View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by CONICET Digital

Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación

Viviana Angélica Costa[1], Marcelo Arlego[2], María Rita Otero[3]

[1,2,3]NIECYT, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina. [2]Instituto de Física La Plata. Universidad Nacional de La Plata, Argentina. [1]Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina. [2,3]CONICET, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, Argentina. E-mail: [1]vacosta@ing.unlp.edu.ar, [2]arlego@fisica.unlp.edu.ar, [3]rotero@exa.unicen.edu.ar.

Resumen: En este trabajo realizamos una propuesta para la enseñanza del Cálculo Vectorial en el contexto de una Facultad de Ingeniería mediante el dispositivo didáctico llamado Recorridos de Estudio e Investigación (REI). Este dispositivo ha sido propuesto por Chevallard en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que plantea una enseñanza bajo el paradigma de la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo. Analizamos las condiciones que facilitarían y las que obstaculizarían la ecología del REI en esa institución e introducimos el modelo praxeológico de referencia. Finalmente presentamos una descripción de la implementación del REI y un análisis preliminar de las organizaciones matemáticas que surgieron en el mismo.

Palabras clave: Recorridos de Estudio e Investigación, Cálculo Vectorial, Enseñanza Universitaria, Ingeniería.

Title: Vector Calculus Teaching in College: proposed Courses of Study and Research

Abstract: In this work we elaborate a proposal for vector calculus teaching in the context of a Faculty of Engineering by means of the teaching device called Trajectories of Study and Research (TEI). This device has been introduced by Chevallard in the framework of Anthropological Theory of Didactics (ATD), which proposes a teaching under the paradigm of pedagogy of research and questioning the world. We analyze the conditions that facilitate and those that hamper TEI ecology in that institution and introduce the reference praxeological model. Finally we present a description of REI implementation and a preliminary analysis of mathematical organizations that emerged after its implementation.

Keywords: Research and Study Paths, Vectorial Calculus, University Teaching, engineering.

1. Introducción

Una rama de las matemáticas que se estudia en las carreras de *ingeniería* en el ciclo básico es el Cálculo Vectorial. Sus orígenes se remontan a fines del siglo XVIII y a principios del siglo XIX, y están fuertemente ligados con los inicios de la *física-matemática*, la *termodinámica*, la *hidrodinámica*, la *mecánica de los fluidos*, la *electricidad* y el *magnetismo* (Crowe, 1994), (Wussing, 1998), (Mankiewicz, 2005). Una adecuada conceptualización de sus nociones centrales es esencial para alumnos de carreras de ingeniería, pues les proporciona herramientas básicas e indispensables para modelar diversos fenómenos físicos, que pueden analizarse matemáticamente a partir de una representación vectorial (Feynman, Leighton y Sands, 1998; Marsden y Tromba, 2004).

El estudio del Cálculo Vectorial es complejo en la medida que requiere disponer de un pensamiento matemático avanzado (Azcárate Giménez y Camacho Machín, 2003). Algunos trabajos han abordado este problema en contextos más simples del Cálculo a nivel universitario (Moreno, 2005; Guzmán, 2007; Mc. Cartan, Hermon y Cunningham, 2009). Ellos coinciden en que la enseñanza tradicional, mecanicista, descontextualizada y técnica, obstaculiza la comprensión de los significados de los objetos matemáticos de estudio y sus vínculos con otras ciencias, de allí la importancia de propiciar una enseñanza del Cálculo que vincule los conceptos con su génesis (Salinas y Alanís, 2009). Algunos investigadores proponen contextualizar el estudio, vinculándolo con la ingeniería y la física (Ramos y Font, 2006; Costa, Di Domenicantonio, Prodanoff, Tolosa y Guarepi, 2008; Font, 2008; Dunn y Barbanel, 2000; Kümmerer, 2002; Camarera, 2009; Zúñiga, 2007; Willcox y Bounova, 2004). Otros proponen el uso de Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) con el objeto de vincular conceptos del Cálculo Vectorial con sus aplicaciones físicas (Costa, Di Domenicantonio, Prodanoff, Tolosa y Guarepi, 2008; Costa, Di Domenicantonio y Vacchino, 2010; Perjési, 2003; Álvarez, 2010).

En este trabajo se presenta una propuesta alternativa a las mencionadas, que aborda el problema de la enseñanza del Cálculo Vectorial desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard 1999, 2004, 2005, 2005a, 2006, 2007). Según Chevallard un problema clásico en la Enseñanza de la Matemática actual, se refiere a la pérdida de sentido de la matemática escolar ("escolar" en este caso se refiere a la institución Universidad), esto se debe a que la epistemología escolar predominante elimina las "*razones de ser*" de las Organizaciones Matemáticas (OM) que se proponen estudiar en una dada institución. Este fenómeno está estrechamente relacionado con otro, denominado *monumentalización del saber* (Chevallard, 2004, 2007), caracterizado por presentar a las OM como obras terminadas, como objetos ya creados, valiosos *per se*, como monumentos a los que a lo sumo se puede visitar (Otero, Llanos, 2011).

Los Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) son dispositivos didácticos que permiten enfrentar el proceso de *monumentalización*, ellos surgen del estudio de cuestiones cuya respuesta requiere la construcción de una secuencia de organizaciones matemáticas completas y articuladas (Otero, Llanos, 2011).

La implementación de los dispositivos didácticos REI en el *nivel universitario* ha sido objeto de investigación desde los trabajos de Barquero (2009), Gascón (2010), y Serrano, Bosch y Gascón (2008), ellos mencionan las limitaciones y condiciones que provienen del contrato didáctico institucional y de la organización tradicional de la enseñanza universitaria. Barquero (2009) ha realizado un estudio de implementación y análisis de un REI cuyas *cuestiones generatrices corresponden a la "dinámica de poblaciones", en un c*urso con un número reducido de alumnos de ingeniería química de la Universidad Autónoma de Barcelona. Del mismo modo, Serrano, Bosch y Gascón (2008) realizan la implementación de un REI cuya cuestión generatriz se relaciona con "*¿Cómo hacer una previsión de ventas*?", en un primer curso de matemáticas para la Administración y Dirección de Empresas de la Universidad Ramon Llull de

Barcelona. Además con el fin de considerar aspectos relacionados al Cálculo Diferencial en la interface Secundario-Universidad, Fonseca, Pereira y Casas (2010) y Fonseca (2011) han implementado un REI en una Escuela de Ingeniería en la Universidad de Vigo, mediante dispositivos especiales y paralelos a las cátedras, llamados "*Talleres de Modelización Matemática*".

Esta investigación es parte de una tesis de doctorado (Costa, 2013) que se propone elaborar, desarrollar y evaluar una enseñanza por REI relativa al Cálculo Vectorial en un *curso habitual de matemática* con alumnos de primer año (18 a 20 años) en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (Argentina). El profesor del curso es el mismo investigador.

En el contexto de una Facultad de Ingeniería, la "razón de ser" del Cálculo Vectorial está vinculada con la modelación matemática de fenómenos físicos en campos de la Termodinámica, la Mecánica de los Fluidos, la Hidrodinámica, y la Electricidad y el Magnetismo, que brindan soluciones tecnológicas a necesidades de la sociedad.

Considerando la estrecha vinculación entre el Cálculo Vectorial y la Física, así como la importancia del estudio de esta rama de la matemática para estudiantes de ingeniería, se desarrolló un REI codisciplinar que reencuentra sectores de estas disciplinas.

2. Marco teórico

Adoptamos como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999, 2004, 2007, 2009), que ha definido con precisión los fenómenos denominados: *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de las cuestiones que se estudian en la escuela media y ha propuesto los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) como dispositivos didácticos para enfrentar estos problemas. El fundamento de estas definiciones y constructos se encuentran en lo que Chevallard (2004, 2012, 2013) ha denominado *Pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo* (PICM) (Otero, Fanaro, Llanos, 2013).

2.1. Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

El objetivo principal de los REI es introducir una nueva pedagogía que le dé sentido y funcionalidad al estudio escolar de la matemática (Chevallard, 2009) y que reemplace la pedagogía de "inventariar" los saberes. Los alumnos (X) investigan y estudian sobre una cuestión Q bajo la dirección de un profesor (y) o de un conjunto de profesores (Y) con el objetivo de aportar una respuesta R a la cuestión Q. Se coloca el exponente ♥ en R para indicar que la respuesta a Q ha sido producida bajo determinadas restricciones y que "funciona" como respuesta a Q bajo esas restricciones pues no existe respuesta universal y universalmente efectiva (Chevallard, 2009). Así, el sistema didáctico, denotado por $S(X; Y; Q)$, necesita instrumentos, recursos, obras, en definitiva, necesita un medio didáctico M que debe identificar, ordenar y aprender a utilizar con el objetivo de producir $R^{♥}$. Esto se denota por

$$[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^{♥}$$

Es decir, el sistema didáctico construye y organiza ($\rightarrow$) el medio M con el cuál engendrará o producirá ($\hookrightarrow$) una respuesta $R^{♥}$. El medio M contiene respuestas pre-construidas, aceptadas por la cultura escolar – por ejemplo, un libro, la Web, el curso de un profesor, etc., representadas como $R^{\diamond}$ ("*R* punzón") –y por obras– por ejemplo, teorías, montajes experimentales, praxeologías, denotadas por *O* – consideradas útiles para deconstruir las respuestas $R^{\diamond}$, extraer qué de necesario hay allí para construir la respuesta $R^{\heartsuit}$. Por consiguiente, el medio *M* se formula de la siguiente manera:

$$M = \{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, R_3^{\diamond}, \dots, R_n^{\diamond}, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}$$

Chevallard (2013) define el REI como sigue:

$$[S(X, Y, Q) \rightharpoonup \{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, R_3^{\diamond}, \dots, R_n^{\diamond}, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

En el inicio de un REI, se propone una cuestión *Q*, llamada *cuestión generatriz*, porque poseen la propiedad de *generatividad*, es decir, da lugar a la formulación de numerosas cuestiones derivadas, cuyo estudio llevará a la (re)construcción de un gran número de organizaciones matemáticas, que surgirán como respuesta a las cuestiones que han requerido de su construcción. Se establece así, una cadena de cuestiones y de respuestas que son el corazón del proceso de estudio $P= (Q_i;R_i)_{1\leq i\leq n}$, siendo Q_i todas las cuestiones que habitan dicho corazón ♥ y R_i las respuestas a estas cuestiones (Chevallard, 2007). La gestión de los REI, exige a la comunidad de estudio, integrada por el director del proceso de estudio (el profesor) y los alumnos, una transformación de su relación con el saber, pues este deja de ser algo que se conoce de antemano, para volverse una construcción (o reconstrucción) de común acuerdo, en el transcurso de la clase.

El objetivo de *Q* es el de reconstruir las OM que dan respuesta a esa cuestión (Barquero, 2009). La respuesta buscada no se limita a una simple "información", el estudio de *Q* debe requerir la construcción de toda una OM. Así, la cuestión *Q*, es el corazón del proceso de estudio y junto con las sub-cuestiones que se deriven de ella, será el origen, motor y razón de ser de dicho proceso, permitiendo "recubrir el programa de estudios" (Chevallard, 1999, en Barquero, 2009).

2.2. Topogénesis, cronogénesis y mesogénesis

Los procesos de *topogénesis, cronogénesis y mesogénesis* son funciones didácticas o funciones de producción (Chevallard, 2009).

La *mesogénesis* describe el proceso por el cual se construye un *medio.* Es la "fabricación" del *medio* M por la clase, a partir de producciones diversas, tanto externas como internas, estas últimas incluyen particularmente las respuestas R_x, es decir, las respuestas propuestas por los alumnos x a partir de su propia actividad. Diversos tipos de obras que pueden, en principio, venir a constituir el medio M de un REI, obras que en general están excluidas por principio de la enseñanza tradicional. El "trabajo" sobre el medio cambia interactivamente en la medida en que cambia su naturaleza.

La *topogénesis* describe la manera en que se comparten las responsabilidades en las transacciones didácticas, donde se atribuye un agente *topos* (profesor o alumno) a cada acción. Durante un REI, el *topos* de los alumnos se amplía considerablemente: no solo podrán aportar su respuesta personal R_x, sino también podrán proponer introducir en M toda obra que deseen. A este cambio, corresponde un cambio importante en el *topos* del profesor, quien se denomina el director del estudio, porque dirige el estudio de Q, es decir, de *y*. De igual manera, *y* podrá introducir en M cierta respuesta $R^{\diamond}$, que no serán necesariamente "su" respuesta personal R_y, en ningún caso un media tendrá el privilegio de ser "creído bajo palabra" (Chevallard, 2009; Llanos, Otero, 2012; Otero, Llanos, 2011; Otero, Llanos y Gazzola, 2012; Parra, Otero y Fanaro, 2013).

La *cronogénesis* distingue fuertemente a un REI de los dispositivos didácticos usuales en la escuela: la constitución y el "trabajo" del medio M demandan una dilatación del tiempo didáctico es decir, una extensión del tiempo de reloj requerido (Chevallard, 2009). El trabajo realizado en M para producir una respuesta $R^{\heartsuit}$ comportará particularmente un estudio más o menos incitado de obras O_j, lo cual conduce una transformación momentánea de S(X;Y;Q) en un sistema didáctico del tipo "clásico" S(X;Y; O_j). El estudio de la obra O_j tiene por objetivo contribuir a la elaboración de $R^{\heartsuit}$ y puede requerir de un estudio más amplio de otras obras O_k. Así, el estudio de diferentes obras O_j y de respuestas $R^{\diamond}$ deben ser "llamadas" por la investigación en curso y no introducida por *y* de manera artificial.

3. Análisis de los niveles de codeterminación didáctica

Implementar un REI introduciendo en la enseñanza universitaria la *pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo,* requiere de un cambio profundo, cuya ecología puede analizarse a la luz de los niveles de *codeterminación didáctica* propuestos en la TAD.

Chevallard (2001) propone una jerarquía de *niveles de codeterminación* relativa a las formas de estructurar las cuestiones matemáticas (OM) a estudiar y las maneras de organizar el estudio (OD) de las mismas en una institución educativa. Dicha jerarquía va desde el nivel más genérico, la humanidad, la civilización, hasta el más específico, de las cuestiones. Es decir que la manera en que se conciben las OM en cada uno de los niveles afecta la manera en que se propone su estudio, y a su vez, los dispositivos didácticos existentes en cada nivel, determinan el tipo de OM que se podrá estudiar en una cierta institución.

La *escala* de *codeterminación didáctica* propuesta por Chevallard (2013) es:

Humanidad↔Civilización↔Sociedad↔Escuela↔Pedagogía↔Didáctica↔ Disciplina↔Área↔Sector↔Tema↔Cuestión

A continuación analizamos las condiciones que inciden en la institución donde se introduce el REI, según los niveles de *codeterminación didáctica*. Esta *institución* es la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI UNLP) en la República Argentina.

3.1. Nivel sociedad

En el *nivel Sociedad* encontramos elementos que condicionan el carácter co-disciplinar de los REI, que no podemos ignorar en nuestra investigación. Una de ellas, es el carácter mayoritariamente *monodisciplinar* de la educación actual en argentina desde los últimos años de primaria en adelante. Esta condición está ligada a una idea social que sostiene que se debe saber "mucho de algo", y que sólo si se sabe mucho de algo, se tiene "derecho" para incursionar, pensar e investigar sobre el asunto. Sin embargo, esto no era así en la antigua Grecia, o en la época de Newton o de Descartes, pero si en la actualidad.

Otra restricción ligada al nivel de la sociedad, reside en cómo se ha prescripto la *formación académica* de los ingenieros en la Argentina. La misma está regulada por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) y por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). El CONFEDI busca reglas y normas que rijan y ordenen la actividad *académica y científica en las facultades de ingeniería* (Moler, 2006). Así, en la institución FI-UNLP, las asignaturas deben ser *mono-disciplinares* y los contenidos curriculares mínimos son propuestos por la CONEAU. Estos se distribuyen en tres Áreas: Básica (CB), conformada por las asignaturas: física, matemática y química, común a todas las especialidades; Tecnológica Básica (TB), Tecnológica Aplicada (TA) y una Complementaria (CO) específica para cada carrera. Es decir, que todos los ciclos básicos de Ingeniería de cualquier universidad, deben ser iguales para entre otras cosas, permitir el paso de los estudiantes de una orientación a otra y de una universidad a otra. Por ejemplo, realizar el ciclo básico en una ciudad, y trasladarse luego a otra para estudiar la especialización. Esto que es socialmente muy valorado por los padres de los futuros ingenieros, impone condiciones de uniformidad que restringen la apertura de las cuestiones que se pueden estudiar en el ciclo básico de FI, como se muestra en la sección siguiente.

3.2. Nivel escuela

En la TAD, se emplea esta palabra para referirse a la *institución*, que en este caso es la FI UNLP. En FI se dictan 12 especialidades: Aeronáutica, Agrimensor, Civil, Computación, Mecánica, Electricista, Electromecánica, Electrónica, Industrial, Química, Hidráulica y Materiales.

En este nivel encontramos las condiciones relacionadas a la *distribución de los contenidos curriculares* mínimos establecidos en el nivel anterior por la CONEAU, las *reglamentaciones y ordenanzas* que rigen las actividades académicas, el *calendario académico*, la *carga horaria* de las asignaturas y el *modo de acreditación* de las mismas por parte de los estudiantes.

Los contenidos en esta institución se distribuyen en 10 semestres. Los cuatro primeros semestres, corresponden al CB, luego las asignaturas de Área TB y desde el séptimo semestre las asignaturas del área TA y CO.

Los contenidos mínimos de física y matemática en el CB, común para todas las especialidades y área de interés en esta investigación, se distribuyen en esta *institución* según la Tabla 1. Los contenidos de Geometría Analítica, se distribuyen en las asignaturas de Matemática A y B.

Las nociones matemáticas relativas al Cálculo Vectorial en MB son: *campos escalares y vectoriales*, *variación* de dichos campos, integrales sobre superficies y curvas, flujo, circulación, trabajo, y los teoremas integrales de Green, Gauss y Stokes. El estudio de estas nociones, antecede al estudio de las nociones físicas propias de Termodinámica (TB), Electricidad y Magnetismo (CB), Hidrodinámica (TA), Aerodinámica (TA) y Mecánica de los Fluidos (TB), vinculadas a las anteriores nociones matemáticas mencionadas. Es decir que, así planteado, las matemáticas son vistas como una base universal previa, en lugar de como una herramienta, que surge en la búsqueda funcional de respuestas, en la elaboración de cuestiones problemáticas y en la reconstrucción de organizaciones matemáticas que puedan resultar necesarias. Esto, que tiene raíces en el nivel de la Civilización, en la escala de codeterminación didáctica y que florece en las prácticas de la Sociedad y de la Institución, conspira contra el carácter codisciplinar del REI, que busca integrar al menos las disciplinas física y matemática en la búsqueda de respuestas a una cuestión generatriz como la que se propone en este trabajo.

Área CB: Matemática	Área CB: Física	Semestre
Matemática A (MA): Cálculo Diferencial en una y varias variables	------------------------	1º
Matemática B (MB): Cálculo Integral en una y varias variables, Series Numéricas, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden y *Cálculo Vectorial*	Física I: Mecánica	2º
Matemática C (MC): Series de Potencias, Algebra Lineal, Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias		
Probabilidades y Estadística		
Matemática D: Variable compleja		
Cálculo Numérico		

Tabla 1. Asignaturas del Área matemática y física del CB en FI UNLP

3.3. Nivel pedagogía ↔ didáctica

Los cursos de Matemática del CB se organizan en una modalidad llamada *teórico-práctico*. Es decir que no hay espacios, ni horarios que separen clases teóricas y clases prácticas. Se integran comisiones de aproximadamente 60 a 70 alumnos, organizados según las especialidades. Se le asigna un *equipo docente* conformado por un profesor, un jefe de trabajos prácticos y dos ayudantes, coordinados por el Profesor Titular cada asignatura. La formación académica de los docentes es muy diversa: doctores o licenciados en física, doctores o licenciados en matemática, profesores de matemática, geofísicos, ingenieros y astrónomos. Las clases se desarrollan en aulas equipadas con una biblioteca con libros de texto recomendados en la bibliografía de cada una de las materias, y con mesas y bancos. Cada mesa cuenta con una PC y el mobiliario es apropiado para el trabajo en grupo. En particular, para el dictado de la asignatura MB del CB, los estudiantes se distribuyen en nueve comisiones. El profesor coordinador establece pautas de organización general para el desarrollo de los cursos y propone un *cronograma* de clases para el estudio de los contenidos.

La modalidad de la organización de los cursos teórico-prácticos y la diversidad académica de la formación de los profesores que actúan conjuntamente en la clase con los estudiantes, condiciona favorablemente el estudio de cuestiones codisciplinares. Esta condición, sería favorable para introducir en la enseñanza universitaria la PICM. Sin embargo, esto no es actualmente posible de manera ordinaria, porque la OD vigente en la institución condiciona "cómo", "cuándo" y "cuáles" OM se estudian allí.

El régimen y la modalidad para la acreditación de las asignaturas del CB por los estudiantes en la institución FI UNLP están reglamentados del modo siguiente. La acreditación de la asignatura, se puede lograr mediante: promoción directa o promoción por examen final. Para obtener la aprobación por promoción directa se requiere que el alumno obtenga en cada evaluación parcial, una calificación mayor o igual a cuatro y que el promedio de las calificaciones obtenidas en dichas evaluaciones, sea mayor o igual que seis. Si un alumno no aprueba por promoción directa, pero obtiene una calificación mayor o igual a cuatro en los aspectos prácticos de todas las evaluaciones, obtendrá la aprobación de los Trabajos Prácticos y la habilitación para rendir el Examen Final de la asignatura.

Este modo tradicional de una *supuesta evaluación*, donde la generalidad de los estudiantes estudia en función de lo que *será evaluado*, conspira con el desarrollo de los REI.

3.4. Nivel Disciplina

El REI pretende "cubrir" los contenidos del *Cálculo Vectorial*, rama de la matemática que en la FI UNLP se estudia en la asignatura Matemática B (MB).

MB es una asignatura del CB correspondiente al plan de estudios de todas las carreras en FI UNLP. Su eje conceptual y la secuenciación de los contenidos, es el proceso de integración, en una y varias variables, las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y el *Cálculo Vectorial*. El estudio de los contenidos curriculares de MB, se organizan según un cronograma de clases acordado por la institución (Tabla 2).

Matemática B – Curso habitual		
Comprende período de clases y de evaluaciones	Primer módulo - 10 semanas	Segundo módulo - 10 semanas
Frecuencia de clases: tres clases semanales de cuatro horas cada una.	Cálculo integral en una y varias variables. Ecuaciones diferenciales de primer orden ordinarias.	Integrales impropias. Series numéricas. *Cálculo Vectorial*.
Modo de acreditación	Tradicional en la institución (Nivel pedagogía)	

Tabla 2. Cronograma de clases propuestos en la institución en los cursos de Matemática B

Los *media,* es decir cualquier fuente de información, libros de texto, artículos de investigación, páginas web y guías de clase, que utilizan los alumnos para el estudio de los contenidos durante las clases en MB son:

- Guía de estudio teórico-práctico: material impreso elaborado por el profesor titular coordinador de la cátedra http://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0302/.

- Material digital en formato CD: complementa la Guía de estudio con actividades en un software matemático.

- Plataforma educativa Moodle: sitio en el campus virtual de la *institución* administrado por el profesor del curso como aula extendida que aporta un "canal de comunicación" entre estudiantes y profesores, un "repositorio de material didáctico", ejercitación adicional, un "foro de novedades", un calendario, auto evaluaciones e información general de interés http://www.asignaturas.ing.unlp.edu.ar/moodle/.

- Libros disponibles en las aulas y en la Biblioteca de la institución que son recomendados por la cátedra.
- Página Web: información académica relativa a la cátedra en el sitio del Departamento de Ciencias Básicas de la FI.
- Internet: laboratorio de informática en el que se dispone de libre acceso a la web.

Los *media* que disponen los estudiantes para el estudio de MB, en especial la Guía de estudio teórico-práctico, tal como lo expresa la palabra, es una "guía", que dirige o encamina las OM a estudiar.

Esto último, sumado a lo mencionado en los niveles anteriores: cursos teórico-prácticos con un cronograma -clase a clase- acordado para la enseñanza de los contenidos, una mal llamada *evaluación* tradicional y asignaturas mono-disciplinares, convergen en una forma de enseñanza del Cálculo Vectorial que suprime sus *razones de ser* en una facultad de ingeniería. El objetivo de esta investigación es hacer vivir, de manera experimental y relativamente controlada, una pedagogía diferente.

4. Modelo praxeológico de referencia

Para llevar a cabo la propuesta de implementar un REI para el estudio del Cálculo Vectorial, elaboramos un modelo praxeológico de referencia, que nos permite analizar tanto los posibles REI a desarrollar como el efectivamente desarrollado. La cuestión generatriz Q_0 que da inicio al REI es:

"¿Cómo construir edificaciones sustentables?"

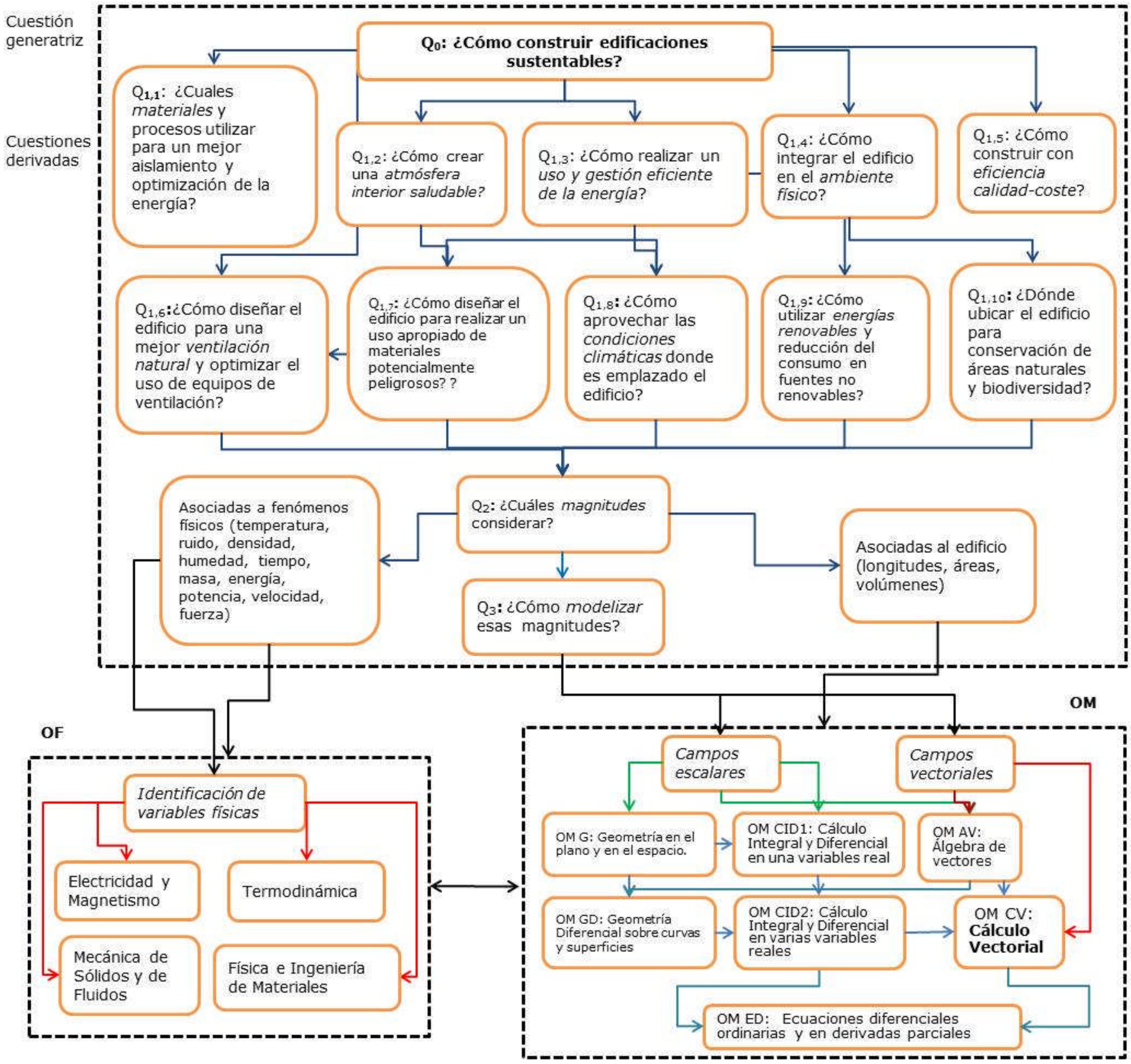
La misma es *abierta* y de carácter *multidisciplinar*. Es generadora de múltiples cuestiones, que podrían derivar en el estudio e investigación de Organizaciones Praxeológicas en diversas áreas de la *matemática*, la física, la química, la arquitectura, la economía y la ecología, entre otras.

Cuando en la cuestión Q_0 nos referimos a la *construcción de un edificio*, en el ámbito de la *arquitectura* esto se refiere a cualquier *construcción* para uso humano que abarca desde viviendas, negocios, fábricas, templos, teatros, entre otros. El adjetivo *sustentable* para la construcción de edificios, requiere de diversos aspectos a considerar, desde el diseño, la planificación y la construcción del mismo orientado a satisfacer ciertos criterios que así lo definen.

En la *institución* en la que se desarrolla el REI, en principio codisciplinar, la cuestión generatriz, permitiría reencontrar al menos una organización matemática (OM) y una organización física (OF) relativas al *Cálculo Vectorial* (CB-Matemática B) (Cuadro 1).

Las OM y OF serían reencontradas al seleccionar, planificar y diseñar el *edificio* optimizando el consumo de energía y de materiales, aprovechando las ventajas y/o desventajas de los *factores climáticos* donde fuera emplazado el mismo.

Sería posible considerar: su emplazamiento; la climatología del lugar donde sería ubicado el edificio; los modos de transmisión del calor hacia fuera y dentro del edificio; la relación de la humedad, temperatura y velocidad del aire en el interior; el aislamiento; el almacenamiento de energía del entorno; la calefacción solar; la captación de energías renovables; la ventilación natural y los flujos de aire a través de ventanas, entre otros.



Cuadro 1. Cuestión generatriz y derivadas. Posibles OM y OF a reconstruir en el REI

El comportamiento de los vientos, precipitaciones, variación de temperaturas y posicionamiento del sol, serían elementos de análisis fundamentales y necesarios para dar respuesta a la cuestión generatriz (Q_0) y sus derivadas.

En relación al *edificio* seleccionado, las *magnitudes* definidas se relacionan con la medición de *longitudes*, *áreas planas, áreas* de *superficies* y *volúmenes*. La forma del edificio se *modelaría matemáticamente* mediante la utilización de *objetos geométricos* en el plano y en el espacio, a través de ecuaciones matemáticas que describieran las superficies que lo delimiten. Esto permitiría reencontrar las OM relativas a la *Geometría en el plano y en el espacio, la Geometría Diferencial* y el *Cálculo Integral y Diferencial en varias variables* (CB-Matemática A y Matemática B).

Para el estudio de los *fenómenos climáticos*, sería necesario considerar la OF relativa a la identificación y análisis de los *objetos matemáticos* que los describen

(CB-Física I). Para descripción de magnitudes físicas como temperatura, densidad, humedad, radiación solar, velocidad (del viento, lluvia), se utilizarían *campos escalares* y *campos vectoriales.* El *estudio* de estos campos y sus *variaciones* introduciría así las OM relativas al *Cálculo Vectorial* (CB- Matemática B).

La cuestión generatriz, en particular en una facultad de ingeniería, podría introducir el estudio de los principios básicos de la *Termodinámica,* de la *Mecánica de Sólidos y de los Fluidos,* de la *Física e Ingeniería en Materiales* (TB - TA) y del *Electromagnetismo* (CB).

5. Acuerdos que pueden incidir en la topogénesis, la cronogénesis y la mesogénesis durante el REI

El REI se lleva a cabo en un curso de MB habitual. Para su implementación en el aula de clase, el profesor y director de estudio, establece ciertos acuerdos con los estudiantes.

Durante el REI, los estudiantes y el profesor, trabajan conjuntamente. Se requiere un compromiso mayor que el del contrato tradicional habitual. El profesor del curso comunica a los estudiantes tanto durante las clases previas como a través de la mensajería de la Plataforma Moodle, que si lo desean, participarán de una *experiencia* para el estudio del *Cálculo Vectorial*. Les informa además que podrían decidir no participar y asistir a otra comisión de la asignatura MB en un curso habitual. El profesor *registrará la asistencia* de los alumnos a las clases mientras dure la experiencia, aunque esto no es lo usual en los cursos del CB en la FI UNLP, lo hace por razones metodológicas, de modo que los datos originados por la actividad de los estudiantes que opten por realizar el REI puedan ser recogidos con una relativa continuidad.

Durante el REI el profesor, director del recorrido de estudio es quien lo pilotea. Por las restricciones imperantes en la institución, el profesor será quien administrará los tiempos didácticos, y acompañará a los estudiantes en sus recorridos y actividades, en la toma de decisiones en situaciones especiales, en coordinar las intervenciones de los alumnos y en distribuir el tiempo entre los diferentes puntos del recorrido (cronogénesis).

El *profesor* propone a los *estudiantes* acordar sobre los siguientes aspectos durante el REI:

- La duración del REI tendrá como plazo las fechas establecidas por el *calendario académico* que rige en la *institución* para el dictado de clases.
- Los estudiantes integrarán equipos permanentes que tendrán a lo sumo cinco integrantes.
- Cada grupo seleccionará un secretario, quien será el encargado de realizar una vez a la semana, la presentación de los avances o no, del recorrido de estudio e investigación, así como una propuesta de cómo proseguir el proceso de construcción de la respuesta.
- Para el REI los grupos tienen a su disposición los *media* mencionados, disponibles en la institución, más otros que se decidan utilizar.
- Al finalizar el curso, cada grupo difundirá y validará su respuesta mediante una exposición en la clase.
- A diferencia de lo habitual, la evaluación será grupal, cada equipo presentará un Informe Final, en formato impreso y digital, del estudio realizado.

- El Informe Final será compartido en la Plataforma Moodle, en una actividad llamada “Subida avanzada de archivos”.
- Para la evaluación de la actividad, se valorará la asistencia periódica a las clases, la participación activa en el aula, la presentación del Informe Final y la participación en una exposición grupal del trabajo matemático realizado.

6. Implementación del REI y análisis preliminar de las cuestiones derivadas y las OM-OF reconstruidas

En el segundo semestre del año 2012 se implementó el REI en un curso habitual de MB, con el grupo de estudiantes de la especialidad de ingeniería aeronáutica (N=48). Se formaron nueve grupos permanentes de trabajo y el equipo docente estuvo formado por el profesor (investigador) y dos ayudantes.

El mismo se desarrolló durante las últimas siete semanas de un total de veinte semanas (Tabla 3) que asigna la institución para el dictado de la asignatura MB (Tabla 2). El profesor debió limitar el REI al calendario académico (nivel escuela) que establece la institución según lo analizado en relación a los niveles de codeterminación didáctica. Dichas restricciones condicionaron fuertemente la cronogénesis del estudio que se desarrolló.

El período de las siete semanas, se distribuyó de la siguiente manera. Nueve clases (cinco semanas) destinadas propiamente al estudio e investigación, generada a partir de la cuestión generatriz. Tres clases (una semana) a las exposiciones finales (puestas en común). La última semana se dedicó a la finalización de los trabajos finales y su publicación en la plataforma Moodle por parte de los alumnos y la evaluación por parte del profesor.

<table>
<tr><th colspan="4">Matemática B – Curso en el que se implementó el REI- segundo semestre de 2012</th></tr>
<tr><td>Comprende período de clases y de evaluaciones</td><td>Primer módulo
10 semanas</td><td colspan="2">Segundo módulo
10 semanas</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Pedagogía habitual</td><td>REI</td></tr>
<tr><td>Frecuencia de clases: tres semanales de cuatro horas cada una.</td><td>Cálculo integral en una y varias variables. Ecuaciones diferenciales de primer orden ordinarias.</td><td>Integrales impropias. Series numéricas.</td><td>Cálculo Vectorial.</td></tr>
<tr><td>Modo de evaluación</td><td colspan="2">Tradicional en la institución</td><td>Diferente</td></tr>
</table>

Tabla 3. Cronograma de clases en el curso MB en el que se implementó el REI

Los estudiantes dieron inicio al REI desde la cuestión generatriz Q_0 *¿Cómo construir edificaciones sustentables*? seleccionando la edificación. Todo el grupo de estudio seleccionó un “hangar”. Acordaron en trabajar sobre dos tipos de hangares, uno de “forma típica” y otro en “forma de domo”, manteniendo ambos el mismo volumen. En esta etapa surgieron las preguntas en relación al edificio:

¿Cuáles magnitudes asociadas a la geometría del edificio considerar?

¿Cómo calcular esas magnitudes?

Estas cuestiones derivadas situaron al problema en un marco geométrico. Cada grupo modeló matemáticamente la forma de los hangares seleccionados. Establecieron un sistema de coordenadas cartesianas, situaron el edificio en ese sistema y describieron las expresiones matemáticas que mejor representaban las superficies que forman las partes del edificio, paredes y techo, que delimitan el cuerpo geométrico. Para la descripción del techo del hangar típico los grupos seleccionaron distintas representaciones matemáticas. La mayoría representó el techo mediante una superficie cilindro circular o cilindro elíptico y otros seleccionaron un cilindro parabólico. En la Tabla 4, se muestra a modo de ejemplo la descripción llevada a cabo por algunos grupos.

Magnitudes del Hangar "típico"	Ecuación cartesiana de las superficies borde del hangar
Techo: cilindro circular. Base: rectángulo de lados 25 m, por 35 m.	*x=0, x=25, y=0, y=35, z=0,* $(y-(35/2))^2+(z+2.5)^2=400$
Hangar para un tipo de avión modelo Airbus 320, con un largo de 37 metros, una envergadura de 34 metros y una altura de 13 metros. Base: 40x40 m2 y altura de 15 m. Techo: cilindro elíptico.	*x=0, x=40, y=-20, y=20, z=0,* $(y/20)^2+(z/2)^2=1$

Tabla 4. Descripción de los hangares seleccionados por algunos grupos

La realización de *tareas* para el modelado de edificios mediante cuerpos geométricos incluyó: elección de variables y magnitudes apropiadas para la construcción del modelo, establecimiento de las ecuaciones matemáticas que los representen y el cálculo de volúmenes encerrados por los edificios. Para estas tareas, los alumnos recurrieron a su equipamiento praxeológico relativo a la OM: Geometría Analítica y Cálculo Integral en una y varias variables.

En relación a la sustentabilidad se decidió estudiar e investigar sobre los siguientes aspectos: "uso eficiente de los recursos naturales", "relación costo-beneficio", "uso de energías renovables", "cuidado del medio ambiente" y "aprovechamiento de los fenómenos naturales", entre otros. En este marco surgió luego la cuestión:

¿Cuántos paneles solares colocar en la superficie expuesta del hangar y cuánta energía proveerán al edificio?

En relación a esta pregunta los grupos acuerdan en estudiar *superficies* y el cálculo de su área, los cuales forman parte de la OM Geometría Diferencial.

En una etapa posterior surgieron preguntas asociadas al modelado de los fenómenos naturales que los estudiantes consideraron para el estudio de la sustentabilidad. Algunas de las que surgieron en esta etapa fueron:

¿Cuáles fenómenos naturales considerar?

¿Cómo modelar desde la matemática esos fenómenos?

¿Cómo describir matemáticamente un campo vectorial?

¿Es un campo vectorial una función?

¿De cuáles variables depende?

En particular se mencionaron los fenómenos: viento, sol, lluvia, humedad y temperatura, representándolos mediante *campos escalares* y *campos vectoriales*. En este caso, las tareas que realizaron los alumnos fueron las de identificar y describir magnitudes y variables físicas de carácter escalar y vectorial. Se inició en esta etapa el estudio de OM relativas al Cálculo Vectorial.

En la última etapa del REI, surgieron preguntas del tipo:

¿Cómo "circula" o "fluye" el aire en el interior del edificio?

¿Cómo fluye el calor dentro del edificio?

Las mismas dieron lugar a las nociones de *circulación* y *flujo* y las cuestiones derivadas relativas a su cálculo.

Además, la introducción de los temas: fuentes y sumideros de fluidos, flujo de fluidos, conservación de la masa, incompresibilidad y flujos rotacionales e irrotacionales de fluidos, permitieron reencontrar nociones básicas de las OF relativas a la Mecánica de los Fluidos y a la Termodinámica.

Las tareas que predominaron durante el REI fueron las de modelar situaciones de la realidad, identificar y describir magnitudes y variables físicas de carácter escalar y vectorial como temperatura, humedad, flujo de aire, radiación solar, calcular integrales de volumen, de superficie y de línea. Para calcular estas integrales, los estudiantes recurrieron a las *técnicas* más *económicas*, y en algunos casos a software matemático.

En algunas clases los alumnos realizaron desarrollos *tecnológicos* a partir de cuestiones llevadas al aula por el profesor, en relación a ¿Cuál es la cantidad de fluido saliente a través de las caras de un paralelepípedo infinitesimal para un campo vectorial cualesquiera? ¿Cuál es la circulación a lo largo de un rectángulo infinitesimal para un campo vectorial cualesquiera?

Preliminarmente, consideramos que las OM reconstruidas en el REI tuvieron un cierto grado de completitud, yendo más allá de un nivel local, de acuerdo a los indicadores propuestos por Fonseca (2004, 2011). Esto se basa en que existieron elementos tecnológicos que permitieron distinguir, para cada tarea concreta, cuál era la técnica más económica para llevarla a cabo como así también tareas matemáticas "abiertas" y procesos de modelación matemática.

A modo ilustrativo se muestran algunos protocolos de los grupos que ejemplifican una pequeña (aunque significativa) parte de la *actividad matemática* desarrollada (Figuras 1, 2, 3 y 4).

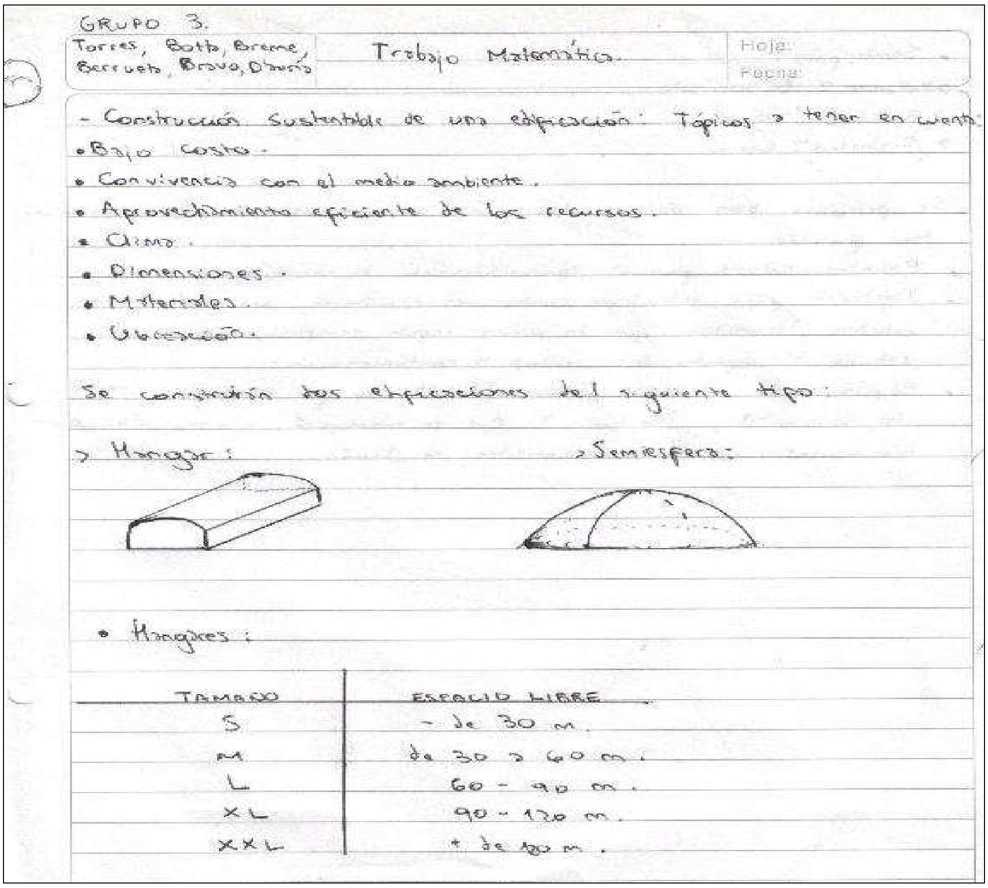
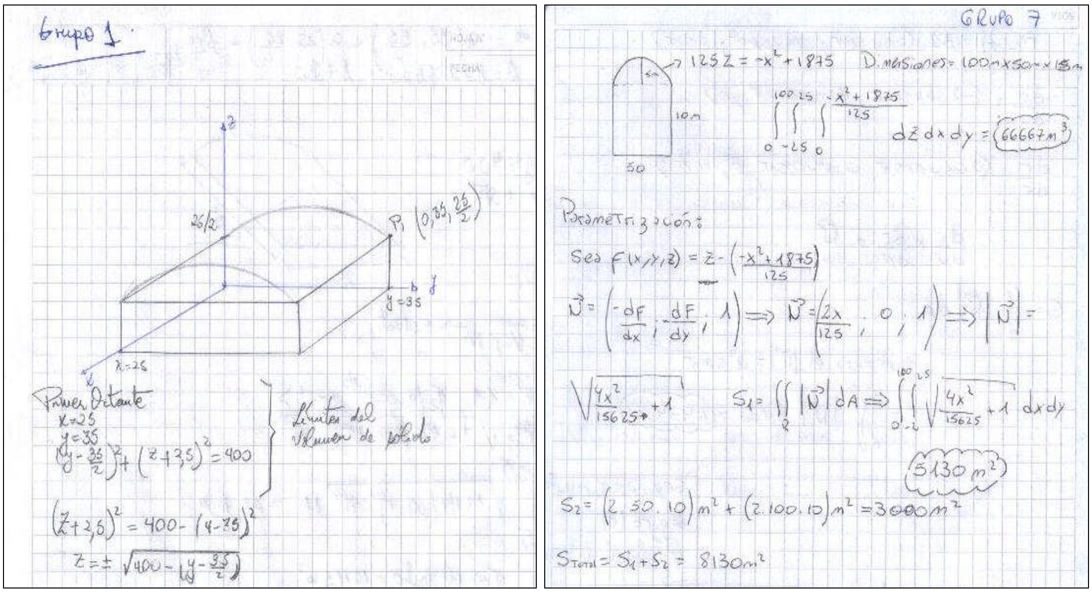


Figura 1. Protocolo de los estudiantes en relación al edifico seleccionado



(a) (b)

Figura 2. Protocolos de estudiantes. Descripción matemática del edificio seleccionado (a). Cálculo de áreas de superficies relativas al edificio (b).

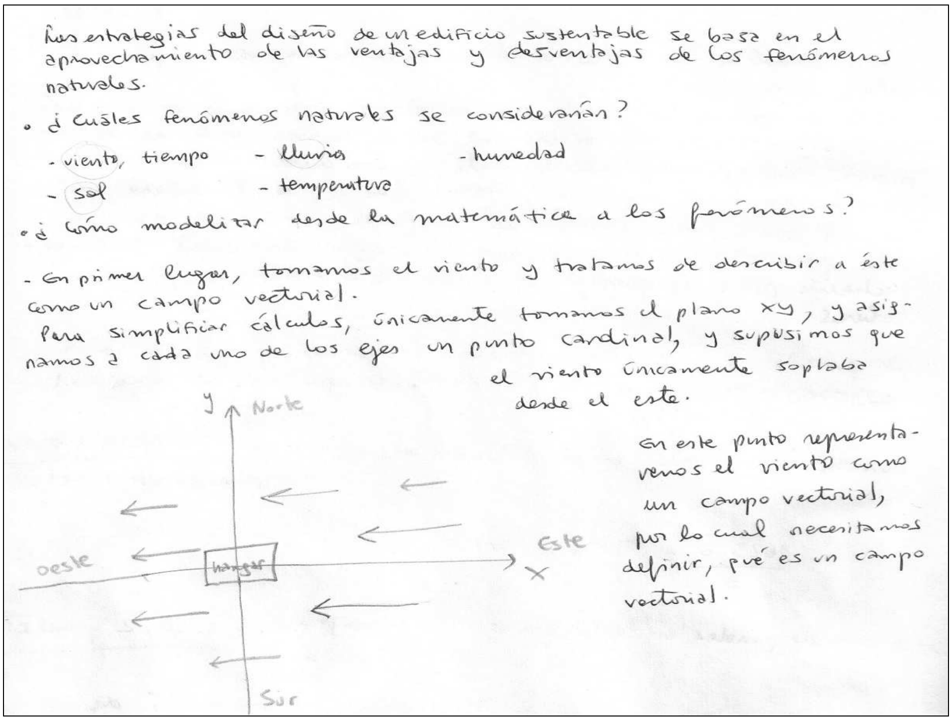


Figura 3. Identificación de fenómenos naturales y su representación

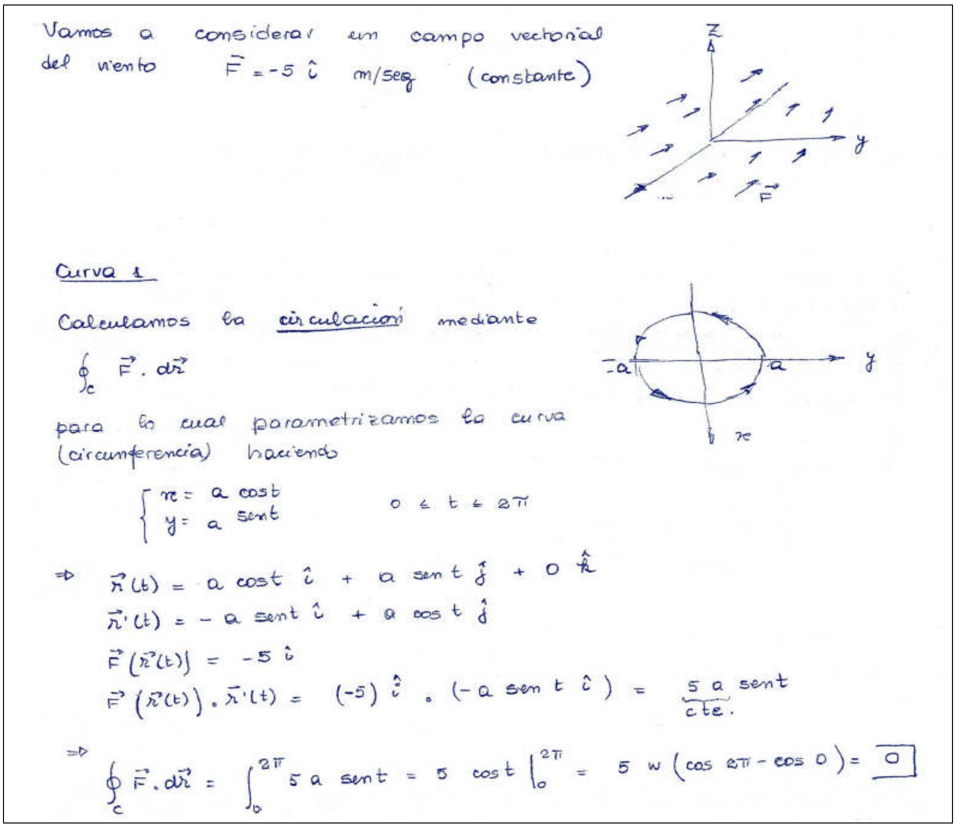


Figura 4. Descripción matemática de un campo vectorial y el cálculo de su circulación

7. Conclusiones y perspectivas

En este trabajo hemos presentado una propuesta alternativa del estudio del Cálculo Vectorial en la Universidad desde el punto de vista de la TAD mediante REI.

En una primera etapa hemos analizado los niveles de codeterminación didáctica que permiten describir los condicionamientos que favorecen y los que dificultan el desarrollo del REI propuesto. En dicho análisis observamos que estos últimos se manifiestan principalmente en los niveles superiores de la escala. Es decir, se presentan restricciones sociales e institucionales, entre las que cabe desatacar la monodisciplinaridad, la selección y distribución de los contenidos a estudiar, el calendario académico y el modo de evaluación y acreditación de las asignaturas.

En una segunda etapa, mencionamos los acuerdos que establece el profesor con el grupo de estudiantes en los que se implementa el REI y en cómo esto puede incidir en las funciones didácticas topogénesis, mesogénesis y cronogénesis.

Luego se elaboró un modelo praxeológico de referencia que permitió analizar los posibles REI a desarrollar y las OM y OF a reconstruir.

Posteriormente, se expusieron los aspectos centrales del REI implementado, junto con un análisis preliminar de las cuestiones derivadas a partir de la cuestión generatriz: "*¿Cómo construir edificaciones sustentables*?", junto con las OM y OF reconstruidas. Los aspectos más relevantes de dicho análisis son los siguientes.

Las cuestiones derivadas del modelado de edificios permitieron reconstruir aspectos de las OM Geometría Analítica y Cálculo Integral en una y varias variables. Por otro lado surgieron cuestiones derivadas relacionadas a la sustentabilidad, que involucraron el uso eficiente de recursos naturales. Esto permitió reconstruir puntos básicos de la OM Geometría Diferencial. A su vez, esto derivó en cuestiones que evidenciaron la necesidad de modelar fenómenos naturales, lo cual permitió reconstruir temas centrales de la OM Cálculo Vectorial.

Complementariamente, las cuestiones derivadas relacionadas a la sustentabilidad, permitieron reconstruir aspectos básicos de las OF Mecánica de Fluidos y Termodinámica.

Finalmente, quisiéramos destacar que el análisis completo de los resultados de esta implementación desde el punto de vista de la TAD comprenden el estudio pormenorizado de las praxeologías, de las OF y OM efectivamente reconstruidas, de las funciones didácticas, de las dialécticas, las actitudes y la completitud. Estos aspectos forman parte de una tesis Doctoral (Costa, 2013) y van más allá de los objetivos de este trabajo.

Referencias

Álvarez, T. (2010). La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo. *Latin-American Journal of Physics Education,* 4 (1), 143-148. http://www.journal.lapen.org.mx.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. Departament de Matemàtiques. http://www.tesisenred.net/handle/10803/3110.

Camarera, G. P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación educativa*, 9 (48), 15-25. (Disponible en:

http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=179414894003# consulta Marzo 2011)

Costa, V. A. (2013). *Recorridos de Estudio e Investigación Codisciplinares en la Universidad para la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería*. Tesis doctoral. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas.

Costa, V. A., Di Domenicantonio, R. M., Prodanoff, F., Tolosa, E. y Guarepi, V. (2008). Acciones interdisciplinarias entre matemática y física para mejorar la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial. Libro digital del VI Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería, Formando al Ingeniero del siglo XXI. Facultad de Ingeniería e Informática, de la Universidad Católica de Salta y Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta. Editorial de la Universidad Nacional de Salta.

Costa, V. A., Di Domenicantonio, R. M. y Vacchino, M. C. (2010). Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del Cálculo Integral y Vectorial. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 21, 173-185. http://www.fisem.org/descargas/21/Union_021_018.pdf.

Costa, V. A. y Arlego, M. (2011). Enseñanza del Cálculo Vectorial en el contexto de la ingeniería: una revisión bibliográfica. Actas en el I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro nacional en Enseñanza de las Ciencias (II ENEM) (pp. 88-94). http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas.

Crowe, M. (1994). *A history of vector analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Courier Dover Publications.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Huesca. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr.

Chevallard, Y. (2005). Steps towards a new epistemology in mathematics education. IV Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4). Sant Feliu de Guíxols (Spain). Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr.

Chevallard, Y. (2005a). Étudier et apprendre en mathématiques: vers un renouveau. Les sciences aujourd'hui. La recherche, les métiers, les formations (pp. 55-56). Lognes: Onisep. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=68.

Chevallard, Y. (2006). La problématique anthropologique en didactique, d'hier à demain. Actas del I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Baeza (España). Disponible en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz- Higueras, A. Estepa y F. J. García (eds), *Sociedad,* *Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico* (pp. 705-746). Universidad de Jaén. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8.

Chevallard, Y. (2009). Cours de didactique fondamentale 2008-2009. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=136.

Chevallard, Y. (2012). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. 12th International Congress on Mathematical Education. 8–15 July, 2012, Seoul, Korea. Con acceso el 04-06-2013 http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2013). Journal du Seminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-5.pdf.

Di Domenicantonio, R., Costa, V. A. y Vacchino, M. C. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 27, pp 75-87. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/images/stories/27/union_027_010.pdf.

Feynman, R., Leighton, R. B. y Sands, M. (1998). *Física: Electromagnetismo y materia. Volumen 2*. Reedición de Addison Wesley.

Fonseca, C., Pereira A. y Casas, J. M. (2010). Los REI en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje. III International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic Sant Hilari Sacalm, Catalunya, Spain, January 25 to 29. 247–256.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Fonseca, C. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, 23 (1), 97-121.

Gascón, J. (2010). Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 22, 8-35.

Kümmerer, B. (2002). The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study. En D. Holton. Kluwer Academic Publishers New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow (pp. 321- 334). http://ebooks.kluweronline.com

Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2012). Las funciones polinómicas de segundo grado en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI): alcances y limitaciones. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN*, 31, 45-63.

Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2013). The Research and Study Paths in the secondary school: the case of the polynomial functions of the second degree. *Journal Problems of Education in the 21st Century,* 52 (52), 60-71.

McCartan, C. D., Hermon, J. P. y Cunningham, G. (2009). A Validated Approach to Teaching Engineering Mathematics. EE2010 The Higher Education Academy Engineering Subject Centre, EE2010 conference proceedings.

(Consultado marzo 2010: http://www.engsc.ac.uk/downloads/scholarart/ee2010/105_GP_McCartan.pdf)

Mankiewicz, R. (2005). *Historia de las Matemáticas, del cálculo al caos* (pp. 141-147). Editorial Paidós, colección orígenes, en rústica.

Marsden, J. E. y Tromba, A. J. (2004). *Cálculo Vectorial. Edición 5*. Addison Wesley.

Moler, E. (2006). Procesos de acreditación en las carreras de Ingeniería ¿Mejoramiento en la calidad o adaptación a las normativas? Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria. CONEAU. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. Serie Estudios. (Consultado Mayo 2013: www.coneau.gob.ar/archivos/publicaciones/estudios/Moler.pdf).

Moreno, M. M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (eds.), IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Córdoba, España, Universidad de Córdoba, 81-96.

Otero, M. R. y Llanos, V. C. (2011). La enseñanza por REI en la escuela secundaria: desafíos, incertidumbres y pequeños logros al cabo de ocho implementaciones. Actas en el I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM), 15-23. Disponible en: http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas.

Otero, M. R., Llanos, V. C. y Gazzola, M. P. (2012). La pedagogía de la investigación en la escuela secundaria y la implementación de recorridos de estudio e investigación. *Revista Ciencia Escolar: enseñanza y modelización*, 2 (1), 31-42, Universidad Central de Chile.

Otero, M. R., Fanaro, M. A. y Llanos, V. C. (2013). La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física*. Revista Electrónica de Investigación en educación en Ciencias*, 8 (1), 74-86. Recuperado el 17 de junio de 2013, de: http://reiec.sites.exa.unicen.edu.ar/.

Parra, V., Otero, M. R. y Fanaro, M. A. (2013). Recorridos de Estudio e Investigación co-disciplinares a la Microeconomía. *Revista Números*, 82, 17-35. Recuperado el 03 de junio de 2013, de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/82/Articulos_02.pdf.

Perjési, I. H. (2003). Application of CAS for teaching of integral-transforming theorems. *ZMD*, 35 (2), 43- 47.

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12. Disponible en Internet: http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33511859004.

Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2008). Como hacer una previsión de ventas: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. II Congreso Internacional sobre la TAD. Francia. Acceso Agosto 2011: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/.

Willcox, K. y Bounova, G. (2004). Mathematics in Engineering: Identifying, Enhancing and Linking the Implicit Mathematics Curriculum. Proceedings of the

2004 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition, Copyright 2004. American Society for Engineering Education.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Siglo XXI de España Editores.