}$$

En remarquant que  $c_{n-1} \cdot c_{n-2} = c_{n-2}$  on obtient

$$4b_n^{[2]} = c_{n-2} a_{n-2} (c_n + c_{n-1}) a_n + a_{n+2}. \quad (4.9.10)$$

**c)  $F(u) = u'(x)$ , (expressions implicites et explicites).**

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x),$$

$$u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} T_n(x).$$

On se sert de la relation

$$c_n \frac{T'_{n+1}}{n+1} - d_{n-2} \frac{T'_{n-1}}{n-1} = 2T_n(x) \quad n \in \mathbb{N},$$



dont la combinaison avec les  $a_n^{(1)}$  donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^{(1)} \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} d_{n-2} a_n^{(1)} \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} T_n(x).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 2u'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} a_{n-1}^{(1)} \frac{T'_n(x)}{n} - \sum_{n=0}^{\infty} d_{n-1} a_{n+1}^{(1)} \frac{T'_n(x)}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [c_{n-1} a_{n-1}^{(1)} - a_{n+1}^{(1)}] \frac{T'_n(x)}{n}. \end{aligned}$$

Pour le second terme,  $d_{n-1}$  a été remplacé par la sommation  $n = 1 \dots \infty$

En identifiant avec

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T'_n(x),$$

on obtient l'expression implicite des  $a_n^{(1)}$

$$2na_n = c_{n-1} a_{n-1}^{(1)} - a_{n+1}^{(1)} \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.9.11)$$

Ceci permet de calculer explicitement les  $a_n^{(1)}$  par récurrence

$$\begin{aligned} c_n a_n^{(1)} &= 2(n+1)a_{n+1} + a_{n+2}^{(1)} \\ &= 2(n+1)a_{n+1} + 2(n+3)a_{n+3} a_{n+5}^{(1)} \\ &= \dots \\ &= 2 \sum_{\substack{p=n+1 \\ \text{step } 2}}^{\infty} p a_p, \end{aligned}$$

où la notation "step 2" signifie que l'incrément de la sommation est 2.

Donc

$$a_n^{(1)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ \text{step } 2}}^{\infty} p a_p. \quad (4.9.12)$$

**d)  $F(u) = u''(x)$ , (expression explicite).**

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \\ u''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} T_n(x). \end{aligned}$$

Le plus simple est d'utiliser la relation précédente (4.9.12) appliquée aux fonctions  $u''$  et  $u'$

$$a_n^{(2)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{m=n+1 \\ \text{step } 2}}^{\infty} m a_m^{(1)} \quad n \in \mathbb{N}.$$

puis avec  $u'$  et  $u$

$$a_m^{(1)} = 2 \sum_{\substack{p=m+1 \\ \text{step } 2}}^{\infty} p a_p \quad m \geq 1.$$

On a donc en regroupant ces égalités

$$a_n^{(2)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{m=n+1 \\ \text{step 2}}}^{\infty} \sum_{\substack{p=m+1 \\ \text{step 2}}}^{\infty} mpa_p.$$

Le domaine de sommation  $\mathcal{D}$  représenté sur la figure (??) peut être balayé d'une façon différente.

$$a_n^{(2)} = \frac{4}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ \text{step 2}}}^{\infty} pa_p \sum_{\substack{m=n+1 \\ \text{step 2}}}^{\infty} m.$$

Le calcul suivant montre que

$$\sum_{\substack{m=n+1 \\ \text{step 2}}}^{p-1} m = \frac{p^2 - n^2}{4}.$$

Effectuons le calcul suivant avec  $a < b$  dans  $\mathbb{N}$  et  $e = \frac{b-a}{2} \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m=a \\ \text{step 2}}}^b m &= \sum_{k=0}^e (a + 2k) \\ &= (e+1)a + (e+1)e \\ &= (e+1)(e+a) \\ &= \frac{1}{4}(b-a+2)(b+a). \end{aligned}$$

Pour  $a = n+1$  et  $b = p-1$  on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{m=n+1}^{p-1} m &= \frac{1}{4}(p-n)(p+n) \\ &= \frac{1}{4}(p^2 - n^2). \end{aligned}$$

Donc

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ \text{step 2}}}^{\infty} p(p^2 - n^2)a_p. \quad (4.9.13)$$

e) **F(u) = u''(x), (expression implicite).**

Dans certains problèmes comme la résolution de l'équation de Poisson il peut être intéressant de connaître non pas  $a_n^{(2)}$  comme expression explicite des  $a_n$  mais  $a_n$  en fonction des  $a_n^{(2)}$ .

On utilise la relation (4.9.11) avec les fonctions  $u'$  et  $u$

$$2na_n = c_{n-1}^{(1)}a_{n-1}^{(1)} - a_{n+1}^{(1)} \quad \text{pour } n \geq 2,$$

puis avec les fonctions  $u''$  et  $u'$

$$2pa_p^{(1)} = c_{p-1}a_{p-1}^{(2)} - a_{p+1}^{(2)} \quad \text{pour } p = n-1 \text{ et } p = n+1.$$

En remplaçant  $a_{n-1}^{(1)}$  et  $a_{n+1}^{(1)}$  et leur expression

$$\begin{aligned} 2na_n &= c_{n-1} \left[ \frac{c_{n-2}}{2(n-1)} a_{n-2}^{(2)} - \frac{1}{2(n-1)} a_n^{(2)} \right] - \left[ \frac{c_n}{2(n+1)} a_n^{(2)} - \frac{1}{2(n+1)} a_{n+2}^{(2)} \right] \\ &= \frac{c_{n-1}c_{n-2}}{2(n-1)} a_{n-2}^{(2)} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} + \frac{c_n}{n+1} \right) a_n^{(2)} + \frac{1}{2(n+1)} a_{n+2}^{(2)}, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Or  $c_{n-1}c_{n-2} = c_{n-2}$  et  $c_n$  peut être omis car  $n \geq 2$ .

Donc

$$a_n = \frac{c_{n-2}}{4n(n-1)}a_{n-2}^{(2)} - \frac{1}{2(n^2-1)}a_n^{(2)} + \frac{1}{4n(n+1)}a_{n+2}^{(2)}. \quad (4.9.14)$$

**f) Expression des conditions aux limites**

Rappelons que

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} T_n(1) = 1 & \text{et} & T_n(-1) = (-1)^n \\ T'_n(1) = n^2 & \text{et} & T'_n(-1) = (-1)^{n-1}n^2 \end{cases}$$

Soit

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x).$$

Il s'agit d'exprimer les conditions aux limites à l'aide des  $a_n$ .

**Par exemple**

•

$$u(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

•

$$u(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

•

$$\begin{aligned} u'(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n T'_n(1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} u'(-1) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n T'_n(-1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 a_n. \end{aligned}$$

# Algorithmes

---

## Divers.

```
1 function [Scal] = Produit(f,g)
2
3 %input : f, g : Deux fonctions sous forme symbolique.
4 %output : Scal : Variable réelle représente le produit scalaire de f et g, définit par une intégrale sur
  (-1,1).
5
6 syms x
7 Scal= int ( f*g, x, -1,1);
8 end

1 function [Scal] = Prod_Scal2(f,g)
2
3 %input : f, g : Deux fonctions sous forme symbolique.
4 %output : Scal : Variable réelle représente le produit scalaire de f et g, définit par une intégrale
  double sur [-1,1]2.
5
6 syms x y
7 Scal= int (( int (f*g*( (1-x^2)*(1-y^2) )^(-1/2) ,y, -1,1)),x, -1,1);
8 end

1 function [ N ] = NormeL2( f, a, b )
2
3 format short
4 N=eval(sqrt(int(f^2,a,b)));
5
6 end
```

## Construction des bases.

```
1 function [ T ] = Chebychev1(n)
2 %input : n : Pour construire un polynôme d'ordre n.
3 %output : P : Un polynôme, sous forme symbolique.
4
5 syms x
6
7 T = simplify(cos(n*(acos(x)))) ;
8
9 end

1 function [ T ] = Chebychev2(i,j)
2 %input : i, j : Pour la construction d'un polynôme de Chebychev d'ordre N=i+j.
3 %output : P : un polyôme, sous forme symbolique, construit par un produit.
4
5 syms x y
6
7 T = simplify(cos(i*(acos(x))) * cos(j*(acos(y))));
8
9 end
```

```

1 function [ P ] = Legendre1(n)
2 %input : n : Pour construire un polynôme d'ordre N=n.
3 %output : P : Un polyôme, sous forme symbolique,
4 %construit par la formule de Rodrigues.
5
6 syms x
7
8 P = simplify(1/(2^(n)*factorial(n)) * (diff((x^2-1)^n, x, n)));
9
10 end

1 function P = Legendre_Reccurence(i, j)
2 %input : i, j : Indices, forment l'ordre N du polynôme, tq N=i+j.
3 %output : p : un polynôme sous forme symbolique, construit par une relation de récurrence entre
4 les polynômes.
5 %left := P(i,j-1), righth := P(i,j+1), top := P(i-1,j), low :=P(i+1,j), P := P(i,j);
6
7 syms x y
8 left = 0;
9 top = 0;
10
11 if (i==0 && j==0)
12     P = sym(1);
13 else
14     if (i==-1 || j==-1) then
15         P = 0;
16     else
17         P = 1;
18
19         for l = 0: i-1
20             right = (2*l+1)/(l+1)*x*P - (1)/(l+1)*left;
21             left = P;
22             P = right;
23         end
24
25         for k = 0 : j-1
26             low = (2*k+1)/(k+1)*y* P - (k)/(k+1)*top;
27             top = P;
28             P = low;
29         end
30     end
31 end

1 function [ P ] = Legendre_Rodrigues( i, j )
2 %input : i, j : Pour la construction d'un polynôme d'ordre N=i+j.
3 %output : P : Un polyôme bi-variables, sous forme symbolique, construit par la formule de Rodrigues.
4
5 syms x y
6
7 P= simplify(1/(2^(i+j)*(factorial(i)*factorial(j)))
8
9     *(diff((x^2-1)^i, x, i))*(diff((y^2-1)^j, y, j)));
10
11 end

```

## Différenciation.

```

1 function [Dirv1] = Differentiation(N)
2
3 %input : L'ordre du polynôme de Legendre a dérivè.
4 %output : La dérivée première.
5
6 %clear
7 %clc
8 D1=[];

```

```

9
10 syms v00 v01 v02 v10 v11 v12 v20 v21 v22
11
12 %Création d'un vecteur pour les coefficients spectraux
13
14 %V=transpose(sym('v',(N N)));
15 V=[v00 v01 v02; v10 v11 v12; v20 v21 v22];
16
17
18 %Calcule des coefficients D1 de la première dérivée par rapport a la variable x ou bien par rapport
a la variable y
19
20 for i=0:N
21     S=0;
22
23     for p=i+1:N
24         if(mod(p+i,2)~=0)
25             S=S+V(p,1);
26         end
27
28     end
29     D1=[D1 (2*i+1)*S];
30 end
31
32 L=[];
33 for i=1:N+1
34     for j=1:N+1
35         L=[L Rodrigues(i-1,j-1)];
36     end
37 end
38
39 Dirv1=0;
40 for i=1:N
41     Dirv1=Dirv1+ D1(i)*L(i);
42 end
43 Dirv1=simplify(Dirv1);

```

## Approximation fonctionnelle.

```

1 function [E,f_N] = Approximation_Legendre( f,N )
2
3 %input : f : Fonction a deux variables symboliques x et y (la fonction a approximé).
4 %: N : l'ordre du developpement en série de Legendre.
5
6 % output :  $f_N$  : l'approximant d'ordre N de la fonction f.
7 %: Erreur : une variable réelle, mesure la différence entre la fonction f et leur approximation  $f_N$ .
8
9 syms x y
10 f_N=0;
11
12 if mod(N,2)==0
13     K=floor(N/2);
14 else
15     K=floor(N/2)+1;
16 end
17
18
19 for i=0:K
20     for j=0:floor(N/2)
21         f_N=f_N+ Rodrigues( 0,j )*Rodrigues( i,0 )*((2*i+1)/2*(2*j+1)/2)
22             * Prod_Scal2(f,Rodrigues( 0,j )*Rodrigues( i,0 ));
23
24         %Ici on a divisé le polynôme (i,j) sur la constante de normalisation ((2*i+1)/2*(2*j+1)/2),
pour avoir une base orthonormale.
25
26     end

```

```

27 end
28
29 E=Norme_Legendre(f-f_N); %calcul de la norme fonctionnelle 2 de  $f - f_N$ .
30
31 end

```

## Interface graphique.

```

1 function varargout = PolyOrthog(varargin)
2 syms x y
3 gui_Singleton = 1;
4 gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
5                   'gui_Singleton',   gui_Singleton, ...
6                   'gui_OpeningFcn',  @PolyOrthog_OpeningFcn, ...
7                   'gui_OutputFcn',  @PolyOrthog_OutputFcn, ...
8                   'gui_LayoutFcn',   [], ...
9                   'gui_Callback',    []);
10 if nargin && ischar(varargin{1})
11     gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
12 end
13
14 if nargout
15     [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
16 else
17     gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
18 end
19 function PolyOrthog_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
20 handles.output = hObject;
21
22 guidata(hObject, handles);
23
24
25 varargout{1} = handles.output;
26
27 function listbox1_Callback(hObject, eventdata, handles)
28
29 i= str2num(get(handles.edit1, 'String'));
30 j= str2num(get(handles.edit2, 'String'));
31 X= get(handles.listbox1, 'Value');
32 if(X== 1)
33     pn = char(Legendre(i, j));
34     set(handles.edit3, 'String', pn);
35 elseif(X==2)
36     pn = char(Chebychev(i, j));
37     set(handles.edit3, 'String', pn);
38 elseif(X==3)
39     pn = char(Laguerre(i, j));
40     set(handles.edit3, 'String', pn);
41 elseif(X==4)
42     pn = char(Hermite(i, j));
43     set(handles.edit3, 'String', pn);
44 end
45
46 function listbox1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
47
48 if ispc && isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'), get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
49     set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
50 end
51
52 function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
53
54 function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
55
56 if ispc && isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'), get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
57     set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
58 end

```

```

59
60 function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
61
62 function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
63
64 if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
65     set(hObject,'BackgroundColor','white');
66 end
67
68 function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
69
70 function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
71
72 if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
73     set(hObject,'BackgroundColor','white');
74 end
75
76 function togglebutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
77 A=
78     ;
79 set(handles.edit3,'String',A);
80 set(handles.edit1,'String',A);
81 set(handles.edit2,'String',A);
82 %-----
83 function pushbutton3_Callback(hObject, eventdata, handles)
84 %i= str2num(get(handles.edit1,'String'));
85 j= str2num(get(handles.edit2,'String'));
86 X= get(handles.listbox1,'Value');
87 if(X== 1)
88     P = PlotLeg(i,j);
89     set(handles.axes1,P);
90     elseif(X==2)
91     P = ChebPlot(i,j);
92     set(handles.axes1,P);
93     elseif(X==3)
94     P = LaguerPlot(i,j);
95     set(handles.axes1,P);
96     elseif(X==4)
97     P = HertPlot(i,j);
98     set(handles.axes1,P);
99 end
100 %-----
101 function axes1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

```



## Bibliographie

---

- [1] A. Jeffrey, *Handbook of mathematical formulas*, University of Newcastle upon tyne (United Kingdom), 2000.
- [2] A. Quarteroni, A. Valli, *Numerical Approximations of Partial Differential Equations*, (Springer, Heidelberg) 1994
- [3] A. Quarteroni, C. Canuto, M. Y. Hussaini, T. A. Zang, *Spectral Methods Fundamentals in Single Domains*, Springer 2006, ISBN : 987 – 3 – 540 – 30725 – 9 [http : //www.dimat.polito.it/chqz/software](http://www.dimat.polito.it/chqz/software).
- [4] A. Quarteroni & R. Sacco & F. Saleri, *Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications*, Springer-Verlag Italia, Milano 2007.
- [5] A. Soufyane, M. Boulmalf, *Solution of linear and nonlinear parabolic equations by the decomposition method*, *Appl. Math.Comput*, 162(2005)687 – 693.
- [6] B. Costa, *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, *A Mathematical Journal Vol. 6, No 4*, (1 – 32), december 2004.
- [7] B. Costa, L. Dettori, D. Gottlieb and R. Temam, *Time Marching Techniques for the Nonlinear Galerkin Method*, *SIAM Journal of Sci. Comput.*, Vol. 23(2001), No.1, pp.46 – 65.
- [8] B. Fornberg, *A practical guide to pseudospectral methods*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [9] B. Helffer, *Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles, analyse de Fourier et introduction aux distributions*, Département de Mathématiques Université Paris-Sud Version pour la Roumanie de Février 2014.
- [10] B. Helffer, *Introduction aux Équations aux Dérivées partielles*, Département de Mathématiques Université Paris-Sud, Version de Mai 2007.
- [11] B. Mercier, *An introduction to the numerical analysis of spectral methods*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [12] B. Mercier, *Stabilité et convergence des méthodes spectrales polynômiales (application a l'équation d'advection)*, *RAIRO(vol 16, No 1, 1982, p 67 a 100.)*
- [13] C. Bernardi & Y. Maday, *Approximations spectrales de problmes aux limites elliptiques*, Springer-Verlag, Paris 1992.
- [14] C. Canuto, A. Quarteroni, M.Y. Hussaini and T. Zang, *Spectral method in fluied mechanics*, Springer-Verlag, New York (1988).
- [15] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni & T.A. Zang, *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [16] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, & T.A. Zang, *Spectral Methods : Fundamentals in Single Domains*, Springer 2006.

- [17] C. Canuto, M. Yousuff Hussaini, Alfio Quarteroni, & Thomas A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Physics. Springer, 1987.
- [18] D.LE Touzé, *Méthodes spectrales pour la modélisation non-linéaire d'écoulements a surface libre in-stationnaire*, Thèse de Doctorat, Le 20 octobre 2003, à l'école centrale de Nantes.
- [19] D. Funaro, *Polynomial approximation of differential equations*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [20] E. Concalvès, *Méthodes, analyse et calculs numérique*, Septembre 2005.
- [21] E. Goncalvès da Silva, *Résolution numérique des équations d'Euler 1D*, Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2008, pp.59. < cel – 00556980 >
- [22] F. Boyer, *Analyse numérique des EDP elliptiques*, Aix-Marseille universités 19 novembre 2011.
- [23] F. Jędrzejewski, *Introduction aux méthodes numériques*, Deuxième édition, Paris, 2005.
- [24] F. Paulin, *Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique*, Cours de deuxième année de magistère, Année 2012 – 2013.
- [25] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Dunod, Paris, 1999.
- [26] J.P. Boyd, *Chebyshev and Fourier spectral methods*, Lecture notes in engineering, 49, Springer-verlag, Berlin (1989).
- [27] J. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Second Edition, University of Michigan. 2000.  
Available online : [http://www-personal.umich.edu/~jpboyd/BOOK\\_Spectral2000.html](http://www-personal.umich.edu/~jpboyd/BOOK_Spectral2000.html).
- [28] J-C Cuillère, *Introduction à la méthode des éléments finis - 2e édition*, Dunod, 2016 (ISBN 978-2100742622), chap. 6.5 (« Hypothèse de Galerkin »), p. 104-112
- [29] J. Désidéri, *Modèles mathématiques fondamentaux pour la mécanique*, novembre 1999.
- [30] J. Novak, *Introduction aux méthodes spectrales*, Laboratoire Univers Théories (LUTH)CNRS / Observatoire de Paris, France , décembre 2007.
- [31] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, edition Springer-Verlag, 1976.
- [32] J.Lawson, M.Berzins and P.M. Dew, *Balancing space and time errors in the method of lines for parabolic equations*, *Siam J. Sci. Stat. Comput.*, 12(3)(1991)573 – 594.
- [33] K.Gustafson, *Domain Decomposition, Operator Trigonometry, Robin Condition*, *Contemporary Mathematics*, 218.432 – 437.(1998).
- [34] Kendall E. Atkinson, Han, Weimin, *Theoretical numerical analysis : a functional analysis framework*, New York, New York : Springer, 2001 (ISBN 978 – 0 – 387 – 95142 – 3, LCCN 00061920).
- [35] L.N. Trefethen, *Spectral methods in MATLAB*, SIAM, Philadelphia (2000).
- [36] M. Berzins, *Global error estimation in the methods of lines for parabolic equations*, *Siam J. Sci. Stat. Comput.* 19(4)(1988)687 – 701.

- [37] M. Druon, *Modélisation du mouvement par polynômes orthogonaux : application à l'étude d'écoulements fluides*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2009.
- [38] M. Javidi & A. Golbabai *Spectral Method for Parabolic Partial Differential Equations with Neumann Boundary Conditions*, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 1, 2007, no.5, 211 – 218
- [39] M. Javidi, *Spectral collocation method for the solution of the generalized Burger-Fisher equation*, *Appl. Math. Comput.*, 174, no.1(2006), 345 – 352.
- [40] M. Sapagovas, *Hypothesis on the solvability of parabolic equations with nonlocal conditions*, *Nonlinear Analysis, Modeling and control*, 7(1), (2002)93 – 104.
- [41] M.T. Darvishi, *New algorithms for solving ODEs by pseudospectral method*, *Korean J. Comput. and Appl. Math.* 7No.2(2000)319 – 331.
- [42] M.T. Darvishi, *Preconditioning and domain decomposition scheme to solve PDEs*, *International. J. of pure and appl. Math*, Vol. 15, No.4(2004)419 – 439.
- [43] M.T. Darvishi, M. Javidi, *A numerical solution of Burger's equation by pseudospectral method and Darvishi's preconditioning*, *Appl. Math. Comput.* 173, no.1(2006)421 – 429.
- [44] O. Thual, *Introduction aux méthodes spectrales, département hydraulique et mécaniques des fluides (Institut national polytechnique de Toulouse)*, version 1996.
- [45] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, avril 2002 (ISBN 9780898715149).
- [46] P. Le Quéré & B. Podvin, *Méthodes numériques pour les écoulements incompressibles*, Année 2010.
- [47] R. Baltensperger, J.P. Berrut, *The errors in calculating the pseudospectral differentiation matrices for Chebyshev-Gauss-Lobatto point*, *Comput. Math. Appl.*, 37(1999), 41 – 48.
- [48] R. Baltensperger, M.R. Trummer, *Spectral differencing with a twist*, *SIAM J. of Sci. Comp.*, 24, no.5(2003), 1465 – 1487.
- [49] S. Orszag, *Spectral methods for problems in complex geometries*, *J. Comput. Phys.* 37, 70 – 92, 1980.
- [50] S. Orszag, *Numerical analysis of spectral methods*, NSF-CBMS Monographie no.26, Soc. Ind. and App1.Math., Philadelphia 1977.
- [51] T.R. Hopkins and R. Wait, *A comparison of Galerkin collocation and the method of lines for PDE's*, *Int.J. for numerical methods in Engineering*, 12(1978)1081 – 1107.
- [52] Iserles. A *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations* 2009.
- [53] I. Sehili, A. Zerroug and A. Rahmoune, *Creation of two-dimensional Legendre basis and some properties*, *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*, Vol. : 18, Issue. : 3, Pages : 134 – 142.
- [54] I. Sehili, A. Zerroug, *Bivariate Legendre approximation*, *International Journal of Applied Mathematical Research*, Vol6, No4(2017), Pages : 125 – 129.
- [55] I. Sehili, A. Zerroug, *Two-dimensional Spectral Approximation*, *Journal of Applied Computer Science & Mathematics*, Issue 2/2017, vol.11, No.24, Suceava.