ANÁLISIS DEL PROCESO DE CONVERSIÓN DE PROBLEMAS ESCRITOS EN LENGUA NATURAL A UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

KATHERINE LEMOS FLOREZ

NASLY DAYANA HERRERA RUIZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA Y FÍSICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2015

ANÁLISIS DEL PROCESO DE CONVERSIÓN DE PROBLEMAS ESCRITOS EN LENGUA NATURAL A UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Katherine Lemos Flórez

Código: 0742587

Nasly Dayana Herrera Ruiz

Código: 0532761

Trabajo realizado para optar al título de licenciado en

Licenciatura en Matemática y Física

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Director de Trabajo de Grado

Jorge Enrique Galeano Cano

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA Y FÍSICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2015

4UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	ANÁLISIS DEL PROCESO DE CONVERSIÓN DE PROBLEMAS ESCRITOS EN LENGUA NATURAL A UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES						
Se trata de:	Proyecto		Informe Final	x			
Director:	JORGE E. GALEANO						
1er Evaluador:	MYRIAM B. VEGA RESTREPO						
2do Evaluador:							
Fecha y Hora	Año:	2015	Mes:	Febrero	Día: 24	Hora:	3:00 PM

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
NASLY DAYANA HERRERA RUIZ	0532761	3469
KATHERINE LEMOS FLOREZ	0742587	3487

EVALUACIÓN

Aprobado	x	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:		Mes:		Día:		Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Análisis del proceso de conversión de problemas escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales

Autores:

Nombre: Katherine Lemos Florez Firma: [signature] C.C. 1144133929

Nombre: Nasly Dayana Herrera Ruiz Firma: NaslyHR C.C. 1.143.927.498

Nombre: Firma: C.C.

Fecha: 27 febrero 2015

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE CONTENIDO DE TABLAS

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradecemos a nuestro Dios por habernos sustentado en nuestras vidas con mucha Salud, amor y la oportunidad de culminar esta nueva etapa en nuestras vidas. En segundo lugar agradecemos a nuestros padres, Nelson Herrera, Derly Ruiz, Carlos Arley Lemos y Aracelly Florez, por su incondicional apoyo, inmensa paciencia y sabios consejos; siendo ellos los más importantes gestores de las personas que somos hoy.

En tercer lugar y no menos importante, un especial agradecimiento a los docentes Jorge Galeano, Miriam Vega y Maribel Anacona, por el acompañamiento dado a lo largo de todo nuestro proceso de formación y los consejos brindados, siendo uno de sus frutos la culminación de nuestro pregrado en la *Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y la Licenciatura en Matemáticas y Física* en la Universidad del Valle.

RESUMEN

Este trabajo presenta un análisis semiótico de problemas escritos en lengua natural, que usualmente se estudian en las escuelas en el área de matemáticas, al trabajar con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este análisis se centra en la actividad cognitiva de conversión de dichos problemas escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones (Duval, 2011).

El propósito es analizar la dificultad de cada problema utilizando la teoría de Duval en relación con las características de la conversión: la designación y redesignación funcional de los objetos, la relación entre las cantidades conocidas y desconocidas que permiten formular el sistema de ecuaciones lineales, además, de la congruencia o no congruencia de estos problemas mediante la aplicación de los tres criterios de congruencia. Lo anterior permitió seleccionar un grupo de 9 problemas característicos que se obtuvo a partir de un primer grupo de 90 problemas.

Se presentan los resultados de una prueba piloto realizada a 11 estudiantes de la cual se recolectaron datos, para estudiar la dificultad de los 9 problemas en la designación y redesignación funcional de los objetos, y la congruencia o no congruencia de este tipo de problemas; se encontró que los estudiantes no manejaban el contexto de los problemas y tenían dificultades para designar y redesignar las incógnitas, así como establecer relaciones entre ellas lo que les impedía formular el sistema de ecuaciones lineales asociado al problema.

Palabras claves: Conversión. Criterios de congruencia. Problemas escritos en lengua natural. Sistemas de ecuaciones lineales. Actividad cognitiva.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta un análisis semiótico de varios problemas escritos en lengua natural, problemas que son de diferentes contextos y que deben ser convertidos a un sistema de ecuaciones lineales. Este cambio de un registro (lengua natural) a otro (sistema de ecuaciones lineales) es lo que Duval llamaactividad cognitiva de conversión.

En la actividad de conversión se analizan las siguientes características: la designación y redesignación funcional de los objetos, y la congruencia y no congruencia de estos problemas, que es importante para determinar la dificultad del contexto en que se encuentra un enunciado ya que en las teorías de Duval se ha observado la falta de comprensión por parte de los estudiantes al "traducir" unos problemas escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales. Esto se mostrará en la prueba piloto que se realizó a once estudiantes, donde se analizan las dificultades que tuvieron al momento de hacer la respectiva conversión de nueve problemas seleccionados.

En el primer capítulo se presenta una descripción del problema, la justificación y los objetivos de este trabajo. Así, se propone el estudio de la actividad cognitivade conversión de enunciados en lengua natural a su representación en un sistema de ecuaciones, como la actividad sobre la cual se centran las discusiones que se adelantan en este proyecto.

En el segundo capítulo, se describen los elementos fundamentales de la perspectiva teórica del trabajo. Se hace un recorrido general por algunos conceptos claves de la perspectiva semiótica adoptada y las nociones matemáticas necesarias para el desarrollo del trabajo. Además se tienen en cuenta las reglas propuestas por Puig para la solución de problemas escritos en lengua natural.

En el tercer capítulo, se hace una presentación de la metodología empleada para realizar el análisis, desde una perspectiva semiótica, de la conversión de nueve problemas escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales. Además, se hace una breve descripción de una prueba piloto que se aplicó a once estudiantes que cursan los grados noveno y once.

Finalmente, el cuarto capítulo presenta las conclusiones que dan respuesta a los objetivos planteados en este trabajo.

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En esta primera parte se presenta la descripción del problema, la justificación y los objetivos de este trabajo. Para ello se expone un pequeño resumen del desarrollo de la historia del álgebra y su relación con los sistemas semióticos. Además, se hace énfasis en las representaciones semióticas que usan los estudiantes en el ejercicio de explorar sus conocimientos matemáticos en el trabajo con enunciados escritos en lengua natural, en cuya solución se hace necesario usar la actividad cognitiva de conversión a un sistema de ecuaciones lineales.

Duval (2011)aporta elementos para comprender el funcionamiento cognitivo del estudiante al solucionar problemas escritos en lengua natural que deben ser resueltos por medio de un sistema de ecuaciones. Además, analiza y expone las razones estructurales de los problemas de comprensión con los cuales se enfrentan la mayoría de los estudiantes. Esta teoría se enfoca en dos actividades cognitivas, que son los de conversión y de tratamiento.

En estas actividades, principalmente en el de conversión, se trata de analizar las causas reales de la falta de comprensión de los estudiantes y de sus dificultades en un doble déficit: el primero, es la ausencia de elementos que le guíen en la escogencia de la incógnita en un enunciado. El segundo, es la falta de comprensión para diferenciar el significado que tienen los signos en un sistema de ecuaciones.

En la actividad cognitiva de tratamiento los estudiantes presentan dificultades con respecto a la solución de la ecuación, cuando en ella se deben hacer operaciones de cálculo numérico y literal, es decir, lo más usualmente conocido como el despeje de ecuaciones para encontrar la incógnita.

Por lo tanto, lo que busca este trabajo es analizar la actividad cognitiva de conversión propuesto en la teoría de Duval, la cual estudia las dificultades de la escogencia de cantidades conocidas y desconocidas de un enunciado escrito en lengua natural y las relaciones entre ellas.

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Históricamente, el álgebra, como rama de las matemáticas, ha tenido sus raíces en distintas épocas y diversas culturas; en particular, se reconocen principalmente filiaciones griegas, árabes, hindúes e italianas. El término álgebra se deriva del nombre de una obra escrita hacia el año 830 por el matemático árabe Mohammed ibn Musa Al-Khowarizmi, titulada Al-gebr w´al-mu-qabalah(Recalde, 2013).

Al-Khwarizmi, fue un alumno de la Casa de la Sabiduría de Bagdag, realizó la traducción de varios manuscritos científicos griegos y estudios sobre álgebra, geometría y astronomía.En la obra Al-gebr w´al-mu-qabalah se intentó describir el siguiente propósito de enseñanza:

> Lo que es más fácil y útil en aritmética, tal como los hombres necesitan constantemente en casos de herencias, repartos, pleitos y comercio y todos los tratos entre ellos, o donde se necesita la medida de tierras, la excavación de canales, cálculos geométricos y otros objetos de varios tipos. (Vallejo, 2009, p.147)

Este libro contenía problemas matemáticos que hacían parte de la vida cotidiana en el imperio islámico de ese tiempo. Sólo la primera parte es una discusión de lo que hoy se reconoce como álgebra. En ésta se presentan los números naturales, que establecen: “Todos los tipos de números que son necesarios para los cálculos, tesoros (cuadrados), raíces y simples números (dírhams)”(Vallejo, 2009, p.147).

El álgebra ha iluminado una línea de desarrollo de las matemáticas, ya que ha sido una disciplina autónoma con sus resultados y problemas, tal es el caso del estudio de ecuaciones polinómicas, la incorporación de notaciones, las simbolizaciones, el estudio de operaciones abstractas y también la teoría de números.

Esta disciplina se ha desarrollado según los siguientes momentos históricos:

- Álgebra Retórica: Desarrollada por los babilonios y los egipcios (del 2000 al 1600 a.C.). En este caso se apela el lenguaje habitual para los desarrollos teóricos. No aparece ningún tipo de simbolismo particular para designar los elementos con los cuales se opera.
- Álgebra Sincopada: Desarrollada por Diofanto siglo III, en esta etapa se combinaba el lenguaje natural con alguna simbología especial. Corresponde a una fase intermedia entre lo retórico y lo simbólico.
- Álgebra Simbólica: Tuvo sus inicios con los trabajos de Vieta y alcanzó su madurez con Fermat y Descartes en los siglos XVI y XVII. Corresponde a los objetos que se sustituyen por símbolos especiales y las operaciones que se instauraron según sus propiedades. (Recalde, 2013, p.2)

Cada uno de estos momentos también estuvo estrechamente relacionado con las letras, números, signos de operación, que al principio permitieron comprender cosas que no eran perceptibles, dando lugar a situaciones nuevas como la creación de ecuaciones de primer grado, que se dio en la época del álgebra sincopada, las cuales se conocen hoy como expresiones algebraicas.

Con estas ecuaciones es posible el estudio de la designación de objetos matemáticos como lo hace Duval en sus trabajos sobre la actividad cognitiva de conversión, desde el punto de vista semántico[1], es decir, la forma en que un estudiante utiliza los signos con su respectivo sentido, para formar diferentes contenidos de representación.

Las representaciones semióticas[2] se han convertido en el centro de atención de diversas investigacionescomo: D´Amore (2006), Radford (2006), Raymond Duval(2004), Luis Puig(1998), Dávalos Mosquera & Calderón Narvaez(2011),ya que la actividad matemática es una actividad simbólica, que moviliza simultánea o alternativamente varios sistemas semióticos, algunos vinculados con el uso cotidiano, como la lengua natural, y otros creados por las necesidades del desarrollo de las matemáticas.

El objeto de estudio de este trabajo serán los problemas escritos en lengua natural a la hora de ser representados en sistemas de ecuaciones lineales.Se propone entonces analizar los registros utilizados por el estudiante a la hora de designar objetos en la actividad cognitiva de conversión entre dichos enunciados y las expresiones simbólicas correspondientes.

Para realizar este proyecto se presentan problemas matemáticos escritos en lengua natural, los cuales se caracterizan por permitir que el estudiante razone y explique cuál es su forma de afrontar y avanzar hacía el desarrollo de tal problema. Es aquí donde salen a la luz

[1]Cuando se habla de semántica se está haciendo referencia al estudio del significado de los signos y de sus combinaciones en matemáticas.

[2]"La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones "equivalentes" en otros sistemas semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza" (Duval, 2004, p. 27).

las dificultades para solucionar este tipo de problemas, éstas pueden estar relacionadas en algunos casos con la asimilación de contenidos propios del área, en otras ocasiones con la comprensión lectora, en el uso del lenguaje o en el desconocimiento de conceptos propios de otras disciplinas que intervienen en el problema.

En este trabajo se realizará un análisis de los problemas escritos en lengua natural en diferentes contextos, se realizará una prueba piloto en estudiantes de secundaria en la actividad cognitivade conversión de estos problemas a un sistema de ecuaciones lineales con el objetivo de identificar dificultades en dicho proceso. Se espera poder estudiar la manera en que los estudiantes lleven a cabodesignar y redesignar las cantidades conocidas, desconocidas y las relaciones entre ellas, y las posibles relaciones que se establecen entre el uso del lenguajey elcontextoen el que se están trabajando los problemas.

La conversión de un problema escrito en lengua natural en una ecuación o en un sistema de ecuaciones, se caracteriza por poner en juego cantidades*conocidas, desconocidas y las relaciones entre ellas.* Es decir, se trata de que a partir del problema en lengua natural se pueda designar con una letra una cantidad desconocida y partiendo de ésta hacer una redesignación de las otras cantidades conocidas o desconocidas. Al explicitar estas relaciones en una equivalencia se forma la ecuación, que por medio de operaciones de sustitución dará lugar a la solución de dicho problema.

Por lo tanto, un primer paso en este trabajo es reconocer si la conversión entre los registros delas representaciones es congruente o no, ya que no todos los enunciados se representan de la misma manera, sus representaciones pueden variar y no siempre el registro de llegada tiene las mismas potencialidades de representación que el de salida. Según Duval

(1999): "… el pasaje de un sistema a otro para representar un objeto matemático, provoca problemas específicos que no son de orden "conceptual""(p.63).

Para poder estudiar estas dificultades es necesario analizar el contexto delos problemas escritos en lengua natural al que se enfrentan los estudiantes, para identificar la comprensión que ellos hacen de estos enunciados, es decir, poder analizar si el estudiante en realidad puede relacionar el enunciado del problema dado con el contenido de la representación a la que desea llegar.

El reto de este trabajo es analizar la actividad cognitivade conversión de un problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales, en donde se observará el pasaje de la designación directa con una letra de las cantidades desconocidas y las demás cantidades (desconocidas o no) a partir de ésta. También, el pasaje de sintagmas literales referenciales a la escritura de una frase que explica la equivalencia entre las cantidades conocidas y desconocidas, es decir, escribir la letra o conjuntos letras (sintagmas literales) que han designado las cantidades conocidas y desconocidas del problema en una ecuación. En este último pasaje se puede visualizar la importancia del lenguaje natural, ya que relaciona literalmente el enunciado con la ecuación planteada.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

De lo anterior, surge la necesidad de estudiar desde una perspectiva semiótica, la conversión de problemas matemáticos escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales. De esta manera se realizará una prueba piloto con algunos estudiantes que permitan observar la actividad cognitivade conversión al momento de resolver dicho problema, el cual debe escribirse como un sistema de ecuaciones lineales utilizando la representación del objeto matemático adecuado, por lo que se busca responder a la siguiente pregunta:

¿Cuáles son las características de la actividad cognitivade conversión de problemas matemáticos escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales, atendiendo a las particularidades de la designación de objetos y los criterios de congruencia?

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. OBJETIVO GENERAL

Analizar con base en una perspectiva semiótica cognitiva, las características dela actividad cognitivade conversión de problemas matemáticos escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales, atendiendo a las particularidades de la designación de objetos y los criterios de congruencia.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Caracterizar un grupo de problemas escritos en lengua natural atendiendo criterios matemáticos y cognitivos.

- Analizar los criterios de congruencia en la actividad de conversión de problemasmatemáticos escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales.

- Estudiar los elementos que caracterizan a los problemas matemáticos escritos en lengua natural en el proceso de designación y redesignación de un objeto.

- Analizar el desempeño de los estudiantes al enfrentarse a la solución de problemas matemáticos escritos en lengua natural, en donde se hace explícito las características de la conversión.

1.3. JUSTIFICACIÓN

La solución de problemas matemáticos escritos en lengua natural requiere delas actividades cognitivas (conversión y tratamiento) mencionados anteriormente, para formular sistemas de ecuaciones y resolverlos algebraicamente, usando diferentes métodos (sustitución, igualación, reducción y la regla de cramer). Estos métodos son los usualmente enseñados en la mayoría de las instituciones educativas colombianas porque se les ha dado mayor importancia a la solución de estos problemas matemáticos mediante el tratamiento, utilizando reglas sintácticas[3] establecidas por la matemática.

Lo contrario a esto, ocurre con la actividad cognitivade conversión ya que no se le ha dado la importancia debida. Por lo anterior, lo que interesa en este trabajo es enfocarse en la actividad cognitiva de conversión, ya que es importante para establecer una comprensión lectora por parte del estudiante y así este podrá representar mediante letras y signos una relación por medio de una ecuación (algebraica) que represente al enunciado.

En la teoría de Duval (1999)se intentan analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión en los estudiantes, en el caso de resolver problemas matemáticos escritos en lengua natural y que es necesario representarlos por un sistema de ecuaciones. Este intento por descubrir éstas problemáticas en los estudiantes no solo fue estudiado por Duval, sino que también existen diferentes estudios realizados sobre los enunciados en lengua natural, por ejemplo, Coleoni (2001),López Vicente & Solaz Portales(2009) y Luis Puig (1998), que hablan sobre las dificultades que tienen los estudiantes a la hora de resolver este tipo de enunciados.

---

[3] Lo sintáctico tiene que ver con las reglas de organización de los signos en los sistemas de representación para construir enunciados, por tal motivo, en las operaciones del cálculo “puras”, lo importante más que el significado de las letras es respetar las reglas propias del sistema semiótico.

El estudio realizado por Coleoni (2001)en Argentina, fue *La construcción de la representación en la resolución de un problema de física*, que muestra enunciados en lengua natural, que no solo utilizaron el contexto matemático, sino también otras ramas científicas como la física. En este trabajo se analizan las resoluciones escritas de un problema físico realizado por alumnos de nivel medio.

El estudio se hace sobre la base de desarrollos teóricos que tienen en cuenta características propias de la comprensión de textos de enunciados de problemas científicos. Se tipifican algunos errores vinculándolos a fallos en diferentes niveles del proceso de representación. Se propone una categorización que sugiere la posibilidad de reinterpretar algunos errores cometidos por alumnos de física ante la actividad de resolución de problemas.

Otra investigación realizada,*Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de "traducción algebraica"* (López Vicente & Solaz Portales, 2009), dice que comprender un problema con enunciado en ciencias y matemáticas implica construir representaciones mentales en diferentes niveles de abstracción. Las dificultades que los estudiantes de secundaria tienen a la hora de resolver problemas algebraicos con enunciados, parecen originarse en la transición entre la representación escrita en lengua natural y la representación matemática de los problemas.

Para facilitar este proceso llamado "traducción algebraica del problema", se adapta una "regla para poner un problema en ecuaciones" propuesta por Puig (1998)y se integra en una metodología experimental en la que se busca mejorar la transferencia inter-dominios en ciencias. Los resultados muestran la potencia de la propuesta para superar gran parte de los obstáculos que los estudiantes de estos niveles tienen, con independencia de su rendimiento académico global.

Con lo anterior se pone de manifiesto, que estas dificultades ya han sido estudiadas, tanto así que algunos didáctas, comoPuig (1998) en su texto*Poner un Problema en Ecuaciones*, expresa una metodología de enseñanza que se basa en el análisis de enunciados para encontrar las cantidades conocidas y desconocidas y su relacion entre ellas, con el fin de traducir el enunciado a un sistema algebraico.

Las heurísticas que utiliza en su teoría son: esquemas conceptuales, tablas,líneas de vida y diagramas, todo ello para analizar el enunciado en tres clases de problemas: de estados, edades y móviles. El objetivo de su metodología es trasladarla a la escuela y así disminuir las dificultades que tienen los estudiantes en el momento de resolver enunciados escritos en lengua natural.

Es importante la comprensión de textos por parte de los estudiantes, ya que de esta manera se puede asegurar que entienden lo que leen, aún más, si es un enunciado matemático escrito en lengua natural,el cual debe resolverse mediante la actividad cognitivade conversión en una representación algebraica formando un sistema de ecuaciones.

El trabajo con este tipo de enunciados se encuentra establecido para el currículo colombianoen los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, en el Pensamiento Variacional y Los Sistemas Algebraicos y Analíticos(MEN, 2006), pues cultivar el pensamiento variacional es construir desde la educación básica primaria el análisis de fenómenos de variación por medio de representaciones como las gráficas y tablas, que se relaciona con el manejo de sistemas de datos y de representación.

Tambien, desde la educación básica secundaria, el sistema de representación más sobresaliente es el algebraico, pero hay otros como los gestuales, los del lenguaje ordinario (la lengua natural) o técnico, los numéricos y las gráficas, que ayudan a la construccción de procedimientos algorítmicos que definen los patrones y las respectivas reglas que permiten reproducirlas.Este pensamiento cumple un papel importante en la resolución de problemas de enunciados escritos en lengua natural, pues estásustentado en el estudio del cambio y la modelación de procesos de la vida cotidiana.

En el currículo colombiano, específicamente en la enseñanza de las matemáticas, se identifican dos estándares para los grados sexto y séptimo,y cuatro estándares de los grados octavo y noveno que están relacionados con el pensamiento variacional (MEN, 2006), ver Tabla 1), en los cuales se señala que los estudiantes deben aprender a describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes tipos de representación (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas), además, que identifiquen diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

Tabla 1. ***Estándares del pensamiento variacional y sistemas algebraicosy analíticos***

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS	
SEXTO Y SÉPTIMO	**OCTAVO Y NOVENO**
Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.	Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
	Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

Algunos estándares propuestos por el MEN relacionados con la enseñanza de las representaciones de enunciados en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales

Comprender los enunciados escritos en lengua natural y poder realizar la actividad cognitivade conversión correcta es importante en la educación; en las diferentes evaluaciones realizadas por el MEN[4], se establece claramente el objetivo pedagógico de evaluar la comprensión e interpretación de textos, los cuales se representan mediante gráficas, enunciados, tablas, símbolos, etc.

Teniendo en cuenta lo anterior, este proyecto se enfoca en la revisión y análisis dela actividad cognitivade conversión de problemas escritos en lengua natural que han de ser representados mediante ecuaciones lineales.

Estos análisis se someten a revisión mediante la implementación de una prueba piloto que se hizo con un grupo de 11 estudiantes cuyas edades oscilaban entre los 14 y 16 años que cursan grados noveno y once. Para ello se decide usar una metodología etnográfica que se refiere a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable(Taylor & Bogdan, 1996). Es pues esta "conducta observable" la que dará los elementos para identificar las características dela actividad cognitiva de conversión que involucra la actividad matemática de los estudiantes que fueron objeto de la prueba piloto.

Lo anterior permite en un futuro, ojala cercano que se reconozca como problema prioritario**¿cómo buscar una estrategia didáctica para que los estudiantes mejoren la actividad cognitiva con respecto a la conversión de problemas escritos en lengua natural?** Pues en este trabajo se muestra un análisis de las dificultades presentes en los estudiantes desde una perspectiva semiótica cognitiva, en la actividad cognitivade conversión

[4]Las pruebas SABER, evalúan las competencias, es decir, no se mide el conocimiento de los estudiantes en las diferentes disciplinas (matemáticas, lenguaje, ciencias, etc.) sinocómo se aplican los conocimientos que tienes en estas áreas en la vida real.De allí que se hable depersonas competentes para la vida.

de problemas escritos en lengua natural y que deben resolverse utilizando sistemas de ecuaciones. Lo que conlleva a buscar una estrategia desde una perspectiva didáctica para que los estudiantes puedan enfrentar satisfactoriamente este trabajo.

CAPÍTULO II

ELEMENTOS TEÓRICOS

CAPÍTULO II

ELEMENTOS TEÓRICOS

En este capítulo se desarrollarán los fundamentos teóricos de este trabajo, para ello se abordan conceptos como las representaciones semióticas y los sistemas de representación, la actividad cognitiva de conversión y tratamiento; también se describirán las dificultades existentes en las dos operaciones de conversión y las dos operaciones de tratamiento que intervienen en la solución de un problema usando ecuaciones, y por último, se hablará de algunos conceptos matemáticos que se trabajan en la escuela y su relación con el tema de este trabajo.

2.1. REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

El conocimiento aritmético que se enseña a los estudiantes y que ellos aprenden desde su infancia les ayuda en la introducción del algebra, ya que en la aritmética las cantidades se expresan mediante números, los cuales son utilizados para realizar diferentes operaciones como la suma, resta, multiplicación y división, mientras que con la introducción del álgebra, se evidencia que las operaciones tienen cantidades numéricas acompañadas de letras, estas letras tienen diferentes interpretaciones, que pueden ser según Freudenthal, citado por Valoyes&Malagón (2006):

> La letra como incógnita (cuando se desconoce una magnitud o medida), la letra como variable (se usa en diferentes disciplinas como la física y química, donde se presentan diversos fenómenos en los cuales una o varias magnitudes cambian o varían, ya sea en relación con ellas mismas o en relación con otras), la letra como nombre polivalente (en donde las letras representa cualquier valor, pero no son ni incógnitas ni variables), y por último, la letra como parámetro (es el caso de expresiones como $(\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c})$ que representan valores que además de contextualizarla, generan familias de ellas; esta noción representa mayores niveles

> de complejidad en su construcción). Estasdiferentes interpretaciones de lo que se llaman letras, deben ser construidas por los estudiantes.(Valoyes & Malagón, 2006, p.18-19)

Teniendo en cuenta la cita anterior, en este trabajo se hará referencia a las letras como incógnitasy nombre polivalente, estas se utilizan en los problemas escritos en lengua natural para encontrar las cantidades conocidas y las desconocidas de dichosproblemas, desde los conceptos teóricos de Duval sobrela actividad cognitivade convertir estos problemas a un sistemas de ecuaciones.

Las letras y los números son utilizados como signos que permiten representar el objeto matemático, esto a su vez hace parte de una representación semiótica, las cuales están relacionadas con los sistemas particulares de signos que contienen reglas, que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que su asociación tenga sentido.

Los sistemas semióticos son aquellos que cumplen tres actividades cognitivas propias a toda representación: Primero, la construcción de una marca o un conjunto de marcas que permitan identificar *una representación de alguna cosa* en un sistema determinado. Segundo, permitir la transformación de esas representaciones en otras, utilizando las reglas propias de cada sistema, logrando con esto una ganancia de conocimiento al obtener las representaciones finales. Tercero, poder convertir las representaciones producidas en un sistema a otro sistema, permitiendo a estas otras representaciones explicitar diferentes significaciones relativas a aquello que es representado(Duval, 1999, p. 36-37).

La primera, formación de una representación semiótica, tiene que ver con uso de un(os) signo(s) para actualizar la mirada de un objeto o para sustituir la visión de ese objeto. Esta formación respeta las reglas propias al sistema empleado, no solo por razones de comunicabilidad, sino también para hacer posible la utilización de los medios de tratamiento que ofrece ese sistema semiótico empleado(Duval, 2004).

La segunda, el tratamiento, es una transformación estrictamente interna a un registro: utiliza únicamente las posibilidades de funcionamiento propio al sistema; así se tienen como ejemplos: las paráfrasis o las reformulaciones en lengua natural, el cálculo con un sistema de escritura de los números, las anamorfosis en las representaciones icónicas, las reconfiguraciones con el registro de las figuras geométricas (Duval, 1999, p. 44).

La tercera, la conversión, es una transformación de la representación de un objeto en un registro P en otra representación del mismo objeto en un registro L. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto, pero sin conservar la explicitación de las mismas propiedades de ese objeto.

Teniendo en cuenta esta dos últimas definiciones, se puede ver que son totalmente diferentes, porque, mientras la conversión del enunciado se representa mediante un sistema de ecuaciones; lo que hace la actividad cognitivade tratamiento es resolver la ecuación obtenida por la conversión, enla actividad cognitiva de tratamientocambia el significado que tienen los objetos designados en la conversión, para solo tener en cuenta las reglas de operación (cálculos u operaciones).

Es decir, que existe una diferencia entre la actividad cognitiva de conversión y tratamiento, pues en la conversión, se determina el sentido de las letras por la referencia a los objetos que designan, mientras que, cuando se pasa a la fase de tratamiento, se olvida de esta referencia a los objetos designados, para tomar las letras únicamente como objetos que se pueden asociar en virtud de los símbolos y operaciones que los vinculan.

En estas actividades cognitivas de conversión y tratamiento se deben tener en cuenta los sistemas semióticos de representación(registros), los cuales se clasifican en dosclases como lo muestra la Tabla 2.

Tabla 2. ***Clasificación de los diferentes tipos de registros en dos clases***

	REPRESENTACIÓN DISCURSIVA	**REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA**
REGISTROS PLURIFUNCIONALES	Lengua natural Asociaciones verbales (conceptuales) Descripción, definición, explicitación Razonamiento: ➢ Argumentación a partir de observaciones, de creencias… ➢ Deducción valida a partir de definiciones o teoremas	Figuras geométricas, planas o en perspectivas (configuración d formas 0, 1, 2, 3 D) Aprehensión operatoria y no solamente perceptiva Construcción de instrumentos Modelización de estructuras físicas (ej: cristales, moléculas…)
REGISTROS MONOFUNCIONALES	Sistemas de escritura: ➢ Numéricas (binaria, decimal, fraccionaria…) ➢ Algebraicas ➢ Simbólicas (lenguas formales) Calculo literal, algebraico, formal…	Grafos cartesiano (visualización de variaciones) Cambio de sistemas de coordenadas Interpolación, extrapolación

Clasificación de los diferentes tipos de registros movilizados en matemáticas *(Duval, 1999, p. 52)*

A continuación se mostrara una breve descripción de cada uno de los registros anteriormente mostrados en la tabla.

- **Registros discursivos**: Son aquellos que usan una lengua (natural), en donde se formulan proposiciones o se transforman expresiones, estas proposiciones pueden ser verdaderas o falsas(Duval, 1999, p.50-51). En este registro se encuentran otros registros movilizados en matemáticas, estos son los plurifuncionales y los monofuncionales.

- **Registro Plurifuncionales**: Estos se utilizan en todos los aspectos de la vida cultural y social, los cuales permiten un desarrollo amplio de razonamientos de demostraciones en lengua natural.(Duval, 1999, p. 53). Cuando el registro plurifuncional hace parte de las representaciones discursivas en la enseñanza de las matemáticas, se caracterizan por tener asociaciones verbales, descripciones, definiciones, razonamientos y deducciones válidas partiendo de teoremas.
- **Registro Monofuncionales**: Estos registros son provenientes del tratamiento, de allí su carácter “técnico”, es decir “formal”: las reglas que determinan el empleo de los signos y de los símbolos se hacen exclusivamente en función de su forma. (Duval, 1999, p. 51). Cuando el registro monofuncional hace parte de las representaciones discursivas en la enseñanza de las matemáticas, se caracterizan por tener sistemas de escritura numéricas, algebraicas y simbólicas, también, el cálculo literal, algebraico y formal.
- **Registros No discursivos**: Son aquellos que muestran formas o configuraciones de formas que permiten una aprehensión sinóptica, es decir, que permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible(Duval, 1999, p. 51). En este registro también se presentan los registros plurifuncionales y monofuncionales en la enseñanza de las matemáticas. Es decir: cuando elregistro plurifuncionalhace parte de los no discursivos, se caracterizan por tener figuras geométricas, planaso en otras dimensiones, aprehensión operatoria y no solamente perceptiva, construcción con instrumentos y la modelización de estructuras físicas.Cuando un registro monofuncional hace parte del registro no discursivo, se caracteriza por usar graficas cartesianas y visualizar sus variaciones.

Cuando se les enseña a los estudiantes y ellos aprenden matemáticas en la escuela,se privilegia más los registros monofuncionales porque permiten el desarrollo de procedimientos o algoritmos, por ejemplo, aprender las nociones de fracción y de decimal, son nociones que se movilizan de un registro monofuncional a otro monofuncional; aquí los estudiantes pueden presentar ciertas dificultades en la adquisición de estos algoritmos pero son fácilmente superados, análogamente sucede cuando se convierte un registro plurifuncional a otro plurifuncional, porque permiten una explicación verbal de una figura geométrica, por ejemplo,el desarrollo de la noción de triángulo isósceles y su demostración formal en lengua natural.

El problema más frecuente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es cuando se debe pasar de un registro plurifuncional a otro monofuncional, esto es lo que se evidencia dentro dela actividad cognitivade conversión desde un registro plurifuncional discursivo (un enunciado) a un registro monofuncional discursivo (una expresión algebraica).

Duval (1999) estudia la actividad cognitiva de conversión y de tratamiento en la resolución de problemas escritos en lengua natural, y el punto más fuerte de su documento está en el estudio de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes, al resolver un problema enunciado que necesita el cambio de un registro escrito en lengua natural a un sistema de representación simbólico.

En laactividad de conversión se ven implicadas dos operaciones referenciales, es decir, dos operaciones que permiten nombrar los objetos que se encuentran en el enunciado, la primera, consiste en la *escogencia de la incógnita*, es decir, designar directamente con una letra una cantidad desconocida en el enunciado para poder reducir el léxico[5] y así hacer una *redesignación funcional* de los objetos ya designados con anterioridad. Por ejemplo:

Problema: La edad de una madre es el cuádruplo de su hijo. Dentro de 20 años, la edad de la madre, será el doble que la de su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?

Para resolver este enunciado primero se designan las cantidades desconocidas, como:

$$x = Edadactualdelamadre$$

$$y = Edadactualdelhijo$$

Este procedimiento es el anteriormente llamado "*escogencia de la incógnita*", es decir las letras que relacionan las cantidades desconocidas del enunciado.

Luego, se hace una *redesignación funcional* de los objetos conocidos y los desconocidos del enunciado, así:

$$x + 20 = Edaddelamadre \text{ dentro de 20 años}$$

$$y + 20 = Edaddelhijo \text{ dentro de 20 años}$$

La segunda operación referencial consiste en poder establecer las expresiones que designan la relación entre las cantidades conocidas y desconocidas del problema, las cuales se igualan para formar una ecuación(Duval, 2011).

El segundo paso para resolver el problema, es relacionar las cantidades desconocidas del problema con las conocidas, de la siguiente manera:

$x = 4y$ (1)

[5]Para Duval, toda lengua comporta un léxico, que viene a ser un conjunto de elementos (signos, símbolos o palabras) que permiten marcar explícitamente el cumplimiento de una de las cuatro operaciones que contribuyen a cumplir la función referencial.

La ecuación (1) representa la relación entre la edad actual de la madre y la (actual) del hijo.

En el tercer paso se debe de hacer una redesignación funcional de los objetos conocidos y los desconocidos del enunciado, así:

$x + 20 = 2(y + 20)$ (2)

La ecuación (2) relaciona la edad de la madre y del hijo dentro de 20 años.

Pero es en la designación o en la escogencia de la incógnita donde se presentan las mayores dificultades en los estudiantes, ya que al resolver un problema se equivocan frecuentemente en la escogencia lexical de la incógnita. Esto está relacionado con la escogencia del objeto de anclaje[6], que tiene que ver con que haya al menos dos objetos posibles que puedan ser tomados como referencia para resolver el problema, que conlleva a la redesignación funcional.

Un ejemplo del objeto de anclaje para el problema anteriorsería:

Si se designan las cantidades desconocidas, como:

$$x = Edaddelamadre \text{ dentro de 20 años}$$

$$y = Edaddelhijo \text{ dentro de 20 años}$$

Las cantidades conocidas del problema serían:

$$x - 20 = Edad\ actual\ de\ lamadre$$

$$y - 20 = Edadactual\ delhijo$$

La ecuación (3) representa larelación de las cantidades desconocidas y conocidas del problema, entre la edad actual de la madre y la (actual) del hijo:

[6]Un objeto de anclaje es un objeto que es tomado como referencia para describir una operación efectuada o una operación de se ha de efectuar.

$x - 20 = 4(y - 20)$ (3)

La ecuación (4) representa larelación de las cantidades desconocidas y conocidas del problema, entre la edad de la madre y del hijo dentro de 20 años:

$x = 2y$ (4)

Como se ha mencionado antes, es en la escogencia de la incógnita donde se presentan las mayores dificultades en los estudiantes, por la escogencia del objeto de anclaje, esto conlleva a la redesignación funcional y por ende a los factores de congruencia y no congruencia.

Hay tres factores de congruencia: el primero, es la correspondencia semántica de las unidades significantes, que consiste en hacer coincidir las unidades significantes elementales del registro de partida y que correspondan a las unidades significantes elementales del registro del sistema de llegada (ecuación).

El segundo, es la univocidad semántica terminal, es decir, que para una unidad significante en la representación inicial que se ha de convertir, debe haber una unidad significante en el registro de llegada y no variasunidades.

Y por último, está el factor de orden de organización de las unidades significantes, es decir, que en la representación de llegada se conserve el orden de las unidades significantes del registro del enunciado.

Si se cumplen los tres factores de congruencia se puede decir que no hay dificultad enla conversión de un problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales. Pero si no se cumple uno o dos de los tres factores, se dice que la conversión no es congruente(Duval, 2011). Es decir quehay dificultad en la conversión de unproblema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales.

En muchas ocasiones no se cumplirán estos factores de congruencia porque en cada registro las unidades lexicales están constituidas en función de cada sistema semiótico y no en función de los objetos matemáticos, entonces, se dice que los registros en cada representación no son congruentes,es decir que hay mayor dificultad en la conversión de un problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales.

Con lo anterior,se define la congruencia como una cualidad que tienen los registros de representación, mediante la cual se pueden medir la dificultad en el paso de una representación en un registro a otra representación en un registro distinto.

A continuación se presenta un ejemplo de un problema matemático, en el cual se explica paso a paso la designación y redesignación de un objeto y el cumplimiento de los criterios de congruencia.

Problema 1: La suma de dos números es 20. El mayor de ellos es igual al menor aumentado 4. Encuentre los números.

Para resolver este problema se debe tener en cuenta que el estudiante no conoce los números, él podría tomar la ecuación $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 20$para responder a la primera proposición del problema "*La suma de dos números es 20.*"

Esta proposición en el registro de la lengua natural NO es congruente cuando se convierte al sistema de representación simbólica porque solo cumple con dos criterios de congruencia: primero, hay una correspondencia semántica en sus unidades significantes en los dos registros: en la lengua natural las unidades significantes son: "*dos números*", "*la suma*", y "*es*"; y en el registro simbólico las unidades significantes son:"x", "y"," $+$ " y " $=$ ".

Segundo, hay una univocidad semántica terminal, pues sus unidades significantes elementales en la lengua natural le corresponden una unidad significante elemental en el registro de llegada (ecuación lineal).

Pero el tercer criterio no lo cumple, ya que no hay un mismo ordenen el arreglo de las unidades significantesen el registro de la lengua natural con la representación simbólica,porque en el registro de la lengua natural aparece primero “la suma de dos números” mientras que en la representación simbólica aparece primero “$x + y = 20$”; y para que se cumpla este criterio de congruencia el problema escrito en lengua natural debería ser: “Un número más otro número dan 20”.

Pero es en la segunda proposición,*“El mayor de ellos es igual al menor aumentado 4”*, donde se menciona que hay un número mayor y otro que es menor, es aquí donde el estudiante debe designar las cantidades desconocidas y tomar un objeto de anclaje, el cual le permitirá resolver el problema.

Si el estudiante toma a “x” como el número mayor, y a “y” como el número menor, entonces la segunda ecuación quedaría de la siguiente manera:

$$x = y + 4$$

En esta ecuación se observa que hay una redesignación con respecto al valor de “x” que hace referencia al número mayor, pero si el referente cambiara (el objeto de anclaje) de la siguiente manera:

$$y = x - 4$$

También existe una redesignación con respecto al valor de y, que hace referencia al número menor. Con la ecuación$y = x - 4$, se puede observar la NO congruencia, ya que, no cumple con él con dos criterios: el primero, es el criterio de correspondencia semántica, ya que las unidades significantes de la segunda proposición escrita en lengua natural no conserva las mismas unidades significantes en el registro simbólico, ya que la palabra "*aumentado*" no se representa en el otro registro por el signo " − ".

El segundo es, el criterio de orden lineal, pues no se conserva un orden en las unidades significantes de los dos registros, pues el número menor no es quien se anuncia primero en la segunda proposición, ya que para que se cumpla el orden debería estar escrita de la siguiente manera: "el número menor es igual al número mayor disminuido en 4"

De esta manera se analizarán las dificultades del funcionamiento cognitivo dela conversión que presentan los estudiantes al designar las incógnitas presentes en un problema escrito en lengua natural y que deben ser expresadas en una ecuación para ser solucionadas.

2.2. EL PROBLEMA DE PONER UN PROBLEMA EN ECUACIONES

El problema que tienen los estudiantes para resolver problemas escritos en lengua natural, es cuando deben partir de estos tipo de problemas y representarlos formalmente, es decirque los estudiantes tomen conciencia de la variedadde los procesos discursivos para designar los objetos y cómo ellos designan estos objetos.

Para ello se debe tener en cuenta la propuesta de Duval quien hace un estudio dela actividad cognitivade conversión en donde habla de la designación y redesignación de objetos. Y es necesario en este trabajo tener en cuenta las reglas que propone Puig (1998) para el desarrollo de los problemas escritos en lengua natural.

2.2.1. LA PROPUESTA DE DUVAL

Se hace un análisis de las dificultades encontradas en los estudiantes derivando ahí losactividades cognitivas relativas a las de conversión y los problemas ocurridos en las operaciones de tratamiento. También aborda el problema didáctico de la introducción al álgebra mediante la resolución de problemas de cambio de registro de la lengua natural a un sistema de representaciónsimbólica, para ello se hace alusión a la conversión de problemas escritos en lengua natural a un sistema de representaciónsimbólica, además, realiza un análisis de las dificultades que surgen cuando empiezan a introducir letras para designar objetos; y por último, hace referencia a los objetos de anclaje y se explica como de ellos depende gran parte de la solución de los problemas algebraicos(Duval, 2011, p. 3, 4).

2.2.2. LA PROPUESTA DE PUIG

Puig (1998) habla de la resolución de problemas de matemáticas y propone la solución de estos en cuatro fases: comprender el problema, elaborar un plan para resolverlo, ejecutar el plan y finalmente, revisar y extender el trabajo realizado.

El problema que hay que resolver se transforma entonces en una expresión algebraica que luego hay que resolver. Para ello Puig usa unos instrumentos heurísticos que orientanel análisis del enunciado que tienen cantidades que no están mencionadas explícitamente, estas herramientas heurísticas son: esquemas conceptuales, tablas de cantidades, líneas de vida, diagramas espaciales. También propone algunas reglas como ayuda para solucionar este tipo de problemas:

1) Comprender el enunciado, identificando las cantidades conocidas (o datos) y las cantidades desconocidas (incógnitas), así como las relaciones entre ellas.
2) Dar nombre a una de las cantidades desconocidas, asignándole una letra.
3) Representar las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre esas cantidades y la que se han designado con una letra.

4) Escribir una igualdad entre expresiones algebraicas (una ecuación) a partir de las relaciones existentes entre las diferentes cantidades.
5) Comprobar que los dos miembros de la igualdad representan la misma cantidad. Si los dos miembros de la igualdad representan la misma cantidad, se ha hecho una traducción adecuada del lenguaje natural(Puig, 1998, p. 7).

Conla mirandade Puig, se tendrá encuenta la estructura que él utiliza para resolver los problemas escritos en lengua natural yla teoría de Duval será la base de este trabajo, ya que permite describir la actividad cognitiva de conversión en el análisis semiótico de los problemas que se presentaran en el capítulo 3.

2.3. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES DESDE LO MATEMÁTICO

Es importante conocer las definiciones de los conceptos matemáticos en este trabajo, especialmente cómo surgió el concepto de ecuación y sistemas de ecuaciones lineales, porque es una ayuda para resolver los problemas escritos en lengua natural, que serán abordados en este trabajo en la actividad cognitivade conversión.

UN POCO DE HISTORIA

Las ecuaciones se han estudiado desde hace mucho tiempo. Diofanto (325 – 409 d.c.) fue el primero en enunciar una teoría para la solución de las ecuaciones de primer grado, y también el primero en encontrar una fórmula para la solución de las ecuaciones de segundo grado.Tartaglia (1499-1557) y Cardano (1501-1576) se disputan el hallazgo de una fórmula para la solución de ecuaciones de tercer grado. Y Niels Herrik Abel (Recalde, 2013) demostró la imposibilidad de encontrar una fórmula para las ecuaciones de quinto grado o más.

Existen diferentes tipos de ecuaciones de acuerdo a las expresiones que lo conforman: ecuaciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales, etc.

En este capítulo trataremos únicamente las ecuaciones algebraicas haciendo énfasis en la ecuación lineal y los sistemas de ecuaciones.

La ecuación se define como una igualdad que contiene una o más cantidades desconocidas denominadas incógnitas. A continuación se muestran varios ejemplos:

$$x + 5 = 2$$

$$senx - 2cosx = ½$$

$$3x^2 + 5x - 1 = 3$$

$$2x + 3 = 5$$

LA ECUACIÓN LINEAL DE UNA INCÓGNITA

Tiene la forma general $ax + b = 0$, donde$a$ y b son números reales y $a \neq 0$. Se llama lineal porque el exponente de$x$ es uno. La presencia de términos que tengan exponentes diferentes de 1, como$2x + 3 = 5$. El siguiente ejemplo ilustra un procedimiento común para encontrar la solución de una ecuación de primer grado:

Si se tiene la ecuación lineal, $4x + 2 = 10$ y se desea conocer el valor de x, se debe restar 2 en ambos miembros de la igualdad y se obtiene una ecuación más sencilla $4x = 8$.

Después, se divide ambos miembros entre 4, obteniendo otra ecuación más sencilla aún,

$$x = 2$$

Por consiguiente el conjunto de la solución es $S = \{2\}$

La transformación de una ecuación en otra más sencilla es resultado de la aplicación de una serie de propiedades que permiten expresar la ecuación inicial en una equivalente. Que dos o más ecuaciones sean equivalentes significa que se cumple si, y solamente si, tienen el mismo conjunto de solución. Estas propiedades son:

Propiedad 1: Adición y Sustracción:

Sia, b y $c \in \mathcal{R}$, entonces$a = b$, $a + c = b + c$ y $a - c = b - c$ son equivalentes.

En otras palabras, se puede sumar o restar la misma cantidad a ambos lados de una igualdad sin que esta se altere.

Propiedad 1: Multiplicación y División:

Sia, b y $c \in \mathcal{R}$, entonces $a = b$, $ac = bc$ y $a/c = b/c$; $c \neq 0$, son equivalentes.

Es decir, se puede multiplicar o dividir a ambos lados de la igualdad por el mismo número (diferente de cero) y esta no se altera.

El siguiente ejemplo muestra la utilización de las dos propiedades anteriores de equivalencia y de otras propiedades en las que en una ecuación, cualquier expresión puede ser trasladada de un miembro a otro realizando la operación contraria a la inicial.

Ejemplo: Resuelva la ecuación $5x - 5 = 2x + 9$.

Se suma 5 a ambos lados y se obtiene$5x = 2x + 14$

Se resta $2x$ a ambos lados y se obtiene$3x = 14$

Finalmente se divide ambos lados entre 3obteniendo el valor de $x = \frac{14}{3}$

El conjunto solución es $S = \left\{\frac{14}{3}\right\}$

LA ECUACIÓN LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

Tiene laforma general $y = ax + b$ ó$y - ax - b = 0$

Para simplificar cualquier ecuación de este tipo, se expresa de la forma $P(x, y) = 0$.Una solución de $P(x, y) = 0$ es el conjunto S formado por los pares ordenados (x, y) que verifican la ecuación. Se llama a S el conjunto solución de $P(x, y) = 0$.Por ejemplo, en la ecuación lineal $3x - 5y = 2$, la pareja ordenada $(4, 2)$ es una solución de la ecuación, porque al remplazar $x = 4$ y $y = 2$, se tiene que:

$$3(4) - 5(2) = 12 - 10 = 2$$

Esta solución no es única, una forma de resolver este ejercicio es despejando"y" y luego, se asignan valores arbitrarios a "x". De esta forma, si se asigna valores a "x", se pueden obtener infinitos valores para "y", así, se dice que la ecuación lineal $3x - 5y = 2$ es una ecuación indeterminada.

ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS CON DOS INCÓGNITAS

La expresión general de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, es:

$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ Donde los coeficientes son números reales.

La solución de este sistema es un par ordenado (x, y) que verifica ambas ecuaciones. Por ejemplo**,** el conjunto cuyas ecuaciones son:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$$

Corresponde a un sistema$2x2$ porque está formado por dos ecuaciones con dos incógnitas. La solución de este sistema es la pareja $(2, 4)$ ya que satisface las dos ecuaciones simultáneamente, es decir:

$$\begin{cases} 2(2) - 4 = 4 - 4 = 0 \\ 3(2) + 2(4) = 6 + 8 = 14 \end{cases}$$

Comprender las definiciones anteriores es una ayuda para resolver los problemas escritos en lengua natural, ya que las representaciones que se tienen en cuenta en la actividad cognitivade conversión son las algebraicas.

Teniendo ya definidos los fundamentos teóricos de este trabajo, como las representaciones semióticas y los sistemas de representación, las dificultades existentes en las dos actividades cognitivas de conversión y tratamiento,específicamentelas de conversión, y los conceptos matemáticos que se trabajan en la escuelapara la solución de un problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones. Se presentará el siguiente capítulo que muestra las actividades que a desarrollaren este trabajo para el análisis semiótico de nueve problemas escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales, que permitan elaborar el diseño de un taller que se realizará a algunos estudiantes.

CAPÍTULO III

DESARROLLO DEL TRABAJO

CAPÍTULO III

DESARROLLO DEL TRABAJO

En este capítulo se hace una presentación de las actividades que se desarrollaron en este trabajo. Primero se hace una explicación particular de la enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales en la escuela; segundo se hace una descripción del diseño de un taller compuesto por problemas escritos en lengua natural, dicho diseño toma como base para su constitución la teoría de Duval; tercero se hace un análisis semiótico detallado de los problemas seleccionados del taller; y por último, se mostrará el resultado y análisis de los talleres de una prueba piloto que se hizo con un grupo de 11 estudiantes de instituciones públicas, cuyas edades oscilaban entre los 14 y 16 años (grado noveno - once).Esta prueba piloto aporta elementos de construcción importantes en el marco de este tema, para que otros trabajos complementen este para la elaboración de una prueba final.

3.1. ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LA ESCUELA

La resolución de problemas escritos en lengua natural es un aspecto importante en los lineamientos curriculares de la matemática, ya que cumple con cinco procesos generales en la actividad matemática, los cuales son: formular y resolver problemas, la modelación, la comunicación, el razonamiento, la formulación y ejercitación de procedimientos y algoritmos. Ya que hacen parte en la enseñanza y aprendizaje en la escuela. Observe como estos procesos se relacionan con los problemas escritos en lengua natural:

Cuando se habla del proceso de formulación, tratamiento y resolución de problemas, está relacionado con los problemas matemáticos escritos en lengua natural y un contexto inmediato, donde el quehacer matemático cobra sentido, es decir, que las situaciones propuestas en estos problemas están ligadas a experiencias cotidianas de los estudiantes. Esto plantea resolver problemas en los cuales es necesario inventarse una nueva forma de enfrentarse a ellos, pues no hay fórmulas específicas para resolverlos.

También, el proceso de razonamiento, permite la acción de ordenar y exponer ideas en la mente para llegar a la conclusión de problemas escritos en lengua natural, genera prácticas como justificar estrategias y procedimientos, formular hipótesis, hacer conjeturas, encontrar contraejemplos y argumentar las ideas.

En el proceso de la modelación, estos problemas son un modelo de los procesos de la vida cotidiana en diferentes campos científicos, como las ciencias naturales, la física, la geometría y las matemáticas mismas. Además, representa la realidad de una manera esquemática para que sea más comprensible.

Teniendo en cuenta que la modelación, el razonamiento y la formulación, tratamiento y resolución de problemas matemáticos, juega un papel importante en los procesos cognitivos del estudiante, algunos libros de textos escolares en matemáticas identifican los siguientes Estándares de Competencias que se relacionan con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, en la resolución de problemas y sistemas de ecuaciones que son los siguientes:

Los Estándares Básicos de Competencias (año) para el grado noveno relacionados con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, en la resolución de problemas y sistemas de ecuaciones, son los siguientes:

1. Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas (MEN, 2006, p. 87).
2. Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada(MEN, 2006, p. 87).
3. Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales(MEN, 2006, p. 87).

Estos estándares sirven como guía para los docentes en el trabajo con sistemas de ecuaciones con una, dos y tres incógnitas, para resolver problemas escritos en lengua natural aplicando distintos métodos.

En la mayoría de las instituciones colombianas, los docentes enfatizan el tercer estándar, enseñando a sus estudiantes a resolver sistemas de ecuaciones $2x2$ por los diferentes métodos: gráfico, sustitución, igualación, reducción y determinantes. Además, enseñan a resolver problemas matemáticos escritos en lengua natural donde deben hacer uso de los sistemas de ecuaciones $2x2$ para resolverlos.

3.1.1. DIFERENTES MÉTODOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES $\mathbf{2x2}$.

El método gráfico consiste en representar gráficamente las rectas que corresponden a las ecuaciones que forman el sistema, luego, el punto de corte entre las dos rectas determina la solución del sistema. Cuando se utiliza el este método se presentan los siguientes casos:

Caso 1. Las rectas se cortan en un solo punto: El sistema tiene una única solución, que se determina por los valores de "x" y "y" que corresponden a las coordenadas del punto de corte. Por ejemplo, la solución gráfica del sistema $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = 14 \end{cases}$

Se resuelve escribiendo la ecuación de forma explícita, así:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} y = -2x + 1 \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{2} \end{array}$$

Luego, se representan las rectas en el mismo plano y se ubica el punto de corte. Para este caso, las rectas se cortan en $(-2, 5)$entonces, la solución del sistema es $x = -2$ y $y = 5$. (Ver Figura 1).

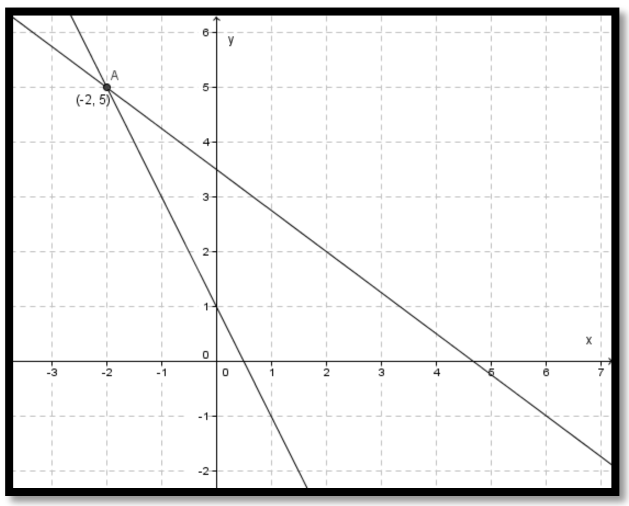


Figura 1. Representación cartesiana de dos rectas que se cortan en un mismo punto.

- **Caso 2, Las rectas coinciden en todos sus puntos**: El sistema tiene infinitas soluciones, es decir, es indeterminado. Por ejemplo, el sistema $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones. Al despejar y en el sistema de ecuaciones se tiene:

  $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = -\frac{2}{4}x + 1 \end{array}$ Al graficar se observa que las rectas coinciden en todos sus puntos (Ver Figura 2).

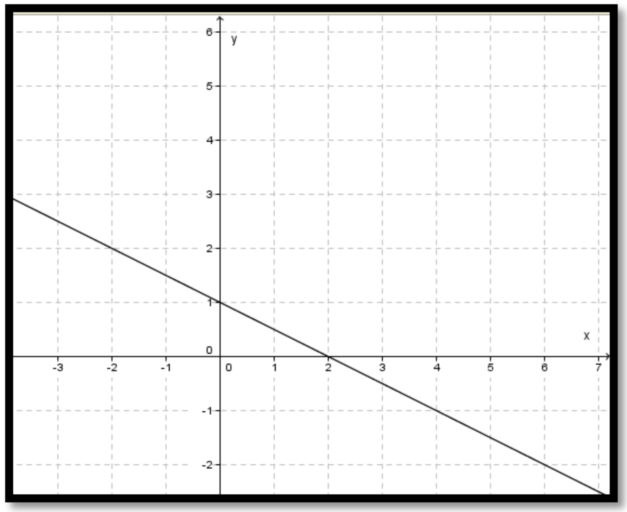


Figura 2. Representación cartesiana de dos rectas que coinciden en todos sus puntos.

- **Caso 3. Las rectas son paralelas:** Las rectas no tienen puntos en común, es decir, el sistema no tiene solución. Por ejemplo, el sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 4x + 10y = 20 \end{cases}$ no tiene solución.

  Al despejar y se tiene: $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 4x + 10y = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} y = -\frac{2}{5}x + 3 \\ y = -\frac{2}{5}x + 2 \end{matrix}$

  Las rectas no se cortan, por tanto, el sistema no tiene solución (Ver Figura 3).

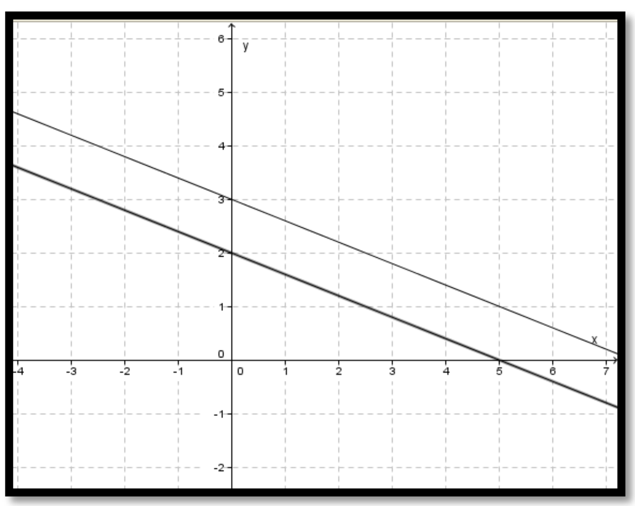


Figura 3. Representación cartesiana de dos rectas paralelas.

El método de sustitución, consiste en despejar una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones dadas. Después, se reemplaza la expresión obtenida en el primer paso en la otra ecuación y se resuelve. Luego, se encuentra el valor de la otra incógnita reemplazando, en cualquiera de las ecuaciones del sistema, el valor de la incógnita que se halló en el segundo paso. Por último, se verifican las soluciones. Por ejemplo, se tiene el sistema:

$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ Se despeja y en la ecuación $2x - y = 5$, obteniendo $y = 2x - 5$

Se reemplaza $y = 2x - 5$ en la segunda ecuación $3x - 2y = 7$

$3x - 2(2x - 5) = 7$, se resuelve las operaciones:

$$3x - 4x + 10 = 7$$

$$-x + 10 = 7$$

$$x = 3$$

Se reemplaza el valor de “x” en la primera ecuación “$\mathrm{y} = 2\mathrm{x} - 5$”

$$y = 2(3) - 5$$

$$y = 1$$

Por lo tanto, la solución del sistema es $x = 3$ y $y = 1$.

El método de igualación, se lleva a cabo por los siguientes pasos: primero, se despeja una de las dos incógnitas en las ecuaciones dadas. Segundo, se igualan las expresiones obtenidas en el primer paso y se resuelve. Tercero, se encuentra el valor de la otra incógnita reemplazando en alguna de las ecuaciones despejadas el valor de la incógnita encontrada en el segundo paso. Por último, se verifican las soluciones. Por ejemplo en el sistema:

$\begin{cases} 4x + y = 13 \\ -2x + 3y = -17 \end{cases}$ Se despeja y en las dos ecuaciones: $\begin{cases} y = -4x + 13 \\ y = -\frac{17}{3} + \frac{2}{3}x \end{cases}$

Se igualan las expre7siones:

$$-4x + 13 = -\frac{17}{3} + \frac{2}{3}x$$

Se resuelven las operaciones:

$$-4x - \frac{2}{3}x = -\frac{17}{3} - 13$$

$$\frac{-12x - 2x}{3} = -\frac{17 - 39}{3}$$

$$-14x = -56$$

$$x = 4$$

Luego, para halla el valor de y se reemplaza el valor de x en $y = -4x + 13$

$$y = 13 - 4(4)$$

$$y = -3$$

Finalmente, se comprueba que la solución hallada cumple con las condiciones del problema. Por tanto, la solución del sistema es:$x = 4$ y $y = -3$

El método de reducción, consiste en reducir las dos ecuaciones del sistema a una sola, por tanto, se siguen los siguientes pasos: primero, se multiplican los términos de una o ambas ecuaciones por constantes escogidas para que los coeficientes de x o y se diferencien solo en el signo. Segundo, se suman las ecuaciones y se resuelve la ecuación resultante, si es posible. Tercero, se encuentra el valor de la otra incógnita reemplazado en alguna de las ecuaciones originales el valor de la incógnita encontrada. Por ejemplo, en el sistema:

$\begin{cases} 8x - 3y = -3 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$ Se multiplican la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por (-3) para eliminar la incógnita“y”, luego se halla el valor de “x", así:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 16x - 6y = -6 \\ -15x + 6y = 3 \end{cases} \\ \hline \quad x + 0 = -3 \end{array}$$

$$x = -3$$

Como ya se encontró el valor de "x", entonces, se halla el valor de “y”. Para ello, se reemplaza$x = -3$, en cualquiera de las ecuaciones del sistema,$8x - 3y = -3$

$$8(-3) - 3y = -3$$

$$-24 - 3y = -3$$

$$-3y = -3 + 24$$

$$-3y = 21$$

$$y = -7$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = -3$ y $y = -7$.

El método de determinantes, también llamado MÉTODO DE CRAMER.Consiste en buscar el determinante del sistema (ΔS) por medio de una matriz $2x2$ y después se busca el determinante de cada una de las incógnitas x y y, cuando ya se tienen estos valores, se divide el determinante de cada incógnita por el determinante del sistema y así se encuentra el valor de x y y. Por ejemplo, si se tiene el sistema$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ -3x + 7y = -22 \end{cases}$ se debe acomodar de la siguiente manera:

$$\Delta S = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Para encontrar el determinante de x se hace una división dedeterminantes,de la siguiente forma:

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta S} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -22 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{(-2)\ \cdot (7) - (-2) \cdot (-22)}{(5)\ \cdot (7) - (-2) \cdot (-3)} = \frac{-14 - (-44)}{35 - (-6)} = \frac{-58}{29} = -2$$

Análogamente se hace para encontrar el determinante de y, se hace una división de determinantes, de la siguiente forma:

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{\Delta S} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & -22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{5\ \cdot (-22) - (-2) \cdot (-3)}{(5)\ \cdot (7) - (-2) \cdot (-3)} = \frac{-110 - 6}{35 - (-6)} = \frac{-116}{29} = -4$$

Se obtiene que le valor de las incógnitas $x = -2$ y $y = -4$

Con lo anterior se mostraron diferentes maneras de resolver sistemas de ecuaciones$2x2$, las cuales se usan usualmente en los textos escolares de matemáticas y que algunos docentestoman como guía para enseñar este tema, este proceso algorítmico hace parte del fenómeno de tratamiento, fenómeno que no se aborda en este trabajo porqueeste no se enfoca en observar las diferentes formas de resolver un sistema de ecuaciones sino en las características dela actividad cognitivade conversión de problemas matemáticos escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales, la conversión que muy poco se enfocan en enseñar los docentes de la mayoría de las instituciones educativas.

3.1.2. PONER UN PROBLEMA ESCRITO EN LENGUA NATURAL A UN SISTEMA DE ECUACIONES.

En el análisis de los problemas matemáticos escritos en lengua natural se tiene en cuenta el documento de Puig (1998) quien menciona unas reglas para poner un problema en ecuaciones, estas son las mencionadas en la páginas 38 y 39.

Estas reglas sirven como guía para formular un sistema que representa un problema matemático escrito en lengua natural, las cuales se tendrán en cuenta para realizar el análisis semiótico de algunos problemas,teniendo como base la teoría deDuval (2011) quien estudiael paso de problemasescritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales, es a esta proceso que le llama actividad cognitiva de conversión, y es en el cual los estudiantes tienen mayor dificultad.

Los problemas matemáticos escritos en lengua natural que usualmente se enseñan en la escuela son de diferentes contextos que más adelante se clasificaran en problemas de edades, problemas aritméticos, problemas geométricos y problemas de economía.A estos problemas se les realizará un análisis semiótico, teniendo en cuenta que para poderlos resolver en su respectiva representación matemática por medio de ecuaciones, se hace uso de las reglas mencionadas por Puig.

A continuación se mostrará el diseño del taller al cual se realizará el respectivo análisis semiótico basado en la teoría de Duval, dicho análisis será presentado empleando como base la estructurapresentada por Puig.

3.2. DISEÑO DEL TALLER

En este apartado se describen paso a paso las actividades realizadas para escoger nueve problemas matemáticos de un grupo de 90 problemas, dichos problemas están escritos en lengua natural y son formulados en diferentes contextos. Luego se presentan las categorías que se formaron para elaborar una rejilla de análisis que representa la estructura matemática de dichos problemas. Además, se realizó otra rejilla que representa la estructura semiótica de cada problema. Con la organización de las rejillas se redujola muestra de 90 problemas a 36.

A partir de la revisión de las rejillas, se escogió un problema representante de cada cruce de las categorías, siguiendo la diagonal como estrategia de selección, pero se incluyó un problema (no está en la diagonal) porque se identificó como un problema que tiene poca dificultad en su solución.

Se seleccionaron los nueve problemas que se emplearon en el diseño del taller con la finalidad de observar las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de convertir estos problemas escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones, además, se escogieron nueve para un análisis semiótico de cada uno de ellos y para que fuese un tamaño razonable al momento de realizar la prueba piloto a un grupo de 11 estudiantes.

Inicialmente se escogieron 90 problemas matemáticos escritos en lengua natural, estos se seleccionaron de diferentes libros de texto con distintas editoriales de grado octavo y noveno. Los libros empleados fueron:

- Procesos Matemáticos 8, Editorial Santillana.
- Matemáticas con Tecnología Avanzada 8, Editorial Prentice Hall.
- Matemáticas Sé 9, Editorial SM.
- Iniciación al Álgebra[7].

El criterio para la selección de los problemas, es que en su representación se obtuviera un sistema de ecuacioneslineales $2x2$,además, que los problemas fueran los más comunes entre los libros y más usados por los docentes.

Después de escoger los 90 problemas, se resolvió cada uno, es decir, se formularon las ecuaciones o los sistemas que permitían resolverlos,para encontrar los valores desconocidos y dar respuesta al problema.

---

[7]Los problemas que se escogieron del Libro Iniciación al Álgebra, hacen parte de una guía de los docentes que dictaron el Curso Iniciación al Álgebra, en la Universidad del Valle, periodo Agosto-diciembre de 2012.

Luego, se tuvo en cuenta el contexto de dichos problemas que están involucrados con otros campos científicos, como la economía, las finanzas, la medicina, la física, etc., para realizar una categoría común entre los problemas, clasificándolos,como: Problemas de Física, Problemas de Mezclas, Problemas de Economía, Problemas de Edades, Problemas Geométricos y Problemas Aritméticos, obteniendo una selección de 36 problemas.

3.2.1. PROBLEMAS DE FÍSICA

Este tipo de problemas está acompañado de conceptos físicos, es decir, problemas en los cuales se deben encontrar cantidades, como velocidad (v), tiempo (t) y distancia (x), estas cantidades físicas están relacionadas mediante la fórmula:

$$x = v \cdot t$$

Puig (1998)menciona que los "problemas de móviles" son una clase de problemas en los que dos objetos (normalmente dos vehículos) se mueven con movimientos uniformes por el mismo camino. En unas ocasiones, los móviles circulan en sentidos opuestos yendo al encuentro el uno con el otro; en otras ocasiones, los móviles circulan en el mismo sentido y uno va al alcance del otro.

Los problemas móviles se pueden clasificar, por tanto, en dos clases: problemas de *encontrar* y problemas de *alcanzar*:en los problemas de encontrar los móviles pueden salir a la vez o en momentos distintos, y en los problemas de alcanzar los móviles pueden salir desde el mismo lugar en momentos distintos, o los móviles salen a la vez desde lugares distintos.

Por tanto, estos problemas como se encuentran clasificados por Puig serán muy similares a los que se han seleccionado en este trabajo, observe que en los problemas de alcanzar los móviles pueden salir desde el mismo lugar en momentos distintos, por ejemplo:

los problemas 3 y 4 (Ver abajo). Los siguientes problemas físicos que se seleccionaron para este trabajofueron:

1. A una motocicleta le toma 1 hora y media más en la noche que en el día viajar entre dos ciudades. En la noche recorre un promedio de 40 millas por hora mientras que en el día puede recorrer un promedio de 55 millas por hora: encuentre la distancia entre las dos ciudades.
2. Una mujer puede ir caminando al trabajo a una velocidad de 3m/h, o en una bicicleta a una velocidad de 12 m/h. Si se le toma una hora más caminando que yendo en bicicleta, encuentre el tiempo que le toma caminar para ir al trabajo.
3. A las tres de la tarde sale de la ciudad un automóvil con una velocidad de 80km/h. Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120km/h. ¿A qué hora lo alcanzara? ¿A qué distancia de la cuidad?
4. Un bus sale del terminal de transporte de Bogotá hacia santa Marta, vía Bucaramanga, con velocidad de 58 km/h. dos horas más tarde sale otro bus de la misma terminal, con el mismo destino y la misma ruta, pero con velocidad de 74km/h ¿Cuándo alcanza el segundo bus al primero?

A los problemas anteriormente presentados, no se les da una referencia específica del libro del cual se tomó cada uno de ellos, dado que estos aparecen en varios libros de texto, los cuales son: Matemáticas Sé 9, Procesos Matemáticos 8, Matemática con Tecnología Avanzada e Introducción al Álgebra.

3.2.2. PROBLEMAS DE MEZCLAS

Los problemas de mezclas se dan principalmente en química, farmacología y en algunas situaciones de la vida cotidiana. Estos problemas están son combinaciones entre dos o más sustancias, en las cuales no ocurre una reacción química y cada uno de sus componentes mantiene su identidad y propiedad química. Por esto, es común encontrar en la mayoría de los problemas un porcentaje de la cantidad de un elemento en cada una de las sustancias antes y después de combinadas. Los problemas de mezclas que se seleccionaron para este trabajofueron:

5. Halle cuántos litros de alcohol puro deben añadirse a 15 litros de solución que contiene 20% de alcohol para que la mezcla resultante sea de 30% de alcohol.

6. ¿Cuántos litros de mezcla que contiene 80% de alcohol se deben añadir a 5 litros de una solución al 20% para obtener una solución al 30%?

7. Se tiene aceite de oliva de $6000 el litro y aceite de girasol de $4.000 el litro. Se desea obtener 1200 litros de mezcla de precio $5200 el litro. ¿Cuántos litros de ambos tipos de aceite hay que mezclar?

8. Un comerciante tiene dos clases de café, la primera a 40 € el kg y la segunda a 60 € el kg. ¿Cuantos kilogramos hay que poner de cada clase de café para obtener 60 kilos de mezcla a 50 € el kg?

9. Un joven tiene una barra de aleación de oro, una es de 12 quilates y la otra es de 18 (el oro de 24 quilates es puro, el de 12 quilates corresponde 12/24 de pureza, el de 18 a 18/24 de pureza y así sucesivamente) ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben mezclar para obtener 10 gramos de oro de 14 quilates?

3.2.3. PROBLEMAS DE ECONOMÍA

Los problemas de economía se caracterizan mayormente por estar relacionados con conceptos de sentido monetario, por ejemplo, el capital que tiene una persona, la inversión de dicho capital y la ganancia que obtiene a futuro. Los problemas de economíaque se seleccionaron para este trabajofueron:

10. El costo de tres lápices y cuatro cuadernos es de $ 9000. El costo de dos lápices y tres cuadernos es de $ 6500 ¿cuánto cuesta cada uno de estos útiles?

11. Una persona desea invertir $ 6.000.000 en dos cuentas de ahorro. Una ellas le paga un interés anual del 6% y la otra una tasa de interés anual del 7.5% ¿Cuánto debe invertir en cada cuentas para obtener $ 400.000, en las dos cuentas, por concepto de interés al cabo del primer año?

12. Samuel invirtió parte de los $ 5.000.000 que tenía en un C.D.T (Certificado de Depósito a Término), que le paga un interés de 28% anual, el resto lo depositó en una cuenta de ahorros, donde le pagan el 19% anual. Cuando se venció el primer año comercial, Samuel recibió $ 1.328.000 por concepto de intereses ¿Cuánto invirtió Samuel en el C.D.T y cuanto depósito en la cuenta de ahorros?

13. La señora Beecham invirtió parte de US $12,00 en un certificado de ahorros a 9% de interés simple. El resto se invirtió en un título que producía 14%. Si recibió un total de US $1.400 de interés por el primer año, ¿Cuánto dinero invirtió en el título**?**

14. Un hombre va al correo para comprar $132.000 en estampillas de $400 y $500. ¿Cuantas estampillas de cada precio puede comprar si adquiere 300?

15. Una compañía agrícola tiene una granja de 100 acres, en los cuales produce lechugas y repollos, sembrar cada acre de repollo requiere de 600 horas de mano de obra y cada acre de lechuga 400 horas de mano de obra. Si se dispone de 4500 horas y se van a utilizar todos los recursos humanos y de tierra ¿Cuántos acres de lechuga y cuántos de repollo se pueden sembrar?

3.2.4. PROBLEMAS DE EDADES

Este tipo de problemasgeneralmentese componede historias de personascon edades que cambian en determinado tiempo, ya sea en la actualidad, en el pasado o en el futuro. Los problemas de edadesque se seleccionaron para este trabajofueron:

16. La edad de una madre es el cuádruplo de su hijo. Dentro de 20 años, la edad de la madre, será el doble que la de su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?

17. Las dos terceras partes de la edad de A excede en 4 años a la de B, y, hace 8 años, la edad de A era doble que la de B. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?

18. Hace cinco años mi edad era la tercera parte de la edad de mi abuela, dentro de 13 años la edad de mi abuela será el doble de la mía ¿Cuál es la edad mía y la de mi abuela?

19. Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que Bill. Encuentre la edad de John.

20. Miguel tiene 4 años más que su primo Ignacio y, dentro de 3 años, entre los dos sumarán 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

21. La suma de las edades de un padre y su hija es 56 años. Hace 10 años, la edad del padre era el quíntuple de la edad que tenía la hija. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

3.2.5. PROBLEMAS GEOMETRÍCOS

Los problemas de geometría están estrechamente relacionados con el pensamiento espacial, en donde se tienen en cuenta los conceptos de perímetro y área de cualquier figura geométrica, especialmente de rectángulos y triángulos. Los problemas de geometríaque se seleccionaron para este trabajofueron:

22. Un rectángulo tiene un perímetro de 24 cm. Si el lado mayor se disminuye en 1 cm y el lado menor se duplica, el nuevo rectángulo tiene un perímetro de 30cm ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo original?

23. El perímetro de un triángulo isósceles mide 20cm. El lado desigual mide 4cm menos que los lados iguales. Calcula cuánto mide cada lado.

24. Un campo rectangular que es 20 metros más largo que ancho esta circundado de exactamente 100 m de cercado ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

25. Se necesitan 72metros de alambre para cercar una parcela rectangular. El largo de la parcela excede en 4m el ancho. Encuentra las dimensiones de la parcela.

26. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide la mitad de lo que mide el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?

27. Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°. Si el mayor de los dos ángulos complementarios es 15° mayor que dos veces el menor, encuentre la medida de los dos ángulos.

28. Un pedazo de cuerda de 72metros se utiliza para hacer un triángulo isósceles. ¿Cuál será la medida de sus lados, si la relación del lado a la base es de 3 a 2?

29. El perímetro de un rectángulo es de 50 cm y el ancho es 2/3 de la altura. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

30. Una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos trozos. Uno mide tres metros más que la cuarta parte del otro ¿Cuál es la medida de cada trozo?

3.2.6. PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Este tipo de problemas generalmenterelacionan dos números que al hacer una serie de operacionesmatemáticas básicas: sumar, restar, multiplicar y dividir; se pueden encontrarlos dos números desconocidos.Los problemas aritméticosque se seleccionaron para este trabajofueron:

31. El dígito de las unidades de un número es 3 unidades menos que el dígito de las decenas. Si el número es 3 menos que 7 veces la suma de sus dígitos, encuentre el número**.**

32. La diferencia de dos números es 25. Encuentre los dos números, si el mayor es una unidad menos que tres veces el menor.

33. Hallar dos números enteros cuya diferencia sea 32 y el mayor sea 6 más que tres veces el menor.

34. La suma de dos números es 20. El mayor de ellos es igual al menor aumentado en 4. Encuentre los números.

35. La suma de los dígitos de las decenas y de las unidades de un número de dos cifras es 12. Si el número se le resta 18, las cifras del número original se invierten. ¿Cuál es el número original?

36. La suma de las cifras de un número es 6. Cuando las cifras se intercambian, el número resultantes es 6 veces la cifra de las decenas del número original. ¿Cuál es el número?

3.2.7. CLASIFICACIÓN FINAL DE LOS PROBLEMAS PARA EL DISEÑO DEL TALLER

Después de haberse clasificado los seis grupos anteriores, se revisó la soluciónde los problemas de cada uno de estos, encontrando tipos de formas comunes en la formación del sistema de ecuaciones lineales, es decir, que al resolver el problema y al formar el sistema de ecuaciones lineales, se tenía que las dos incógnitas quedaban en un mismo lado de la igualdad (lado derecho,$ax + by = c$; $dx + ey = f$), o que las incógnitas quedaban a ambos lados de la igualdad (lado izquierdo y derecho, ($ax = by + c$; $ax = by$), entre otros tipos, obteniendo siete tipos comunes de formar un sistema de ecuaciones lineales.

Tabla 3. ***Siete tipos de sistemas de ecuaciones***

Tipos	Sistemas	Breve presentación
T1	$x = y + a$ $ax = b(y + a) + b$	Las letras a y c son cantidades conocidas en el enunciado y las letras x e y son cantidades desconocidas. En el sistema de ecuaciones aquí formado, se observa que en la primera ecuación una de las incógnitas está a un ladoy la otra al otro lado de la igualdad y la segunda ecuación está formada condos incógnitasen ambos lados de la igualdad.
T2	$x = y$ $ax = by - c$	Las letras a, b y c son cantidades conocidas y las letras x y y son cantidades desconocidas. En este sistema de ecuaciones, la primera ecuación muestra que las incógnitas están en ambos lados de la igualdad la igual que en la segunda ecuación.
T3	$ax + b = cy$ $dx + e = fy$	Las letras $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ y f son cantidades conocidas y las letras x y y son las cantidades desconocidas. En este sistema de ecuaciones una de las incógnitas está a un lado de la igualdad y la otra está al otro lado.
T4	$ax + by = c$ $dx + ey = f$	Las letras $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ y f son cantidades conocidas y las letras x y y son las cantidades desconocidas. En este sistema de ecuaciones las dos incógnitas están en un solo lado de igualdad y en el otro lado están las cantidades conocidas.
T5	$y = ax + b$ $cx + dy = e$	Las letras $a,\ b,\ c,\ d$ y e son cantidades conocidas y las letras x y y cantidades desconocidas. En el sistema de ecuaciones aquí formado, se observa que en la primera ecuación una de las incógnitas está a un lado de la igualdad y la otra está al otro lado.En la segunda ecuación está formada por las dos incógnitas en un solo lado de la igualdad y en el otro lado de la igualdad están las constantes.
T6	$x + y = c$ $bx = cy$	Las letras $a,\ b,\ c,\ d$ y e son cantidades conocidas y las letras x y y cantidades desconocidas. El sistema de ecuaciones aquí formado, se observa que en la primera ecuación las incógnitas están en un mismo lado de la igualdad y en la segunda ecuación tiene una incógnitas en un solo lado de la igualdad y en el otro lado de la igualdad está laotra
T7	$ax + by = c$ $ax + by = cy + dx$	Las letras $a,\ b,\ c,\ d$ y e son cantidades conocidas y las letras x y y cantidades desconocidas En el sistema de ecuaciones aquí formado, se observa que en la primera ecuación las incógnitas están en el mismo lado de la igualdad y en el otro lado está la constante. En la segunda ecuación está formada por las dos incógnitas en ambos lados de la igualdad, teniendo en cuenta que las constantes son las mismas.

Siete Tipos comunes de formar un sistema de ecuaciones lineales

En la siguiente tabla (Tabla 3) se presentan horizontalmente los seis grupos (físicos, mezclas, Economía, edades, geometría y aritméticos) y verticalmente los siete tipos de sistemas de ecuación (Tabla 2). Estas categorías permitieron identificar cuáles problemas se resolvían de la misma manera, es decir, que en su representación algebraica formaban un sistema de ecuaciones$2x2$ con la misma estructura, y por estas razón se consideraban como problemas semejantes.

También, se muestra la relación entre los seis grupos que hacen parte del contexto y los tipos de ecuación mencionados anteriormente, esta relación da como resultado las celdas que contienen la Tabla3, donde se ubican los 36 problemas.

Tabla 4. ***Rejilla de 36 problemas***

REJILLA MATEMÁTICA	**Grupo 1 Físicos (F)**	**Grupo 2 Mezclas (M)**	**Grupo 3 Economía (Ec)**	**Grupo 4 Edades (E)**	**Grupo 5 Geométricos (G)**	**Grupo 6 Aritméticos (A)**
T1 $\boldsymbol{x = y + a}$ $\boldsymbol{x = x + b}$	1, 2					
T2 $\boldsymbol{x = y}$ $\boldsymbol{ax = bx - c}$	**3**, 4					
T3 $\boldsymbol{ax + b = cy}$ $\boldsymbol{dx + e = fy}$		5, **6**		16, 17, 18, 19,		31
T4 $\boldsymbol{ax + by = c}$ $\boldsymbol{dx + ey = f}$		7, 8, 9	**10**, 11, **12**, 13, 14, 15		22	
T5 $\boldsymbol{y = ax + b}$ $\boldsymbol{cx + dy = e}$				**20**	23, 24, 25	32, **34**
T6 $\boldsymbol{x + y = c}$ $\boldsymbol{ax = by}$				21	26, 27, 28, **29**, **30**	33
T7 $\boldsymbol{ax + by = c}$ $\boldsymbol{ax + by = cy + dx}$						35, **36**

Estructura de 36 problemas escritos en lengua natural, clasificados verticalmente por grupos y horizontalmente por los tipos en los que se forma el sistema de ecuaciones lineales.

En la Tabla 3, las celdas en las que se cruzan las dos categorías (Grupos y Tipos), permiten dar una mirada a ciertas características generales de los sistemas mediante los cuales se propuso la solución de los problemas. Por ejemplo, en el cruce de las categorías del Grupo 3 (economía) y T4, hay una mayor concentración de problemas, lo cual indica que en ese contexto se privilegia un solo tipo de sistema para resolver los problemas; algo similar ocurre con el cruce de las categorías del Grupo 5 (Geometría) y T6.

Nótese que en la Tabla 3, existen muchas celdas vacías, lo que implica que hay diferentes tipos de ecuación que no se relacionan con los grupos de contexto mencionados anteriormente y viceversa. Además, que en los grupos F (Físicos) y M (Mezclas) solo se relacionan con dos tipos de ecuación.

Para el grupo F (Físicos) los dos tipos de ecuación son T_1 y $T_{2,}$y para el grupo M (Mezclas)los dos tipos de ecuación son T_3 y $T_{4.}$En el grupo E (Edades) y G (Geométricos) se relacionan con tres tipos de ecuación que son T_3, $T_{4,}$ $T_{5\text{ y}}$ T_6. El grupo A (Aritméticos) es el másdiverso, ya que se encuentra en varias de los tipos de ecuación que son: $T_{3,}$ $T_{5,}T_{6\text{ y}}$ $T_{7.}$ Y por último, tenemos el grupo Ec(economía) que es el menos diverso ya que todos los problemas se encuentran en la clasificación $T_{4.}$

De esta manera se seleccionaron los nueve problemas que se emplearon en el diseño del taller con la finalidad de observar las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de convertir estos problemas escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones, además, se escogieron nueve para un análisis semiótico de cada uno de ellos y para que fuese un tamaño razonable al momento de realizar la prueba piloto a un grupo de 11 estudiantes.

A partir de esta revisión de las características de los problemas que se puede ver en la Tabla 3, se escogió un problema representante de cada cruce de las categorías, siguiendo la diagonal de la tabla como estrategia de selección, teniendo en cuenta que solo un problema (número 34) no se encontraba en la diagonal, ya que se identificó como un problema sencillo de resolver. De esta manera se seleccionaron los nueve problemas que se emplearon en el diseño del taller,con la finalidad de observar las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de convertir estos problemas escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones, y que tenían una estructura diferente en el tipo de ecuación; además,se escogieron nueve para un análisis semiótico de cada uno de ellos y para que fuese un tamaño razonable al momento de realizar la prueba piloto a un grupo de 11 estudiantes.

Con el taller así diseñado, se realizó una prueba piloto a un grupo de 11 estudiantes, de los grados noveno y once. Los problemas seleccionados para el taller fueron: 3, 6, 10, 12, 20, 29, 30, 34 y 36, los cuales quedaron organizados como se muestra a continuación.Esta prueba piloto sirve como perspectiva de exploración para otro (s) trabajo (s) en el marco de este tema, para la complementación de una prueba final.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

KATHERINE LEMOS
NASLY DAYANA HERRERA

ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES COGNITIVAS PRESENTES EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO RELACIONADOS CON LA CONVERSIÓN DE EXPRESIONES EN LENGUA NATURAL A UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Escribe en las hojas el proceso que usarás, para resolver los siguientes problemas:

1. La suma de dos números es 20. El mayor de ellos es igual al menor aumentado en 4. Encuentre los números.

2. El costo de tres lápices y cuatro cuadernos es de $ 9000. El costo de dos lápices y tres cuadernos es de $ 6500 ¿cuánto cuesta cada uno de estos útiles?

3. ¿Cuántos litros de mezcla que contiene 80% de alcohol se deben añadir a 5 litros de una solución al 20% para obtener una solución al 30%?

4. Una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos trozos. Uno mide tres metros más que la cuarta parte del otro ¿cuál es la medida de cada trozo?

5. Miguel tiene 4 años más que su primo Ignacio, y dentro de 3 años, entre los dos sumarán 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

6. A las tres de la tarde sale de la cuidad un automóvil con una velocidad de 80km/h. Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120km/h. ¿A qué hora lo alcanzará? ¿A qué distancia de la cuidad?

7. El perímetro de un rectángulo es de 50 cm y el ancho es 2/3 de la altura. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

8. Samuel invirtió parte de los $ 5.000.000 que tenía en un C.D.T (Certificado de Depósito a Término), que le paga un interés de 28% anual, el resto lo deposito en una cuenta de ahorros, donde le pagan el 19% anual. Cuando se venció el primer año comercial, Samuel recibió $ 1.328.000 por concepto de intereses ¿Cuánto invirtió Samuel en el C.D.T y cuanto depósito en la cuenta de ahorros?

9. La suma de las cifras de un número es 6. Cuando las cifras se intercambian, el número resultantes es 6 veces la cifra de las decenas del número original. ¿Cuál es el número?

3.3. ANÁLISIS DEL TALLER

Teniendo en cuenta el taller anterior, en este apartado se mostrará un análisis semiótico detallado de cada problema, se tendrá en cuenta inicialmenteel documento de Puig (1998)quien muestra un análisis de la resolución de problemas matemáticos escritos en lengua natural, luego se tendrá en cuenta la teoría de Duval, para realizar el análisis semiótico detallado de cada problema.

Puig propone que el análisis de los problemas sea dividido en cuatro fases: comprender el problema, elaborar un plan para resolverlo, ejecutar el plan y, finalmente, revisar y extender el trabajo realizado; esto se utilizó para tener una idea de los posibles pasos que se han de llevar a cabo para resolver un problema, como los propuestos en el taller.

Con Duval el análisis se hace en dos momentos, en el primerose estudian las dos operacionesasociadas a la conversión y en el segundo paso se estudian los criterios de congruencia y no congruencia de los problemas.

El primer momento tiene que ver con escoger una incógnita para designar con un símbolo uno de los objetos ya designados en el enunciado, este símbolo generalmente es una letra cualquiera que representa alguna frase de un problema propuesto. Después de haber escogido la incógnita y haber designado el objeto, se procede a relacionar las cantidades desconocidas con las conocidas dadas por el enunciado y de esta manera formar la ecuación.

El segundo momento tiene que ver con identificar los criterios de congruencia y no congruencia entre los registros de representación en cada problema.

ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LOS PROBLEMAS

A continuación se muestra la estructura del análisis semiótico de los nueve problemas seleccionados anteriormente; primero, se identifica el tipo de ecuación y al grupo que pertenece cada problemasegún la estructura matemática y el contexto en el que se encuentren; segundo, se explican las dos operaciones referenciales a la actividad cognitivade conversión (la designación – redesignación y la escritura de la ecuación que representa a cada enunciado)teniendo en cuenta la estructura presentada por Puig, y por último, se muestra el cumplimiento o no de los criterios de congruencia (correspondencia semántica, univocidad semántica terminal y orden lineal) para determinar si son problemas difíciles de resolver.

Problema 1. La suma de dos números es 20. El mayor de ellos es igual al menor aumentado en 4. Encuentre los números.

Este problema hace parte del Grupo 6, Aritmético (A) y del tipo de ecuación, T5($y = ax + b;\ cx + dy = e$). Problema número 34 de la Tabla 3.

Las cantidades desconocidas del problema son:

Valor numérico del número mayor

Valor numérico del número menor

Las cantidades conocidas del problema son:

La suma entre las cantidades desconocidas (dato, 20)

Diferencia entre las cantidades (dato, 4)

Las relaciones entre las cantidades desconocidas y los datos conocidos:

La primera proposición que presenta el enunciado es: “La suma de dos números es igual a 20” Estas dos cantidades (la suma de los dos números) que se relacionan con el dato (20) se pueden representar de la siguiente manera:

Numero + otro número $= 20$

Si se designa con la letra “x” a uno de los números y con “y” al otro número. Entonces, la proposición “la suma de dos números es 20” queda reducida lexicalmente mediante la expresión algebraica:

$$x + y = 20 \qquad (1)$$

La segunda proposición que presenta el enunciado es: “El mayor de ellos es igual al menor aumentado en 4” relaciona una cantidad desconocida con el dato dado (4). En este caso el número mayor se debe igualar al número menor más cuatro, que se puede representar de la siguiente manera:

Número mayor = otro número menor $+$ 4

Para reducir el léxico, se designa la letra “x” como el número mayor y con “y”al número menor, pues es en estaproposición donde se menciona que uno de esos números es menor y el otro es mayor. La expresión algebraica que representa la proposición es:

$$x = y + 4 \qquad (2)$$

Nótese que en esta proposición existe una redesignación funcional, ya que para saber el valor de una de las incógnitas es necesario hacer uso de las condiciones que pone el problema, cuando dice que el número mayor es igual al menor más cuatro, tal como lo muestra la anterior expresión algebraica.

Si se escoge (objeto de anclaje) la letra “y” para hacer la redesignación a la frase “El mayor de ellos es igual al menor aumentado en 4”, seobtiene otra expresión algebraica$y = x - 4$ que no cumple dos criterios de congruencia(correspondencia semántica y orden lineal).

En relación con la congruencia, se retoma lo presentado en la página 35, 36 y 37, allí se muestra claramente que este problema cumple con dos criterios de congruencia (correspondencia semántica y univocidad semántica).

Por lo tanto, como no se cumple uno de los criterios (orden lineal) en la primera ecuación se dice que es un problema no congruente, es decir que hay dificultad en convertir este problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales, es decir, que sí hay dificultadpara comprender el enunciado del problema.

Problema 2. El costo de tres lápices y cuatro cuadernos es de $ 9000. El costo de dos lápices y tres cuadernos es de $ 6500 ¿cuánto cuesta cada uno de estos útiles?

Este problema hace parte del grupo 3, Economía (Ec) y del tipo de ecuación, T4 ($ax + by = c$; $dx + ey = f$), problema número 10 de la Tabla 3.

El enunciado habla de las cantidades:

Precio de lápices (cantidad desconocida)

Precio de cuadernos (cantidad desconocida)

Número de lápices (datos: 3 y 2)

Número de cuadernos (datos: 4 y 3)

Costo total de lápices y cuadernos (datos: $ 9000 y $ 6500)

El enunciado habla de una relación entre esas cantidades. En la primera proposición "El costo de tres lápices y cuatro cuadernos es de $ 9000". En esta proposición hay dos cantidades que no se conocen las cuales son:*El precio de lápices y el precio de los cuadernos*, pero aun así estas cantidades se relacionan con los datos dados en el enunciado, se podría representar de la siguiente manera:

Precio total de los útiles = precio de lápiz x cantidad + precio de cuaderno x cantidad.

Se debe multiplicar el precio del lápiz por la cantidad de lápices, para saber el precio total de los lápices. Lo mismo pasa con los cuadernos, para conocer el precio total de los cuadernos, se debe multiplicar la cantidad de cuadernos por el precio de cada cuaderno.

Reduciendo el léxico de la primera proposición del enunciado, se designa la letra “x” como el precio de los lápices y a la letra “y” como el precio de los cuadernos. Entonces, la expresión algebraica que se forma seria la siguiente:

$3x + 4y = 9000$ (1)

En la segunda proposición “El costo de dos lápices y tres cuadernos es de $ 6500”. En esta proposición se presenta el mismo razonamiento anterior, con la diferencia de que los datos con los que se deben relacionar las cantidades desconocidas son distintos. De tal manera que al reducir el léxico de la segunda proposición del enunciado, la expresión algebraica que se forma es la siguiente:

$2x + 3y = 6500$ (2)

La ecuación (1) relaciona la cantidad de lápices y cuadernos con el costo total de cada uno de ellos. Análogamente pasa con la ecuación (2).

Teniendo las dos ecuaciones anteriores,que permiten encontrar la solución del problema, se observará si se cumplen los criterios de congruencia:

El criterio de correspondencia semántica, se cumple en las dos ecuaciones, ya que sus unidades significantes corresponden en los dos registros; un ejemplo de esto es la letra “y” (la conjunción), una unidad significativa en el registro de la lengua natural, corresponde con la unidad significativa de llegada con el signo “+”.

El criterio de univocidad semántica terminal, se cumple en las dos ecuaciones, ya que a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante elemental el registro de llegada.

El criterio de orden lineal se cumple, ya que las unidades significantes de las ecuaciones conservan el mismo orden de las frases del enunciado. Ejemplo: “El costo de tres lápices y cuatro cuadernos es de $ 9000" hace referencia a "$3x + 4y = 9000$" y la proposición "El costo de dos lápices y tres cuadernos es de $ 6500", que hace referencia a la expresión $2x + 3y = 6500$.

Entonces, como se cumplen los tres criterios, se puede decir que este problema es totalmente congruente, lo que implica que no habría ningún grado de dificultad para comprender el enunciado del problema, es decir, que es fácil hacer laactividad cognitiva de conversión, lo que permite encontrar el costo de cada lápiz y cuaderno.

Problema 3. ¿Cuántos litros de mezcla que contiene 80% de alcohol se deben añadir a 5 litros de una solución al 20% para obtener una solución al 30%?

Este problema hace parte del grupo 2, Mezclas (M) y del tipo de ecuación, T3 ($ax + b = cy$; $dx + e = fy$).Problema número 6 de la Tabla 3.

Las cantidades conocidas del problema son:

Los litros de la solución (5 litros)

El porcentaje de litros de alcohol que tiene la mezcla (80 %)

El porcentaje de litros de alcohol que tiene la solución (20 %)

El porcentaje de litros de la solución resultante que contiene alcohol (30 %).

Las cantidades desconocidas del problema son:

Los litros de mezcla que contiene alcohol

Los litros de solución mezclada que contiene alcohol.

En este problema no hay una relación explícita entre las cantidades conocidas y desconocidas como en otros problemas, lo que dificulta su solución. Esto ocurre porque el contexto del enunciado es complejo y difícil de entender, además, se necesita de conocimientos aritméticos y de conceptos básicos de la química.

Se puede construiruna relación que representa los litros de la solución y los litros de la mezcla que contiene alcohol, para obtener los litros de solución mezclada que contiene alcohol, es la siguiente:

Litros de la solución + Litros de la mezcla que contiene alcohol = Litros de solución mezclada que contiene alcohol.

Para reducir el léxico de la relación, se designa con la letra “x” a los litros de la mezcla que contiene alcohol, y con la “y” a los litros de solución mezclada que contiene alcohol. Entonces, la expresión algebraica que se forma seria:

$5 + x = y \qquad (1)$

Otra relación que representa los porcentajes de alcohol que hay en la solución, en la mezcla de alcohol y en la solución después de ser mezclada,es representada de la siguiente manera:

Porcentaje de alcohol en la solución + Porcentaje de alcohol de la mezcla que contiene alcohol = Porcentaje de alcohol de la solución resultante.

Esto implica multiplicar el porcentaje de alcohol en la solución (20 %) por los litros de la solución (5), luego sumarle el producto del porcentaje de alcohol de la mezcla que contiene alcohol (80%) por los litros de la mezcla de alcohol (x), lo cual da como resultado el porcentaje de alcohol de la solución resultante (30%) por los litros de la solución resultante (y).Quedando la siguiente expresión algebraica:

$$(20\%)5 + (80\%)x = (30\%)y$$

Pero para resolver la anterior expresión algebraica es necesario saber o recordar cómo determinar el porcentaje de un número. Por lo tanto,para encontrar el porcentaje de los datos dados en el enunciado “$(20\%) \cdot 5,\ (80\%) \cdot 1\ y\ (30\%) \cdot 1$”, se debe de realizar el producto entre el dato y el numero dado en el porcentaje y así obtener un resultado, el cual se debe dividir entre 100, tal como se muestra a continuación:

$$20\% \cdot 5 = \frac{20 \cdot 5}{100} = 1 \qquad 80\% \cdot 1 = \frac{80 \cdot 1}{100} = 0.8 \qquad 30\% \cdot 1 = \frac{30 \cdot 1}{100} = 0.3$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se reduce el léxico con las letras anteriormente designadas, la expresión algebraica obtenida es:

$$1 + (0{,}8)x = (0{,}3)y \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones anteriores, se verifica los criterios de congruencia así:

Lasecuaciones(1) y (2), no son congruentes, porque el criterio de correspondencia semántica entre las unidades significantes en los dos registrosesconfuso, ya que los porcentajes que aparecen en el enunciado son difíciles de relacionarlos con los datos dados,impidiendoidentificar lo que se pide encontrar. Además, no cumplen el criterio de orden lineal, porque el problema como está escrito lingüísticamente no conserva el mismo orden de la escritura algebraica que forma las dosecuaciones.

Por tanto, este problema no es congruente pues no cumple con los dos criterios mencionados anteriormente, pero este problema se hace más complejo y difícil de comprenderya que necesita de otros conocimientos aritméticos parasu solución, lo que implica que hay mayor dificultad para convertir este problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales.

Problema 4. Una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos trozos. Uno mide tres metros más que la cuarta parte del otro ¿cuál es la medida de cada trozo?

Este problema hace parte del grupo 5, Geometría (G)y del tipo de ecuación, T6 ($x + y = c$; $ax = by$).Problema número 30 de la Tabla 3.

Las cantidades desconocidas del problema son:

La medida del primer trozo de alambre

La medida del segundo trozo de alambre

Las cantidades conocidas del problema son:

La medida del trozo completo de alambre (48 metros)

Las relaciones entre las cantidades desconocidas y conocidas del problema son:

La primera proposición **"**Una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos trozos**".** Aquí existe una relación entre un dato conocido y dos datos desconocidos que son la medida de los dos trozos. Aunque no se sabe la medida de ellos, se sabe que si se unen esos dos pedazos su medida total será de 48 metros. Lo cual se podría representar de la siguiente manera:

Medida total del alambre = un pedazo + otro pedazo

Para reducir el léxico, se designa con la letra "x" a la medida del primer trozo de alambre y a "y" como la medida del segundo trozo de alambre. Entonces, lo anterior se representa con la siguiente expresión algebraica:

$$x + y = 48 \qquad (1)$$

La segunda proposición "Uno mide tres metros más que la cuarta parte del otro" hace referencia a que uno de los trozos cortados del alambre es tres metros más grande que la cuarta parte del otro pedazo. Observemos como se relacionan las cantidades desconocidas con los datos dados en el enunciado:

Un pedazo de alambre + tres metros = cuarta parte del otro pedazo de alambre.

Para reducir el léxico, se hacen relaciones entre las cantidades ya designadas y los datos dados anteriormente, obteniendo la expresión algebraica:

$x + 3 = \frac{y}{4}$ (2)

Con esta ecuación se puede encontrar la medida de uno de los trozos de alambre.

Al tener las dos ecuaciones que permiten encontrar el resultado del problema, se observará si se cumplen los criterios de congruencia:

En la proposición “Una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos trozos”, no se cumple el criterio de correspondencia semántica, porque la unidad significante en la lengua natural “se cortan” no corresponde con la unidad significante en el sistema de representación simbólico con el signo “+”, pues no hay una palabra que haga referencia al signo “$+$” como adición, añadir o sumar, pero si está la palabra “cortan” lo que puede dar a entender que es una división, por ejemplo.

Si se hace la conversión del enunciado en lengua natural “Una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos trozos” a la ecuación$\mathrm{x} = 48 - \mathrm{y}$,plantea una mayor dificultad en el cumplimiento de los factores de congruencia, ya que no se cumple con el criterio de correspondencia semántica, pues la unidad lexical “se cortan” no corresponde con la unidad lexical del signo “$-$“. Tampoco cumple con el criterio de orden lineal porque “Una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos trozos”, no está en el mismo orden con la representación simbólica.

La ecuación (2) no cumple con el criterio de orden lineal porque en la proposición “Uno mide tres metros más que la cuarta parte del otro” , no conserva el orden entre sus unidades significantes ya que primero se escribe el signo “+” en la ecuación y después el número 3. Además de esto, tampoco cumple con el criterio de correspondencia semántica, ya que la palabra “mide” no hace referencia al signo igual “=”.

Con lo anterior se deduce que el problema no es congruente porque no cumple con dos criterios de congruencia, lo que implica que hay dificultad de convertirel problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones, es decir, quees difícilpues se necesita conocer el concepto de fracción para poder representar el problema dado.

Problema 5.Miguel tiene 4 años más que su primo Ignacio y, dentro de 3 años, entre los dos sumarán 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Este problema hace parte del grupo 4, Edades (E) y del tipo de ecuación, T5 ($y = ax + b$; $cx + dy = e$). Problema número 20 de la Tabla 3.

Las cantidades desconocidas del problema son:

La edad de Miguel en la actualidad

La edad de Ignacio en la actualidad

Las cantidades conocidas del problema son:

La suma de las edades de Miguel e Ignacio, dentro de tres años (20 años)

Las relaciones entre las cantidades desconocidas del problema son:

Miguel tiene 4 años más que su primo Ignacio

Esta relación hace referencia a la edad de los dos en la actualidad, que se puede representar de la siguiente manera:

Edad de miguel = edad de Ignacio + 4 años

Para reducir el léxico, es necesario designar las siguientes incógnitas así:

"x" como la edad actual de Miguel

"y" como la edad actual de Ignacio.

Con estas designaciones se puede representar algebraicamente la relación de las edades de Miguel e Ignacio en la actualidad, de la siguiente manera:

$x = y + 4$ (1)

En la frase "Dentro de 3 años, entre los dos sumarán 20 años" hay una redesignación funcional, pues a cada letra designada inicialmente se le añade el valor numérico "más tres", el cual hace referencia a las edades de Miguel e Ignacio dentro de tres años, las cuales serán:

$\mathrm{x} + 3$, la edad de Miguel dentro de tres años

$\mathrm{y} + 3$, la edad de Ignacio dentro de tres años

Como ya se han designado las edades después de tres años, la proposición indica que la suma de esas edades es 20 años, una representación de ello es:

Edad de miguel + 3 años +Edad de Ignacio + 3 años = 20 años

Para reducir el léxico y haciendo uso de las designaciones y re designaciones anteriores, la representación algebraica quedaría de la siguiente manera:

$(x + 3) + (y + 3) = 20$ (2)

En relación con los criterios de congruencia, se puede ver que:

La ecuación (1) corresponde al enunciado "Miguel tiene 4 años más que su primo Ignacio", esta proposición no cumple con el criterio de orden lineal porque en el registro de la lengua natural está primero "4 años más que su primo Ignacio" y en el registro de representación simbólico está al contrario $y + 4$.

La ecuación (2) corresponde a la proposición "dentro de 3 años, entre los dos sumarán 20 años.", porque ya se han designado las edades de Miguel e Ignacio dentro de 3 años y dice que al sumar estas edades da 20 años. En esta ecuación no se cumple el criterio de correspondencia semántica, ya que a cada unidad significante de la proposición "dentro de 3 años y entre los dos sumarán 20 años" le corresponde una unidad de registro de llegada, pero en este caso no se hace explícito en el enunciado en lengua natural, la igualdad "="que se observa en el registro de llegada (2).

Como no se cumple con por lo menos uno de los criterios sepuede decir que el problema no es congruente, lo que implica que hay dificultad de convertirel problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones, es decir, que es fácil de comprender,si se olvida que las edades de las personas tienen distintos momentos (pasado, presente y futuro), será difícil comprender y resolver el problema.

Problema 6. A las tres de la tarde sale de la cuidad un automóvil con una velocidad de 80km/h. Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120km/h. ¿A qué hora lo alcanzará? ¿A qué distancia de la ciudad?

Este problema hace parte del grupo 1, Físicos (F)y del tipo de ecuación, T2 ($x = y;\ ax = by - c$). Problema número 3 de la Tabla 3.

Para resolver este problema hay que tener en cuenta las relaciones que hay entre la velocidad, el tiempo y la distancia, tal cual como lo ha enseñado la física. La siguiente fórmula representa la relación de las letras v, t yx .

$$x = vt$$

Estas letras, se han designado durante mucho tiempo de la siguiente manera:

"x" se designa como la distancia

"v" se designa como la velocidad

"t " se designa como el tiempo

Tener en cuenta la fórmula que relaciona la distancia, velocidad y tiempo, la cual hace parte de un contexto físico, servirá de ayuda para representar el problema planteado en un sistema de ecuaciones, que permita hallar la solución correcta del enunciado propuesto.

Las cantidades conocidas del problema son:

Velocidad del automóvil (dato: 80 km/h)

Velocidad de la moto (dato: 120 km/h)

Tiempo de salida de la moto (dato: 2 horas más tarde que el automóvil)

Las cantidades desconocidas hacen referencia a:

Distancia recorrida por el automóvil

Distancia recorrida por la moto

Tiempo recorrido por el automóvil

Tiempo recorrido por la moto

Para desarrollar este problema primero se designan las cantidades desconocidas y conocidas así:

$v_1 =$ Velocidad del automóvil $= 80km/h$

$v_2 =$ Velocidad de la moto $= 120km/h$

x_1 es la distancia recorrida por el automóvil

x_2 es la distancia recorrida por la moto

t_1 es el tiempo recorrido por el automóvil

t_2 es el tiempo recorrido por la moto

El enunciado presenta una relación entre las cantidades desconocidas, conla siguiente información "A las tres de la tarde sale de la cuidad un automóvil con una velocidad de 80km/h. Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120km/h". Este enunciado indica que primero sale el automóvil a las 3:00 pm con una velocidad de 80 km/h y después de dos horas, es decir que a las 5:00 pm sale la moto en su persecución con una velocidad de 120 km/h.

Se redesigna la expresión algebraica$t_2 = t_1 - 2$, ya que esta expresión representa el tiempo de ventaja o desventaja de uno de los dos vehículos, que en este caso sería la moto que sale más tarde que el automóvil.Se observa que la expresión no es clara al querer decir que el tiempo de la moto es igual al del automóvil menos dos horas, esto el lector debe deducirlo, ya que se pueden cometer errores en la proposición “Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de $120km/h$”, ya que la palabra “mas” hace referencia a una suma y no a una resta.

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene que para resolver este tipo de ejercicios se debe igualar las distancias, para responder a la pregunta ¿a qué hora alcanzara la moto al automóvil?, de esta manera se mostraránlas relaciones que hay entre las incógnitas de la siguiente manera:

$x_1 = x_2$ (1)

Lo cual indica que:

La distancia recorrida por el automóvil = distancia recorrida por la moto

Como se había explicado inicialmente se debe hacer uso de la ecuación $x = vt$, y de esta manera designar el valor de cada vehículo.

Para el automóvil:

Distancia = velocidad x tiempo

En el lenguaje algebraico y haciendo uso de la designación se transforma en la siguiente ecuación:$x_1 = (80)t_1$

Nótese que los valores desconocidos se dejan indicados.

Para la moto:

La ecuación algebraica que representaría seria:$x_2 = (120)t_2$

Aquí se debe hacer una sustitución, ya que el valor de t_2 ya se había redesignado anteriormente, lo cual quedaría de la siguiente manera:$x_2 = (120)(t_1 - 2)$

Con lo anterior se pueden igualar las cantidades en términos de una sola incógnita con sus respectivos datos dados por el enunciado, así:

$$80t_1 = (120)(t_1 - 2) \qquad (2)$$

Para poder solucionar esta última ecuación es necesario dejarla en términos de una sola incógnita para poder conocer su valor y así encontrar las respuestas a las preguntas dadas en el enunciado.

La ecuación (2), se da a partir de lo que equivalex_1 y x_2.

En relación con los criterios de congruencia, se puede observar que:

La ecuación $80t_1 = (120)(t_1 - 2)$no cumple con el criterio de correspondencia semántica, ya que si se observa la proposición: "Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120km/h"pareciera que se pudiera formar una ecuación con signo ¨+¨, de la forma $t_2 = t_1 + 2$pero la ecuación correcta es $\mathrm{t}_2 = \mathrm{t}_1 - 2$, por tal motivo no hay una correspondencia semántica.

Además, el criterio de orden lineal no se cumple, ya que las unidades significantes de la proposición "Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120 km/h" no conservan el mismo orden de la ecuación $\mathrm{t}_2 = \mathrm{t}_1 - 2$, tampoco la ecuación (2).

El criterio de univocidad semántica terminal, se cumple en las dos ecuaciones, ya que a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante elemental el registro de llegada.

Entonces, se puede decir que este problema no es congruente porque no se cumplen dos criterios, este tipo de problemas es bastante complejo de comprender y resolver pues necesita de conceptos físicos para su solución.lo que implica que hay mayor de convertireste problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones.

Problema 7. El perímetro de un rectángulo es de 50 cm y el ancho es 2/3 de la altura. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

Este problema hace parte del grupo 5, Geometría (G)y del tipo de ecuación, T6($x + y = c;\ ax = by$).Problema número 29 de la Tabla 3.

Para resolver este tipo de problemas hay que considerar que el estudiante debe recordar o manejar el concepto de perímetro de una figura geométrica, que es la suma de las longitudes de todos los lados de una figura, en este caso será la de un rectángulo. El perímetro de un rectángulo es igual a dos veces el ancho "a" más dos vences el largo "b", perímetro de un rectángulo $= 2(a + b)$

La cantidad conocida del problema es:

El perímetro del rectángulo (50 cm)

Las cantidades desconocidas del problema son:

El ancho del rectángulo

La altura del rectángulo

La primera proposición del enunciado "El perímetro de un rectángulo es de 50 cm", se puede reducir lexicalmentedesignando las siguientes letras:

"a" como el ancho del rectángulo

"b" como la altura del rectángulo

Y teniendo en cuenta el concepto de perímetro, la expresión algebraica que representa esta proposición es la siguiente:

$2(a + b) = 50$ (1)

La relación entre la cantidad conocida y desconocida del problema está dada por la proposición: "el ancho es 2/3 de la altura", una representación en lengua natural seria:

Ancho = 2/3 de la altura

Nótese que aquí se hace una redesignación para poder conocer el valor de cada incógnita desconocida. Reduciendo el léxico de esta proposición, la expresión algebraica que la representa es la siguiente:

$$a = \frac{2}{3}b \qquad (2)$$

Teniendo las dos ecuaciones que permiten hallar el resultado del problema, se observará si se cumplen los criterios de congruencia:

La ecuación (1) corresponde al enunciado: "El perímetro de un rectángulo es de 50 cm". Este enunciado no cumple con el criterio de correspondencia semántica porque para la expresión "El perímetro de un rectángulo", el estudiante debe hacer uso del concepto de perímetro y escribir toda la expresión algebraica "$2(\mathrm{a} + \mathrm{b})$" a la cual ésta hace referencia.

La segunda ecuación corresponde al enunciado: "y el ancho es 2/3 de la altura.", en este enunciado hay una redesignación funcional del ancho del rectángulo con respecto a la altura del mismo. Aquí se cumple el criterio de orden lineal entre las unidades significantes, tanto en lengua natural como en el sistema de representación simbólico. Pues el enunciado "y el ancho es 2/3 de la altura." está en el mismo orden lineal como se encuentra en la ecuación (2).

Por tanto, se puede decir que este problema no es congruente porque no cumple con el criterio de correspondencia semántica, esto significa que hay dificultad para convertir este problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales, es decir, que hay cierta dificultad para comprender el problema ya que una incógnitaestá definida en términos de la otra y para poder resolverse se necesita de conocimientos geométricos en la actividad cognitiva de conversión.

Problema8.Samuel invirtió parte de los $ 5.000.000 que tenía en un C.D.T (Certificado de Depósito a Término), que le paga un interés de 28% anual, el resto lo deposito en una cuenta de ahorros, donde le pagan el 19% anual. Cuando se venció el primer año comercial, Samuel recibió $ 1.328.000 por concepto de intereses ¿Cuánto invirtió Samuel en el C.D.T y cuanto depósito en la cuenta de ahorros?

Este problema hace parte del grupo 3, Economía (Ec)y del tipo de ecuación, T4 ($ax + by = c$; $dx + ey = f$). Problema número 12 de la Tabla 3.

En este tipo de problemas hay que considerar que el estudiante debe recordar como determinar el porcentaje de un número, para tener todos los términos necesarios en la solución del problema.

Las cantidades desconocidas del problema son:

La cantidad de dinero invertida en el CDT

La cantidad de dinero invertida en una cuenta de ahorros

Las cantidades conocidas del problema son:

El capital o totalidad de dinero invertido por Samuel en las dos cuentas ($5.000.000)

El pago de interés anual por el CDT (28 % = 0.28)

El pago de interés anual por la cuenta de ahorros (19 % = 0.19)

El total de interés recibido en el año por las dos cuentas ($ 1.328.000).

Si se designa a

“x” como la cantidad de dinero invertido en el CDT

"y" como la cantidad de dinero invertido en una cuenta de ahorros

Este problema es complejo ya que se debe buscar en el enunciado qué cantidades desconocidas se deben relacionar con los datos conocidos, pues no hay proposiciones explicitas que las relacionen.

Teniendo en cuenta las designaciones anteriores y reduciendo el léxico, la primera expresión que se puede formar es la siguiente:

$5000000 = x + y$ (1)

Esta ecuación relaciona la cantidad de dinero invertida en cada cuenta y el total de dinero que tenía Samuel en un principio, antes de invertirlos. Esta relación no está explicita en el enunciado.

La segunda ecuación que representa la otra parte del enunciado es la siguiente:

$0.28x + 0.19y = 1328000$ (2)

Esta ecuación se relaciona las ganancias obtenidas en cada cuenta por concepto de interés, y el interés anual ganado por las dos cuentas juntas. Esta relación tampoco está explicita en el enunciado.

En relación con los criterios de congruencia, se puede ver que:

En la conversión de la lengua natural al sistema de ecuaciones (1) y (2), no cumplen con el criterio de correspondencia semántica, porque las unidades significantes del enunciado no están explícitamente escritas, que manifiesten la escritura de las unidades significantes en la representación simbólica, por medio de los signos "+" e "=" como está planteado en lasecuaciones. Además, no cumplen con el criterio de orden lineal, pues no conservan el mismo orden en el cual están escritas en el registro de la lengua natural.

Como este problema no cumple con dos criterios (correspondencia semántica y orden lineal) se puede decir este problema no es congruente, es decir, que hay mayor dificultad para comprender el enunciado del problema pues hay que tener en cuenta otros conocimientos, como el porcentaje de un número, que permitirá realizar una exitosa conversión del problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales.

Problema9. La suma de las cifras de un número es 6. Cuando las cifras se intercambian, el número resultantes es 6 veces la cifra de las decenas del número original. ¿Cuál es el número?

Este problema hace parte del grupo 6, Aritmética (A)y del tipo de ecuación, T7 ($ax + by = c$; $ax + by = cy + dx$). Problema número 36 de la Tabla 3.

En este tipo de problemas hay que considerar el contexto matemático del sistema de numeración decimal, es decir, que es un sistema posicional en el cual el valor de cada dígito depende de su posición dentro del número. Al primero corresponde el lugar de las unidades, el dígito de las unidades (se multiplica por$10^0 = 1$); el siguiente las decenas (se multiplica por $10^1 = 10$); centenas (se multiplica por $10^2 = 100$); etc. Un ejemplo seria, el número 125, se escribe en el sistema de numeración decimal como:

$$125 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Para este caso solo se tendrá en cuenta la unidad y decena de un número.

Las cantidades desconocidas del problema son:

El dígito de las decenas del número

El dígito de las unidades del número

La cantidad conocida del problema es:

La suma de las cifras de un número es 6

La relación entre las cantidades desconocidas y conocida del problema es:

Cuando las cifras se intercambian, el número resultante es 6 veces la cifra de las decenas del número original.

Si se designa a

"x" como el digito de las decenas del número

"y" como el digito de las unidades del número

La primera proposición "la suma de las cifras de un número es 6". Hace referencias a dos cifras cualquiera que al sumarlas da 6. Una representación de ello en el lenguaje natural es el siguiente:

Cifra + cifra = 6

Reduciendo el léxico, su representación algebraica es:

$x + y = 6$ (1)

La segunda proposición "Cuando las cifras se intercambian, el número resultantes es 6 veces la cifra de las decenas del número original". La relación entre las cantidades desconocidas y el dato conocido se representa mediante la expresión algebraica:

$(10y + x) = 6x$ (2)

Al tener las dos ecuaciones que permiten encontrar el resultado del problema, se observará si se cumplen los criterios de congruencia:

La expresión algebraica (1) no cumple con el criterio de orden lineal porque en el registro de la lengua natural esta primero "la suma de las cifras" y en el registro de representación simbólico esta primero la letra "x" luego la suma de este digito con"y".

La ecuación (2) no cumple con el criterio de correspondencia semántica, ya que las unidades significantes de la proposición “Cuando las cifras se intercambian” corresponderían a la representación simbólica $(y + x)$ y no a la expresión real que es$(10y + x)$.

Por lo tanto, al no cumplircon los doscriterios(correspondencia semántica y orden lineal), se puede decir que el problema no es congruente, esto significa que el problema es complejo y difícil de comprender si no se tienen los conocimientos matemáticos sobre el sistema de numeración decimal para su solución, lo que implica una mayor dificultad en convertir este problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales.

El análisis semiótico de los nueve problemas anteriores, muestra que existe un grado de dificultad diferente en cada uno de ellos a la hora de resolverlos, ya que estos problemas son de diferentes contextos y en muchos de ellos no se cumplen los criterios de congruencia, lo que permite identificar que su escritura no es sencilla, es decir, que cuando se leen, no se comprenden de inmediato, ya que para ello se deben tener en cuenta conceptos básicos ya enseñados en otros años de escolaridad o de otras áreas del conocimiento. Estos problemas que son difíciles de “traducir” a un sistema de ecuaciones lineales son los que Duval llama problemas escritos en lengua natural no congruentes.

3.4. IMPLEMENTACIÓN DE LA PRUEBA PILOTO

Este trabajo usa lametodologíacualitativa de la observación en una prueba piloto que involucró la interacción entre los observadores y los estudiantes, durante la cual se recogieron datos verbales y no verbales(Taylor & Bogdan, 1996). Los participantes de esta prueba piloto fueronun grupo de 11 estudiantes, cuyas edades están entre los 14 y 16 años, de los grados noveno y once;ellos estuvieron implicados en la observación realizada para comprender lo que hacen, dicen, piensan e interpretan sobre cómo resolver problemas matemáticos escritos en lengua natural.

La observación se hizopara analizar las dificultades que los estudiantes presentaron en relación con la actividad cognitivade conversión de un problema matemático escrito en lengua natural.Esta metodología permitió que los estudiantes y observadores pudieran interactuar por medio de algunas grabaciones a las voces y filmaciones a los problemas que ellos resolvían, intercambiando preguntas y respuestas entre los participantes. A continuación se presentan los resultados de la prueba piloto del grupo de 11 estudiantes de los grados noveno y once.

RESULTADOS DE LA PRUEBA PILOTO

En este apartado se muestran las respuestas dadas por el grupo de 11 estudiantes al taller propuesto, los estudiantes resolvieron solo 7 de los 9 problemas que se proponen, las dos últimas preguntas no se respondieron y no se tiene en cuenta en esta parte, debido a que por falta de tiempo los estudiantes no terminaron completamente el taller.

Problema 1. La suma de dos números es 20. El mayor de ellos es igual al menor aumentado en 4. Encuentre los números.

- *Tres estudiantes lo resuelven de la siguiente manera:*

$$b + a = 20$$

$$b = a + 4$$

En la entrevista realizada a cada estudiante se encontró que designaban con la letra “a” al número mayor y a la letra “b” como el número menor. Aquí se puede evidenciar que efectivamente formaron el tipo de ecuación T5 ($y = ax + b;\ cx + dy = e$) (Ver Tabla 3) que es el correcto.

También, se observa que en la segunda ecuación designan de manera errónea pues se muestra que "b" es el número mayor y "a" es el número menor.

- *Dos estudiantes lo resuelven de la siguiente manera:*

$$20 = b + a + 4$$

$$b = 4a$$

En la entrevista realizada a cada estudiante se encontró que designaban con la letra "a" al número mayor y a la letra "b" como el número menor. Pero a diferencia de la respuesta anterior, forman otro tipo de ecuación **T6** $(\boldsymbol{x + y = c,\ ax = by})$ (Ver Tabla 3) que es incorrecto para este problema.

Aquí se observa un error en la designación, pues la segunda ecuación muestra que "b" es el número mayor y que "a" es el número menor, todo lo contrario a lo que habían anunciado con anterioridad. También, cometen un error cuando hacen el intento de formar la segunda ecuación, ya que en la entrevista un estudiante dice "como ya se tiene $20 = b + a + 4$, entonces, se suma$a + 4$ y eso es igual a 4a", con lo cual llegan a la conclusión de que $\mathrm{b} = 4\mathrm{a}$. Notese que aquí hay un error algebraico cuando intentan sumar expresiones numéricas con letras.

- *Un estudiante lo resuelve de la siguiente manera:*

$$a + b = 20$$

$$(a + 4) + b = 20$$

En la entrevista realizada al estudiante se encontró que designaban con la letra "*a*" al número mayor y a la letra "*b*" como el número menor. El estudiante realizó otro tipo de ecuación,que no está en la tabla del análisis semiótico realizada anteriormente (Ver Tabla 3), este sistema de ecuación que formó este estudiante evidentemente es erróneo.

Aquí se observa un error en la designación y en la formulación de la ecuación, pues el estudiante trata de generar una sola ecuación pero no sabe cómo hacerlo, porque se equivoca al sustituir la letra indicada para que quede bien formulada la ecuación.

- *Tresestudiantes lo resuelven por ensayos numéricos:*

$$20 - 4 = 16$$

$$\frac{16}{2} = 8 + 4 = 12$$

$$8 + 12 = 20$$

$$8 \cdot 8 = 16$$

$$16 - 4 = 12$$

$$8 + 12 = 20$$

Aquí se observa que los estudiantes tratan de resolver el problema sin necesidad de plantearse una ecuación, lo resuelven buscando dos número que sumados les de 20 y que el mayor de ellos sea el menor más cuatro, este resultado es fácil de encontrar ya que los números que deben encontrar están dentro de un rango pequeño de solo 20 números.

- *Tres estudiantes no resuelven el problema*

Con la recolección de datos y registros tomados a partir de las entrevistas, se puede deducir lo siguiente:

- En el ítem 3.3 se presenta el análisis semiótico de ese problema donde se identifican las cantidades conocidas y desconocidas, además, de las relaciones entre ellas que permiten construir el sistema de ecuaciones lineales que lo representa. En las respuestas que dan la mayoría de los estudiantes para este problema, no identifican de manera explícita en el papel, cuales son las cantidades conocidas (datos: 20 y 4) y desconocidas, (los dos números "x", "y") debido a que en el taller no se les pidió que identificaran estas cantidades, ellos simplemente se limitaron a realizar una ecuación que representara el problema propuesto.
- En relación con la congruencia, se puede decir que este problema no es congruente, por no cumplir con el criterio de orden lineal (ver en el análisis semiótico del problema en el ítem 3.3), esto implica que hay dificultad en la actividad cognitivade conversión. La mayoría de los estudiantes realizaron la conversión de este problema de manera errónea, lo cual corresponde con las expectativas que arrojó el análisis.
- En este tipo de problemas no importa mucho cuál de las dos incógnitas es la mayor o menor, pues al resolver el sistema de ecuaciones se obtendrá el mismo resultado.

Problema 2. El costo de tres lápices y cuatro cuadernos es de $ 9000. El costo de dos lápices y tres cuadernos es de $ 6500 ¿cuánto cuesta cada uno de estos útiles?

- *Cinco estudiantes lo resuelven de la siguiente manera:*

$$3p + 4c = 9000$$

$$2p + 3c = 6500$$

En la entrevista realizada a cada estudiante se encontró que designaban con la letra "p" como el costo de los lápices, ya la letra "c" como el costo de los cuadernos. Aquí se puede evidenciar que efectivamente forman el tipo de ecuación, T4 ($ax + by = c$; $dx + ey = f$), problema número 10 de la Tabla 3, lo cual es correcto.

Además, se observa que los estudiantes aunque no identifican las cantidades conocidas y desconocidas, realizan la actividad cognitivade conversión correcto al plantear el sistema de ecuaciones, aunque no sepan cómo resolver este sistema.

- *Un estudiante lo resuelve de la siguiente manera:*

$$3l + 4c = 7lc$$

$$2l + 3c = 5lc$$

En la entrevista realizada al estudiante se encontró que designaba con la letra "*l*" al costo de los lápices, y a la letra "c" como el costo de los cuadernos. Aquí se puede evidenciar que efectivamente forma el tipo de ecuación, T4 ($ax + by = c$; $dx + ey = f$), problema número 10 de la Tabla 3.

Observemos que este estudiante aunque tiene la estructura de la ecuación T4, no sabe relacionar las expresiones algebraicas con los datos dados por el enunciado, ya que deja de un lado los valores de $9000, para la primera ecuación y $6500 para la segunda ecuación, y lo que hace este estudiante para hallar las incógnitas, es sumar cada término de la expresión algebraica, sin tener en cuenta que las letras no son iguales, es decir que comete el error de sumar términos no semejantes de cada ecuación y el resultado que le da es el que reemplaza al otro lado de la igualdad como término independiente.

- *Un estudiantes lo resuelven por ensayos numéricos:*

$$9000/7 = 1286$$

Este estudiante no utiliza ninguna ecuación para realizar el problema, hace el intento de resolverlo por ensayo numérico, pero en definitiva no lo logra.

- *4 Estudiantes no resuelven el problema*

Con la recolección de datos y registros tomados a partir de las entrevistas, se puede deducir lo siguiente:

- En el ítem 3.3 se presenta el análisis semiótico de este problema donde se identifican las cantidades conocidas y desconocidas, además, de las relaciones entre ellas que permiten construir el sistema de ecuaciones lineales $2x2$ que lo representa. En las respuestas que dan la mayoría de los estudiantes para este problema, no identifican de manera explícita en el papel cuales son las cantidades conocidas (datos: 9000 y 6500) y desconocidas(costo de lápices y cuadernos) debido a que en el taller no se les pidió que identificaran estas cantidades, sin embrago cinco de estos estudiantes realizaron bien la conversión de este problema, esto ocurrió porque este problema es congruente, por cumplir con los tres criterios, lo cual generó un mejor rendimiento en la representación de dicho problema. Mientras que, los demás estudiantes solo se limitaron a realizar una expresión algebraica o numérica que representara el problema propuesto, lo cual indica que tuvieron dificultades de convertir este problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones, probablemente por no comprender el problema, además, la falta de conocer operaciones, por ejemplo, sumar letras o términos que no son semejantes obteniendo un resultado diferente al formar la ecuación.

Problema 3. ¿Cuántos litros de mezcla que contiene 80% de alcohol se deben añadir a 5 litros de una solución al 20% para obtener una solución al 30%?

- *Un estudiante lo resuelve de la siguiente manera:*

$80x + 5y = 20$

$x + y = 30$

En la entrevista realizada a este estudiante se encontró que no registra explícitamente la designación para cada incógnita ni lo menciona en el video. Aquí se puede evidenciar que forma un tipo de ecuación con la estructura deT4 ($ax + by = c$, $dx + ey = f$). Lo cual es erróneo, ya que este problema hace partedel tipo de ecuación, T3 ($ax + b = cy$; $dx + e = fy$). Problema número 6 de la Tabla 3.

Aquí se observa que el estudiante no sabe en sí qué es lo que le están pidiendo encontrar, además, confunde el contexto matemático de trabajar con porcentajes, que es la parte de un todo o de un número, con los números como tal.

- *Dos estudiantes lo resuelven de la siguiente manera:*

$$80\% + 5L = 20$$

$$70\% + 5L = 30$$

Aquí se observa que los estudiantes no saben qué es lo que se les está pidiendo encontrar, esto ocurre porque confunden el contexto matemático de trabajar con porcentajes y con los datos dados como tal. Además, porque en el problema no aparece una relación explícita de las cantidades conocidas y desconocidas.

- *Un estudiante lo resuelve por ensayos numéricos:*

  El estudiante trata de elaborar una regla de tres.

  30%   5

  X   80% $5 * 0.3 \,/\, 0.8 \;=\; 1.875L$

Se observa que el estudiante intenta resolver el problema utilizando una regla de tres, aparentemente encontrando el valor de "x", pero el estudiante no registra en el papel ni menciona en el video que designa la letra "x", esto ocurre porque el estudiante no sabe qué es lo que le están pidiendo encontrar, demostrando que no ha entendido el enunciado del problema, además, confunde el contexto matemático de trabajar con porcentajes y con números.

- *Siete estudiantes no resuelven el problema*

Con la recolección de datos y registros tomados a partir de las entrevistas, se puede deducir lo siguiente:

- En el ítem 3.3 se presenta el análisis semiótico de ese problema donde se identifican las cantidades conocidas y desconocidas delproblema, además, de las relaciones entre ellas que permiten construir el sistema de ecuaciones que lo representa. En las respuestas que dan la mayoría de los estudiantes para este problema, no identifican de manera explícita en el papel cuales son las cantidades conocidas (dato: 5 litros de solución, 80%, 20 % y 30% de alcohol que hay en la mezcla, solución y la mezcla resultante) y desconocidas debido a que en el taller no se les pidió que identificaran estas cantidades, además es posible que no comprendieron el enunciado, simplemente se limitaron a realizar una ecuación que intentará representar el problema propuesto. Además de esto, los estudiantes no manejaban el contexto en el que se encuentra el problema, ya que para su solución se deben tener en cuenta conocimientos previos de la aritmética y la química.

- Se puede decir que ninguno de los estudiantes realizó el problema de manera correcta, lo cual era de esperarse ya que en el análisis semiótico presentado se había dicho que este problema no es congruente, por no cumplir con dos criterios (correspondencia semántica y orden lineal), porque en el problema escrito en lengua natural no aparece una relación explicita de las cantidades conocidas y desconocidas pues son difíciles de identificar, factor que hace al problema no congruente y de mayor dificultad al convertirlo a un sistema de ecuaciones lineales.

Problema 4. Una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos trozos. Uno mide tres metros más que la cuarta parte del otro ¿cuál es la medida de cada trozo?

- *Dos estudiantes lo resuelven de la siguiente manera:*

$$x + y = 48$$

$$x + 3 = \frac{1}{4}y$$

En la entrevista realizada a cada estudiante se encontró que designaban con la letra "x" a un trozo de alambre y con la letra "y" al otro trozo de alambre. Aquí se puede evidenciar que efectivamente forma eltipo de ecuación, T6 ($x + y = c$; $dx = ey$). Problema número 30 de la Tabla 3.Aunque su designación no la dejan planteada en el papel, lo expresan de manera verbal en la entrevista grabada.

- *Dos estudiantes lo resuelven de la siguiente manera:*

$$x + y = 48$$

$$21x + 27y = 48$$

Aquí los estudiantes tratan de plantear el sistema de ecuaciones cuya estructura no está contenida en la tabla 3 del análisis semiótico presentado anteriormente, es notorio que no saben relacionar las cantidades conocidas con las desconocidas, y por ende forman un sistema de ecuación errónea.Tampoco designan las letras que utilizaron para formar el sistema.

- *Tres estudiantes lo resuelven por ensayos numéricos, una forma es:*

$$A = 48$$

$$48/2 = 24$$

$$24/4 = 6$$

$$6 + 3 = 9$$

$$9 + 39 = 48$$

Estos estudiantes dividen el dato que les proporciona el problema que es 48 metros de alambre que lo dividen en dos partes como lo dice la primera proposición del problema "*Una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos trozos*", sin tener en cuenta que no les están diciendo si los dos trozos de alambre que se cortan son iguales, obteniendo un resultado de 24. Luego, dividen los 24 en cuatro partes, siguiendo lo que dice el resto del problema "*Uno mide tres metros más que la cuarta parte del otro"*, como el resultado que obtienen es seis, le suman tres, obteniendo nuevesiendo éste el primer trozo de alambre y buscan otro númeroque sumado con nueve de 48, elnúmero es 39 que equivale al segundo trozo de alambre.

Estos estudiantes utilizaron la aritmética para resolver este problema, no utilizaron ningún procedimiento algebraico en particular, intentaron realizar el problema por ensayos numéricos, pero en definitiva no lo logran.

- *4 Estudiantes no resuelven el problema*

Con la recolección de datos y registros tomados a partir de las entrevistas, se puede deducir lo siguiente:

- En el ítem 3.3 se presentó el análisis semiótico de este problema donde se identifican las cantidades conocidas y desconocidas, además, de las relaciones entre ellas que permiten construir el sistema de ecuaciones que lo representa. En las respuestas que dan la mayoría de los estudiantes para este problema es que, no identifican de manera explícita en el papel cuales son las cantidades conocidas (48 metros) y desconocidas (medida de dos trozos de alambre) debido a que en el taller no se les pidió que identificaran estas cantidades, los estudiantes simplemente se limitaron a realizar una ecuación que representara el problema propuesto, y muestran notoriamente que se han olvidado de manejar el contexto, como el concepto de fracción.
- En relación con la congruencia, se puede decir que este problema no es congruente, ya que no cumple con dos criterios (orden lineal y correspondencia semántica) esto implica que en el problema escrito en lengua natural hay dificultad para comprender el enunciado de dicho problema por el contexto aritmético que utiliza. por lo cual solo dos estudiantes realizaron la conversión de manera correcta.

Problema 5. Miguel tiene 4 años más que su primo Ignacio, y dentro de 3 años, entre los dos sumarán 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

- *Un estudiante lo resuelve de la siguiente manera:*

$$(a + 4) + b = 20$$

$$(8 + 4) + 8 = 20$$

$$12 + 8 = 20$$

Aquí se observa que el estudiante trata de generar una sola ecuación pero no sabe cómo hacerlo, porque se equivoca al sustituir los valores de las letras "a" y "b", tratando de obtener el valor pedido, esto implica que le estudiante no tiene clara la designación para cada letra pues no lo registra en el papel ni en el video, llevándolo a una ecuación equivocada.

- *Un estudiante lo resuelve de la siguiente manera:*

$$x = Miguel \quad y = Ignacio$$

$$x + 3 + y + 3 = 20$$

$$x = y + 4$$

Este estudiante designó con la letra "x" como la edad de Miguel y con la letra "y" la edad de Ignacio. Aquí se puede evidenciar que efectivamente forma el tipo de ecuación, T5 ($y = ax + b$; $cx + dy = e$). Problema número 20 de la Tabla 3, lo cual es correcto.Además se puede evidenciar que el estudiante tiene claro la designación para las letras.

- *Tres estudiantes lo resuelven por ensayos numéricos, una forma es:*

$20 – 4 = 16$

$\frac{16}{2} = 8$

El estudiante propone que Miguel tiene la edad de 20 años y como la diferencia entre Miguel e Ignacio es cuatro, entonces, se los resta dándole como resultado 16 años, esos 16 los divide por dos obteniendo 8 años, esta división la hace partiendo de que son dos personas.

$8 + 4 = 12$

$12 + 8 = 20$

Luego, el estudiante toma los 8 años y le suma los 4 años más que le lleva Miguel a Ignacio, esto le da como resultado 12 años que sería la edad de Miguel y busca otro número que al sumarlo con 12 le de 20, encontrando el número 8 que equivale a la edad de Ignacio, encontrando así la edad de Miguel y de Ignacio.

9, 10, 11, 12 $\quad\quad$ $12 + 8 = 20$

5, 6, 7, 8

Esta es otra forma que encontró un estudiante para resolver el problema por medio de ensayos numéricos, buscando dos números que sumados den 20 y que tengan como diferencia 4, iniciando desde la pareja 9 y 5; 10 y 6; 11 y 7; 12 y 8, encontrando finalmente que al sumar 12 con 8 le da 20 y que al restarlos le da 4, dando a entender que la edad del Miguel es 12 años y la de Ignacio es 8 años.

Estos estudiantes no utilizaron ninguna ecuación en particular, intentaron realizar el problema por ensayos numéricos, pero en definitiva no lo logran.

- *6 Estudiantes no resuelven el problema*

Con la recolección de datos y registros tomados a partir de las entrevistas, se puede deducir lo siguiente:

- En el ítem 3.3 se presentó el análisis semiótico de este problema donde se identifican las cantidades conocidas y desconocidas, además, de las relaciones entre ellas que permiten construir el sistema de ecuaciones que lo representa. En las respuestas que dan la mayoría de los estudiantes para este problema es que,no identifican de manera explícita en el papel cuales son las cantidades conocidas(20 años) y desconocidas (edades de Miguel e Ignacio) debido a que en el taller no se les pidió que identificaran estas cantidades, pero sin embargo tres estudiantes se limitaron a realizar el problema por ensayos numéricos, y el estudiante que realizó la ecuación que permitió representar el problema propuesto, lo logró porque comprendió el problema escrito en lengua natural y porque si designó las cantidades conocidas y desconocidas del problema de manera explícita en el papel.

- En el análisis semiótico presentado en el ítem 3.3 se había dicho que este problema no es congruente, ya que no cumple con dos criterios (orden lineal y correspondencia semántica), esto implica que hay dificultad para comprender el problema escrito en lengua natural sino se tiene claro el contexto, pues si se olvida que las edades de las personas tienen distintos momentos (pasado, presente y futuro), será difícil comprender y resolver el problema. Por esta razón solo un estudiante realizó el problema de manera correcta.

Problema 6. A las tres de la tarde sale de la cuidad un coche con una velocidad de 80km/h. Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120km/h. ¿A qué hora lo alcanzará? ¿A qué distancia de la cuidad?

- *Unestudiante lo resuelve de la siguiente manera:*

$$D = \frac{V}{T}$$

$$D = \frac{80 \cdot 120}{3h \cdot 2h} = \frac{9600}{6h} = 1600\ km$$

$$T = \frac{V}{D}$$

$$T = \frac{9600}{1600} = 6h$$

Aquí se observa que el estudiante trata de resolver el problema usando la fórmula $x = v \cdot t$, el problemaes que el estudiante no recuerda bien las fórmulas que necesita aplicar, por lo que su resultado no es el correcto.

- *Dos estudiantes lo resuelven por ensayos numéricos, una forma es:*

Tiempo	3	4	5	6	7	8	9
Velocidad Automóvil	80	160	240	320	400	480	560
Moto							
Velocidad			120	240	360	480	

Aquí los estudiantes elaboran el esquema anterior para tratar de determinar a qué distancia se encuentran el automóvil con la moto, y como se evidencia en este esquema, el auto y la moto se encuentran a las 8 de la noche, lo que es incorrecto.

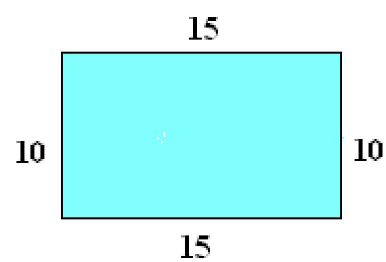
- *8 Estudiantes no resuelven el problema*

Con la recolección de datos y registros tomados a partir de las entrevistas, se puede deducir lo siguiente:

- En el ítem 3.3 se presentó el análisis semiótico de ese problema donde se identifican las cantidades conocidas y desconocidas, además, de las relaciones entre ellas que permiten construir el sistema de ecuaciones que lo representa. En las respuestas que dan la mayoría de los estudiantes para este problema, no identifican de manera explícita en el papel cuales son las cantidades conocidas(Velocidad del automóvil, 80km/h y de la moto, 120 km/h) y desconocidas(tiempo en que la moto alcanza el automóvil y la distancia a la que están de la cuidad) debido a que en el taller no se les pidió que identificaran estas cantidades, pero sin embargo algunos estudiantes trataron de dar una posible solución por medio de ensayos numéricos, otro trato de usar unas fórmulas para resolver el problema pero se les dificultó realizar la ecuación. Esta dificultad ocurre porque este problema no es congruente, ya que no cumple con dos criterios (orden lineal y correspondencia semántica), lo que indica que efectivamente se debe tener en cuenta el contexto de la física, para resolver este tipo de problemas, de lo contrario sería casi imposible resolverlo satisfactoriamente.

Problema 7. El perímetro de un rectángulo es de 50 cm y el ancho es 2/3 de la altura. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

- *Dos estudiante lo resuelve por ensayo numérico, una forma es:*



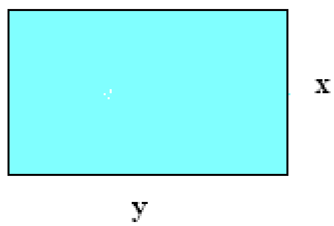
$$\frac{15}{3} = 5$$

$$5 \cdot 2 = 10 \; Pues\ toma\ 2\ de\ 3$$

Se puede observar que el estudiante conoce la definición de perímetro de un rectángulo, pues indica en el dibujo que dos lados del rectángulo son iguales, un lado mide 15 cm y el otro 10 cm, que al sumarlos se obtiene un perímetro de 50 cm.

Pero es el estudiante por medio de ensayo numérico quien inicia proponiendo los dos números 15 cm y 10 cm que al sumarlos le de 50 cm, después usa la frase del problema cuando menciona que “el ancho es 2/3 de la altura”,pues divide 15 en tres partes obteniendo 5, este 5 lo multiplica por 2 partes de las tres que menciona el problema, obteniendo como resultado el valor de 10 cm para el otro lado del rectángulo. Con este método el estudiante comprueba que estos valores son reales para la altura y el ancho del rectángulo, que era lo que se pedía encontrar en este problema.

- *Otra forma en que un estudiante lo resuelve por ensayo numérico:*



$$x = Altura y = Ancho$$

$$x + \frac{2}{3}y + x + y = 50$$

El estudiante designa a "x" como la altura y a "y" como el ancho del rectángulo, trata de elaborar una sola ecuación pero no lo logra pues no sabe cómo ubicar la otra incógnita en una sola ecuación.

- *9 Estudiantes no resuelven el problema.*

Con la recolección de datos y registros tomados a partir de las entrevistas, se puede deducir lo siguiente:

- En el ítem 3.3 se presentó el análisis semiótico de este problema donde se identifican las cantidades conocidas y desconocidas, además, de las relaciones entre ellas que permiten construir el sistema de ecuaciones que lo representa. En las respuestas que dan la mayoría de los estudiantes para este problema, no identifican de manera explícita en el papel cuales son las cantidades conocidas(perímetro del rectángulo, 50 cm) y desconocidas (dimensiones del rectángulo, largo y ancho)debido a que en el taller no se les pidió que identificaran estas cantidades, pero sin embargo algunos estudiantes trataron de dar una posible solución por medio de ensayos numéricos pero al final no lo lograron, sin embargo, un estudiante encontró el resultado adecuado para este problema, pero le fue difícil convertir el problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales. Esto porque el problema no es congruente, ya que no cumple con dos criterios (orden lineal y correspondencia semántica), lo que indica que hay dificultad para comprender el problema escrito en lengua natural. Es por esta razón, que la mayoría de los estudiantes no pudieron realizar el sistema de ecuaciones de este problema.

Con los resultados de este taller, se pudo observar que los estudiantes tienen errores de designación y redesignación, además, que no escribían en el papel a qué se referían cada una de las letras utilizadas en el desarrollo delos problemas. Se pudo dar cuenta de la designación de algunas letras gracias a las preguntas que se hicieron durante lasfilmaciones.

Otro error frecuente era que no sabían escribir el sistema deecuaciones, es decir, no sabían cómo relacionar las cantidades conocidas con las desconocidas del problema y por ello el sistema de ecuaciones en la mayoría de los estudiantes no era el correcto.

Finalmente,se puede notar que los estudiantes tuvieron cuatro tipos de comportamientos a la hora de resolver el problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales:

1. Quienes resolvían el problema por ensayo numérico.
2. Quienes daban cualquier respuesta por el afán de responder a la pregunta.
3. Quienes no manejaban el contexto y tenían problemas al designar y redesignar pues lo hacían con cualquier letra, lo que conllevaba a hacer un sistema de ecuaciones erróneo.

4. Quienes realizaban la designación, la redesignación y la puesta del sistema de ecuaciones correctamente, pero no sabían cómo resolverlo.

Teniendo en cuenta los comportamientos observados anteriormente, se puede deducir que los estudiantes presentan dificultades en su comprensión matemática, ya que les es difícil realizar un procedimiento correcto para representar este tipo de problemas. Además, presentan dificultades en hacer las operaciones matemáticas correctas para formar el sistema de ecuaciones lineales.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

CAPITULO IV

CONCLUSIONES

En este trabajo se logró caracterizar nueve problemas escritos en lengua natural (de un grupo de 90) que fueron los más comunes entre los libros y más usados por los docentes. Estos problemas están formulados en diferentes contextos, los cuales permitieron elaborar una rejilla matemática con la solución de 36 problemas, encontrando formas comunes en el tipo de formación del sistema de ecuaciones lineales; por ejemplo, que las dos incógnitas quedaban en un mismo lado de la igualdad (lado derecho). Además, se realizó otra rejilla que representó la estructura semiótica de cada problema, con la que se analizaron las características de la actividad cognitiva de conversión: la designación y redesignación funcional de un objeto. También se analizaron los criterios de congruencia, como una cualidad que tienen los registros de representación y mediante la cual se pueden medir la dificultad en el paso de una representación en un registro a otra representación en un registro distinto, en este caso es convertir problemas escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales.

- Con la solución de los 90 problemas se realizó una rejilla matemática que permitió encontrar siete formas o tipos comunes en los sistemas de ecuaciones lineales $2x2$, por ejemplo, que en algunos de los sistema de ecuaciones lineales, las incógnitas quedaban en un mismo lado de la igualdad (lado derecho) y en el otro lado quedaban las cantidades conocidas del enunciado del problema, o que una incógnita quedaba en un lado de la igualdad (lado izquierdo) y la otra incógnita quedaba en el otro lado (lado derecho) de la igualdad.

- Con las siete formas comunes encontradas en la rejilla matemática, se elaboró otra rejilla semiótica que contenía seis grupos comunes en el contexto de los problemas, para observar en detalle las dos operaciones de conversión. Con esta rejilla se redujo a 36 problemas que eran comunes el tipo de sistemas de ecuaciones y en los contextos. De la rejilla semiótica se seleccionaron nueve problemas representantes del grupo de 90, logrando identificar que:
  - Para convertir un problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales, primero, hay que designar la (s) incógnita (s) del problema que en algunos problemas es fácil identificar lo que se busca, debido a que en el enunciado del problema aparece explícito lo que se está pidiendo, esto conlleva a una redesignación funcional sencilla, lo cual permite relacionar las cantidades conocidas y desconocidas del problema para formar una ecuación apropiada. Mientras que, en la mayoría de los problemas es difícil designar la incógnita, porque en el enunciado del problema no es explícito lo que se desea encontrar o porque el contexto es confuso y no se entiende, esto impide una redesignación funcional apropiada, dando lugar a relacionar las cantidades conocidas y desconocidas del problema de manera errónea formulando una ecuación incorrecta.
  - También, el análisis semiótico de los problemas se realizó con la finalidad de hallar la congruencia y no congruencia de cada uno de ellos, con esto se pudo observar que no fue una tarea fácil para nosotras, pues aún hay dificultades en la comprensión lectora y en el manejo del contexto. Para encontrar la congruencia de estos problemas, hay que verificar si se cumplen los tres

criterios de congruencia: correspondenciasemántica, univocidad semántica y orden lineal. Si se cumplen estos criterios se puede decir que no hay dificultades para convertir un problema escrito en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales, pero si no se cumple uno de estos criterios se dice que hay dificultades en la conversión de estos problemas y que hay mayor dificultad cuando el contexto es difícil de comprender o es confuso.

- En el primer criterio de congruencia, correspondenciasemántica, debe corresponder las unidades significantes del registro de la lengua natural con las unidades significantes del registro algebraico (sistema de ecuaciones lineales), que por lo general en la mayoría de los problemas, es difícil de que cumpla.
- En el segundo criterio, univocidad semántica, cada unidad significante del registro de la lengua natural debe corresponder con solo una unidad significante del registro algebraico, que por lo general se cumple en la mayoría de los problemas y no generainconvenientes este criterio.
- En el tercer criterio, orden lineal, las unidades significantes de los dos registros (lengua natural) a (sistema de ecuaciones lineales) deben estar en el mismo orden, que por lo general en la mayoría de los problemas no se cumple porque las unidades significantes en los dos registros aparecen de manera desordenada.

Por lo tanto, en la mayoría de los problemas la no congruencia prevalece porque no se cumplen mayormente los criterios de correspondenciasemántica y orden lineal, esto implica que hay dificultad para convertir la mayoría de los problemas escritos en lengua natural a un sistema de ecuaciones lineales.

Con la realización de la prueba piloto se pudo observar que hay una variedad de representaciones en el proceso cognitivo de los estudiantes y que no todas son de tipo algebraico, sino que muchos utilizan medios, como la aritmética, pues los estudiantes trataban de resolver los problemas haciendo uso del ensayo numérico, dejando atrás procedimientos algebraicos. Adicionalmente, los videos y actividades realizados con el grupo de 11 estudiantes, se pudo comprobar que en la actividad cognitivade conversión de los problemas escritos en lengua natural a sistemas de ecuaciones lineales es una tarea difícil:

- Porque los estudiantes deben comprender el enunciado propuesto en el problema, además, tener conocimientos en otras áreas académicas, como la física, química, geométrica, entre otras.
- También, deben ser rigurosos al momento de resolver un problema es decir, designar las incógnitas del problema que permiten una redesignación funcional de otras cantidades desconocidas o no, explicitas o implícitas en el enunciado.
- Adicionalmente, los estudiantes deben aprender a relacionar las cantidades conocidas y desconocidas del problema para formular correctamente un sistema de ecuaciones.

Este trabajo permitió hacer un acercamiento frente a la profesión como futuras docentes, reflexionando sobre cómo crear nuevas estrategias didácticas con respecto al tema tratado en este trabajo, para que estas dificultades en los estudiantes y docentes se conviertan en virtudes, para ello se dan algunas recomendaciones para realizar un taller de manera correcta, y así los estudiantes puedan comprender mejor la tarea que deben realizar.

- Una recomendación es que al momento de realizar un taller como el propuesto en este trabajo, es importante escribir de manera explícita, que se debe nombrar cada una de las incógnitas (letras) que los estudiantes van a usar para cada problema.
- Otra recomendación es que al momento de realizar las observaciones se debe tener un lugar adecuado para esto y para los videos tener las herramientas acordes para este tipo de situaciones.
- Por último y no menos importante, se recomienda planear con anticipación el tiempo programado y el tiempo adicional en que los estudiantes se pueden demorar para solucionar cada problema.

BIBLIOGRAFÍA

Anzola Gonzáles, M., Vizmanos Buelta, J. R., Hervás, J. C., de los Santos, M. I., Castro Valencia, D. P., M. L., . . . Parras Rojas, I. E. (s.f.). *Matemáticas Sé 9.* SM.

Coleoni, E. A. (2001). La construcción de la representación en la resolución de un problema de física. *Investigacoes em Ensino de Ciências, 6*(Theconstruction of therepresentation in solving a physicsproblem), 285-298. Obtenido de http://www.icfes.gov.co/examenes/saber-pro/informacion-general/estructura-general-del-examen

D´Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 177-196.

Dávalos Mosquera, P. C., & Calderón Narvaez, N. F. (2011). *Potencialidades de algunas heurísticas utilizadas por estudiantes de grado octavo en la resolución de problemas algebraicos.* Cali, Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo.* (M. Vega Restrepo, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticcos y Aprendizajes Intelectuales* (Segunda, Universidad del Valle ed.). (M. Vega Restrepo, Trad.) Cali, Valle del Cauca, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2011). *El aprendizaje del algebra y el problema cognitivo de la designacion de objetos: Traducción comentada.* (M. Vega Restrepo, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structuras.*Utrecht: Reidel Publishing Co.

Henao, J., Murillo, C., Torrado, M., Mantilla, M., Pulido, M., Rojas, M., . . . Pullas, J. (2007). *Procesos Matemáticos 8.* Santafé de Bogotá, Colombia: Santillana S. A.

López Vicente, S., & Solaz Portales, J. J. (junio de 2009). Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de "traducción algebraica. *Investigaión y Experiencias Didácticas, 27* (2), 169-183.

Matemáticas con Tecnología Avanzada 8. (s.f.). Prentice Hall.

MEN. (2006). *Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas.* Santafé de Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Puig, L. (1998). *Poner un Problema en Ecuaciones.* Recuperado el 25 de Febrero de 2014, de http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf

Radford, L. (2006). Semiótica y educación matemática: introducción. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 7-22.

Recalde, L. C. (2013). *Cuarta Lectura: Las raices del algebra: Diofanto y Al-Khowarizmi.* cali: departamento de matematicas- universidad del valle.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1996). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* (Vol. 3). Barcelona, España: Paidós Ibérica, S.A.

Vallejo, F. (15 de 09 de 2009). *Didáctica del Álgebra: Área.* Recuperado el 10 de Mayo de 2013, de Revista Digital Ciencia y Didactica: http://www.enfoqueseducativos.es/ciencia/ciencia_22.pdf#page=141

Valoyes, L. E., & Malagón, M. R. (2006). *Formación del pensamient algebraico en la educción escolar*. Cali, Valle del Cauca, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

ANEXO 1

NOVENTA PROBLEMAS ESCRITOS EN LENGUA NATURAL

1. La diferencia de dos números es 25. Encuentre los dos números, si el mayor es una unidad menos que tres veces el menor.
2. Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°. Si el mayor de los dos ángulos complementarios es 15° mayor que dos veces el menor, encuentre la medida de los dos ángulos.
3. A cierta función de cine asistieron 700 personas, entre adultos y niños; cada adulto pago $ 400 y cada niño $ 150. Si la recaudación por entradas fue de $ 180.000 ¿Cuántos adultos y niños asistieron al cine?
4. La suma de dos números es 20. El mayor de ellos es igual al menor aumentado en 4. Encuentre los números.
5. Hace cinco años mi edad era la tercera parte de la edad de mi abuela, dentro de 13 años la edad de mi abuela será el doble de la mía ¿Cuál es la edad mía y la de mi abuela?
6. Durante la cosecha de café, dos campesinos recolectaron 860 medidas. Si el primero recolecto 100 medidas más que el segundo, ¿Cuántas medidas recolecto cada uno?
7. El costo de tres lápices y cuatro cuadernos es de $ 9000. El costo de dos lápices y tres cuadernos es de $ 6500 ¿cuánto cuesta cada uno de estos útiles?
8. Un rectángulo tiene un perímetro de 24 cm. Si el lado mayor se disminuye en 1 cm y el lado menor se duplica, el nuevo rectángulo tiene un perímetro de 30cm ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo original?
9. La suma de los dígitos de las decenas y de las unidades de un número de dos cifras es 12. Si el número se le resta 18, las cifras del número original se invierten. ¿Cuál es el número original?
10. La suma de las cifras de un número es 6. Cuando las cifras se intercambian, el número resultantes es 6 veces la cifra de las decenas del número original. ¿cuál es el número?
11. Dos números están en relación de 3/7, si el menor se disminuye en siete y el mayor se disminuye en tres, la relación es de 1/3 ¿Cuáles son esos números?
12. Una compañía agrícola tiene una granja de 100 acres, en los cuales produce lechugas y repollos, sembrar cada acre de repollo requiere de 600 horas de mano de obra y cada acre de lechuga 400 horas

de mano de obra. Si se dispone de 4500 horas y se van a utilizar todos los recursos humanos y de tierra ¿Cuántos acres de lechuga y cuantos de repollo se pueden sembrar?

13. Hallar dos números enteros cuya diferencia sea 32 y el mayor sea 6 más que tres veces el menor.
14. Una persona desea invertir $ 6.000.000 en dos cuentas de ahorro. Una ellas le paga un interés anual del 6% y la otra una tasa de interés anual del 7.5% ¿Cuánto debe invertir en cada cuentas para obtener $ 400.000, en las dos cuentas, por concepto de interés al cabo del primer año?
15. Un joven tiene una barra de aleación de oro, una es de 12 quilates y la otra es de 18 (el oro de 24 quilates es puro, el de 12 quilates corresponde 12/24 de pureza, el de 18 a 18/24 de pureza y así sucesivamente) ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben mezclar para obtener 10 gramos de oro de 14 quilates?
16. Una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos trozos. Uno mide tres metros más que la cuarta parte del otro ¿cuál es la medida de cada trozo?
17. Para el día del amor y la amistad, el periódico escolar publico mensajes personales de dos tipos, A y B. los mensajes del tipo A podían contener hasta seis palabras y si costo era de $ 1500, los mensajes de tipo B podían contener entre siete y doce palabras y si costo era de $ 2500. Se recibieron 113 mensajes y se recaudó por ello $ 207.500 ¿Cuántos mensajes de cada tipo se publicaron?
18. Samuel invirtió parte de los $ 5.000.000 que tenía en un C.D.T (Certificado de Depósito a Término), que le paga un interés de 28% anual, el resto lo deposito en una cuenta de ahorros, donde le pagan el 19% anual. Cuando se venció el primer año comercial, Samuel recibió $ 1.328.000 por concepto de intereses ¿Cuánto invirtió Samuel en el C.D.T y cuanto depósito en la cuenta de ahorros?
19. Un bus sale del terminal de transporte de Bogotá hacia santa Marta, vía Bucaramanga, con velocidad de 58 km/h. dos horas más tarde sale otro bus de la misma terminal, con el mismo destino y la misma ruta, pero con velocidad de 74km/h ¿Cuándo alcanza el segundo bus al primero?
20. Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que bilis. Encuentre la edad de John.
21. Una mujer de empresa planea invertir un total de US$24.000. Parte de él se pondrá en un certificado de ahorros que paga 9% de interés simple, y el resto en un fondo de inversiones.

22. A una motocicleta le toma 1 hora y media más en la noche que en el día viajar entre dos ciudades. En la noche recorre un promedio de 40 millas por hora mientras que en el día puede recorrer un promedio de 55 millas por hora: encuentre la distancia entre las dos ciudades.
23. Halle cuantos litros de alcohol puro deben añadirse a 15 L de solución que contiene 20% de alcohol para que la mezcla resultante sea de 30% de alcohol.
24. Trabajando sola, una bomba A puede llenar un tanque en 2 horas y una bomba B puede llenar el mismo tanque en 3. Determine que tan rápido las bombas pueden llenar el tanque trabajando juntas.
25. Un campo rectangular que es 20 metros más largo que ancho esta circundado de exactamente 100 m de cercado ¿Cuáles son las dimensiones del campo?
26. Encuentre tres números enteros consecutivos cuya suma sea 48
27. En cinco años Bryan tendrá tres veces la edad que tenía hace siete años; ¿Cuántos años tiene?
28. Una mujer puede ir caminando al trabajo a una velocidad de 3m/h, o en una bicicleta a una velocidad de 12 m/h. Si se le toma una hora más caminando que yendo en bicicleta, encuentre el tiempo que le toma caminar para ir al trabajo.
29. El lado mayor de un triángulo es 4 cm más largo que el lado menor. El tercer lado tiene 14 cm menos que el triple de la longitud del lado menor. Si el perímetro es 30 cm, ¿Cuál es la longitud de cada lado?
30. Josué presento un examen. Si debe sacar 99 en un segundo examen para tener un promedio de 73 en ambos exámenes, ¿cuánto saco en el primero?
31. George compro US $12.00 dólares en estampillas de 10c, 15c y 25c con un total de 57 estampillas. Si la cantidad de 15c que compro es el triplo de la 10c ¿Cuántas estampillas de cada clase compro?
32. La diferencia de los cuadrados de 2 números consecutivos pares es 108. Encuentre los dos números.
33. La señora Beecham invirtió parte de US $12,00 en un certificado de ahorros a 9% de interés simple. El resto se invirtió en un título que producía 14%. Si recibió un total de US $1,400 de interés por el primer año, ¿Cuánto dinero invirtió en el titulo?
34. Un auto viaja del punto A al punto B a una velocidad promedio de 55mph, y regresa a una velocidad de 50mph. Si todo el viaje tomo 7 horas, encuentre la distancia entre Ay B.

35. El perímetro de un rectángulo es de 50 cm y el ancho es 2/3 de la altura. Encuentre las dimensiones del rectángulo.
36. En tres exámenes de igual valor, Marian tiene un puntaje promedio de 77. Si el examen final vale 755 de cualquiera de los tres exámenes, encuentre el puntaje que Mirian debe sacar en el examen final para tener un promedio de 80.
37. El digito de las unidades de un número es 3 unidades menos que el digito de las decenas. Si el número es 3 menos que 7 veces la suma de sus dígitos, encuentre el número.
38. El área de un círculo es $\boldsymbol{60\pi cm^2}$ menos que el área e uno cuyo radio es 6 cm mayor. Encuentre le radio del círculo más pequeño.
39. Un estudiante saca un puntaje se 75 y 82 en sus dos primeros exámenes. ¿Qué puntaje en el próximo examen elevara a 85 su promedio?
40. La diferencia de las diagonales de un rombo es de 2m. Si a las dos las aumentamos en 2m el área aumenta en 16$\boldsymbol{m^2}$. Calcula las longitudes de las diagonales, el perímetro y el área de dicho rombo.
41. Los lados paralelos de un trapecio miden 15 cm y 36 cm respectivamente, y los no paralelos 13 y 20 cm. Calcula la altura del trapecio.
42. A las tres de la tarde sale de la cuidad un coche con una velocidad de 80km/h. Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120km/h. ¿A qué hora lo alcanzara? ¿A qué distancia de la cuidad?
43. Dos pueblos A y B, distan 155 km. A la misma hora salen de cada pueblo un ciclista. El de A viaja a una velocidad de 25km/h y el B a 33 km/h. ¿A qué distancia de cada pueblo se encuentran? ¿Cuánto tiempo ha trascurrido?
44. Dos grifos han llenado un depósito de 31$\boldsymbol{m^3}$ corriendo el uno 7 horas y el oro 2 horas. Después llenan otro depósito de 27$\boldsymbol{m^3}$ corriendo el uno a 4 horas y el otro a 3 horas. ¿cuántos litros vierte por hora cada grifo?
45. Un depósito se llena por un grifo en 5 horas y por toro en 2 horas. ¿Cuánto tardara en llenarse abriendo los dos grifos a la vez?
46. Encuentra dos enteros consecutivos positivos cuyo producto sea 756

47. Encuentra dos enteros pares consecutivos positivos cuyo producto sea 1848
48. La suma de un número y su reciproco es $\frac{401}{20}$. halla el numero
49. Encuentra la base y la altura de un triángulo con área $2m^{2,}$ si su base es 3m más larga que su altura.
50. Dos círculos tienen diámetros d_1 y d_2. demuestra que un círculo con diámetro $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ tienen la misma área que los dos círculos juntos.
51. La presión p, en libras por pie cuadrado del viento que sopla a v km por hora es $p = 0{,}003\ v^2$. si sobre un puente se registra una presión de $14{,}5\ lb$ por pie cuadrado. ¿cuál es la velocidad del viento?
52. Un grifo puede llenar un tanque en 5 horas menos que otro y juntos lo llenan en 5 horas. ¿en cuánto tiempo llena el tanque cada uno de los grifos?
53. Dos botes viajan en ángulo recto después de partir del mismo punto y al mismo tiempo. Después de 1 hora los botes se encuentran separados 15 Km. Si uno Viaja 3Km más rápido que el otro. ¿cuál es la velocidad de cada bote?
54. Si a X pesos se invierten a un interés compuesto del r por ciento anualmente, al final de dos años el capital será $C = X(1 + r)2$. ¿a que interés \$100.000 se convertirán en \$196.000 después de dos años?
55. Cuantos litros de mezcla que contiene 80% de alcohol se deben añadir a 5 litros de una solución al 20% para obtener una solución al 30%?
56. Encuentra tres enteros pares consecutivos tales que el primero más dos veces el segundo sea dos veces el tercero.
57. Encuentra las dimensiones de un rectángulo de 52m de perímetro, si su largo es 5m más que el doble de su altura.
58. Un hombre va al correo para comprar \$132.000 en estampillas de \$400 y \$500. ¿cuantas estampillas de cada precio puede comprar si adquiere 300?
59. Con la siguiente información halla la edad en la cual murió Diofanto, antiguo algebrista griego: fue un niño un sexto de si vida, después de un doceavo más le creció la barba; después de un séptimo más se casó y después de 5 años de matrimonio le llego un hijo, el hijo vivió la mitad de lo que vivió el padre y Diofanto murió 4 años después que su hijo.

60. Calcular las dimensiones de un rectángulo tal que la superficie es de 108 cm^2; sabiendo que uno de sus lados es igual a los $\frac{4}{3}$ del otro.
61. El producto de un número natural por su consecutivo es 156. halla su valor.
62. Si al triplo de un numero se le suma la mitad de su cuadrado, se obtiene el duplo del mismo número, ¿cuáles son los números que cumplen esa condición?
63. La suma de los ángulos interiores de cualquier triangulo es $180^{0.}$ si el menor de ellos mide la mitad del mayor y 14^0 menos que el intermedio. ¿Cuál es la medida de cada ángulo?
64. El perímetro de un triángulo es 38m. uno de los lados mide 2m más que el segundo y 5m más que el tercero. ¿Cuánto mide cada lado?
65. La longitud de un rectángulo es 3 veces y medio su ancho. Su perímetro es 108 cm. Encuentra sus dimensiones.
66. Un rectángulo y un cuadrado tienen ambos el mismo ancho pero el rectángulo tiene 5 metros más de altura. la suma de las áreas es 133^2. Encuentra las dimensiones de cada figura.
67. En un día, la maquina A coloca la tapa al doble de botellas que la maquina B. La máquina C tapa 500 botellas más que la maquina A. Las tres máquinas en total tapan 40.000 botellas en un día. ¿Cuántas botellas tapa cada una de las maquinas al día?
68. Muestra que es imposible encontrar tres números enteros consecutivos cuya suma sea 200 más que el entero menor.
69. ¿Es posible encontrar cuatro enteros consecutivos pares tal que su suma sea 10 más que la suma de los dos números menores? si es así, muestra la solución o soluciones que hay. si no hay solución explica el por qué.
70. En un juego de baloncesto María marco tres veces más puntos que Olga. En el siguiente juego María marco 7 puntos menos de los que había hecho en el primer juego, mientras Olga marco 9 puntos más que los que marco en el primer juego. si ellas marcaron el mismo número de puntos en el segundo juego, ¿Cuántos puntos marco cada una en el primer juego?
71. La edad de marcela es el doble de la de su hermano tomas. Hace cinco años, la suma de sus edades era igual a la edad actual de marcela. ¿Cuál es la edad de cada uno?

72. Se necesitan 72m de alambre para cercar una parcela rectangular. El largo de la parcela excede en 4m el ancho. Encuentra las dimensiones de la parcela.
73. Se tiene aceite de oliva de $6000 el litro y aceite de girasol de $4.000 el litro. Se desea obtener 1200L de mezcla de precio $5200 el litro. ¿Cuántos litros de ambos tipos de aceite hay que mezclar?
74. La suma de las edades de un padre y su hija es 56 años. Hace 10 años, la edad del padre era el quíntuple de la edad que tenía la hija. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?
75. En un laboratorio de química, lucia debe mezclar una disolución de ácido clorhídrico del 6% de pureza en volumen con otra del 30% para conseguir una disolución de ácido con el 12% de pureza. ¿Qué proporción deberá tomar de cada una para lograr la concentración que necesita?
76. La edad de una madre es el cuádruplo de su hijo. Dentro de 20 años, la edad de la madre, será el doble que la de su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?
77. Un peluquero quiere conseguir una disolución de agua oxigenada al 6%. Dispone de dos botellas, una al 3% y otra al 33%. ¿Cómo debe realizar la mezcla para obtener la disolución que desea? ¿Qué cantidades necesita para lograr aproximadamente un litro?
78. ¿La leche descremada de una determinada marca contiene un 0,25% de materia grasa, y la leche entera, un 4%? Calcula la cantidad que hay que mezclar de cada tipo para conseguir leche semidescremada con un 1.5% de grasa.
79. Un pedazo de cuerda de 72m se utiliza para hacer un triángulo isósceles. ¿Cuál será la medida de sus lados, si la relación del lado a la base es de 3 a 2?
80. El perímetro de un triángulo isósceles mide 20cm el lado desigual mide 4cm menos que los lados iguales. Calcula cuanto mide cada lado
81. Un comerciante tiene dos clases de café, la primera a 40 € el kg y la segunda a 60 € el kg. ¿Cuantos kilogramos hay que poner de cada clase de café para obtener 60 kilos de mezcla a 50 € el kg?
82. Se mezclan 20 kg de trigo tipo A a 0,6 euros/Kg. con 60 Kg. de trigo tipo B a 0.8 euros/Kg. ¿Qué precio tiene la mezcla?

83. Se funden 1000 gr. de oro con una pureza del 90% con oro de pureza 75%. La pureza de la mezcla es del 85%. ¿Qué cantidad de oro de pureza 75% se ha añadido a la mezcla?
84. En una bodega se mezclan $6\ hl$ de vino de alta calidad que cuesta a 300 ∈ el hectólitro, con $10\ hl$ de calidad inferior a 220 $\in/hl$ ¿A cómo sale el litro de vino resultante?
85. Las dos terceras partes de la edad de A excede en 4 años a la de B, y, hace 8 años, la edad de A era doble que la de B. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?
86. Al preguntarle a Maribel sobre su edad, ella responde: si a la edad que tengo le resto los 2/3 tendría la mitad disminuida en dos años. ¿Qué edad tiene?
87. Laura tiene el doble de años que su hijo. Hace 10 años la suma de las edades era 46. ¿Cuál es la edad de su hijo?
88. Miguel tiene 4 años más que su primo Ignacio y, dentro de 3 años, entre los dos sumarán 20 años. ¿cuántos años tiene cada uno?
89. Un padre tiene 46 años y su hijo 12. ¿Cuándo la edad del padre será justamente el triple de la edad del hijo?
90. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide la mitad de lo que mide el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?

ANEXO 2

REJILLA MATEMÁTICA

Rejilla de la estructura matemática de 36 problemas escritos en lengua natural, clasificados verticalmente por grupos y horizontalmente por los tipos en los que se forma el sistema de ecuaciones lineales

REJILLA MATEMÁTICA	**Grupo 1 Físicos (F)**	**Grupo 2 Mezclas (M)**	**Grupo 3 Economía(Ec)**	**Grupo 4 Edades (E)**	**Grupo 5 Geometría (G)**	**Grupo 6 Aritméticos (A)**
T1 $\boldsymbol{x = y + a}$ $\boldsymbol{ax = b(y + a) + b}$	1, 2					
T2 $\boldsymbol{x = y}$ $\boldsymbol{ax = by - c}$	**3**, 4					
T3 $\boldsymbol{ax + b = cy}$ $\boldsymbol{dx + e = fy}$		5, **6**		16, 17, 18, 19,		31
T4 $\boldsymbol{ax + by = c}$ $\boldsymbol{dx + ey = f}$		7, 8, 9	**10**, 11, **12**, 13, 14, 15		22	
T5 $\boldsymbol{y = ax + b}$ $\boldsymbol{cx + dy = e}$				**20**	23, 24, 25	32, **34**
T6 $\boldsymbol{x + y = c}$ $\boldsymbol{ax = by}$				21	26, 27, 28, **29**, **30**	33
T7 $\boldsymbol{ax + by = c}$ $\boldsymbol{ax + by = cy + dx}$						35, **36**

GRUPO 1

PROBLEMAS FÍSICOS (F)

1. A una motocicleta le toma 1 hora y media más en la noche que en el día viajar entre dos ciudades. En la noche recorre un promedio de 40 millas por hora mientras que en el día puede recorrer un promedio de 55 millas por hora: encuentre la distancia entre las dos ciudades.

$V_n = Velocidad en la noche = 40\, millas/h$ $\qquad x = vt$

$V_d = Velocidad en el\ día = 55\, millas/h$

$\frac{3}{2} = 1\ hora\ y\ media$

$t_1 = t_2 + \frac{3}{2}$ (1)

$\frac{x}{40} = \frac{x}{55} + \frac{3}{2}$ (2)

2. Una mujer puede ir caminando al trabajo a una velocidad de 3m/h, o en una bicicleta a una velocidad de 12 m/h. Si se le toma una hora más caminando que yendo en bicicleta, encuentre el tiempo que le toma caminar para ir al trabajo.

$V_c = Velocidad caminando = 3\ m/h$ $x = vt$

$V_b = Velocidad en\ bicicleta = 12\ m/h$

$t_1 = t_2 + 1$ (1)

$\frac{x}{3} = \frac{x}{12} + 1$ (2)

3. A las tres de la tarde sale de la cuidad un coche con una velocidad de 80km/h. Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120km/h. ¿A qué hora lo alcanzara? ¿A qué distancia de la ciudad?

$V_c = Velocidad del\ coche = 80\ km/h$ $x = vt$

$V_m = Velocidad de\ la\ moto = 120\ km/h$

$x_1 = x_2$ (1)

$80t = 120\ (t - 2)$ (2)

4. Un bus sale del terminal de transporte de Bogotá hacia santa Marta, vía Bucaramanga, con velocidad de 58 km/h. dos horas más tarde sale otro bus de la misma terminal, con el mismo destino y la misma ruta, pero con velocidad de 74km/h ¿Cuándo alcanza el segundo bus al primero?

$V_1 = Velocidad del\ primer\ bus = 58\ km/h$ $x = vt$

$V_2 = Velocidad del\ segundo\ bus = 74 km/h$

$x_1 = x_2$ (1)

$58t = 74\ (t - 2)$ (2)

GRUPO 2

PROBLEMAS DE MEZCLAS (M)

5. Halle cuántos litros de alcohol puro deben añadirse a 15 L de solución que contiene 20% de alcohol para que la mezcla resultante sea de 30% de alcohol.

$x = Litros\ de\ Alcohol\ puro$

$y = Solución\ que\ contiene\ el\ Alcohol\ puro$

$x + 15 = y$ (1)

$x + 15\ (0.2) = (0.3)y$ (2)

6. ¿Cuántos litros de mezcla que contiene 80% de alcohol se deben añadir a 5 litros de una solución al 20% para obtener una solución al 30%?

$x = Mezcla\ que\ contiene\ Alcohol$

$y = Solución\ obtenida\ al\ mezclar$

$5 + x = y$ (1)

$1 + (0.8)x = (0.3)y$ (2)

7. Se tiene aceite de oliva de \$6000 el litro y aceite de girasol de \$4.000 el litro. Se desea obtener 1200L de mezcla de precio \$5200 el litro. ¿Cuántos litros de ambos tipos de aceite hay que mezclar?

$x = Litros\ de\ Aceite\ de\ Oliva$

$y = Litros\ de\ Aceite\ de\ Girasol$
$x + y = 1200$ (1) $Litros\ totales\ de\ la\ mezcla$
$6000x + 4000y = (5200)1200$ (2) $Costo\ total\ de\ la\ mezcla$

8. Un comerciante tiene dos clases de café, la primera a 40 € el kg y la segunda a 60 € el kg. ¿Cuantos kilogramos hay que poner de cada clase de café para obtener 60 kilos de mezcla a 50 € el kg?
$x = Primer\ tipo\ de\ cafe$
$y = Segundo\ tipo\ de\ cafe$
$40x + 60y = 50\ (60)$ (1) $Costo\ total\ de\ la\ mezcla\ de\ cafe$
$x + y = 60$ (2) $Kilos\ totales\ de\ cefe$

9. Un joven tiene una barra de aleación de oro, una es de 12 quilates y la otra es de 18 (el oro de 24 quilates es puro, el de 12 quilates corresponde 12/24 de pureza, el de 18 a 18/24 de pureza y así sucesivamente) ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben mezclar para obtener 10 gramos de oro de 14 quilates?
$x = barra\ de\ aleación\ de\ oro\ de\ 12\ quilates$
$y = barra\ de\ aleación\ de\ oro\ de\ 18\ quilates$
$x + y = 10$ (1)

$\frac{12}{24}x + \frac{18}{24}y = 10\left(\frac{14}{24}\right)$ (2)

GRUPO 3

PROBLEMAS DE ECONOMÍA (Ec)

10. El costo de tres lápices y cuatro cuadernos es de \$ 9000. El costo de dos lápices y tres cuadernos es de \$ 6500 ¿cuánto cuesta cada uno de estos útiles?
$x = lapices$
$y = cuadernos$
$3x + 4y = 9000$ (1)
$2x + 3y = 6500$ (2)

11. Una persona desea invertir \$ 6.000.000 en dos cuentas de ahorro. Una ellas le paga un interés anual del 6% y la otra una tasa de interés anual del 7.5% ¿Cuánto debe invertir en cada cuentas para obtener \$ 400.000, en las dos cuentas, por concepto de interés al cabo del primer año?
$x = Primer\ cuenta\ de\ ahorro$
$y = Segunda\ cuenta\ de\ ahorro$
$x + y = 6000000$ (1)
$(0.06)x + (0.075)y = 400000$ (2)

12. Samuel invirtió parte de los \$ 5.000.000 que tenía en un C.D.T (Certificado de Depósito a Término), que le paga un interés de 28% anual, el resto lo deposito en una cuenta de ahorros, donde le pagan el 19% anual. Cuando se venció el primer año comercial, Samuel recibió \$ 1.328.000 por concepto de intereses ¿Cuánto invirtió Samuel en el C.D.T y cuanto depósito en la cuenta de ahorros?
$x = Inversión\ en\ un\ C.D.T$
$y = Inversión\ en\ la\ cuenta\ de\ ahorro$
$x + y = 5000000$ (1)
$(0.28)x + (0.19)y = 1328000$ (2)

13. La señora Beecham invirtió parte de US \$12,00 en un certificado de ahorros a 9% de interés simple. El resto se invirtió en un título que producía 14%. Si recibió un total de US \$1,400 de interés por el primer año, ¿Cuánto dinero invirtió en el titulo**?**
$x = Cantidad\ de\ dinero\ Invertido\ en\ un\ Certificado\ de\ ahorros$

$y = Cantidad\ de\ dinero\ Invertido\ en\ un\ titulo$
$x + y = 12$ (1)
$(0.09)x + (0.14)y = 1400$ (2)

14. Un hombre va al correo para comprar \$132.000 en estampillas de \$400 y \$500. ¿Cuantas estampillas de cada precio puede comprar si adquiere 300?
$x = Estampillas\ de\ \$400$
$y = Estampillas\ de\ \$500$
$400x + 500y = 132000$ (1)
$x + y = 300$ (2)

15. Una compañía agrícola tiene una granja de 100 acres, en los cuales produce lechugas y repollos, sembrar cada acre de repollo requiere de 600 horas de mano de obra y cada acre de lechuga 400 horas de mano de obra. Si se dispone de 4500 horas y se van a utilizar todos los recursos humanos y de tierra ¿Cuántos acres de lechuga y cuantos de repollo se pueden sembrar?
$x = Acres\ de\ lechuga$
$y = Acres\ de\ repollo$
$x + y = 100$ (1)
$600y + 400x = 4500$ (2)

GRUPO 4

PROBLEMAS DE EDADES (E)

16. La edad de una madre es el cuádruplo de su hijo. Dentro de 20 años, la edad de la madre, será el doble que la de su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?
$x = Edad\ actual\ de\ la\ madre$
$y = Edad\ actual\ de\ la\ hija$
$x = 4y$ (1)
$x + 20 = 2(y + 20)$ (2)

17. Las dos terceras partes de la edad de A excede en 4 años a la de B, y, hace 8 años, la edad de A era doble que la de B. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?
$x = Edad\ actual\ de\ A$ $\qquad x - 8 = Edad\ \ hace\ ocho\ años\ de\ A$
$y = Edad\ actual\ de\ B$ $\qquad y - 8 = Edad\ hace\ ocho\ años\ de\ B$
$\frac{2}{3}x = y + 4$ (1)
$x - 8 = 2(y - 8)$ (2)

18. Hace cinco años mi edad era la tercera parte de la edad de mi abuela, dentro de 13 años la edad de mi abuela será el doble de la mía ¿Cuál es la edad mía y la de mi abuela?
$x = Edad\ actual\ mia$
$y = Edad\ actual\ de\ mi\ abuela$
$x - 5 = \frac{(y-5)}{3}$ (1)

$y + 13 = 2(x + 13)$ (2)

19. Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que Bill. Encuentre la edad de John.
$x = Edad\ actual\ de\ Jonh$
$y = Edad\ actual\ de\ Bill$
$x - 2 = 5(y - 2)$ (1)
$x = y + 8$ (2)

20. Miguel tiene 4 años más que su primo Ignacio y, dentro de 3 años, entre los dos sumarán 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

$x = Edad\ actual\ de\ Ignacio$ $\qquad$ $x + 3 = Edad\ \ de\ Ignacio\ dentro\ de\ tres\ años$

$y = Edad\ actual\ de\ Miguel$ $\qquad$ $y + 3 = Edad\ \ de\ Miguel\ dentro\ de\ tres\ años$

$y = x + 4$ (1)

$(x + 3) + (y + 3) = 20$ (2)

21. La suma de las edades de un padre y su hija es 56 años. Hace 10 años, la edad del padre era el quíntuple de la edad que tenía la hija. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

$x = Edad\ del\ padre$

$y = Edad\ de\ la\ hija$

$x + y = 56$ (1)

$x - 10 = 5(y - 10)$ (2)

GRUPO 5

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS (G)

22. Un rectángulo tiene un perímetro de 24 cm. Si el lado mayor se disminuye en 1 cm y el lado menor se duplica, el nuevo rectángulo tiene un perímetro de 30cm ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo original?

$a = Lado\ mayor\ del\ rectangulo$

$b = Lado\ menor\ del\ rectángulo$

$2(a + b) = 24$ (1)

$2[(a - 1) + 2b] = 30$ (2)

23. El perímetro de un triángulo isósceles mide 20cm el lado desigual mide 4cm menos que los lados iguales. Calcula cuanto mide cada lado

$x = Lado\ desigual\ del\ triangulo\ isósceles$

$y = Lado\ igual\ del\ triangulo\ isósceles$

$x = y - 4$ (1)

$20 = x + 2y$ (2)

24. Un campo rectangular que es 20 metros más largo que ancho esta circundado de exactamente 100 m de cercado ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

$a = Ancho\ del\ campo\ rectangular$

$L = Largo\ del\ campo\ rectangular$

$\mathrm{L} = a + 20$ (1)

$100 = 2(\mathrm{a} + \mathrm{L})$ (2)

25. Se necesitan 72m de alambre para cercar una parcela rectangular. El largo de la parcela excede en 4m el ancho. Encuentra las dimensiones de la parcela.

$x = Ancho\ de\ la\ parcela$

$y = Largo\ de\ la\ parcela$

$y = x + 4$ (1)

$2x + 2y = 72$ (2)

26. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide la mitad de lo que mide el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?

$x = Ángulo\ agudo\ del\ triangulo\ rectángulo$

$y = Ángulo\ rectángulo\ del\ triangulo\ rectángulo$

$y = 90$ (1)

$x + \frac{x}{2} + y = 180$ (2)

27. Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°. Si el mayor de los dos ángulos complementarios es 15° mayor que dos veces el menor, encuentre la medida de los dos ángulos.
$x = Ángulo\ mayor$
$y = Ángulo\ menor$
$x + y = 90$ (1)
$x = 2y + 15$ (2)

28. Un pedazo de cuerda de 72m se utiliza para hacer un triángulo isósceles. ¿Cuál será la medida de sus lados, si la relación del lado a la base es de 3 a 2?
$x = Lados\ del\ triangulo$
$y = Base\ del\ triangulo$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ (1)

$72 = 2x + y$ (2)

29. El perímetro de un rectángulo es de 50 cm y el ancho es 2/3 de la altura. Encuentre las dimensiones del rectángulo.
$a = Ancho\ del\ rectangulo$
$h = Altura\ del\ rectángulo$

$a = \frac{3}{2}h$ (1)

$2[a + h] = 50$ (2)

30. Una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos trozos. Uno mide tres metros más que la cuarta parte del otro ¿cuál es la medida de cada trozo?
$x = Medida\ del\ primer\ trozo\ de\ alambre$
$y = Medida\ del\ segundo\ trozo\ de\ alambre$
$\mathrm{x} + \mathrm{y} = 48$ (1)

$\mathrm{x} + 3 = \frac{\mathrm{y}}{4}$ (2)

GRUPO 6

PROBLEMASARITMÉTICOS (A)

31. El digito de las unidades de un número es 3 unidades menos que el digito de las decenas. Si el número es 3 menos que 7 veces la suma de sus dígitos, encuentre el número**.**
$x = Digito\ de\ las\ Decenas\ del\ Número$
$y = Digito\ de\ las\ Unidades\ del\ Número$
$y = x - 3$ (1)
$10x + y = 7(x + y) - 3$ (2)

32. La diferencia de dos números es 25. Encuentre los dos números, si el mayor es una unidad menos que tres veces el menor.
$x = Número\ mayor$
$y = Número\ menor$

$x - y = 25$ (1)
$x = 3y - 1$ (2)

33. Hallar dos números enteros cuya diferencia sea 32 y el mayor sea 6 más que tres veces el menor.
$x = Número\ entero\ mayor$
$y = Número\ entero\ menor$
$x - y = 32$ (1)
$x + 6 = 3y$ (2)

34. La suma de dos números es 20. El mayor de ellos es igual al menor aumentado en 4. Encuentre los números.$x = Número\ mayor$
$y = Número\ menor$
$x + y = 20$ (1)
$x = 4 + y$ (2)
35. La suma de los dígitos de las decenas y de las unidades de un número de dos cifras es 12. Si el número se le resta 18, las cifras del número original se invierten. ¿Cuál es el número original?
$x = Decenas\ del\ Número$
$y = Unidad\ del\ Número$
$x + y = 12$ (1)
$(10x + y) - 18 = (10y + x)$ (2)

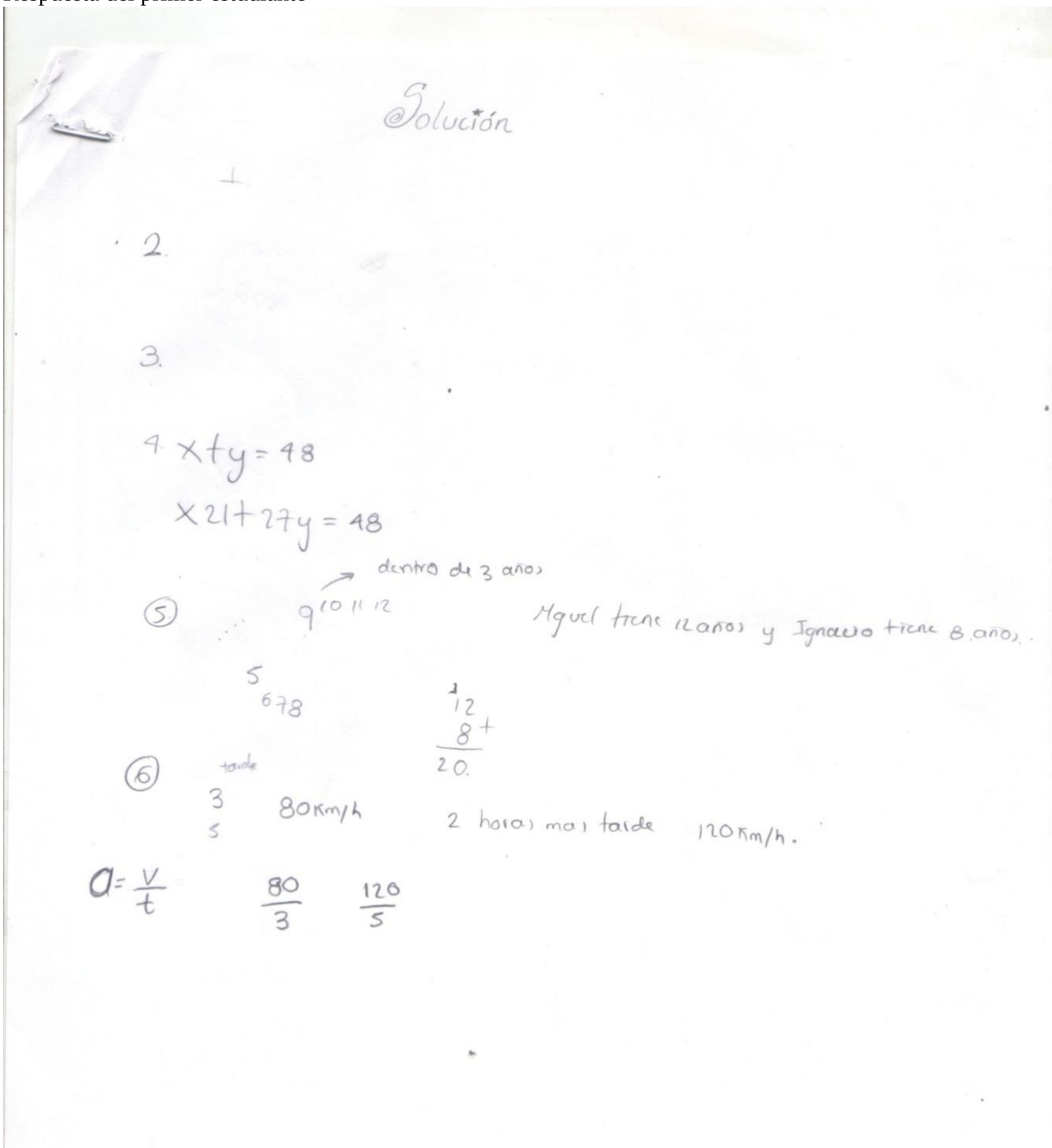
36. La suma de las cifras de un número es 6. Cuando las cifras se intercambian, el número resultantes es 6 veces la cifra de las decenas del número original. ¿Cuál es el número?
$x = Digito\ de\ las\ Decenas\ del\ Número$
$y = Digito\ de\ las\ Unidad\ del\ Número$
$x + y = 6$ (1)
$(10x + y) = 6x$ (2)

ANEXO 3

RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Se presentan las respuestas de 11 estudiantes, a quienes se les realizó la prueba piloto (taller de nueve preguntas escritas en lengua natural), donde 10 realizaron algunos problemas del taller y otro entrego el taller en blanco.

Respuesta del primer estudiante



Solución

1.

2.

3.

4. $x+y=48$

$x21+27y=48$

dentro de 3 años

5. $9^{10\ 11\ 12}$ Miguel tiene 12 años y Ignacio tiene 8 años.

5 678

$12 + 8 = 20$

6. tarde 3 5 80Km/h 2 horas mas tarde 120Km/h.

$a=\frac{v}{t}$ $\frac{80}{3}$ $\frac{120}{5}$

Respuesta del segundo estudiante

46 | 2
06 2

1-

$x+y=20$

$x=y+4$

$y+4+y=20$

$2y=16$

$2y \div 16$

$y=8$

2- lapicez \ Cuadernos

$3x + 4y = 9000$

$2x + 3y = 6500$

3- $x+y=48$

$21x+27y=48$

27 | 4
1 5
(6)

5 $4x+3y=20$

$4-20=16$ 16 +

Respuesta del tercer estudiante

1. Los dos Numeros. Son $8 \times 8 = 16$ y si se le aumentan. 4 a uno de los 8 quedaria. 12 y a ese doce le Sumamos. 8 entonces daria 20.

1. x primer numero mayor $\quad y$ - Segundo número menor

① $x + y = 20$

② $x = y + 4$

$$y + 4 + y = 20$$

$$2y + 4 = 20$$

$$2y = 20 - 4$$

$$2y = 16$$

$$y = \frac{16}{2}$$

$$\boxed{y = 8}$$

$$x = 8 + 4$$

$$\boxed{x = 12}$$

3 = Para obtenerona Solucion de 30% se Necesitan 16 Litros de la solocion qoe contieno el 80% de alcohol

(4)

5. Miguel tendria 9 años y ignacio Tendria 3 y si a cada uno de ellos le Sumamos 3 años darian los 20 años.

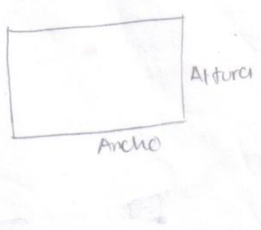
6. $D = \frac{V}{T}$

$$= \frac{80\,Km/\cancel{h} \cdot 120\,Km/\cancel{h}}{3\cancel{h} \cdot 2\cancel{h}} = \frac{9600\,Km}{6} = 1600\,Km$$

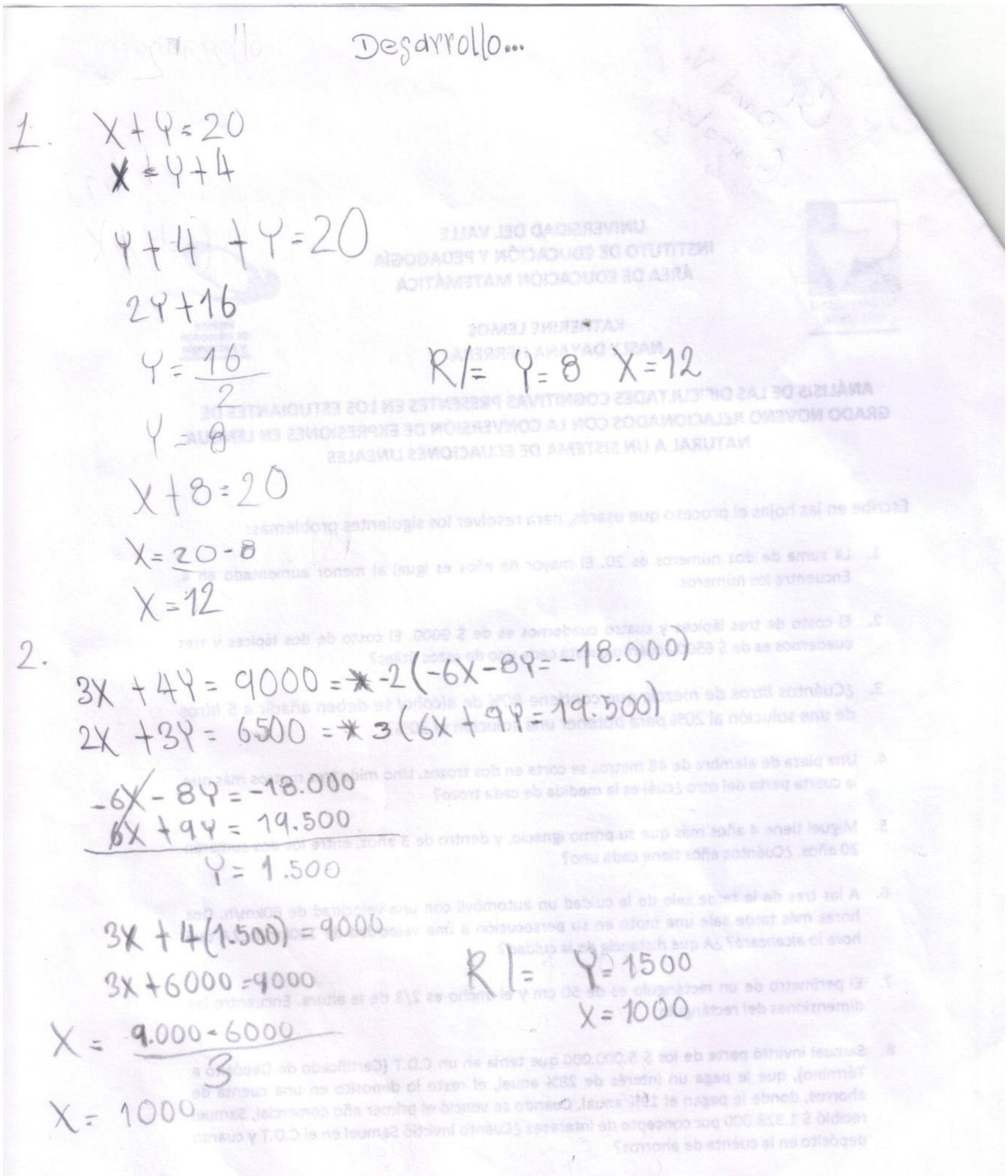
* $T = \frac{V}{D}$

$$\frac{80\,\cancel{Km}/h \cdot 120\,\cancel{Km}/h}{1600\,\cancel{Km}} = \frac{9600\,\cancel{Km}/h}{1600\,\cancel{Km}} = 6\,h$$

7.



Respuesta del cuarto estudiante



Desarrollo...

1. $X+Y=20$

$X=Y+4$

$Y+4+Y=20$

$2Y+16$

$Y=\frac{16}{2}$

$Y=8$

$X+8=20$

$X=20-8$

$X=12$

R/= $Y=8$ $X=12$

2. $3X+4Y=9000 = * -2(-6X-8Y=-18.000)$

$2X+3Y=6500 = * 3(6X+9Y=19.500)$

$-6X-8Y=-18.000$

$6X+9Y=19.500$

$Y=1.500$

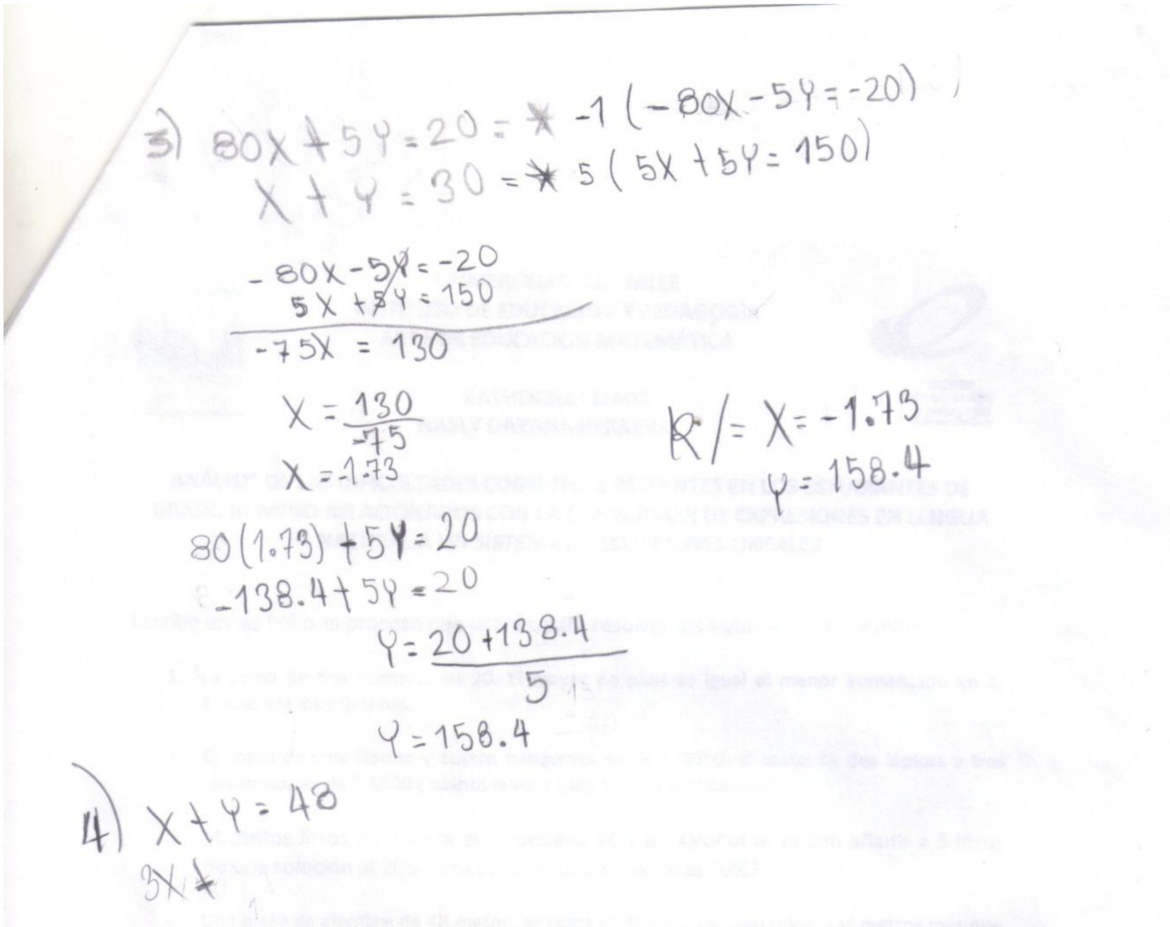
$3X+4(1.500)=9000$

$3X+6000=9000$

$X=\frac{9.000-6000}{3}$

$X=1000$

R/= $Y=1500$ $X=1000$



3) $80X + 5Y = 20 = * -1\ (-80X - 5Y = -20)$

$X + Y = 30 = * 5\ (5X + 5Y = 150)$

$-80X - 5Y = -20$

$5X + 5Y = 150$

$-75X = 130$

$X = \frac{130}{-75}$

$X = -1.73$

R/ $= X = -1.73$

$Y = 158.4$

$80(1.73) + 5Y = 20$

$-138.4 + 5Y = 20$

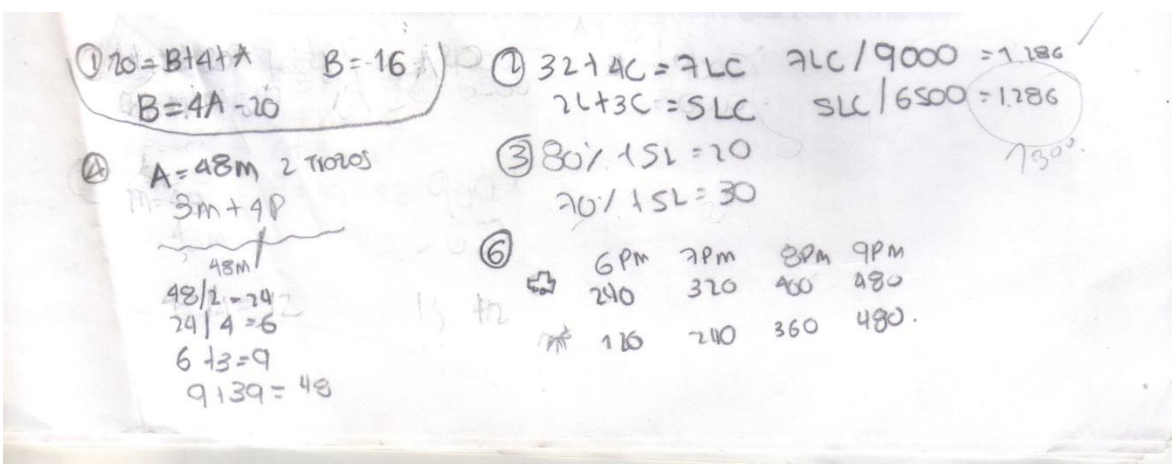
$Y = \frac{20 + 138.4}{5}$

$Y = 158.4$

4) $X + Y = 48$

$3X +$

Respuestadel quinto estudiante



① $20 = B + 4 + A$ $B = -16$

$B = 4A - 20$

② $32 + 4C = 7LC$ $7LC / 9000 = 1.286$

$2L + 3C = 5LC$ $5LC / 6500 = 1.286$

1300

③ $80\% + 5L = 20$

$70\% + 5L = 30$

④ $A = 48m$ 2 TROZOS

$3m + 4P$

48m

$48/2 = 24$

$24/4 = 6$

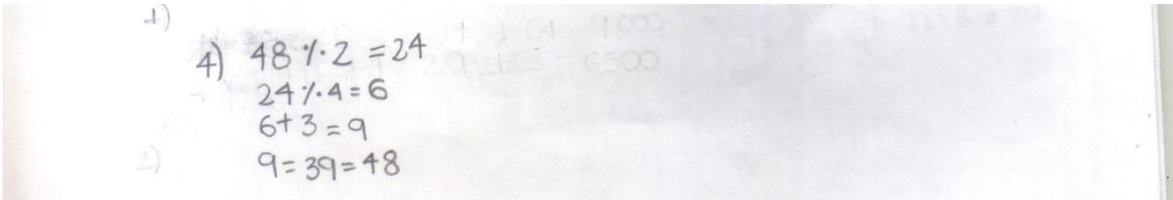
$6 + 3 = 9$

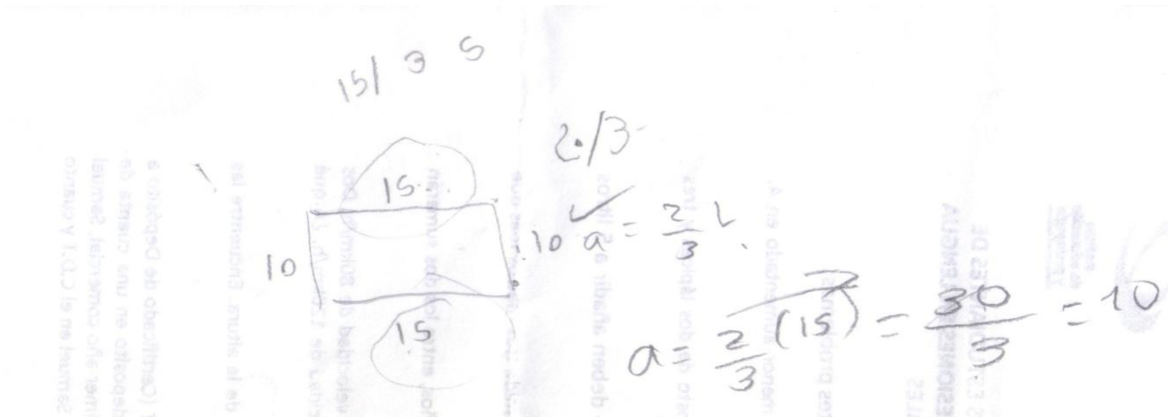
$9 + 39 = 48$

⑥

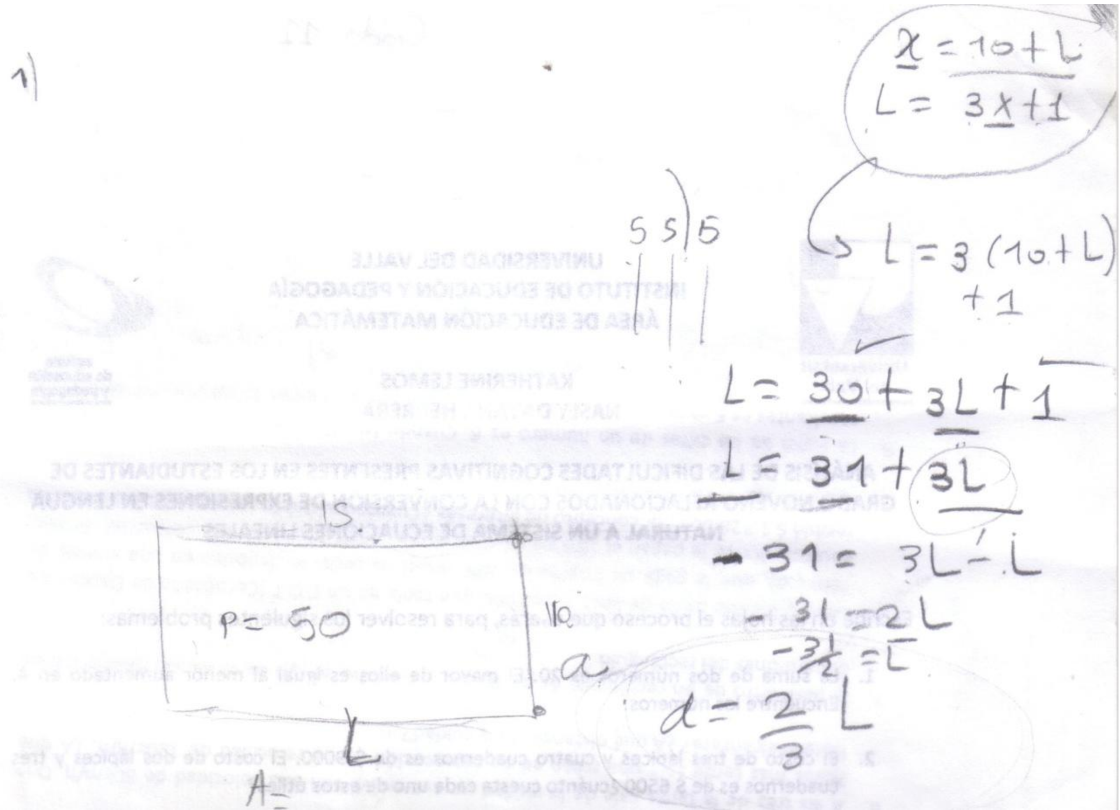
	6PM	7PM	8PM	9PM
	240	320	400	480
	120	240	360	480.

Respuestadel sexto estudiante

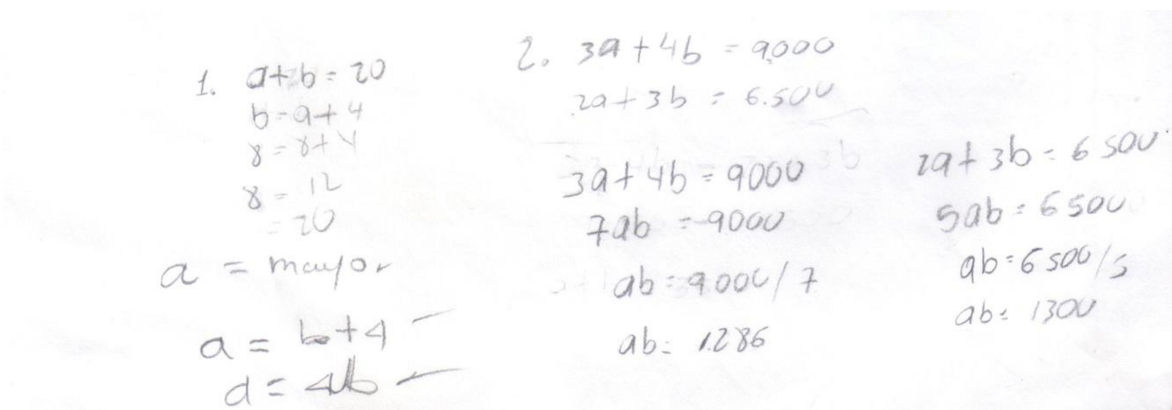




Respuestadel séptimo estudiante


1)
x = 10 + L
L = 3x + 1
55|5
L = 3 (10 + L) + 1
L = 30 + 3L + 1
L = 31 + 3L
- 31 = 3L - L
- 31 = 2L
- 31/2 = L
15
P = 50
10
L
a = 2/3 L
A =

Respuestadel octavo estudiante


1. a + b = 20
b = a + 4
8 = 8 + 4
8 = 12
= 20
a = mayor
a = b + 4
a = 4b
2. 3a + 4b = 9000
2a + 3b = 6.500
3a + 4b = 9000
7ab = 9000
ab = 9000/7
ab = 1286
2a + 3b = 6500
5ab = 6500
ab = 6500/5
ab = 1300

3. a = ? litros de mescla

b = 80% alcohol

C. 5L solucion

4 a = 48 mts

48 mts

x + y

a48m / 2

x + 3 = y

$x = \frac{y}{y} - \frac{3}{1}$ = x ± y-12 / 12

$\frac{x}{y} = 12$

a = 48 mts

a48mts − xy = 12

a = 36

5. a = 4años

b = 7

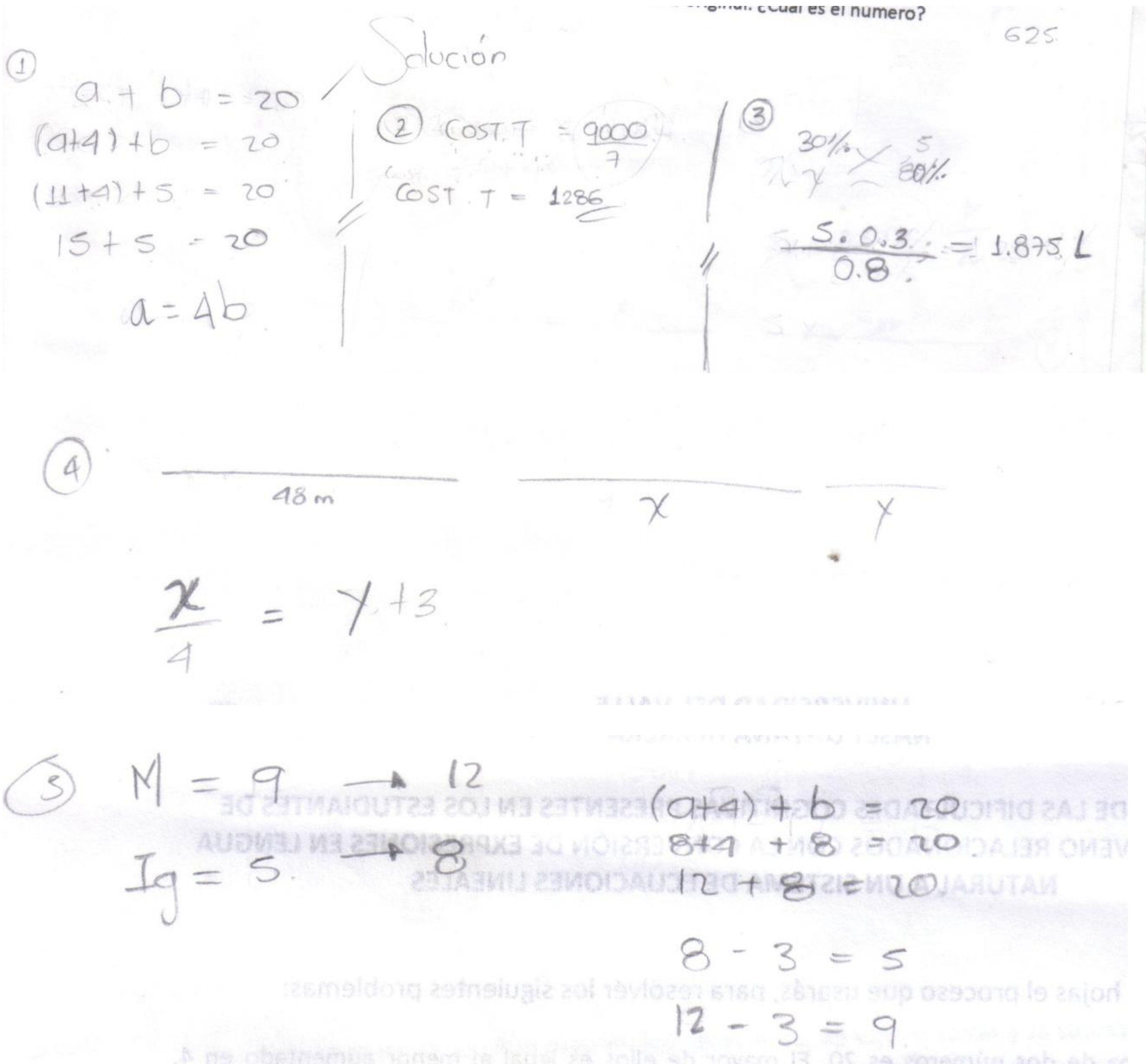
c = 3

7

50cm

2/

Respuestadel noveno estudiante



...¿Cuál es el número? 625

Solución

(1)

$a + b = 20$

$(a+4) + b = 20$

$(11+4) + 5 = 20$

$15 + 5 = 20$

$a = 4b$

(2) $COST.T = \frac{9000}{7}$

$COST.T = 1286$

(3) 30% — 5, x — 80%

$\frac{5 \cdot 0.3}{0.8} = 1.875\ L$

(4) 48 m, x, y

$\frac{x}{4} = y + 3$

(5) $M = 9 \rightarrow 12$

$Ig = 5 \rightarrow 8$

$(a+4) + b = 20$

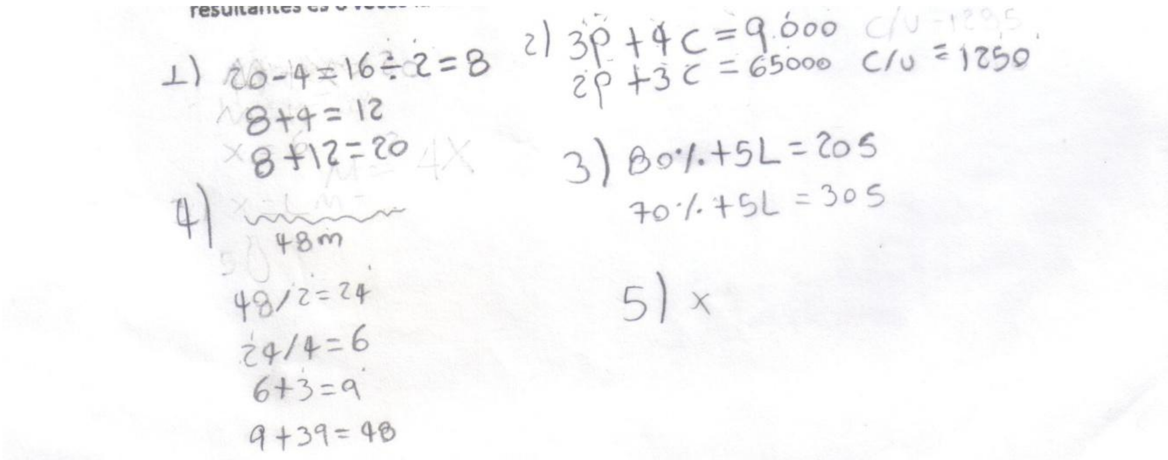
$8+4 + 8 = 20$

$12 + 8 = 20$

$8 - 3 = 5$

$12 - 3 = 9$

Respuestadel décimo estudiante



1) 20-4=16÷2=8
8+4=12
8+12=20

2) 3p+4c=9.000
2p+3c=65000 C/u=1250

3) 80%+5L=205
70%+5L=305

4) 48m
48/2=24
24/4=6
6+3=9
9+39=48

5) x