A PELL-SOROZAT NÉHÁNY TULAJDONSÁGÁRÓL

KISS PÉTER, MÁTYÁS FERENC ÉS VÁRNAI FERENC

(Közlésre érkezett: 1978. december 31.)

Definiáljuk az R sorozatot az R_0, R_1 konstans egészekkel és az

$$R_{n+1} = 2R_n + R_{n-1} \tag{1}$$

$(n > 0)$ rekurziós formulával. Legyen továbbá

$$k = R_0^2 + 2R_0R_1 - R_1^2.$$

Ha $R_0 = 0$ és $R_1 = 1$, akkor a kapott sorozatot Pell sorozatnak nevezzük, melyet P-vel, tagjait

$$P_0\ (= 0), P_1\ (= 1), P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

-nel jelöljük. Ebben az értelemben (1) a Pell sorozat egy általánosítása. Ismeretes, hogy az

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

egyenlet

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \text{ és } \beta = 1 - \sqrt{2}$$

gyökeivel az R sorozat tagjai

$$R_n = \frac{(R_1 - \beta R_0)\alpha^n - (R_1 - \alpha R_0)\beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2}$$

alakban explicite is megadhatók (lásd [10], 89. oldal).
Speciálisan a P sorozatra

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{3}$$

A P és R sorozatokat és a P sorozat más általánosításait már többen vizsgálták, több

V. Krishna [8], A. F. Horadam [6]). Továbbá néhány szerző rámutatott a másodrendű lineáris rekurzív sorozatok és az $x^2 - Ny^2 = D$ Pell-egyenlet megoldásai közötti kapcsolatokra. V. E. Hoggatt Jr. [4] bizonyította, hogy az $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ egyenlet összes pozitív egész megoldása $x = L_n$, $y = F_n$ alakú, ahol L_n, illetve F_n az n-edik Lucas, illetve Fibonacci szám az $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ kezdőelemekkel és $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ rekurzióval definiálva. Ezt az eredményt V. E. Hoggat Jr. és M. Bicknell [5] általánosította az $x^2 - (a^2 \pm 4)y^2 = \pm 4$ típusú diofantikus egyenletekre. M. J. De Leon [9] bizonyította, hogy ha x_0, y_0 az $x^2 - 2y^2 = D$ alapmegoldása, akkor x_n, y_n is megoldás, ahol $x_n + y_n = (x_0 + y_0) P_{2 \cdot n+1} + y_0 P_{2 \cdot n}$ és $y_n = (x_0 + y_0) P_{2n} + y_0 P_{2n-1}$.

Másodrendű rekurzív sorozatok, illetve a P sorozat és az $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ egyenlet megoldásai között talált hasonló kapcsolatokat E. M. Cohn [3], I. Adler [1] és V. Théault [11].

A következőkben az R illetve P sorozatok néhány új tulajdonságát bizonyítjuk, bővítve és általánosítva ezzel [7]-ben elért eredményeinket. Továbbá rámutatunk az $x^2 - 2y^2 = D$ egyenlet megoldásai és az R sorozatok tagjai közötti összefüggésre.

1. tétel: Minden $n \geqslant 0$ természetes szám esetén

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad 2R_{n+1}^2 + (-1)^n k = (R_n + R_{n+1})^2 \\ &\text{b)} \quad 2R_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} k = (R_{n+1} - R_n)(3R_{n+1} + R_n) \end{aligned} \tag{4}$$

Következmények:

$$2R_{2n+1}^2 + k = (R_{2n} + R_{2n+1})^2 \tag{5}$$

1. $2R_{2n+1}^2 + k = (R_{2n} + R_{2n+1})^2$ (5)
2. $2R_{2n+2}^2 + k = (R_{2n+2} - R_{2n+1})(3R_{2n+2} + R_{2n+1})$
3. $2R_{2n+2}^2 - k = (R_{2n+1} + R_{2n+2})^2$
4. $2R_{2n+1}^2 - k = (R_{2n+1} - R_{2n})(3R_{2n+1} + R_{2n})$
5. Az $f(x) = 2x^2 \pm k$ polinom minden $x = R_i$ helyen vett helyettesítési értéke összetett szám és $f(R_i) = 2R_i^2 + k$, illetve $f(R_i) = 2R_i^2 - k$ négyzetszám, ha i páratlan, illetve i páros.

2. tétel: Minden $n \geqslant 0$ természetes szám esetén

$$2(P_n + P_{n+1})^2 + (-1)^n = P_{2n+1} + P_{2n+2}$$

3. tétel: Minden $n \geqslant 0$ természetes szám esetén

a) $$2P_{2n+1}^2 - 1 = \sum_{i=1}^{4n+1} P_i$$

b) $$2P_{2n+2}^2 - 1 = \sum_{i=2}^{4n+3} P_i$$

4. tétel: Legyen D $(\neq 0)$ egy egész szám. Ha az

$$x^2 - 2y^2 = D \tag{6}$$

diofantikus egyenlet megoldható, akkor az összes megoldását megadják a véges sok R sorozat tagjaiból képezett

$$(x,y) = [\pm(R_{2n} + R_{2n+1}), \pm R_{2n+1}]$$

számpárok, ahol $n = 0, 1, 2, \ldots$. Továbbá ezen R sorozatokra

$$0 \leqslant R_1 < 2\sqrt{D}, \text{ ha } D > 0 \quad \text{és} \quad 0 < R_1 < \sqrt{-9D/2}, \text{ ha } D < 0.$$

1. tétel bizonyítása. A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

a) $n = 0$ esetén az állítás nyilvánvaló. Ha

$$(R_i + R_{i+1})^2 - 2R_{i+1}^2 = (-1)^i k$$

igaz valamely $i \geqslant 0$-ra, akkor az R sorozat definíciója miatt

$$(R_{i+1} + R_{i+2})^2 - 2R_{i+2}^2 = (3R_{i+1} + R_i)^2 - 2(2R_{i+1} + R_i)^2 =$$
$$= R_{i+1}^2 - 2R_{i+1}R_i - R_i^2 = (-1)\left((R_i + R_{i+1})^2 - 2R_{i+1}^2\right) =$$
$$= (-1)(-1)^i k = (-1)^{i+1} k,$$

ezért igaz az állítás minden $n \geqslant 0$ egészre.

b) $n = 0$ esetén rövid számolással igazolható az állítás. Ha

$$(R_{i+1} - R_i)(3R_{i+1} + R_i) - 2R_{i+1}^2 = (-1)^{i+1} k$$

igaz valamely $i \geqslant 0$-ra, akkor

$$(R_{i+2} - R_{i+1})(3R_{i+2} + R_{i+1}) - 2R_{i+2}^2 =$$
$$= (R_{i+1} + R_i)(7R_{i+1} + 3R_i) - 2(2R_{i+1} + R_i)^2 =$$
$$= -(R_{i+1}^2 - 2R_{i+1}R_i - R_i^2) = -\left((R_{i+1} - R_i)(3R_{i+1} + R_i) - \right.$$
$$\left. - 2R_{i+1}^2\right) = -(-1)^{i+1} k = (-1)^{i+2} k,$$

amiből következik az állítás minden $n \geqslant 0$ egészre.

A következmények a tétel alapján nyilvánvalóak.

2. tétel bizonyítása.

Az 1. tétel a) állítása igaz a Pell-sorozatra is ($P_0 = 0$ és $P_1 = 1$ miatt $k = -1$), így (4) alapján

$$2(P_n + P_{n+1})^2 + (-1)^n = 4P_{n+1}^2 + (-1)^{n+1},$$

ezért elegendő a

$$4P_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} = P_{2n+1} + P_{2n+2}$$

azonosságot igazolni. $\alpha + \beta = 2, \alpha \cdot \beta = -1, (\alpha - \beta)^2 = 8$ és (3) felhasználásával

$$4P_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} = 4\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right)^2 + (-1)^{n+1} =$$

$$= \frac{\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2}}{2} = \frac{\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2}}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{\alpha\alpha^{2n+2} + \alpha\beta^{2n+2} - \beta\alpha^{2n+2} - \beta\beta^{2n+2}}{2(\alpha - \beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)\alpha^{2n+2} - 2\beta\alpha^{2n+2} - (\alpha + \beta)\beta^{2n+2} + 2\alpha\beta^{2n+2}}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{\alpha^{2n+2} - \alpha\beta\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+2} + \alpha\beta\beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{\alpha - \beta} = P_{2n+1} + P_{2n+2}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

3. tétel bizonyítása.

a) Mivel $\alpha+\beta=2$, $\beta-1=-(\alpha-1)$, $2(\alpha-1)=\alpha-\beta$, $\alpha\beta=-1$, $(\alpha-\beta)^2=8$, ezért (3) felhasználásával

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i=\frac{\alpha-\beta+\alpha^2-\beta^2+\alpha^3-\beta^3+\ldots+\alpha^{4n+1}-\beta^{4n+1}}{\alpha-\beta}=$$

$$=\frac{\alpha\frac{\alpha^{4n+1}-1}{\alpha-1}-\beta\frac{\beta^{4n+1}-1}{\beta-1}}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1})^2-4}{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2}=$$

$$=2\left(\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\right)^2-\frac{8}{(\alpha-\beta)^2}=2P_{2n+1}^2-1$$

A b) állítás hasonló módon igazolható.

4. tétel bizonyítása.

Elegendő (6) azon x, y megoldásait meghatározni, melyekre $x, y \geqslant 0$, hiszen ezek már meghatározzák az összes megoldást.

Ha $x, y \geqslant 0$ egészekre $x^2-2y^2=D$, akkor x és y egy R sorozatot generál, melyre

$$R_{2i+1}=y \text{ és } R_{2i}+R_{2i+1}=x, \tag{7}$$

vagyis $R_{2i}=x-y$ és $R_{2i+1}=y$. A sorozat minden egész indexű tagja értelmezve van (negatív indexre is), mivel a definícióból következik, hogy ha R_j és R_{j+1} ismert, akkor

$$R_{j+2}=2R_{j+1}+R_j \text{ és } R_{j-1}=R_{j+1}-2R_j$$

minden j egész szám esetén. Így a (7) által definiált sorozat megadható olyan R_0, R_1 kezdő elemekkel, melyben R_1 a sorozat legkisebb páratlan indexű pozitív tagja. Az így definiált R sorozat esetén az 1. tétel 1. következménye miatt minden $x=R_{2n}+R_{2n+1}$, $y=R_{2n+1}$ értékpár kielégíti a (6) egyenletet minden n egész szám esetén, ugyanis (5) és (6) egybevetéséből $k=D$ adódik.

Azt kell még belátni, hogy a hasonló tulajdonságú R sorozatok száma véges. Ezt két lépésben mutatjuk meg, különválasztva a $D>0$ és $D<0$ eseteket.

Legyen először $D>0$.

Ha $x_1>0$, $y_1>0$ egész számok megoldásai (6)-nak, akkor az általuk generált R sorozat két szomszédos eleme $R_{2i}=x_1-y_1$ és $R_{2i+1}=y_1$. Az R sorozat definíciója alapján ekkor $R_{2i-1}=3y_1-2x_1$, $R_{2i-2}=5x_1-7y_1$ és így (5) miatt az

$$x_2=R_{2i-2}+R_{2i-1}=3x_1-4y_1$$

$$y_2=R_{2i-1}=3y_1-2x_1$$

számpár is megoldása (6)-nak. De

$$y_2=3y_1-2x_1=3y_1-2\sqrt{2y_1^2+D}<(3-2\sqrt{2})\,y_1<y_1$$

és

$$x_2=3x_1-4y_1=3x_1-4\sqrt{(x_1^2-D)/2}=3x_1-\sqrt{8x_1^2-8D}>0,$$

így az (x_1, y_1) megoldás által generált megoldásokra

$$y_{i+1} < y_i \text{ és } y_{i+1} = 3y_i - 2\sqrt{2y_i^2 + D} \geqslant 0$$

ha $y_i \geqslant 2\sqrt{D}$. Ezért valamely j esetén $0 \leqslant y_j < 2\sqrt{D}$, és így az (x_1, y_1) megoldás által meghatározott R sorozat generálható olyan $R_0 = x_j - y_j$, $R_1 = y_j$ kezdő értékpárral, melyre $0 \leqslant R_1 < 2\sqrt{D}$, azaz $D > 0$ esetben (6) összes pozitív megoldása megadható olyan R sorozatok segítségével, ahol $0 \leqslant R_1 < 2\sqrt{D}$. Az ilyen R sorozatok száma nyilván véges.

Vizsgáljuk meg most a $D < 0$ esetet.

Ha $x_1, y_1 > 0$ egészek megoldásai (6)-nak, akkor az előbbiek szerint $x_2 = 3x_1 - 4y_1$ és $y_2 = 3y_1 - 2x_1$ szintén megoldások. Az eljárást folytatva megmutatjuk, hogy $x_{i+1} \geqslant 0$ és $0 < y_{i+1} < y_i$, ha $y_i \geqslant \sqrt{-9D/2}$. Ugyanis, ha $y_i \geqslant \sqrt{-9D/2}$, $x_i \geqslant 0$ és $x_i^2 - 2y_i^2 = D$,

akkor $$x_i = \sqrt{2y_i^2 + D} \geqslant \sqrt{-8D},$$

melyből

$$x_{i+1} = 3x_i - 4y_i = 3x_i - 4\sqrt{(x_i^2 - D)/2} \geqslant 0$$

adódik. Továbbá mivel $D < 0$,

$$y_{i+1} = 3y_i - 2x_i = 3y_i - 2\sqrt{2y_i^2 + D} > (3 - 2\sqrt{2})\, y_i > 0$$

és

$$y_i \geqslant \sqrt{-9D/2} \text{ felhasználásával}$$

$$y_{i+1} = 3y_i - 2\sqrt{2y_i^2 + D} < y_i$$

adódik. Így $D < 0$ esetben (6) megoldásait megkaphatjuk azon R sorozatok segítségével, ahol $0 < R_1 < \sqrt{-9D/2}$ és $x = R_0 + R_1$, $y = R_1$ megoldások.

1. megjegyzés. (2)-t használva (6) összes megoldását megadhatjuk az

$$x_n = \pm(R_{2n} + R_{2n+1}) =$$
$$= \pm \frac{(R_1 + R_0 + \alpha R_1 - \beta R_0)\,\alpha^{2n} - (R_1 + R_0 + \beta R_1 - \alpha R_0)\beta^{2n}}{\alpha - \beta},$$
$$y_n = \pm R_{2n+1} = \pm \frac{(R_1 - \beta R_0)\alpha^{2n+1} - (R_1 - \alpha R_0)\beta^{2n+1}}{\alpha - \beta}$$

számpárokkal, ahol $n = 0, 1, 2, \ldots$ és R_1 végigfut az összes olyan egész számon, melyekre $\sqrt{2R^2{}_1 + D}$ egész és $D > 0$ esetben $0 \leqslant R_1 < 2\sqrt{D}$, $D < 0$ esetben pedig $0 < R_1 < \sqrt{-9D/2}$; az R_1-hez tartozó $R_0 = \pm\sqrt{2R_1^2 + D} - R_1$.

2. megjegyzés. Ha az R-sorozatot kiterjesztjük negatív indexű tagokra is a definícióból adódó $R_{n-2} = R_n - 2R_{n-1}$ formula segítségével, akkor a (6) egyenlet megoldásainak felírásához minden R_1 értékhez elegendő az $R_0 = \pm\sqrt{2R_1^2 + D} - R_1$ értékek közül csak az egyiket figyelembe venni. Ha ugyanis egy R sorozatot az $R_1 = y$, $R_0 = x - y$; egy R' sorozatot pedig $R'_1 = y$, $R'_0 = -x - y$ kezdő értékekkel definiálunk, akkor (2) alapján

$$R'_{-n} = \frac{(y - \beta(-x-y))\alpha^{-n} - (y - \alpha(-x-y))\beta^{-n}}{\alpha - \beta}, \tag{8}$$

mivel könnyen belátható, hogy (2) negatív n esetén is fennáll.

$\alpha\beta = -1$, $\alpha^2 = 2\alpha + 1$ és $\beta^2 = 2\beta + 1$ alapján (8)-ból adódik, hogy

$$R'_{-n} = (-1)^{n+2} \frac{(y-\beta(-x-y))\alpha^2 \beta^{n+2} - (y - \alpha(-x-y))\beta^2 \alpha^{n+2}}{\alpha - \beta} =$$

$$= (-1)^{n+2} \frac{(y(2\alpha+1) + \alpha(-x-y))\beta^{n+2} - (y(2\beta+1) + \beta(-x-y))\alpha^{n+2}}{\alpha - \beta} =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(y - \beta(x-y))\alpha^{n+2} - (y - \alpha(x-y))\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1} R_{n+2}$$

minden egész n-re. Így a (6) egyenlet R' sorozat által meghatározott megoldásaira

$$|y'_i| = |R'_{2i+1}| = |(-1)^{-2i} R_{-2i+1}| = |y_{-i}|$$

és

$$|x'_i| = |R'_{2i} + R'_{2i+1}| = |(-1)^{-2i+1} R_{-2i+2} + (-1)^{-2i} R_{-2i+1}| =$$

$$= |-R_{-2i+2} + R_{-2i+1}| = |-R_{-2i} - R_{-2i+1}| = |R_{-2i} + R_{-2i+1}| = |x_{-i}|.$$

Tehát az R' által generált megoldások nem különböznek az R által generáltaktól.

Példa: Adjuk meg példaként az

$$x^2 - 2y^2 = 7 \tag{9}$$

egyenlet összes megoldásait. $2\sqrt{7} < 6$, ezért ha az egyenlet megoldható, akkor $y = 0, 1, 2, 3, 4$ vagy 5. Behelyettesítéssel adódik, hogy csak $y = 1$ és $y = 3$ esetén kapunk megoldást. Az $y = 1$ esetén $x = 3$ (vagy $x = -3$) és az általuk generált R sorozat kezdő elemei $R_0 = 2$, $R_1 = 1$. A sorozat elemei: $\ldots, R_{-4} = 46, R_{-3} = -19, R_{-2} = 8, R_{-1} = -3, R_0 = 2, R_1 = 1, R_2 = 4, R_3 = 9, R_4 = 22, R_5 = 53, \ldots$ Ezek alapján (9) megoldásai: $\ldots, (\pm 27, \pm 19), (\pm 5, \pm 3), (\pm 3, \pm 1), (\pm 13, \pm 9), (\pm 75, \pm 53), \ldots$.

Az $y = 3$ megoldás szerepelt a felsoroltakban, ezért az általa meghatározott R sorozat nem ad újabb megoldásokat, így (9) összes megoldását a felsoroltak szolgáltatják.

Megadjuk a megoldásokat explicite is. Mivel $R_0 = 2$, $R_1 = 1$, $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ és $\beta = 1 - \sqrt{2}$,

$$R_1 + R_0 + \alpha R_1 - \beta R_0 = 2 + 3\sqrt{2},$$
$$R_1 + R_0 + \beta R_1 - \alpha R_0 = 2 - 3\sqrt{2},$$
$$R_1 + \beta R_0 = -1 + 2\sqrt{2},$$
$$R_1 - \alpha R_0 = -1 - 2\sqrt{2}$$

Ezek alapján (9) megoldásai:

$$x_n = \pm \frac{(2+3\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{2n} - (2-3\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{2n}}{2\sqrt{2}},$$

$$y_n = \pm \frac{(-1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{2n+1} - (-1-2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{2n+1}}{2\sqrt{2}},$$

ahol $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

IRODALOM

[1] *I. Adler:* Three diophantine equantions I and II, Fib. Quart., 6 (1968), 360–369, 317 és 7 (1969), 181–193.

[2] *M. Bicknell:* A primer on the Pell sequence and related sequences, Fibonacci Quart., 13 (1975), 345–349.

[3] *E. M. Cohn:* Complete diophantine solution the Pythagorean triple $(a, b = a + 1, c)$, Fib. Quart., 8 (1970) 402–405.

[4] *V. E. Hoggat Jr:* Some more Fibonacci diophantine equantions, Fibonacci Quart, 9 (1971), 437 és 448.

[5] *V. E. Hoggatt Jr.–M. Bicknell:* A primer for the Fibonacci numbers XVII. Fibonacci Quart 16 (1978), 130–138.

[6] *A. F. Horadom:* Pell identities, Fibonacci Quart. 9 (1971), 245–252, 263.

[7] *P. Kiss–F. Várnai:* On generalized Pell numbers, Math. Sem. Not. (Kobe Univ., Japan) 6 (1978), 259–267.

[8] *H. V. Krishna:* Properties of the Pell sequence, Math. Education, 5 (1971), 118–120.

[9] *M. J. De Leon:* Pell's equations and Pell number triples, Fibonacci Quart, 14 (1976), 146–460.

[10] *I. Niven–H. S. Zuckerman:* Bevezetés a számelméletbe, Műszaki Könyvkiadó Bp., 1978.

[11] *V. Thébault:* Sur des suites de Pell, Math esis, 65 (1956), 390–395.