



**SILVIA  
DE FRANCESCO**

**SIMULAÇÃO E RECONSTRUÇÃO EM TOMOGRAFIA  
CARDIO-TORÁCICA**



**SILVIA  
DE FRANCESCO**

**SIMULAÇÃO E RECONSTRUÇÃO EM TOMOGRAFIA  
CARDIO-TORÁCICA**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica, realizada sob a orientação científica do Doutor Augusto Marques Ferreira da Silva, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Electrónica, Telecomunicações e Informática da Universidade de Aveiro

Trabalho realizado com o apoio financeiro da FCT e do FSE no âmbito do III Quadro Comunitário de Apoio.

Ao Bernardo ...

“Yes, We can!!”  
[Barack Obama]

## **o júri**

Presidente

**Prof. Doutor Joaquim Manuel Vieira**  
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

**Prof. Doutor João José Pedroso de Lima**  
Professor Catedrático Jubilado da Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra

**Prof. Doutor Mário António Basto Forjaz Secca**  
Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

**Prof. Doutor António Rui da Silva Borges**  
Professor Associado da Universidade de Aveiro

**Prof. Doutor Augusto Marques Ferreira da Silva**  
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

**Prof. Doutor Miguel Tavares Coimbra**  
Professor Auxiliar Convidado da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

## agradecimentos

Como não podia deixar de ser, na iminência de atingir uma etapa tão importante no meu percurso profissional e pessoal, sinto-me impelida a manifestar publicamente o meu mais sincero agradecimento a todos quantos, de alguma forma, me apoiaram ao longo desta aventura... Correndo o risco de esquecer alguém, facto pelo qual peço desde já desculpa, quero expressar a minha gratidão para com

- € o meu Orientador, Prof. Doutor Augusto Marques Ferreira da Silva, que com paciência e competência soube acompanhar esta minha longa caminhada quer nos momentos mais entusiasmantes quer nos mais difíceis
- € a Fundação da Ciência e Tecnologia e à Universidade de Aveiro por ter acolhido e financiado este projecto
- € a direcção do IEETA, Instituto de Engenharia Electrónica e Telemática de Aveiro, pela disponibilização dos recursos materiais indispensáveis para a realização deste trabalho
- € a direcção da ESSUA, Escola Superior de Saúde da Universidade de Aveiro, por ter proporcionado condições de trabalho que me permitiram alcançar este objectivo
- € todos os colegas, Professores, Investigadores e Colaboradores, quer do IEETA quer da ESSUA pelo apoio incondicional, pela ajuda generosa e pela amizade manifestada em muitas ocasiões
- € os meus colegas de gabinete do IEETA, Carlos e Nuno, pela assistência técnico/científica em áreas fora do meu domínio e pela ajuda nos inevitáveis momentos de “pânico informático”
- € as minhas colegas de gabinete da ESSUA, Célia e Poliana, com as quais se criou um ambiente de partilha e amizade que torna cada dia de trabalho num verdadeiro prazer
- € o colega Milton Santos da ESSUA que pacientemente releu e corrigiu o texto desta dissertação
- € os meus Familiares e Amigos cujo apoio tem sido determinante para que eu conseguisse levar a termo este projecto
- € por fim, mas não menos importantes, o Miguel e o Bernardo que foram a minha âncora para o mundo e demonstraram imensas dotes de paciência todas as vezes que um nosso projecto familiar ficava adiado devido ao meu trabalho

Obrigada a todos!

**palavras-chave**

Tomografia, modelos dinâmicos, métodos de reconstrução tomográfica, transformada de Fourier.

**resumo**

Esta dissertação aborda o tema da Tomografia Axial Computorizada com especial enfoque na reconstrução da imagem, ou seja, nos métodos matemáticos que, dado um conjunto de amostras da intensidade de radiação X transmitida, recolhidas segundo uma geometria de irradiação específica, permitem obter o mapa da distribuição tri-dimensional (3D) do coeficiente de atenuação linear no interior do objecto. Em termos mais formais, dado que, do ponto de vista matemático, o processo de aquisição dos dados corresponde à amostragem da transformada de Radon da função que descreve a distribuição do coeficiente de atenuação no volume sob estudo, estamos interessados nos métodos matemáticos que permitem calcular a transformada inversa de Radon a partir de conjuntos suficientemente densos de amostras.

O ambiente de simulação utilizado, desenvolvido de forma a permitir a aquisição de amostras da transformada de Radon de um modelo digital dinâmico do tórax humano (4D MCAT) segundo qualquer uma das geometrias de amostragem actualmente em uso nos equipamentos modernos, permitiu a implementação e avaliação de novos métodos de reconstrução.

Nomeadamente, são propostos novos métodos de reconstrução rápida baseados na teoria de Fourier e no cálculo da transformada de Fourier a partir de amostras não equiespaçadas, quer para geometria de aquisição paralela quer divergente, e é abordado o tema da reconstrução dinâmica sendo exploradas várias técnicas de reconstrução que permitem reduzir os efeitos do movimento nos estudos cardio-torácicos.

Os estudos realizados permitem demonstrar que o desempenho dos métodos de Fourier propostos é equivalente, no que respeita à qualidade de imagem, ao desempenho do método de Retro projecção Filtrada, habitualmente utilizado nos equipamentos comerciais mas a custos computacionais significativamente mais baixos.

**keywords**

Tomography, dynamical models, tomographic reconstruction methods, Fourier transform.

**abstract**

This thesis addresses the theme of Computed Tomography, with special emphasis on tomographic reconstruction techniques, this means, the mathematical methods which, given a set of samples of transmitted radiation intensity, acquired with a specific sampling geometry, provide a three-dimensional (3D) map of linear attenuation coefficient of the given object. Since, from a mathematical point of view, the acquisition process corresponds to the sampling of the Radon transform of the function describing the spatial distribution of attenuation coefficient in the volume under study, we are interested in methods and algorithms leading to diverse numerical implementations of the inverse Radon transform from sufficiently dense sets of samples.

The developed simulation environment, capable to perform virtual acquisition of Radon transform's samples of a digital anatomical model, in our case the dynamical digital model of human thorax (4D MCAT), through any of the sampling geometries currently used in commercial equipments, enabled the implementation and evaluation of new reconstruction methods.

We propose new methods for fast reconstruction based on Fourier theory and on the calculation of Fourier transform for non-equispaced samples, both for parallel and for divergent acquisition geometries, and we deal with the topic of dynamic reconstruction, by exploring some reconstruction techniques capable of minimizing movement artifacts in cardio-thoracic images.

The studies performed demonstrated that the performance of the proposed Fourier methods regarding image quality is similar to the Filtered Backprojection method, traditionally used in commercial equipments but at significantly lower computational costs.

## Acrónimos

1, 2, 3, 4D	uni- bi-, tri- tetra-dimensional
AAI	<i>Adaptive Axial Interpolation</i>
AMPR	<i>Adaptive Multiple Plane Reconstruction</i>
ASSR	<i>Advanced Single-Slice Rebinning</i>
CAC	<i>Coronary Artery Calcification</i>
CAI	<i>Coronary Artery Imaging</i>
CB FBP	<i>Cone Beam Filtered BackProjection</i>
CD	<i>Cardio Delta</i>
CFBP	<i>Complementary Filtered BackProjection</i>
CI	<i>Cardio Interpolation</i>
COBRA	<i>Cone Beam Reconstruction Algorithm</i>
CT	<i>Computed Tomography</i>
CTDI	<i>Computed Tomography Dose Index</i>
DB FBP	<i>Divergent Beam Filtered BackProjection</i>
DB NFFT DFM	<i>Divergent Beam NFFT based Direct Fourier Method</i>
DB NFFT DFM ROI	<i>Divergent Beam NFFT based Direct Fourier Method for ROI Reconstruction</i>
DFM	<i>Direct Fourier Method</i>
DFPM	<i>Direct Fourier Projection Method</i>
DSLIP	<i>Differentiable Shepp-Logan Phantom</i>
DSR	<i>Dynamic Spatial Reconstructor</i>
EBCT	<i>Electron Beam Computed Tomography</i>
ECG	Electrocardiograma
ESSR	<i>Extended Single Slice Rebinning</i>
FBP	<i>Filtered BackProjection</i>
FDK	<i>Feldkamp Davis Kress</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FFT NED	<i>Fast Fourier Transform for Non Equispaced Data</i>
FFT NER	<i>Fast Fourier Transform for Non Equispaced Results</i>
FI	<i>Full scan Interpolation (=360° LI)</i>
FOV	<i>Field of View</i>
FWHM	<i>Full Width at Half Maximum</i>
FWTM	<i>Full Width at Tenth Maximum</i>
HI	<i>Half scan Interpolation (=180° LI)</i>
HU	<i>Hounsfield Unit</i>
IFFT	<i>Inverse Fast Fourier Teansform</i>



LI	<i>Linear Interpolation</i>
LW	<i>Linear Weighting</i>
MCAT	<i>Mathematical Cardiac Torso</i>
MCD	<i>Multislice Cardio Delta</i>
MCI	<i>Multislice Cardio Interpolation</i>
MDMP	<i>Multi-dimensional and multi-parameter</i>
MFI	<i>Multislice Filteres Interpolation</i>
MFR	<i>Multirow Fourier Reconstruction</i>
MIP	<i>Maximum Intensity Projection</i>
MLI	<i>Multislice Linear Interpolation</i>
MRI	<i>Magnetic Resonance Imaging</i>
MTF	<i>Modulation Transfer Function</i>
NCAT	<i>NURBS-based Cardiac Torso</i>
NFFT	<i>Fast Fourier Transform for Nonequispaced Data</i>
NFFT DFM	<i>NFFT based Direct Fourier Method</i>
NFFT DFM ROI	<i>NFFT based Direct Fourier Method for ROI reconstruction</i>
NMSE	<i>Normalized Mean Square Error</i>
NURBS	<i>Non.Uniform Rational B-Spline</i>
PET	<i>Positron Emission Tomography</i>
RI	<i>Reconstruction Interval</i>
ROI	<i>Region of Interest</i>
SLP	<i>Shepp-Logan Phantom</i>
SMPR	<i>Segmented Multiple Plane Reconstruction</i>
SPECT	<i>Single Photon Emission Tomography</i>
SSP	<i>Slice Sensitivity Profile</i>
TAC	<i>Tomografia Axial Computorizada</i>
TCOT	<i>True Cone Beam Tomography</i>
WHR	<i>Weighted Hyperplane Reconstruction</i>

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Enquadramento . . . . .	1
1.2	Objectivos . . . . .	2
1.3	Organização . . . . .	4
1.4	Materiais e métodos . . . . .	5
1.5	Contribuições originais . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Origens e evolução da tomografia computadorizada</b>	<b>9</b>
2.1	As origens . . . . .	10
2.2	A evolução . . . . .	11
2.2.1	Varrimento em espiral . . . . .	17
2.2.2	Varrimento multi-corte . . . . .	19
2.3	Estado da arte . . . . .	22
2.3.1	Tomografia dinâmica, aplicações vasculares cardiopulmonares . . . . .	24
<b>3</b>	<b>A imagem em TAC</b>	<b>27</b>
3.1	Formação da imagem . . . . .	27
3.2	Enquadramento geométrico . . . . .	31
3.3	Qualidade da imagem . . . . .	32
3.3.1	Ruído . . . . .	33
3.3.2	Resolução espacial . . . . .	34
3.3.3	Resolução de contraste . . . . .	36
3.3.4	Resolução temporal . . . . .	37
3.3.5	Artefactos . . . . .	38
3.4	Dose . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Fundamentos teóricos</b>	<b>45</b>
4.1	Operadores lineares e problemas inversos . . . . .	45
4.2	Transformadas integrais . . . . .	46
4.2.1	Transformada de Radon . . . . .	47
4.2.2	Transformada de feixe paralelo . . . . .	50
4.2.3	Transformada de feixe divergente . . . . .	52
4.3	Inversão das transformadas . . . . .	54
4.3.1	Inversão local/global . . . . .	56
4.4	Fórmulas de inversão aproximadas . . . . .	57
4.5	Conjuntos de dados completos . . . . .	58

4.6	Reconstrução a partir de conjuntos incompletos de dados . . . . .	60
4.7	Tomografia local . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Algoritmos de reconstrução em tomografia sequencial</b>	<b>65</b>
5.1	Geometrias de aquisição e amostragem . . . . .	66
5.1.1	Geometria paralela . . . . .	66
5.1.2	Geometria divergente . . . . .	68
5.1.3	Geometria cónica . . . . .	70
5.1.4	Rebinning . . . . .	73
5.1.5	Convenção sobre o número de amostras . . . . .	75
5.2	Algoritmos de reconstrução 2D . . . . .	75
5.2.1	Retroprojectção Filtrada para geometria paralela . . . . .	76
5.2.2	Retroprojectção Filtrada para geometria divergente . . . . .	80
5.2.3	Varrimento breve . . . . .	83
5.3	Algoritmos de reconstrução 3D . . . . .	85
5.3.1	Algoritmo FDK . . . . .	85
5.3.2	Algoritmo de Radon . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Métodos de Fourier</b>	<b>91</b>
6.1	Reconstrução no espaço de Fourier 2D . . . . .	92
6.1.1	O problema da interpolação . . . . .	93
6.1.2	Grelhas polares modificadas . . . . .	95
6.1.3	Método baseado na mudança do sistema de referência . . . . .	98
6.1.4	Método de gridding . . . . .	100
6.1.5	Métodos sem interpolação no espaço de Fourier . . . . .	101
6.2	Métodos de Fourier para projectções divergentes . . . . .	104
6.2.1	Rebinning sem interpolação . . . . .	105
6.2.2	Método de Fourier para projectções divergentes baseado na NFFT . . . . .	109
6.3	Interpolação: filtragem implícita . . . . .	111
6.4	Reconstrução de ROI . . . . .	113
6.5	Métodos de projectção rápida no espaço de Fourier . . . . .	115
6.6	Reconstrução no espaço de Fourier 3D . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Algoritmos de reconstrução em tomografia helicoidal</b>	<b>121</b>
7.1	Geometria de amostragem . . . . .	122
7.2	Abordagem 2D . . . . .	123
7.2.1	Interpolação longitudinal . . . . .	124
7.3	Abordagem 2-3D . . . . .	129
7.4	Abordagem 3D . . . . .	134
7.4.1	Algoritmos exactos . . . . .	134
7.4.2	Algoritmos aproximados . . . . .	135
7.4.3	Complexidade e desempenho . . . . .	137
<b>8</b>	<b>Um ambiente de simulação</b>	<b>139</b>
8.1	Fantomas . . . . .	139
8.1.1	Fantomas da cabeça de Shepp-Logan e de Herman . . . . .	140
8.1.2	Phantoma dinâmico do tórax (4D MCAT) . . . . .	140

8.2	Métodos para o cálculo das projecções . . . . .	146
8.2.1	Método A . . . . .	146
8.2.2	Método B . . . . .	150
8.2.3	Método C . . . . .	151
8.2.4	Método D . . . . .	152
8.2.5	Comparação dos métodos de projecção . . . . .	153
8.3	Modelo do ruído . . . . .	155
8.4	Simulador de TAC em espiral multicorte . . . . .	155
8.4.1	Aquisição no espaço 3D . . . . .	157
8.4.2	Aquisição dinâmica . . . . .	159
<b>9</b>	<b>Análise experimental: tomografia estática</b>	<b>161</b>
9.1	Tomografia sequencial monocorte . . . . .	161
9.1.1	Projecções paralelas . . . . .	161
9.1.2	Projecções divergentes . . . . .	169
9.2	Reconstrução de regiões de interesse . . . . .	178
9.3	Tomografia sequencial multicorte . . . . .	182
9.4	Tomografia helicoidal - interpolação longitudinal . . . . .	184
9.4.1	Interpolação longitudinal 360 LI e 360 MLI . . . . .	184
9.4.2	Interpolação longitudinal 180 LI e 180 MLI . . . . .	185
9.4.3	Qualidade das imagens . . . . .	186
9.4.4	Reconstrução a partir de sinograma breve . . . . .	190
<b>10</b>	<b>Análise experimental: tomografia dinâmica</b>	<b>197</b>
10.1	Tomografia cardio-torácica . . . . .	198
10.1.1	Aquisição prospectivamente activada por ECG . . . . .	201
10.1.2	Aquisição/reconstrução retrospectivamente controlada por ECG . . . . .	202
10.2	Exemplos de simulação . . . . .	206
10.2.1	Aquisição/reconstrução monosectorial . . . . .	208
10.2.2	Reconstrução multisectorial . . . . .	211
<b>11</b>	<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>225</b>
11.1	Conclusões . . . . .	225
11.1.1	Simulador e fantoma . . . . .	225
11.1.2	Métodos de reconstrução . . . . .	226
11.1.3	Tomografia dinâmica (cardio-torácica) . . . . .	228
11.2	Desenvolvimentos futuros . . . . .	228
<b>A</b>	<b>NFFT</b>	<b>231</b>
A.1	NFFT NER . . . . .	232
A.2	NFFT NED . . . . .	233
A.3	Escolha dos parâmetros e da função janela . . . . .	234
A.4	Geração da função *.mex . . . . .	235
<b>B</b>	<b>Métricas de erro (Herman)</b>	<b>237</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>239</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Quando se fala em tomografia, no sentido mais amplo do termo, fala-se num conjunto de técnicas que abrangem âmbitos científicos tão díspares como a radiologia, a medicina nuclear, a geofísica, a astronomia e a microscopia electrónica, entre outros. Estas técnicas tão diversificadas do ponto de vista da instrumentação envolvida, como da escala e natureza dos objectos sob estudo, como, ainda, da metodologia utilizada na reconstrução das imagens, têm em comum o facto de permitirem obter o mapa da distribuição de um determinado parâmetro no interior de um objecto a partir de medições exteriores de formas de energia emitidas ou transmitidas pelo mesmo. Neste âmbito, a Tomografia Axial Computorizada (TAC), ou tomografia de transmissão de raios X, permite obter o valor do coeficiente de atenuação linear dos raios X em cada ponto do volume irradiado a partir de medidas da intensidade de radiação transmitida.

Esta dissertação aborda o tema da TAC com especial enfoque na reconstrução da imagem, ou seja, nos métodos matemáticos que, dado um conjunto de amostras da intensidade de radiação transmitida, recolhidas segundo uma geometria de irradiação/detecção específica, permitem obter o mapa da distribuição tri-dimensional (3D) do coeficiente de atenuação linear no interior do objecto. Em termos mais formais, dado que, do ponto de vista matemático, o processo de aquisição dos dados corresponde à amostragem da transformada de Radon da função que descreve a distribuição do coeficiente de atenuação no volume sob estudo, estamos interessados nos métodos matemáticos que permitem calcular a transformada inversa de Radon a partir de conjuntos suficientemente densos de amostras.

Mais especificamente, para além de descrever o desenvolvimento de um ambiente de simulação que nos permitiu implementar e avaliar novos métodos de reconstrução aplicáveis a qualquer uma das geometrias de aquisição actualmente em uso nos modernos equipamentos, serão propostos novos métodos de reconstrução rápida baseados na teoria de Fourier e será abordado o tema da reconstrução dinâmica, sendo exploradas várias técnicas de reconstrução que permitem reduzir os efeitos do movimento nos estudos cardio-torácicos.

### 1.1 Enquadramento

Desde o seu aparecimento, na década de '70, a TAC tem vindo a assumir um papel de relevo na prática clínica afirmando-se como uma modalidade imagiológica bastante versátil e de grande valor diagnóstico num vasto leque de situações clínicas. Hoje em dia o recurso à TAC é habitual tanto para a obtenção de informação anatómica como funcional (como no caso

dos estudos de perfusão ou angiográficos), assim como na monitorização de procedimentos de intervenção minimamente invasivos. A evolução desta tecnologia tem sido notável tanto no que diz respeito à instrumentação (aumento da velocidade de rotação do foco, introdução da aquisição em espiral e dos detectores multicorte, entre outros) como aos métodos de reconstrução. Neste âmbito se insere a procura constante de métodos de reconstrução cada vez mais rápidos, adequados às novas geometrias de aquisição e às novas aplicações, procurando sempre otimizar a qualidade das imagens em função da tarefa diagnóstica específica e da dose de radiação ionizante transmitida ao doente.

Em particular, a introdução da aquisição com trajectória helicoidal (final da década de '80) e dos detectores multicorte (década de '90) tem dado novo impulso à TAC, viabilizando a passagem gradual do paradigma de reconstrução bidimensional de cortes transaxiais para o paradigma de reconstrução tridimensional de volumes de interesse com elevada resolução espacial isotrópica.

Em termos gerais, podemos dizer que nos equipamentos comerciais a reconstrução, seja por cortes transaxiais (2D) ou volumes de interesse (3D), realiza-se utilizando métodos que têm a sua raiz comum no algoritmo de retro projecção filtrada (5), todavia outras abordagens são possíveis, sendo esta uma área de investigação muito activa.

Todos os órgãos e fenómenos fisiológicos no corpo humano possuem características dinâmicas quer a nível macroscópico quer a nível microscópico, por isso poder-se-á dizer que qualquer estudo imagiológico é, de certa forma, um estudo dinâmico. Todavia, nem sempre o que se pretende avaliar é a dinâmica de um determinado fenómeno, nem a dinâmica interfere com a técnica de aquisição dos dados ou de reconstrução da imagem. Por isso, quando se fala em TAC dinâmica entende-se apenas um conjunto de aplicações que se destinam especificamente à avaliação de características anatómicas ou funcionais de órgãos ou processos dinâmicos quando a própria natureza dinâmica do órgão ou processo seja alvo de interesse ou esta condicione a técnica de aquisição dos dados ou de reconstrução da imagem. Um exemplo de aplicação dinâmica é dado pela tomografia cardio-torácica, na qual a rapidez do movimento envolvido (a velocidade das paredes do ventrículo esquerdo na fase de ejeção sistólica pode atingir os  $100\frac{mm}{s}$ ) faz com que, mesmo com o mais moderno dos equipamentos, seja impossível a obtenção de imagens livres de artefactos de movimento (única excepção é dada pelos tomógrafos de feixe de electrões, que são capazes de proporcionar imagens com resolução temporal da ordem das dezenas de  $ms$ , mas cuja difusão é extremamente limitada). Neste caso, mesmo que o objectivo do estudo seja apenas a observação anatómica "estática", torna-se imprescindível a utilização de técnicas de aquisição e/ou reconstrução específicas que permitam aumentar a resolução temporal, nomeadamente através de alguma forma de sincronização da aquisição e/ou reconstrução com o sinal electrocardiográfico (ECG).

## 1.2 Objectivos

O objectivo principal do trabalho aqui apresentado, prende-se com a exploração dos métodos de aquisição e reconstrução actualmente disponíveis para as modernas geometrias de aquisição em TAC (com especial atenção para a reconstrução no âmbito da tomografia cardio-torácica) e com a proposta de métodos de reconstrução alternativos, que permitam reduzir o custo computacional do processo de reconstrução mantendo a necessária qualidade da imagem. Para atingirmos este objectivo, tornou-se necessário, em primeiro lugar, o desenvolvimento de um ambiente de simulação de TAC que permitisse integrar todas as geometrias de aquisição

actualmente em uso (feixe paralelo, divergente e cónico (multicorte), aquisição sequencial e em espiral) em condições ideais (dose elevada, ausência de ruído) e em condições reais (diferentes doses, presença de ruído). Para a simulação das aquisições, tornava-se necessário dispor de um modelo virtual do tórax em quatro dimensões (isto é, em três dimensões espaciais mais a dimensão temporal), tendo-se escolhido para o efeito o modelo dinâmico 4D MCAT –*Mathematical Cardiac Torso*– [121] que para além do modelo dos diferentes órgãos inclui o modelo dos movimentos cardíaco e respiratório (ver cap. 8). O simulador, juntamente com o fantoma dinâmico, para além de permitir a avaliação de diferentes métodos de reconstrução, poderá servir para caracterizar, do ponto de vista matemático, a distorção introduzida pelo movimento e, eventualmente, determinar um operador inverso que permita eliminar a distorção das imagens.

Os métodos de reconstrução actualmente utilizados nos equipamentos comerciais são métodos analíticos e derivam do conhecido algoritmo de retro projecção filtrada (*Filtered Back-Projection* – FBP) ou, de qualquer forma, seguem a abordagem *pixel oriented* típica deste algoritmo. Existem, todavia, outras abordagens por vezes radicalmente diferentes como, por exemplo, a seguida pelos métodos algébricos que, apesar de oferecer uma qualidade da imagem superior em certos casos específicos (por ser mais fácil a introdução de informação conhecida *a priori* sobre o objecto a ser reconstruído) são caracterizados pelo elevado custo computacional. Voltando aos métodos analíticos, uma abordagem interessante do ponto de vista do custo computacional é dada pelos métodos de Fourier (*Direct Fourier Methods* – DFM) caracterizados por menor custo computacional quando comparados com o método de retro projecção filtrada (capítulos 5 e 6). Não obstante o menor custo computacional dos métodos de Fourier, a escolha dos fabricantes continua a ser o método de FBP dado que o seu desempenho é considerado superior quer no que diz respeito à qualidade da imagem reconstruída, quer à flexibilidade de adaptação às diferentes geometrias de aquisição, quer pelo facto de permitir a manipulação da qualidade da imagem reconstruída através da escolha de diferentes filtros.

A introdução de novos métodos computacionais, nomeadamente, algoritmos para o cálculo rápido da transformada de Fourier a partir de amostras não equiespaçadas (*Fast Fourier Transform for Nonequispaced Samples* – NFFT), contribuiu para melhorar o desempenho dos métodos de Fourier e renovar o interesse para esta classe de métodos. Neste contexto, surgem algumas questões às quais se tentou responder ao longo deste trabalho:

- o desempenho dos métodos de Fourier é comparável com o desempenho dos métodos de FBP?
- os métodos de Fourier podem ser adaptados às diferentes geometrias de aquisição?
- os métodos de Fourier podem ser manipulados da mesma forma que os métodos de FBP obtendo imagens de diferente qualidade dependendo do nível de detalhe pretendido?
- com os métodos de Fourier, existe a possibilidade de realizar a reconstrução de regiões de interesse?

Por fim, pretendemos avaliar o desempenho dos métodos desenvolvidos quando aplicados ao problema da reconstrução em tomografia cardio-torácica.



## 1.3 Organização

Após este capítulo introdutório, no capítulo 2 recordamos as origens da TAC e descrevemos a sua evolução ao longo de quase quatro décadas de história, dando especial ênfase às inovações tecnológicas que tornaram possível a introdução de novas geometrias de aquisição juntamente com os respectivos métodos de reconstrução.

No capítulo 3, introduzimos alguns conceitos relacionados com a formação da imagem em TAC, suas propriedades e qualidade. Descrevemos de seguida alguns possíveis artefactos que se podem verificar nas imagens e sua origem e, ainda alguns dados sobre a dose de radiação que um exame de TAC implica.

No capítulo 4, são apresentados os fundamentos matemáticos da tomografia de transmissão. Num contexto formal e genérico ( $n$ -dimensional) são introduzidos os conceitos matemáticos de transformadas integrais (transformada de Radon, transformada de feixe paralelo e transformada de feixe cónico) e o importante resultado conhecido como teorema da Secção Central. O problema da inversão das transformadas é resolvido recorrendo aos respectivos operadores de retro projecção e à desconvolução com uma função radial, o que constitui uma justificação formal do algoritmo de retro projecção filtrada. Neste capítulo são ainda descritas as condições de amostragem suficientes para que seja possível a inversão das transformadas integrais e são brevemente abordados temas como a inversão aproximada das transformadas integrais, a reconstrução a partir de conjuntos incompletos de dados e a tomografia local.

Nos capítulos 5 e 6 descrevem-se os principais algoritmos de reconstrução a partir de dados obtidos com aquisição sequencial (isto é, com trajectória circular do foco) e diferentes geometrias de feixe. Os algoritmos apresentados têm a sua fundamentação teórica na inversão das transformadas integrais e no teorema da Secção Central (descritos no capítulo 4) e podem ser vistos como diferentes implementações das fórmulas de inversão das transformadas integrais no domínio discreto e a partir de diferentes conjuntos de amostras. Aos algoritmos de Fourier, que pretendemos analisar de forma mais pormenorizada, é dedicado todo o capítulo 6. O ponto fulcral, e mais controverso, dos algoritmos de Fourier tem sido a interpolação dos dados no domínio de Fourier de uma grelha de amostragem polar (ou modificada) para uma grelha Cartesiana, sendo que os diferentes algoritmos descritos diferenciam-se essencialmente pela forma com a qual é resolvido o problema da interpolação. Os algoritmos mais recentes tiram partido de novos métodos computacionais para o cálculo da transformada de Fourier a partir de amostras não equiespaçadas (NFFT) evitando, pelo menos explicitamente, a interpolação no espaço de Fourier. Como veremos, o recurso à NFFT faz com que os métodos de Fourier atinjam níveis de desempenho comparáveis com os dos métodos de FBP no que se refere à qualidade da imagem, à capacidade de adaptação a novas geometrias de aquisição e à capacidade de manipular a qualidade da imagem pela escolha de um filtro. Neste capítulo são apresentados novos algoritmos de Fourier para a reconstrução a partir de projecções obtidas com geometria divergente e para a reconstrução de regiões de interesse.

A transição da trajectória circular para a trajectória em espiral e da geometria divergente para a geometria cónica implicam a introdução de técnicas de interpolação longitudinal ou de reconstrução 3D que se encontram descritas no capítulo 7.

No capítulo 8 descreve-se o ambiente de simulação desenvolvido. Começando pelo fantoma, ao qual foi necessário acrescentar algumas funcionalidades, e prosseguindo com a descrição do simulador de TAC. Foi dada particular atenção à forma com a qual são calculados os dados projecção, às diferentes geometrias de aquisição e à forma como se simula a aquisição dos dados do fantoma dinâmico.

Nos capítulos 9 e 10 descreve-se o trabalho experimental realizado de forma a avaliar o desempenho dos algoritmos propostos, respectivamente, em situações estáticas e dinâmicas. No caso estático, os algoritmos propostos são avaliados e comparados com os correspondentes algoritmos de retro projecção filtrada para as diferentes geometrias (feixe paralelo, feixe divergente e feixe cónico, trajectória circular e em espiral), em condições ideais e com diferentes níveis de ruído. No caso dinâmico, introduzem-se algumas técnicas de aquisição/reconstrução específicas para aplicações de tomografia cardio-torácica. Mostra-se como estas técnicas podem ser implementadas em conjunto com os métodos de Fourier propostos, assim como com os métodos de retro projecção filtrada, e compara-se o desempenho dos resultantes algoritmos.

Por fim, no capítulo 11, são apresentadas as conclusões às quais chegamos com o nosso trabalho assim como algumas considerações sobre a possível futura utilização de métodos de Fourier na reconstrução de imagens em tomografia de transmissão.

## 1.4 Materiais e métodos

O trabalho apresentado nesta dissertação foi completamente realizado num ambiente virtual de simulação constituído por um simulador de TAC, por nós desenvolvido em MATLAB (versão 7.3) sobre um computador pessoal, e um fantoma dinâmico do tórax (4D MCAT) que inclui os movimentos cardíaco e respiratório, para além de outros fantasmas virtuais bidimensionais, como os fantasmas da cabeça de Shepp-Logan e de Herman.

O fantoma 4D MCAT é gerado por um programa em linguagem C (disponível em [24]), sendo possível a selecção de parâmetros como o tamanho dos voxels, a extensão longitudinal do volume, a presença (ou não) do movimento cardíaco ou respiratório, o número de instâncias do fantoma que se pretende gerar (correspondentes a diferentes instantes temporais), entre outros. O programa gera o fantoma sob a forma de ficheiros binários (um ou mais ficheiros dependendo do número de instâncias pretendidas) que podem ser lidos e interpretados pelo MATLAB como *arrays* tridimensionais.

O simulador é bastante completo, permitindo realizar a aquisição virtual de dados projecção utilizando várias geometrias de feixe e trajectórias do foco de raios X tanto sobre o volume estático como dinâmico, todavia tem algumas limitações como, por exemplo, o facto de serem considerados apenas feixes monoenergéticos e de largura nula para poder simplificar o processo de cálculo dos dados projecção modelando-o como o cálculo de integrais ao longo de linhas ideais.

A linguagem de alto nível, proporcionada pelo MATLAB, demonstrou ser perfeitamente adequada ao tipo de tarefas computacionais envolvidas, em particular, as muitas rotinas disponíveis para o cálculo vectorial e matricial confirmaram-se como sendo um dos pontos fortes desta ferramenta quer pela simplicidade de utilização quer pela eficiência computacional.

Para o cálculo da transformada de Fourier a partir de amostras não equiespaçadas recorreremos à biblioteca de funções C designada *NFFT C library* [78], sendo que estas funções devem ser embebidas no código MATLAB da forma que se explica na apêndice A.

Para avaliarmos o desempenho dos diferentes algoritmos, para além de considerarmos o tempo de cálculo e a observação subjectiva da qualidade da imagem, utilizamos como medidas quantitativas da qualidade da reconstrução as três medidas de erro  $-d$  (distância média quadrática normalizada),  $r$  (distância média absoluta normalizada),  $e$  (valor máximo da distância)– propostas por Herman [45]), que permitem quantificar a distância entre a imagem reconstruída e a imagem original utilizando as fórmulas que podem ser encontradas

na apêndice B.

## 1.5 Contribuições originais

Tal como já se antecipou, o fantoma dinâmico escolhido para as simulações é bastante versátil e pode ser facilmente escolhido o valor de certos parâmetros na altura da sua geração. Todavia, foi necessário introduzir algumas novas funcionalidades para que o fantoma fosse apropriado para o tipo de estudos que iríamos efectuar. Em primeiro lugar, não fazia sentido testar técnicas de aquisição e reconstrução dinâmicas sobre um fantoma que tinha ciclos cardíacos perfeitamente periódicos, quando se sabe que a principal dificuldade neste tipo de aplicações está mesmo na irregularidade do ciclo cardíaco. Assim, introduziu-se a aleatoriedade na duração do ciclo cardíaco, sendo esta modelada como uma variável Gaussiana cuja média e desvio padrão podem ser estabelecidos antes da geração do fantoma. Assim, podem ser gerados fantasmas dinâmicos com diferentes graus de arritmia, com e sem movimento respiratório (correspondente à situação de apneia do paciente).

Ainda, relativamente ao fantoma, foram alterados os valores de coeficiente de atenuação de alguns tecidos, foram definidos diferentes valores de coeficiente de atenuação para o interior dos vasos sanguíneos, de forma a podermos simular aquisições com e sem contraste e ainda foi introduzido um modelo da variação periódica do coeficiente de atenuação no parênquima pulmonar devido à perfusão ao longo do ciclo cardíaco.

No que diz respeito ao simulador de TAC, este é completamente fruto de trabalho original. Entre as suas funcionalidades mais importantes, destacam-se:

- aquisição (projectão) por cálculo dos integrais de linha: feixe paralelo e divergente, corte único e multicorte, trajectória circular e em espiral, do fantoma estático e dinâmico. Vários algoritmos para o cálculo dos integrais de linha
- método de projecção directa de Fourier. Trata-se de um método extremamente rápido mas, infelizmente, aplicável apenas ao caso de aquisições convencionais monocorte
- reconstrução: implementação de vários algoritmos de reconstrução conhecidos, para todas as geometrias de aquisição descritas

No que diz respeito a novos algoritmos de reconstrução, explorou-se um conjunto de algoritmos de reconstrução que se enquadram na família dos métodos directos de Fourier com recurso à transformada de Fourier de amostras não equiespaçadas (NFFT), chegando à conclusão que a introdução desta nova ferramenta computacional permite melhorar o desempenho destes algoritmos tanto do ponto de vista da qualidade da imagem como do ponto de vista da flexibilidade. Neste contexto, foram propostos e avaliados os seguintes algoritmos:

- algoritmo DFM: com interpolação no espaço de Fourier realizada num sistema de referência modificado (Cartesiano)
- algoritmo DB NFFT DFM: para reconstrução a partir de dados adquiridos com geometria divergente sem recurso a *rebinning* das projecções (*rebinning* sem interpolação)
- adaptação dos algoritmos desenvolvidos à reconstrução a partir de dados adquiridos em espiral e multicorte (integração com algoritmos de interpolação longitudinal)

- adaptação dos algoritmos desenvolvidos à reconstrução a partir de dados adquiridos do fantoma dinâmico (integração com diferentes técnicas de aquisição/reconstrução dinâmica)
- algoritmos NFFT DFM ROI e DB NFFT DFM ROI para a reconstrução de regiões de interesse.



## Capítulo 2

# Origens e evolução da tomografia computadorizada

O termo "tomografia" deriva das palavras gregas *τομος* ("tomos" = secção) e *γραφια* ("grafia" = escrita, descrição), ao indicar que se trata de uma técnica que permite descrever o interior dos objectos secção por secção ou, utilizando a terminologia corrente, corte a corte. Quanto ao termo "computorizada", este indica a dependência desta técnica do processamento computadorizado. De facto, após as primeiras experiências no âmbito da tomografia de emissão, nas quais a representação de secções do interior do corpo realizava-se através de técnicas analógicas, a tomografia axial computadorizada (TAC), também designada tomografia computadorizada ou tomografia de transmissão de raios X, foi a primeira técnica imagiológica a tirar partido do processamento computadorizado para a reconstrução de secções axiais do corpo [51], seguida por outras modalidades como a tomografia computadorizada de emissão de fótons simples (SPECT – *Single Photon Emission Computed Tomography*), a tomografia de emissão de positrões (PET – *Positron Emission Tomography*), a ecotomografia e a tomografia por ressonância magnética nuclear (MRI – *Magnetic Resonance Imaging*).

O enorme impulso dado pela TAC à área da imagiologia médica, teve o seu reconhecimento máximo em 1979 quando o prémio Nobel da Medicina foi atribuído a Hounsfield e Cormack pelos seus trabalhos fundamentais, nas áreas, respectivamente, da instrumentação e da teoria da reconstrução, que levaram à implantação desta técnica como meio de diagnóstico imprescindível na prática clínica [48, 14]. O papel central das técnicas tomográficas nas ciências médicas será ainda testemunhado pela atribuição, em 1982, do prémio Nobel da Química a Klug pelos seus trabalhos envolvendo a tomografia (na área da microscopia electrónica) e, em 2003, do prémio Nobel da Medicina a Lauterbur e Mansfield pelas suas descobertas que levaram ao desenvolvimento dos métodos de imagem por ressonância magnética nuclear.

Hoje em dia, as diferentes técnicas tomográficas estão largamente difundidas na prática clínica, como instrumentos diagnósticos e de auxílio em procedimentos de intervenção, sendo também utilizadas como meios de investigação não invasiva em muitos outros contextos. O rápido e impressionante desenvolvimento tecnológico, juntamente com a disponibilização de extraordinários recursos computacionais e de métodos de reconstrução cada vez mais rápidos e eficientes, tem permitido alargar o leque das aplicações e atingir níveis de sofisticação e qualidade outrora impensáveis.

Neste capítulo, começamos por descrever, numa breve resenha histórica, o percurso tecnológico e matemático que levou ao aparecimento do primeiro tomógrafo comercial. De se-

guída, falaremos da evolução desta tecnologia ao longo dos seus quase quarenta anos de vida, sempre sem entrar em detalhes técnicos, que excedem os objectivos desta dissertação, mas dando o devido relevo às evoluções que, reflectindo-se na geometria de aquisição dos dados, têm levado ao desenvolvimento de novos métodos de reconstrução, sejam eles seccionais ou volumétricos. Por fim, será apresentado o estado da arte, com especial atenção para os métodos de reconstrução e as aplicações mais avançadas.

## 2.1 As origens

As origens da tomografia assentam no esforço de muitos cientistas que, por vezes trabalhando em paralelo e muitas vezes ignorando os resultados já obtidos por outros, deram a própria contribuição para o desenvolvimento e implementação desta técnica. Tentamos aqui resumir os principais marcos na história da tomografia dedicando especial atenção aos aspectos ligados ao problema da reconstrução. Maiores detalhes podem ser encontrados em [17], [142] e em [51].

Os fundamentos da teoria da reconstrução tomográfica foram estabelecidos em 1917 quando o matemático austríaco J. H. Radon demonstrou ser possível a determinação de funções definidas num plano a partir do conhecimento dos integrais calculados ao longo de linhas no mesmo plano [106]. Pela sua formulação teórica, Radon é considerado o pai da teoria da reconstrução tomográfica, apesar de ter sido antecipado pelo físico holandês Lorentz que, em 1905, propôs uma solução a este problema para o caso tri-dimensional. O problema inverso, formulado por Radon de um ponto de vista puramente matemático, foi mais tarde designado *problema de Radon* e o conjunto completo de integrais de linha num plano *transformada integral de Radon*.

Algumas das primeiras aplicações da teoria de Radon deram-se no âmbito da astronomia e foram desenvolvidas por Ambartsumian (1936), cujo trabalho incluía o primeiro procedimento numérico para a resolução do problema, e Bracewell (1956), que empregou técnicas de Fourier para reconstruir um mapa da emissão solar de microondas a partir de medidas de radiação à superfície do sol [7].

Entre 1957 e 1963, o físico sul africano A. Cormack, que na altura desconhecia a existência da teoria de Radon, reformulou e resolveu o problema da reconstrução tomográfica num trabalho cujo objectivo era de melhorar o, na altura puramente empírico, processo de planeamento da radioterapia através da determinação do coeficiente de atenuação no interior do corpo a partir de medidas de transmissão. Cormack construiu um equipamento experimental para a recolha dos dados e desenvolveu um método de reconstrução baseado na solução numérica de um conjunto de equações integrais [15, 16].

O processo físico de atenuação que os raios X (ou gama) sofrem ao atravessarem um objecto, foi descrito por Cormack utilizando um modelo matemático baseado no integral de linha da função de distribuição espacial do coeficiente de atenuação, colocando definitivamente a transformada de Radon na base da teoria da reconstrução em tomografia de raios X (ou gama) [14].

Entretanto, do ponto de vista da instrumentação, o problema da determinação da distribuição de propriedades no interior de um objecto a partir de medidas de transmissão de raios X, tinha sido colocado já em 1921 por Bocage levando ao desenvolvimento de técnicas conhecidas pelo nome de planigrafia, stratigrafia, laminografia, etc.. Neste conjunto de técnicas, designado por tomografia convencional, a imagem é obtida focando a informação contida

num plano do objecto e desfocando, ao mesmo tempo, a restante informação, sem recurso à reconstrução a partir de projecções [51].

O primeiro exemplo de sistema baseado no paradigma aquisição/reconstrução típico da moderna tomografia computadorizada (mas ainda sem recurso aos modernos computadores) foi desenvolvido por Frank em 1940. O equipamento de Frank permitia a obtenção de sinogramas (isto é, como se define na secção 5.1.1, conjuntos completos de projecções paralelas obtidas com diferentes orientações) e a reconstrução da imagem através de uma técnica de retroprojecção óptica [51].

Em 1963, Kuhl e Edwards introduziram a tomografia transversal com a utilização de radioisótopos, que mais tarde evoluiu na moderna tomografia de emissão (PET e SPECT), utilizando um método de retroprojecção analógico (óptico) para a reconstrução da imagem.

Finalmente, em 1967, nos laboratórios da indústria inglesa EMI começou a ser desenvolvido por Hounsfield o primeiro tomógrafo digital para a obtenção de imagens em âmbito clínico. No protótipo inicial, era realizado um varrimento linear de um objecto para cada uma das posições angulares e, em consequência da baixa intensidade da fonte utilizada, a aquisição dos dados demorava nove dias. A reconstrução, baseada na inversão directa de um sistema de 28000 equações algébricas, demorava duas horas e meia [51].

Em 1971, foi instalado no Hospital Atkinson Morley, em Londres, o primeiro tomógrafo comercial, designado EMI 1, destinado a obter imagens seccionais da cabeça. No EMI 1, já bastante aperfeiçoado do ponto de vista técnico relativamente ao primeiro protótipo, a aquisição (28800 amostras) demorava cerca de cinco minutos sendo em simultâneo reconstruída uma imagem de  $80 \times 80$  *pixels*, utilizando um método algébrico iterativo [61]. A publicação das primeiras imagens clínicas, que permitiram a detecção de um vasto tumor cístico no lobo frontal de um doente, surpreendeu o mundo científico e o EMI 1 foi entusiasticamente aceite pela comunidade médica. Em poucos anos, várias empresas tradicionalmente produtoras de instrumentação radiológica, começaram a comercializar os seus próprios tomógrafos e assistiu-se a uma rápida evolução destes sistemas tanto do ponto de vista da instrumentação, como dos protocolos de aquisição dos dados e dos métodos de reconstrução da imagem.

Em 1974, Shepp e Logan aplicaram pela primeira vez o método de retroprojecção filtrada (preconizado por Bracewell em 1967 [8] e desenvolvido por Ramachandran e Lakshminarayanan em 1971 [107]) à reconstrução de uma imagem sectional da cabeça [124]. Este algoritmo, reduzindo o tempo de cálculo e melhorando a qualidade da imagem, tornou-se o mais utilizado nos tomógrafos comerciais permitindo a obtenção de imagens com maior resolução ( $256 \times 256$  *pixels*, ou até os actualmente habituais  $512 \times 512$  *pixels*) em tempos aceitáveis.

## 2.2 A evolução

A crescente difusão dos tomógrafos nos hospitais de todo o mundo, evidencia o sucesso desta tecnologia que se tornou num meio de diagnóstico imprescindível na prática clínica. Enquanto até 1974 tinham sido instalados apenas 60 tomógrafos em todo o mundo, em 1980, após a comercialização do primeiro tomógrafo destinado à análise do corpo inteiro (em 1976), já se contavam cerca de 10.000 instalações e, no ano de 2000, cerca de 30.000 [61]. Em Portugal, contavam-se apenas 45 equipamentos de TAC instalados em 1990, 122 em 1997 e 134 equipamentos em 2003 [94].

Nos mais de trinta anos de história da tomografia computadorizada, foram desenvolvidos inúmeros modelos de tomógrafos que podem ser esquematicamente agrupados em cinco cate-



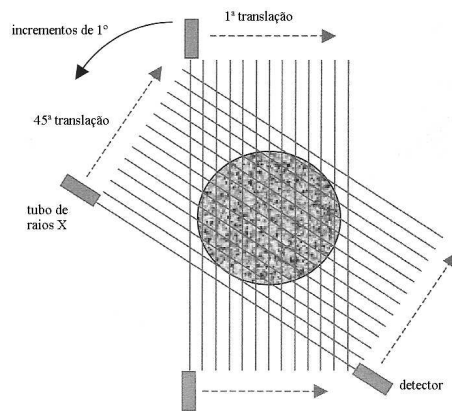


Figura 2.1: Esquematização da aquisição das projecções num tomógrafo de 1ª geração [51].

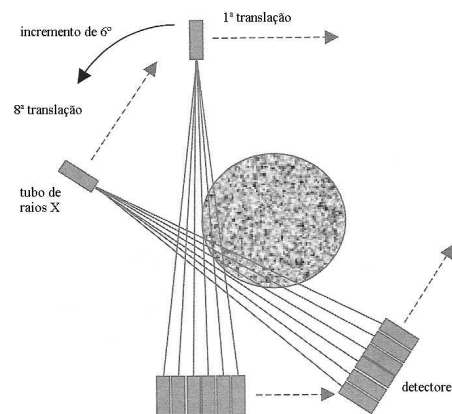


Figura 2.2: Esquematização da aquisição das projecções num tomógrafo de 2ª geração [51].

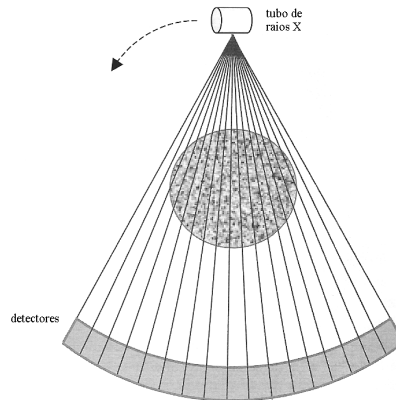


Figura 2.3: Esquematização da aquisição das projecções num tomógrafo de 3ª geração [51].

gorias ou, como se costuma dizer, gerações:

- 1ª geração – A fonte de raios X e o detector (simples) são solidariamente sujeitos a movimento de translação linear até cobrirem a totalidade do objecto, sendo adquirido um raio soma de cada vez. No fim de cada movimento de translação, o conjunto de raios soma adquiridos em correspondência daquela posição angular constitui uma projecção paralela. Após a aquisição de cada projecção paralela o conjunto fonte-detector roda de um pequeno ângulo (geometria paralela, aquisição sequencial) para que seja adquirida a projecção sucessiva (fig. 2.1).
- 2ª geração – A técnica de aquisição é a mesma utilizada na 1ª geração, com a diferença que a introdução de um detector múltiplo (*array* de 6 elementos de detecção) permite a aquisição simultânea de 6 projecções segundo o esquema descrito na figura 2.2 (geometria paralela, aquisição sequencial de 6 projecções em simultâneo).
- 3ª geração – É introduzido um detector múltiplo disposto em arco e, sendo irradiada toda a secção do corpo sob estudo por um feixe divergente, é adquirida em simultâneo uma projecção divergente completa segundo o esquema ilustrado na figura 2.3. Fonte e detector rodam solidariamente (geometria divergente, aquisição simultânea de uma projecção de cada vez). Nos primeiros modelos desta geração, a presença dos cabos de alimentação da fonte e de transmissão dos sinais obtidos pelos detectores, obrigava à rotação alternada do sistema fonte-detectores nos sentidos horário e anti-horário. A aceleração e desaceleração do sistema fonte-detectores no decorrer de cada rotação impediam a redução do tempo de rotação abaixo dos 2 segundos. Em 1987, a introdução da tecnologia *slip ring* para a alimentação e a transmissão de dados, tornou possível a aquisição de secções sucessivas em rotação contínua, o que permitiu reduzir o tempo de rotação a cerca de 1s e abriu o caminho para a implementação do varrimento em espiral (secção 2.2.1).
- 4ª geração – Estes tomógrafos são caracterizados por um detector múltiplo, estacionário e disposto em anel, enquanto a fonte de raios X roda segundo uma circunferência interna

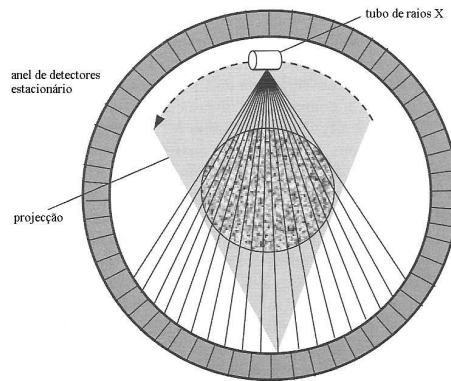


Figura 2.4: Esquemática da aquisição das projecções num tomógrafo de 4ª geração [51].

ou externa à do anel de detectores. A fonte irradia com feixe divergente toda a secção do corpo sob estudo e cada detector adquire uma projecção divergente medindo a intensidade dos raios recebidos correspondendo às várias posições da fonte (geometria divergente, múltiplas projecções adquiridas em simultâneo). Dada a particular geometria da projecção (divergente com o vértice no detector), o número de amostras por projecção não é limitado pelas dimensões do detector mas apenas depende da frequência de amostragem no tempo, podendo ser adquirido um número de amostras muito superior ao dos tomógrafos de 3ª geração. No que se refere ao tempo de aquisição, estes tomógrafos são equivalentes aos de 3ª geração. Esta geração de tomógrafos tem tido uma difusão limitada devido ao custo elevado do anel de detectores sendo, aparentemente, destinada ao abandono por não permitir a introdução da tecnologia multi-linha (secção 2.2.2), inviável tanto do ponto de vista económico como do ponto de vista prático [51].

A numeração das gerações corresponde apenas aproximadamente à sucessão temporal com a qual surgiram, sem necessariamente implicar a superioridade de uma geração em relação à anterior. Basta lembrar, a este propósito, que a maior parte dos tomógrafos actualmente em uso é de 3ª geração existindo apenas uma pequena percentagem de tomógrafos de 4ª geração.

Transversalmente ao aparecimento das diferentes gerações de tomógrafos, a evolução ao longo do tempo, tem sido marcada também pelo desenvolvimento de novos e aperfeiçoados dispositivos de emissão e detecção dos raios X (tanto do ponto de vista físico como da electrónica subjacente), assim como pela disponibilidade de dispositivos electrónicos dotados de cada vez maior capacidade computacional e de armazenamento de dados. Os progressos realizados tanto no âmbito tecnológico como da reconstrução da imagem/volume, permitiram aumentar a qualidade da imagem e a velocidade de varrimento, tornando possível um leque de aplicações cada vez mais amplo e diversificado. Entre as inovações que mais marcaram o recente desenvolvimento da tomografia computadorizada destacam-se, sem dúvida, o varrimento em espiral e o varrimento multi-corte que foram introduzidos segundo a sucessão temporal ilustrada na figura 2.5 e que conduzem à que se pode classificar como configuração de 5ª geração.

Convém ainda mencionar a existência de duas arquitecturas especiais que, apesar de não terem tido muito sucesso (em termos de difusão da tecnologia), constituem os primeiros exemplos de estratégias de aquisição, respectivamente, multi-slice e de feixe cónico, permitindo

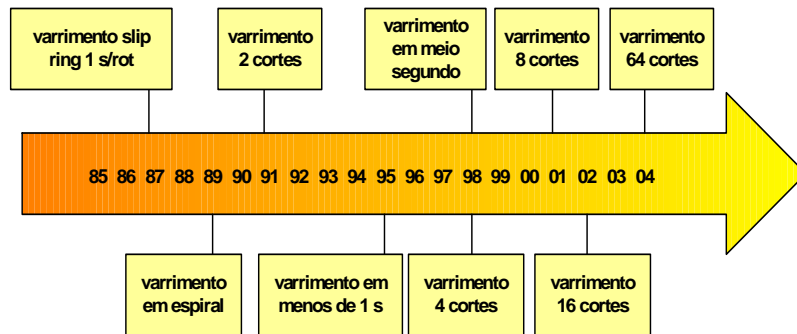


Figura 2.5: Sucessão temporal dos recentes desenvolvimentos em tomografia computadorizada.

atingir níveis de qualidade muito elevados:

- *Ultrafast CT*, ou *Electron Beam CT* –EBCT–[6]. Nesta arquitectura, desenvolvida com o objectivo de conseguir tempos de varrimento adequados para a visualização cardíaca, a fonte de raios X é constituída por quatro pares de alvos semicirculares em tungsténio formando um arco de  $210^\circ$  que abrange a maca do lado inferior (fig. 2.6). Um feixe de electrões de elevada intensidade é deflectido magneticamente de forma a varrer um alvo semicircular de cada vez, produzindo um feixe de raios X que irradia uma secção do corpo do doente. Em oposição aos alvos semicirculares situam-se os detectores dispostos em dois arcos paralelos de  $216^\circ$ . A eliminação de todo o movimento mecânico permite reduzir o tempo de aquisição a cerca de  $50ms$  por varrimento, sendo adquiridas duas secções, ou cortes, de cada vez. Adicionando  $8ms$  de latência entre um varrimento e outro, o sistema descrito permite a aquisição de oito cortes de  $8mm$  de espessura em  $224ms$ . A conjugação entre a rapidez na aquisição dos dados e a capacidade de adquirir dados em multi-linha, torna este sistema especialmente apto para estudos dinâmicos, sendo hoje em dia essencialmente utilizado na avaliação de calcificações nas artérias coronárias. O custo elevado deste sistema (actualmente comercializado pela GE) e a pouca versatilidade, juntamente com o aparecimento da tomografia multi-corte (que permite a obtenção de resultados de qualidade comparável a um menor custo), têm impedido a implantação em grande escala deste sistema que se limita a uma centena de existências nos EUA e a poucas unidades na Europa.
- *Dynamic Spatial Reconstructor* –DSR–. Trata-se um protótipo que foi desenvolvido no final dos anos 70 [110] na clínica Mayo, nos EUA, onde se encontra ainda instalado e em funcionamento, apenas para fins de pesquisa. Apesar de não ter tido seguimento em âmbito comercial, este projecto tem um papel de relevo na história da tomografia, pois foi o primeiro tomógrafo a permitir a aquisição de dados volumétricos com detectores planares (geometria de feixe cónico). Basicamente, este sistema (fig. 2.7) é caracterizado por um conjunto de 14 focos de raio X dispostos em semicírculo ao qual se contrapõe um detector planar constituído por um ecrã fluorescente semicircular. As imagens projectadas no ecrã fluorescente são recebidas por 14 dispositivos intensificadores de imagem e gravadas. Um varrimento electrónico completo permite adquirir 240 cortes contíguos de  $0.9mm$  de espessura em  $1/60$  segundos podendo ser repetido

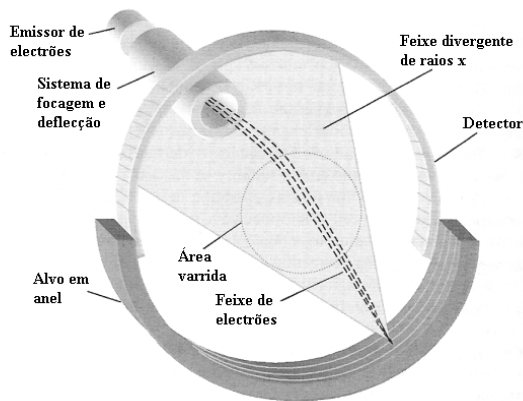


Figura 2.6: A aquisição das projecções num EBCT [51].

60 vezes por segundo. Refira-se ainda, que todo o sistema de aquisição das projecções pode rodar (15 rpm) em torno do objecto. Este movimento mecânico, combinado com o varrimento electrónico, permite a aquisição de projecções numa gama angular completa, melhorando a qualidade das imagens seccionais, no que se refere à resolução espacial e de contraste, em detrimento da resolução temporal. No que se refere à reconstrução da imagem, esta processa-se recorrendo à técnica de retro projecção filtrada adaptada à geometria 3D, sendo, contudo, baseada numa filosofia de reconstrução secção por secção e não puramente 3D. A manipulação do vasto conjunto de dados produzidos e a visualização de volumes constituíram um enorme desafio tendo sido desenvolvidas para o efeito técnicas de vanguarda que só recentemente começaram a ser introduzidas nos tomógrafos comerciais.

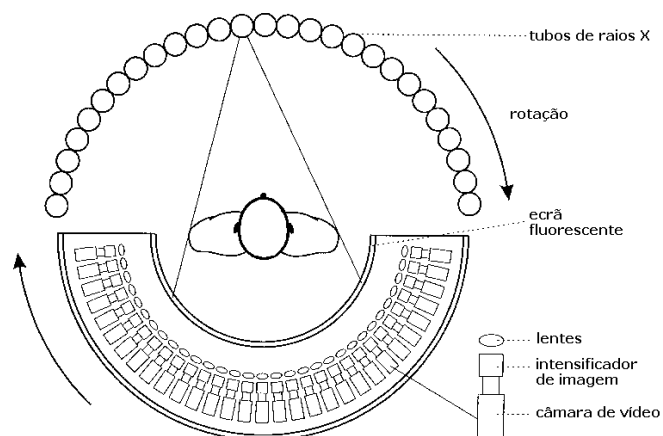


Figura 2.7: Esquema de funcionamento do *Dynamic Spatial Reconstructor* –DSR [61].

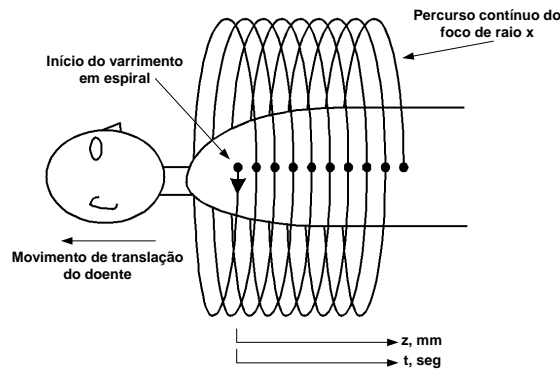


Figura 2.8: Varrimento em espiral. No espaço de referência do doente o foco descreve uma espiral.

### 2.2.1 Varrimento em espiral

No varrimento convencional (designado também por incremental ou sequencial) a aquisição dos dados realiza-se secção por secção, sendo necessário, entre a aquisição de uma secção e doutra, um período de latência (tipicamente de  $1s$ ) para permitir o deslocamento longitudinal da maca com o doente até à localização da secção sucessiva. Dependendo da extensão longitudinal do volume a examinar e da qualidade pretendida para a imagem (tanto no plano transversal como longitudinal), este tipo de varrimento pode tornar-se excessivamente demorado para que o doente permaneça imóvel durante toda a duração do exame. Este facto, juntamente com a necessidade de limitar o tempo de exposição do doente à radiação, fez com que se tentasse desenvolver técnicas de varrimento cada vez mais rápidas, tomando também em consideração geometrias de aquisição não planares.

Com efeito, a introdução da técnica de varrimento em espiral (ou helicoidal), apresentada em 1989 por Kalender e Vock [62], deu um novo impulso à tomografia computadorizada, tornando possível a análise de grandes volumes em tempos reduzidos e abrindo o caminho para novas abordagens à tomografia dinâmica. No varrimento em espiral, a aquisição dos dados é efectuada num certo número de rotações contínuas do foco enquanto a maca com o doente se desloca longitudinalmente com velocidade constante (fig. 2.8). Claramente, no espaço de referência do doente, o foco do tubo de raios X percorre uma trajectória efectiva em espiral (ou helicoidal), donde o nome do método. Mesmo mantendo inalteradas as demais características técnicas do tomógrafo, a utilização deste método de varrimento, que elimina o período de latência entre varrimentos seccionais sucessivos, permite reduzir a duração total do exame tornando possível a cobertura de um órgão num intervalo de tempo compatível com a capacidade do doente em manter-se imóvel (por exemplo, retendo a respiração).

Do ponto de vista da instrumentação, qualquer tomógrafo dotado de tecnologia *slip ring* pode proporcionar varrimentos em espiral, sendo apenas necessário, nalguns casos, reduzir as correntes máximas no tubo de raios X para evitar o sobre-aquecimento ao longo do prolongado e ininterrupto tempo de varrimento. Tendo em conta os limites impostos pelo aquecimento da fonte e pela dose de radiação transmitida ao doente, a potência do sistema de raios X determina o tempo máximo de varrimento consentido (logo, o volume que pode ser analisado).

Para caracterizar a geometria do varrimento em espiral introduzimos um parâmetro adicional que poderá ser o passo da hélice  $d$ , isto é, o deslocamento da maca em  $mm$  para cada

360° de rotação do foco ou, em alternativa, a velocidade de translação da maca  $d'$ , medida em  $mm/s$ .

A razão entre o passo da hélice  $d$  e a espessura da secção  $S$  (cuja definição é ilustrada na figura 2.11-a), designada pelo termo inglês de "pitch", é uma quantidade adimensional particularmente significativa, permitindo relacionar a geometria do varrimento com a qualidade da imagem, dadas as características técnicas do sistema. Quanto maior for o *pitch*, tanto mais rápido será o varrimento de um dado volume (ou maior o volume analisado num determinado intervalo de tempo). Por outro lado, com o aumentar do *pitch* diminui a densidade de amostras na direcção longitudinal provocando a degradação da qualidade da imagem reconstruída (alargamento do perfil de sensibilidade de corte definido na secção 3.3.2). No capítulo 7, no qual falaremos mais detalhadamente da tomografia em espiral, será analisado o problema da escolha do valor do *pitch*, sendo habitualmente utilizados valores entre 1 e 2.

Na tomografia em espiral mono-corte, a reconstrução de uma imagem correspondente a um determinado corte transversal requer um processamento adicional, designado por interpolação longitudinal (ou interpolação  $z$ ) efectuado sobre os dados antes da reconstrução propriamente dita. Este processo (descrito no capítulo 7) consiste na síntese, por interpolação dos dados medidos, de um conjunto de dados projecção equivalente ao que seria obtido por varrimento convencional no plano da imagem e permite que sejam reconstruídas imagens correspondentes a qualquer posição longitudinal dentro do volume (fig. 2.9), sendo o intervalo de reconstrução arbitrariamente subtil e até, tendo em consideração a espessura dos cortes, podendo haver sobreposição entre cortes. A vantagem principal do varrimento em espiral é mesmo a de se poder escolher retrospectivamente o número e o posicionamento dos cortes por reconstruir, enquanto no varrimento convencional estes devem ser pré-estabelecidos sendo, inclusive, o número máximo de cortes limitado pela dose de radiação administrável. Ainda, a possibilidade de escolher planos de reconstrução com distância inferior à espessura do corte permite obter imagens de cortes parcialmente sobrepostos em  $z$ , assegurando uma elevada resolução longitudinal.

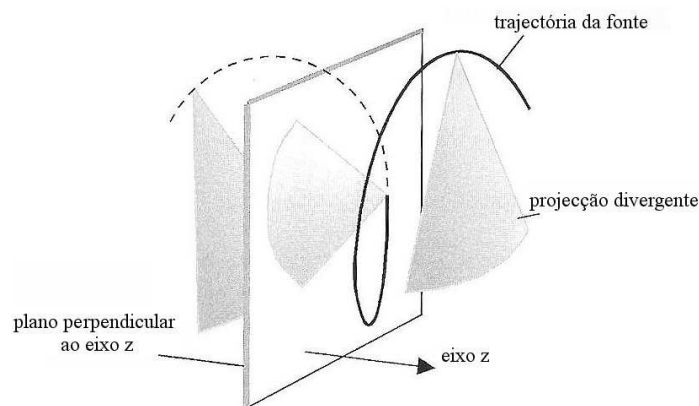


Figura 2.9: A aquisição em espiral permite reconstruir imagens correspondentes a qualquer plano transversal dentro do volume [51].

Desde logo, tornaram-se evidentes as vantagens relacionadas com a técnica de aquisição em espiral, contudo, inicialmente verificou-se uma certa desconfiança, pois, temia-se que a qualidade da imagem pudesse resultar comprometida, devido ao aumento do ruído e ao apa-

recimento de artefactos específicos. Com o tempo, graças ao desenvolvimento de algoritmos de interpolação longitudinal mais sofisticados e, mais tarde, à introdução dos detectores multi-linha, as objecções iniciais foram levantadas e assistiu-se à aceitação e afirmação desta técnica de varrimento actualmente considerada imprescindível.

### 2.2.2 Varrimento multi-corte

As vantagens proporcionadas pelo varrimento em espiral não se revelam suficientes no caso de algumas aplicações (como, por exemplo, a angiografia) particularmente exigentes no que se refere à extensão do volume por analisar e à rapidez de aquisição dos dados. Pois, para além de certos limites, a cobertura de grandes volumes em tempos reduzidos (*pitch* elevado) tem como consequência uma inaceitável degradação da qualidade da imagem, devido ao alargamento do perfil de sensibilidade de corte (ver secção 3.3.2).

Esta limitação foi ultrapassada com a introdução de detectores multi-linha, representados esquematicamente na figura 2.10, que consistem em várias linhas de elementos de detecção, permitindo abrir a colimação do feixe na direcção longitudinal. Fala-se em tomografia em espiral multi-corte, ou multi-secção (*multi-slice spiral CT*), quando a abertura do feixe na direcção longitudinal é tão pequena ( $\sim 2^\circ$ ) que podem considerar-se as projecções como pertencentes a planos paralelos (ortogonais ao eixo de rotação), e em tomografia em espiral de feixe cónico (*cone beam spiral CT*) quando a abertura do feixe é tal que não permite esta aproximação.

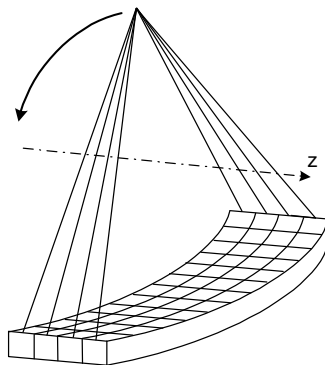


Figura 2.10: Representação esquemática de um detector de 4 linhas.

Em primeiro lugar, na presença de um tomógrafo multi-corte, torna-se indispensável introduzir uma nova definição de espessura de secção. Se no caso de detectores mono-linha a espessura da secção, medida no eixo de rotação (fig. 2.11-a), depende apenas da abertura do colimador na direcção longitudinal, no caso de detectores multi-linha a espessura de uma secção, sempre medida no eixo de rotação (fig. 2.11-b), depende da abertura do colimador e do número de cortes adquiridos. A definição de *pitch* estende-se facilmente ao caso de um sistema multi-corte para a aquisição simultânea de  $M$  secções substituindo a espessura da secção  $S$  pela espessura total do feixe  $M \cdot S$ , resultando o *pitch* definido pela expressão geral  $\frac{d}{MS}$  [61].

Os primeiros sistemas multi-corte dispunham de apenas 2 linhas de detectores permitindo a aquisição simultânea de 2 secções. Nos anos seguintes foram aparecendo sistemas para a



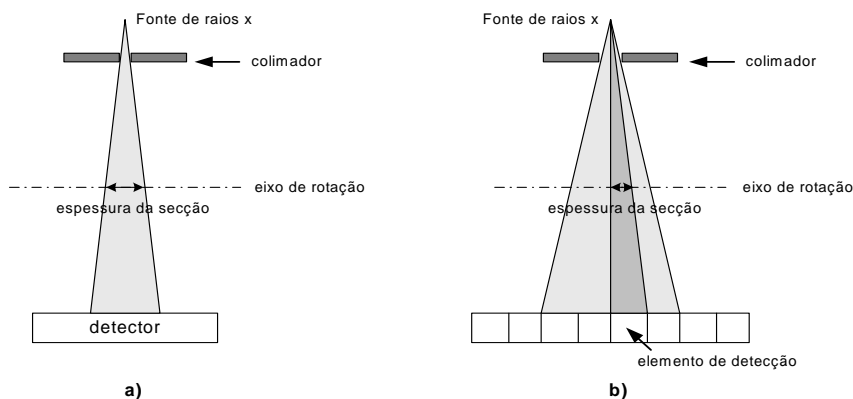


Figura 2.11: No caso de tecnologia mono-linha (a), a espessura da secção é determinada pela abertura do colimador de feixe. No caso de tecnologia multi-linha (b) a espessura da secção é determinada pela abertura do colimador e pelo número de cortes adquiridos simultaneamente. Em ambos os casos a espessura da secção é medida no iso-centro.

aquisição simultânea de 4, 8, 16 ... secções. Em geral, nestes sistemas, o número de linhas de detectores é superior ao número de cortes adquiridos simultaneamente, correspondente ao número de canais de aquisição. Pois, o sinal adquirido por um número variável de elementos de detecção pode ser combinado e transmitido como se viesse de um único elemento de detecção complexo, permitindo assim obter secções de espessura variável.

A título de exemplo, na figura 2.12 ilustram-se as diferentes configurações de detectores (matricial, constituída por elementos de detecção todos do mesmo tamanho, adaptativa, cujos elementos de detecção têm largura variável, e mista) utilizadas pelos principais produtores de tomógrafos nos sistemas para a aquisição simultânea de 4 secções. O número de linhas de elementos de detecção varia entre 8 e 34 e as espessuras de secção entre 0.5 e 8 mm. Com o aumentar do número de secções, as configurações dos detectores mantiveram-se semelhantes mas com um número mais elevado de linhas de detectores.

Só recentemente, algumas inovações importantes nos dispositivos electrónicos para a aquisição e transmissão dos dados, permitiram aumentar o número de canais de transmissão chegando-se a desenvolver sistemas para a aquisição de 64, ou mais, secções em simultâneo.

Em geral podemos dizer que, quanto maior o número de secções, tanto maior é o volume que pode ser analisado, mais rápido o varrimento, maior a resolução espacial longitudinal e maior o aproveitamento da dose de radiação que pode, em princípio, ser reduzida mantendo a qualidade da imagem. Contudo, para além do número de secções, muitos outros factores (relacionados com o facto de o feixe ser cónico) influenciam o desempenho de um tomógrafo, pelo que a avaliação deve ser efectuada caso a caso.

Tal como no caso da tomografia em espiral mono-corte, enquanto a abertura do feixe na direcção longitudinal puder ser matematicamente descurada, a reconstrução na tomografia em espiral multi-corte segue um paradigma bidimensional, isto é, a reconstrução de uma imagem correspondente a um determinado plano transversal é precedida por uma fase de interpolação longitudinal, efectuada sobre os dados adquiridos, que conduz à síntese de um conjunto de dados equivalente ao que seria obtido por varrimento convencional monocorte no plano da imagem. No capítulo 7, analisaremos detalhadamente o problema da interpolação longitudinal dos dados, tanto mono- como multicorte, descrevendo os métodos de interpolação

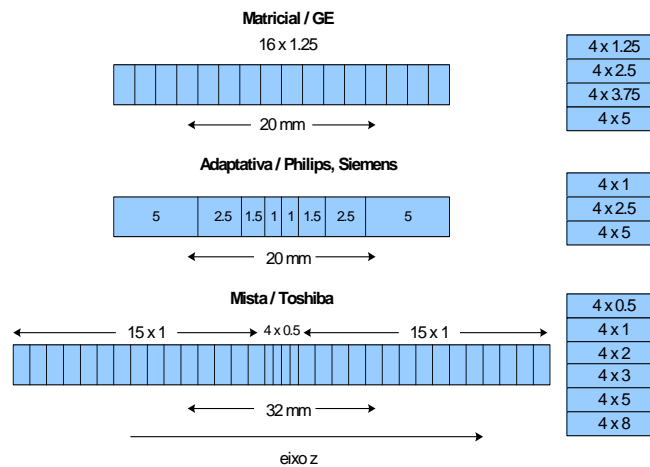


Figura 2.12: Os sistemas multi-corte para a aquisição de 4 cortes em simultâneo, utilizam detectores constituídos por um número variável de elementos de detecção e permitem escolher a espessura da secção.

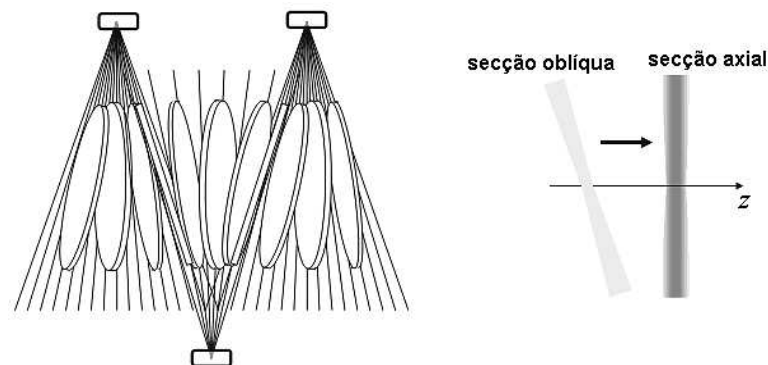


Figura 2.13: Estratégia de reconstrução do algoritmo ASSR.

mais utilizados.

Com o aumento do número de cortes torna-se imperativo, em fase de reconstrução, tomar em consideração o ângulo de projecção que caracteriza cada corte (especialmente os mais externos) na direcção longitudinal, passando a considerar o feixe como cónico e não apenas como divergente num plano transversal. Os diferentes algoritmos utilizados neste caso seguem, fundamentalmente, duas estratégias: retro projecção filtrada em 3D, na qual se abandona o habitual paradigma de reconstrução secção por secção (Feldkamp, cap. 5), e a reconstrução de secções em planos oblíquos (ou hiperplanos) escolhidos de forma a minimizar o erro de reconstrução (*nutating planes*), seguida por uma fase de filtragem que permite obter imagens correspondentes a planos transaxiais (fig. 2.13), como no caso do algoritmo ASSR—*Advanced Single-Slice Rebinning*, que será descrito na secção 7.3.

## 2.3 Estado da arte

Apesar das dúvidas levantadas ao seu aparecimento, a técnica de varrimento em espiral multicorte ganhou rapidamente aceitação, sendo actualmente integrada em todos os tomógrafos comerciais. O número de cortes adquiridos em simultâneo tem vindo progressivamente a crescer, permitindo aumentar a resolução espacial longitudinal e, simultaneamente, o volume coberto pelo varrimento num determinado intervalo de tempo. É de assinalar, neste aspecto, a recente introdução no mercado de sistemas de 64 cortes, enquanto já existem protótipos de 256 cortes (Toshiba, Siemens...).

Limitando a nossa análise aos sistemas de 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> geração, podemos dizer que, hoje em dia, registam-se habitualmente tempos de rotação inferiores aos 0.5s (chegando aos 0.33s), sendo possível cobrir, numa única rotação, até 29mm de extensão longitudinal com uma resolução espacial isotrópica de até 0.33mm.

Refira-se, ainda, o recente aparecimento de sistemas *Dual Source* (Siemens), dotados de dois conjuntos foco-detector (multicorte) cujos eixos centrais são dispostos perpendicularmente (figura 2.14). Estes sistemas, para além de permitir aumentar ainda mais a resolução temporal, permitem a aquisição com dois feixes de diferentes energias, abrindo o horizonte para o desenvolvimento de novas técnicas de aquisição, reconstrução e visualização de volumes tomográficos.

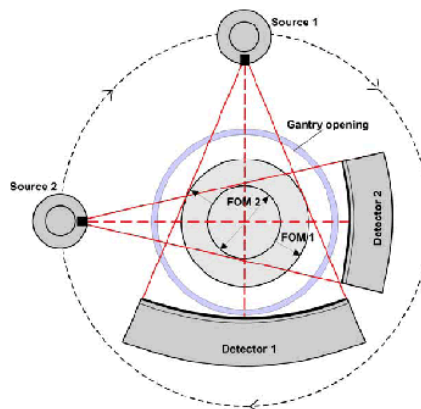


Figura 2.14: Geometria de aquisição do sistema *Dual Source* (Siemens).

É, certamente, muito limitativo avaliar a evolução em tomografia de raios X apenas com base em elementos quantitativos como o aumento do número de cortes ou da velocidade de revolução da fonte, pois, não podemos esquecer que estes só se tornaram possíveis devido aos grandes progressos tecnológicos que se registaram, tanto nos dispositivos de produção e detecção de raios X como na electrónica responsável pela transmissão dos dados, e ao impressionante aumento da capacidade computacional a que se assistiu. Todavia, restringindo-nos ao âmbito desta dissertação, não entraremos em considerações eminentemente tecnológicas relacionadas com o *hardware*.

Maior interesse, do nosso ponto de vista, tem o facto que a evolução tecnológica tenha sido acompanhada pelo desenvolvimento de métodos de reconstrução cada vez mais sofisticados e rápidos, adaptados às novas geometrias de aquisição dos dados, ao volume crescente de dados adquiridos e à capacidade computacional disponível.

Se, inicialmente, a abertura do feixe na direcção longitudinal era limitada, tornando possível a utilização de métodos de reconstrução 2D apenas com a introdução de técnicas de correcção do efeito de feixe cónico, hoje em dia, o crescente número de cortes e o consequente alargamento do feixe obrigaram à introdução de métodos de reconstrução para feixe cónico baseados num paradigma completamente 3D. Os métodos de reconstrução mais sofisticados permitem a reconstrução de imagens correspondentes a planos (ou até a superfícies curvas), seja qual for a sua orientação, directamente sem recorrer à reformatação. A recolha de informações acerca dos métodos de reconstrução efectivamente utilizados nos tomógrafos comerciais é uma tarefa particularmente árdua, pois, algumas empresas guardam o segredo fornecendo apenas uma ideia dos algoritmos utilizados. Contudo, sabe-se que [66], nos tomógrafos topo de gama, a Philips e a Toshiba utilizam algoritmos baseados no algoritmo de Feldkamp (retro projecção 3D) designados, respectivamente, COBRA (*Cone Beam Reconstruction Algorithm*) e TCOT (*True Cone Beam Tomography*), enquanto a GE utiliza uma adaptação do algoritmo ASSR no qual a reconstrução se realiza em hiperplanos (MDMP) e a Siemens outra adaptação do algoritmo ASSR designada AMPR (*Adaptive Multi-Planar Reconstruction*), que permite a reconstrução de secções a partir de múltiplas reconstruções parciais (secção 7.3).

Ainda, alguns produtores utilizam o processamento em paralelo para acelerar a reconstrução. Por exemplo, a GE, no seu tomógrafo topo de gama, fornece à partida 3 a 5 módulos de reconstrução de imagem sendo possível, posteriormente, a introdução de módulos adicionais.

No que se refere à investigação, a reconstrução de imagem é uma área muito dinâmica, tentando, de algum modo, antecipar os desafios e as necessidades impostos pelos avanços tecnológicos. Métodos de reconstrução completamente 3D para geometria cónica começaram a aparecer ao princípio da década de 80, quando ainda a geometria cónica não era utilizada na prática, e constituem, hoje em dia, uma área de investigação muito activa.

É preciso dizer, todavia, que, devido ao custo elevadíssimo das tecnologias mais avançadas, algumas empresas continuam a apostar também em modelos já consolidados (por exemplo, foi recentemente lançado no mercado um novo tomógrafo de apenas 2 secções) para fornecer um leque de oferta mais amplo no que se refere ao custo e às características dos sistemas, procurando sempre garantir o máximo desempenho possível. Assim, a reconstrução segundo o paradigma 2D continua actual, procurando-se sempre evoluir para métodos de reconstrução mais rápidos, mais eficientes ou dedicados a aplicações específicas.

Por vezes, avanços importantes, tanto na reconstrução 2D como 3D, devem-se apenas ao aperfeiçoamento de algoritmos já conhecidos obtido graças à introdução de novos métodos computacionais, como aconteceu, por exemplo, com a recente introdução da NFFT (*Fast Fourier Transform for Nonequispaced Data*).

Progressos notáveis registam-se no que se refere à quantidade, variedade e relevância clínica das novas aplicações que os modernos tomógrafos viabilizam. Em particular, a tecnologia mais avançada encontra a sua máxima expressão em aplicações vasculares cardiopulmonares, em aplicações que implicam a avaliação de grandes volumes (como, por exemplo, o varrimento de corpo completo que se destina a doentes politraumatizados) ou o estudo dinâmico de órgãos ou de processos funcionais, eventualmente realizado recorrendo a substâncias de contraste (tomografia dinâmica). Outra área de aplicação particularmente avançada é a área das intervenções médico-cirúrgicas assistidas por imagem tomográfica, que implica a visualização em tempo real e, no que se refere à reconstrução da imagem, baseia-se em conceitos e métodos que, excedendo o âmbito desta dissertação, não serão aqui descritos [51].

### 2.3.1 Tomografia dinâmica, aplicações vasculares cardiopulmonares

É fácil constatar que todo e qualquer processo fisiológico que tenha lugar num ser vivo apresente uma dinâmica própria, quer numa escala macroscópica quer microscópica. Em imagiologia médica, por vezes, a dinâmica que caracteriza um determinado órgão ou fenómeno fisiológico é o próprio objecto de interesse, enquanto, noutras situações, nas quais se pretende analisar a anatomia do órgão "congelando" o seu movimento, torna-se apenas numa fonte de artefactos que deve ser o mais possível neutralizada. Seja qual for o caso, quando a dinâmica dos órgãos influencia a forma com a qual os dados são adquiridos, reconstruídos ou analisados, falamos em tomografia dinâmica.

Actualmente, a rapidez atingida na aquisição dos dados, faz com que aplicações dinâmicas, que até à pouco tempo constituíam um desafio, se tenham tornado simples rotina, com algumas excepções. Por exemplo, uma área que continua a ser objecto de investigação, é aquela que envolve o sistema vascular cardiopulmonar nas suas vertentes morfológica e funcional. A dinâmica rápida que caracteriza este sistema e a quantidade de pequenos detalhes de interesse clínico fazem com que as aplicações imagiológicas nesta área sejam particularmente exigentes no que se refere tanto à resolução espacial como temporal.

As componentes principais da dinâmica do sistema vascular cardiopulmonar são essencialmente relacionadas com o ciclo respiratório e o ciclo cardíaco. A primeira não constitui um problema por ser bastante lenta e porque os dados são, sempre que possível, adquiridos em condição de apneia do doente. No entanto, a componente dinâmica relacionada com o ciclo cardíaco, aproximadamente periódica e caracterizada por uma sequência de fases, algumas delas extremamente rápidas, levanta um conjunto de problemas que devem ser tomados em consideração tanto na altura da aquisição dos dados como da reconstrução, sendo que a qualidade da imagem reconstruída dependerá da duração e localização, ao longo do ciclo cardíaco, da janela temporal à qual se referem os dados adquiridos.

A correspondência entre a actividade eléctrica e a dinâmica cardíaca, sugeriu o desenvolvimento de técnicas de aquisição sincronizada com o sinal electrocardiográfico (*ECG-gated*), adquirido em paralelo. Hoje em dia, utilizando a tecnologia actual e técnicas de aquisição *ECG-gated*, que serão descritas no capítulo 10, é possível adquirir conjuntos de dados 3D relativos ao sistema vascular cardíaco, com resolução espacial isotrópica sub-milimétrica e resolução temporal entre 40 e 200ms num intervalo de tempo (até 14 segundos) compatível com a capacidade do doente de reter a respiração. Das imagens obtidas por esta tecnologia, e com recurso a protocolos de aquisição e análise dos dados especificamente desenvolvidos, é possível extrair informações qualitativas e quantitativas acerca da morfologia das artérias coronárias (CAI – *Coronary Artery Imaging*), da dinâmica do músculo cardíaco e da existência e composição de ateromas (placas devidas ao depósito de gorduras) eventualmente presentes nas artérias (CAC – *Coronary Artery Calcification*) [51].

Para além do fluxo sanguíneo, a dinâmica cardíaca é responsável pela produção de ondas elásticas, devidas (essencialmente) ao impulso que caracteriza a fase sistólica, que se transmitem ao longo de todo o sistema vascular. Do ponto de vista imagiológico, este movimento elástico é apreciável apenas nas proximidades do coração, tornando possível o aparecimento de artefactos. Assim, as técnicas de aquisição sincronizada com o sinal electrocardiográfico, que se utilizam para obter imagens do sistema vascular cardíaco, podem ser utilizadas também para obter imagens dos sistemas vasculares pulmonar ou hepático.

Dada a actual incidência na população ocidental das doenças cardiovasculares, as aplicações nesta área são objecto de grande interesse e investimentos financeiros. Em particular,

a possibilidade de detectar a presença de cálcio nos ateromas, que permite avaliar a probabilidade que um doente de risco venha a desenvolver uma síndrome coronária aguda, poderá conduzir à utilização desta técnica como método de rastreio da população de risco [38].

O aparecimento e a crescente difusão de novas aplicações de pendor mais quantitativo tem vindo a atribuir cada vez mais importância a aspectos quantitativos da reconstrução. Neste sentido, torna-se legítimo o recurso a simuladores que, utilizando modelos anatómicos dinâmicos e as actuais geometrias de aquisição, permitam emular o processo de aquisição e avaliar os possíveis métodos de reconstrução tanto do ponto de vista qualitativo como quantitativo.



## Capítulo 3

# A imagem em TAC

As técnicas tomográficas permitem determinar o valor de um determinado parâmetro numa grelha de pontos no volume sob estudo (ou, simplesmente, numa secção) a partir de um número suficiente de medidas projectivas, de vária natureza, efectuadas segundo diferentes orientações angulares. No caso da TAC, o objecto sob estudo é irradiado por um feixe de raios X segundo um dado conjunto de direcções, e o parâmetro que se pretende determinar é o coeficiente de atenuação linear dos raios X em cada ponto do objecto.

Sem entrar em detalhes sobre as técnicas de produção e detecção dos raios X (que podem ser encontrados, por exemplo, em [51]), neste capítulo abordaremos apenas alguns aspectos imprescindíveis relacionados com a formação da imagem tomográfica e a avaliação da qualidade das imagens obtidas em TAC.

### 3.1 Formação da imagem

O parâmetro que interessa visualizar em TAC é o coeficiente de atenuação linear em cada ponto  $p$ ,  $\mu(p, E, t)$ , sendo que a distribuição espacial depende da natureza dos tecidos mas também da energia efectiva  $E$  dos fotões utilizados e do tempo  $t$  (em aplicações médicas devido, essencialmente, aos movimentos relacionados com os ciclos respiratório e cardíaco e à dinâmica de produtos de contraste). No que se refere à energia dos fotões, importa frisar que, em radiologia, utiliza-se somente uma pequena parte da banda electromagnética normalmente designada por radiação X. Nomeadamente, utiliza-se apenas a banda de energia que se situa entre os 15 e os 150  $KeV$  (onde o electrão-volt,  $eV$ , é a quantidade de energia cinética que um electrão adquire ao atravessar uma diferença de potencial de 1  $V$  e corresponde a  $1.602 \times 10^{-19} J$ ). Fotões com energia inferior (comprimento de onda maior) não conseguem penetrar camadas espessas de tecidos, resultando na ausência de radiação emergente, e fotões com energia superior (comprimento de onda menor) não são absorvidos pelos tecidos, resultando num feixe emergente homogéneo inutilizável para a formação da imagem.

Sem entrar no detalhe dos fenómenos físicos de natureza aleatória (no intervalo energético considerado verificam-se, essencialmente, absorção fotoeléctrica e efeito de Compton) que presidem à interacção entre fotões e matéria, sendo responsáveis pelo valor do coeficiente de atenuação linear, introduzimos um modelo matemático simples que descreve de forma quantitativa e determinística o processo subjacente à formação da imagem.

Por simplicidade, consideraremos um volume estático atravessado por um feixe de raios X monoenergético (constituído por fotões tendo a mesma energia), de maneira que o coeficiente



de atenuação linear num ponto dependa exclusivamente da sua localização. Quando um feixe monoenergético de intensidade  $I$  interage com uma espessura  $dl$  de matéria absorvente, parte da energia é absorvida e parte é dispersa no meio, resultando numa atenuação do feixe emergente cuja intensidade será  $I - dI$ . O coeficiente de atenuação linear, definido como a fracção da intensidade do feixe atenuada por unidade de espessura do material absorvente, é analiticamente descrito pela equação diferencial:

$$\mu = -\frac{dI}{I dl} \quad (3.1)$$

cuja solução, no caso de material homogéneo de espessura  $L$ , é dada pela fórmula:

$$I = I_o e^{-\mu L} \quad (3.2)$$

conhecida por lei de Lambert-Beer, onde  $I_o$  é a intensidade do feixe incidente,  $I$  a intensidade do feixe emergente e  $L$  a espessura do material absorvente atravessado.

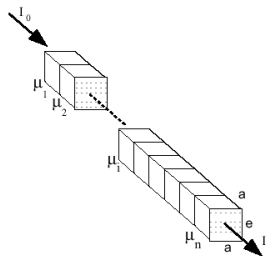


Figura 3.1: Elementos de volume atravessados por um feixe de raios X.

Na prática, o material absorvente não será homogéneo e, modelando o material atravessado pelo feixe como uma sucessão de elementos de volume, cada um com um coeficiente de atenuação característico  $\mu_i$  (fig. 3.1), a atenuação total será dada pela soma de contribuições elementares, e a intensidade do feixe emergente do  $n$ -ésimo elemento de volume será:

$$I_n = I_o e^{-\sum_{i=1}^n \mu_i \Delta l}. \quad (3.3)$$

No limite, a intensidade do feixe emergente será dada por:

$$I = I_o e^{-\int_0^L \mu(l) dl} \quad (3.4)$$

onde o integral, conhecido por "integral de linha" é calculado ao longo do percurso rectilíneo do raio X.

Basicamente, o objectivo da reconstrução tomográfica em 2D é a determinação da distribuição espacial de  $\mu$  numa determinada secção do corpo a partir de um conjunto suficientemente denso de integrais de linha

$$\int_0^L \mu(l) dl = -\ln \frac{I}{I_o} \quad (3.5)$$

que, por exemplo, supomos sejam medidos ao longo de linhas paralelas e equi-espaçadas (projeções paralelas) segundo diferentes direcções no plano da secção (fig. 3.2). Deixando



Figura 3.2: A translação do sistema foco-detector permite a aquisição de uma projecção paralela (figura adaptada de [61]).

para os próximos capítulos uma descrição formal e detalhada do modelo matemático dos processos de projecção e reconstrução, salienta-se que o modelo representado pela equação 3.5 é válido somente em condições ideais que, na melhor das hipóteses, podem ser apenas aproximadamente satisfeitas pelos tomógrafos reais.

Em particular, a assunção de feixes mono-energéticos está longe de ser satisfeita, dado que o espectro de energia produzida por um tubo de raios X é bastante amplo. Por exemplo, como ilustra a fig. 3.3, sendo o pico de tensão ao qual é sujeito um determinado tubo de raios X de 100 *KVp*, são gerados fótons com energia entre os 10 e os 100 *KeV*. Dado que o coeficiente de atenuação linear  $\mu$  depende da energia dos fótons, nomeadamente, os fótons de menor energia são mais atenuados dando lugar a endurecimento do feixe (isto é, o feixe emergente tem energia média superior à do feixe incidente), o modelo descrito pode ser demasiado simplista dando lugar ao aparecimento de artefactos nas imagens reconstruídas.

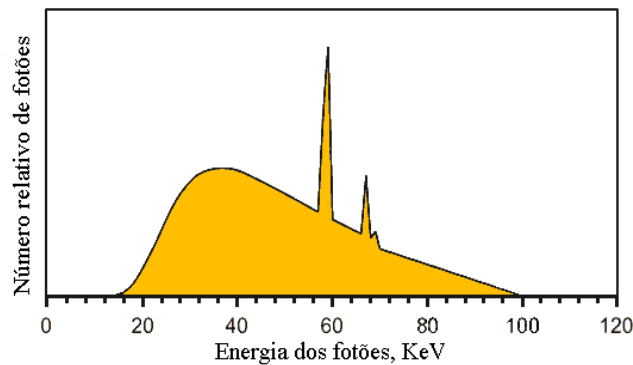


Figura 3.3: Exemplo do espectro (calculado) de energias produzidas por um tubo de raios X (com alvo em tungsténio) submetido a uma diferença de potencial de 100 *KVp*.

Da mesma forma, na realidade ocorrem muitos outros fenómenos que, não sendo considerados no modelo representado pela equação 3.5, conduzem ao aparecimento de artefactos na imagem reconstruída. Entre estes fenómenos mencionamos a detecção de radiação difusa,

a resposta não linear dos instrumentos de aquisição, o movimento do paciente, a presença de objectos metálicos, o efeito de volume parcial, etc. Apesar de se ter atingido um nível de sofisticação tecnológica que permite reduzir de forma notável os efeitos de alguns destes fenómenos, o processo de formação da imagem, descrito no diagrama de fluxo da figura 3.4, passa inevitavelmente pela aplicação de medidas de correcção que podem ser aplicadas tanto aos dados adquiridos (pré-processamento) como à imagem reconstruída (pós-processamento). Como adiante se verá, a fase de pré-processamento poderá também incluir operações como a síntese de sinogramas (conjuntos completos de projecções paralelas) através de *rebinning* ou de interpolação longitudinal (no caso de varrimento em espiral), enquanto na fase de pós-processamento serão incluídas todas as operações necessárias ao aperfeiçoamento da imagem reconstruída do ponto de vista perceptual e/ou à visualização de volumes.

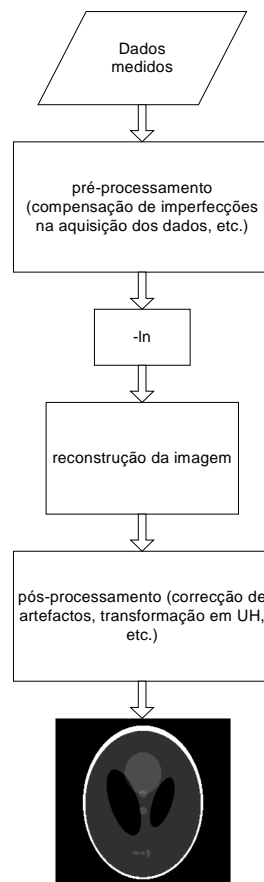


Figura 3.4: Diagrama de fluxo do processo de formação da imagem. Por simplicidade todas as operações de pré-processamento foram reunidas num único bloco antes do cálculo do logaritmo, no entanto, algumas destas operações são executadas antes e outras depois do logaritmo.

Independentemente das operações que possam ser realizadas em fase de visualização com o mero objectivo de melhorar a percepção da imagem, os valores efectivamente atribuídos aos elementos de uma imagem de TAC não são os valores absolutos do coeficiente de atenuação linear mas sim valores relativos, normalizados para o coeficiente de atenuação da água, e designados por valores TAC em unidades de Hounsfield. Concretamente, os valores de  $\mu$  são

transformados em unidades de Hounsfield (ou unidades TAC -UTAC-) através da fórmula:

$$\text{valor TAC} = \frac{\mu - \mu_{\text{água}}}{\mu_{\text{água}}} \times 1000 \text{ HU}. \quad (3.6)$$

Esta mudança de escala torna-se necessária devido ao facto que os valores do coeficiente de atenuação dependem fortemente da energia dos fótons utilizados, tornando problemática a comparação quantitativa entre resultados obtidos por tomógrafos diferentes ou até pelo mesmo tomógrafo em instâncias diferentes. Na figura 3.5 são representados os valores de TAC característicos de alguns tecidos biológicos, independentemente da energia dos fótons utilizados. Os valores de TAC da água (0 HU) e do ar (-1000 HU) constituem valores de referência e, como se pode constatar, tecidos de baixa densidade (pulmão) exibem valores de TAC negativos enquanto tecidos de elevada densidade exibem valores de TAC positivos.

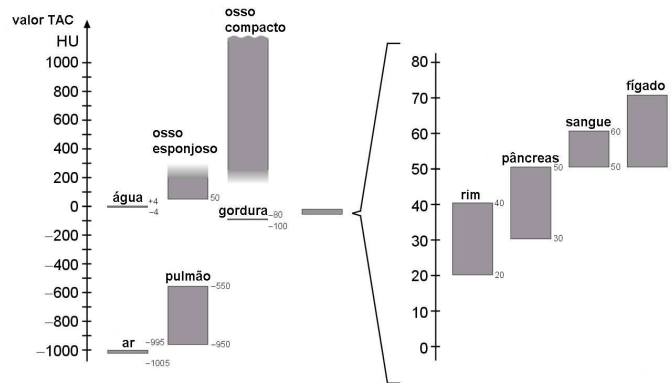


Figura 3.5: Localização de alguns tecidos biológicos na escala de valores de Hounsfield [61].

## 3.2 Enquadramento geométrico

A interpretação das imagens obtidas com técnica tomográfica torna-se mais fácil se imaginarmos o corpo humano como constituído por um número finito de secções de espessura  $e$  (por conveniência igual à espessura do feixe) que, por sua vez serão constituídas por elementos de volume discretos chamados *voxels* (abreviação de *volume elements*) de dimensões  $a \times a \times e$  (fig. 3.6).

Neste contexto, uma imagem tomográfica convencional representa uma secção do objecto através de uma matriz de elementos (chamados *pixels* do inglês *picture elements*) cada um dos quais representa, numa apropriada escala de cinzentos, o valor médio de um determinado parâmetro no correspondente *voxel* daquela secção.

Sendo o varrimento efectuado com movimentos circulares (ou, mais recentemente, em espiral) em volta do eixo longitudinal do corpo, o mais natural é que as imagens reconstruídas correspondam a planos transversais. Contudo, com maior ou menor resolução dependendo do grau de cobertura longitudinal do volume (a distância entre um plano de varrimento e outro pode ser maior da própria espessura da secção  $e$ ), é possível obter ora secções com orientações diversas ora visualizações 3D a partir de técnicas de "surface rendering" e/ou "volume rendering".

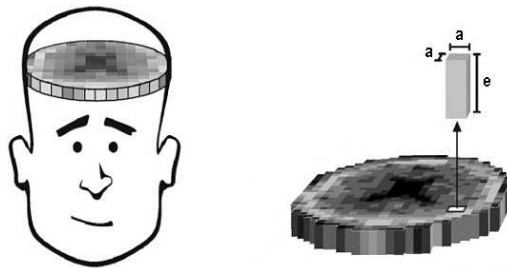


Figura 3.6: Secção do corpo representada numa imagem de TAC (figura adaptada de [61]).

Por convenção, escolhe-se como sistema de referência o sistema  $(x, y, z)$ , onde o eixo  $z$  é paralelo ao eixo longitudinal do corpo (eixo de rotação do scanner), o eixo  $x$  indica a direcção direita-esquerda e o eixo  $y$  a direcção ântero-posterior. Neste sistema, para além dos já definidos planos transversais  $(x, y)$ , definem-se como coronais os planos  $(x, z)$  e como sagitais os planos  $(y, z)$  (fig. 3.7).

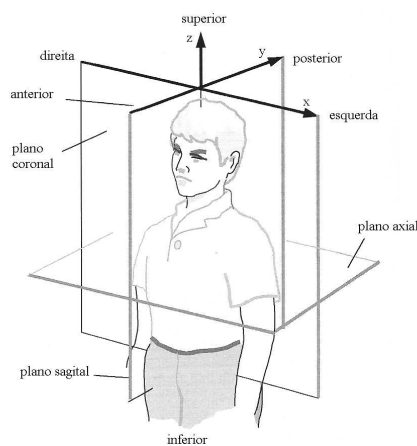


Figura 3.7: Sistema de referência e cortes convencionais (figura adaptada de [51]).

Devido à natureza digital da técnica tomográfica, o que se vai efectivamente determinar não é o valor do coeficiente de atenuação linear dos raios X em cada ponto no espaço  $(x, y, z)$  mas sim uma aproximação discreta da distribuição espacial deste coeficiente em cada *voxel* do volume sob estudo (sendo o valor atribuído a cada *voxel* o valor médio de  $\mu$  no *voxel*).

### 3.3 Qualidade da imagem

A avaliação do desempenho de um tomógrafo é uma tarefa particularmente complexa, devendo ser tomado em consideração um conjunto de parâmetros que descrevem a qualidade da imagem reconstruída sem esquecer outros factores como, por exemplo, a dose de raios X absorvida pelo doente ou o tempo de reconstrução. Além disso, é importante sublinhar como o desempenho

de um tomógrafo não pode ser avaliado em termos absolutos e globais mas apenas em função da aplicação em causa, sendo que as diferentes exigências de qualidade características de cada aplicação se traduzem na procura da optimização de um ou mais parâmetros de qualidade em detrimento de outros.

Os factores que influenciam o desempenho de um tomógrafo são múltiplos e vão desde as características técnicas e geométricas do próprio tomógrafo (fonte de raios X, colimação, detectores, etc.), ao protocolo de aquisição (potência do feixe, tempo de aquisição, etc.) até ao algoritmo de reconstrução e à plataforma de processamento. A análise da forma como os vários factores contribuem para a qualidade da imagem permite combiná-los assegurando o melhor desempenho possível para cada aplicação. Em particular, estamos interessados em evidenciar os efeitos que o varrimento em espiral, com o necessário processamento adicional de interpolação longitudinal, provoca na qualidade da imagem, mantendo fixas as características físicas do sistema e os restantes parâmetros de aquisição.

Ao longo desta dissertação veremos como diferentes algoritmos de reconstrução podem influenciar a qualidade da imagem reconstruída, tecendo apenas algumas considerações sobre aspectos tecnológicos. Uma análise detalhada dos aspectos referentes à tecnologia poderá ser encontrada em [61] e no mais recente [51].

Passamos, então, a introduzir alguns dos parâmetros habitualmente utilizados para avaliar o desempenho dos tomógrafos no que se refere à qualidade da imagem reconstruída.

### 3.3.1 Ruído

Os dados adquiridos pelo detector são inevitavelmente afectados por ruído devido à natureza aleatória dos processos de produção, transmissão e detecção de fótons. Os efeitos do ruído propagam-se ao longo do processo de reconstrução sendo geradas imagens afectadas por erros designados por ruído de imagem ou ruído de *pixel*.

O ruído de *pixel* que caracteriza um determinado processo de aquisição e reconstrução pode ser medido recorrendo a fantasmas de conteúdo homogéneo (por exemplo, água), sendo descrito quantitativamente pelo desvio padrão  $\sigma$  dos valores de intensidade  $I_i$  nos  $N$  *pixels* pertencentes a uma determinada região de interesse homogénea relativamente ao valor médio  $\bar{I}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (I_i - \bar{I})^2}. \quad (3.7)$$

Apesar da complexidade do fenómeno, o ruído de *pixel* pode ser aproximadamente descrito como um processo de Poisson, pelo que o desvio padrão do ruído de *pixel* aumenta na razão inversa da raíz quadrada do número de fótons contados pelo detector. Um elevado nível de ruído será, então, associado a um baixo número de contagens que se pode verificar, essencialmente, devido às seguintes razões:

- elevada absorção do objecto,
- baixa dose de radiação transmitida (produto da corrente no tubo de raios X pelo tempo de varrimento),
- elevada resolução espacial (pequena dimensão de *pixel/voxel*).

Um outro factor relacionado com o ruído de *pixel* é o algoritmo de reconstrução, dado que o ruído pode ser acentuado ou reduzido dependendo da função de filtro incluída, explícita ou implicitamente, no algoritmo. Ainda, no caso de varrimento em espiral o ruído de *pixel* é influenciado pelo algoritmo de interpolação longitudinal utilizado, não dependendo, no entanto, do passo da espiral (*pitch*). A dependência do ruído do algoritmo de interpolação, devida, basicamente, à quantidade de amostras consideradas por cada algoritmo, foi analiticamente analisada em [138] considerando as projecções afectadas por ruído branco aditivo. No estudo citado afirma-se que, em comparação com a TAC convencional, a reconstrução a partir de dados interpolados com o algoritmo 360°LI (que toma em consideração amostras correspondentes a duas rotações completas do foco) permite uma redução do desvio padrão do ruído de um factor de  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ , enquanto a reconstrução a partir de dados interpolados com o algoritmo 180°LI (que toma em consideração amostras correspondentes a pouco mais que uma rotação do foco) aumenta o desvio padrão do ruído de um factor  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

### 3.3.2 Resolução espacial

A resolução espacial, ou resolução de contraste elevado, define-se como a capacidade de detectar visualmente objectos de elevado contraste e dimensões cada vez mais pequenas. Habitualmente, consideram-se a resolução espacial no plano transversal  $x, y$  e na direcção longitudinal (descrita pelo perfil de sensibilidade de secção).

#### Resolução no plano transversal

Para um dado limiar de dose, a resolução no plano transversal depende fundamentalmente de factores associados à geometria de aquisição de dados do sistema e ainda de factores algorítmicos que se definem no âmbito do processo de reconstrução. Este tipo de resolução pode ser avaliada por via experimental.

Para avaliar a resolução no plano transversal utiliza-se um fantoma, especificamente desenvolvido para o efeito, no qual são inseridos objectos em forma de pente que, no plano transversal, resultam em padrões de linhas pretas e brancas (elevado contraste) de diferente espessura (frequência espacial). A capacidade de distinguir visualmente, na imagem reconstruída, os diferentes padrões de linhas fornece uma estimativa (de alguma forma, empírica e subjectiva) da resolução espacial em termos de pares de linhas por centímetro (lp/cm).

Outra forma de avaliar a resolução no plano transversal consiste no recurso à função de transferência de modulação (MTF— *Modulation Transfer Function*) que, estimada experimentalmente, descreve a resposta do sistema às diferentes frequências (figura 3.8). Num sistema ideal a MTF seria uma constante independente da frequência enquanto num sistema real verifica-se sempre uma degradação da resposta às frequências mais elevadas. Definindo, por exemplo [61], a frequência para a qual a MTF se reduz a 2% do valor máximo como frequência limite, a correspondente resolução, chamada resolução limite, será utilizada como medida da resolução no plano transversal.

A resolução no plano transversal é influenciada por factores como:

- resolução geométrica do sistema de aquisição dos dados (dimensão do ponto focal, largura do detector e frequência de amostragem da projecção),
- dimensão do *pixel*,

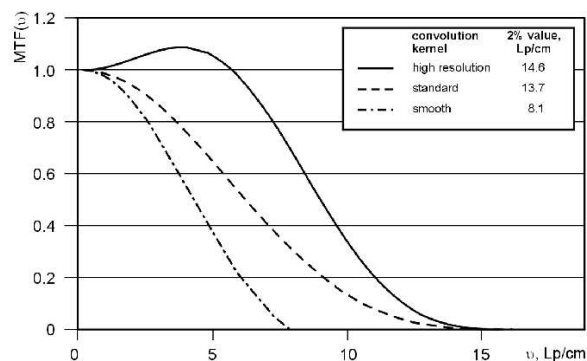


Figura 3.8: Exemplo de funções de transferência de modulação para um determinado sistema sendo utilizados diferentes filtros no algoritmo de reconstrução [61].

- propriedades do filtro no algoritmo de reconstrução,

sendo, por outro lado, completamente independente da introdução do varrimento em espiral.

A escolha do método de reconstrução, com a respectiva filtragem explícita ou implícita, é crucial neste aspecto, pois verifica-se que os filtros de reconstrução que melhor preservam as frequências espaciais elevadas fazem-no à custa de uma maior sensibilidade ao ruído, o que é aceitável só no caso de objectos de elevado contraste. Assim, uma boa solução de compromisso deverá sempre ter em consideração a aplicação clínica em causa.

### Resolução longitudinal

Na direcção longitudinal, a resolução espacial é, em regra, descrita pelo perfil de sensibilidade de corte ou de secção (SSP– *Slice Sensitivity Profile*) que descreve a resposta do sistema a uma função delta de Dirac,  $\delta(z)$ , em  $z$ . Idealmente, no caso de aquisição convencional ou sequencial, a SSP deveria ser uma função rectangular, na prática trata-se de uma curva, de forma aproximadamente gaussiana, descrita quantitativamente pelos valores FWHM (*full width at half maximum*) e FWTM (*full width at tenth maximum*). O valor FWHM é conhecido também como espessura nominal da secção.

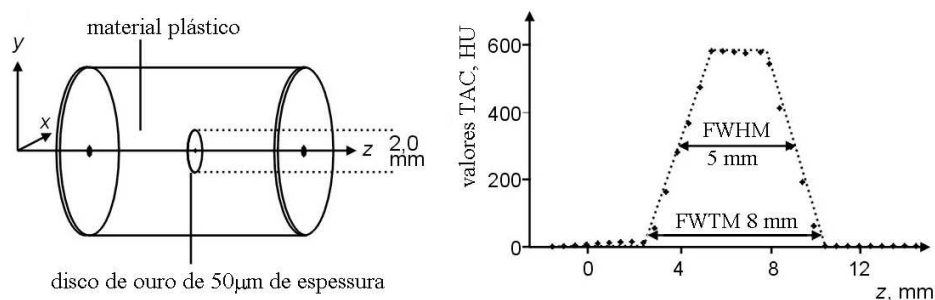


Figura 3.9: Determinação experimental da SSP (figura adaptada de [61]).



A curva de SSP de um particular sistema é obtida experimentalmente utilizando um fantoma apropriado como, por exemplo, um cilindro contendo um material pouco absorvente e um pequeno disco finíssimo de material muito absorvente posicionado no centro do cilindro perpendicularmente ao eixo  $z$  (figura 3.9). Uma vez varrido sequencialmente o objecto com um deslocamento longitudinal significativamente menor que o valor da FWHM previsível (tipicamente  $< 1/10$ ), os valores obtidos nas imagens reconstruídas ao longo do eixo  $z$  constituem as amostras da SSP.

A resolução longitudinal de um sistema convencional é influenciada por factores como a largura do ponto focal, a colimação do feixe, a colimação no detector ou, no caso de detector multi-linha, a distância entre linhas de elementos de detecção, sendo, no entanto, independente do algoritmo de reconstrução escolhido.

Como facilmente se pode verificar, a introdução do varrimento em espiral afecta a resolução na direcção longitudinal devido ao alargamento implícito da SSP. Nos casos mais simples, como se verá no capítulo 7, a SSP pode ser calculada analiticamente resultando da convolução entre o perfil de sensibilidade do correspondente sistema convencional com uma função que depende do movimento da mesa e do algoritmo de interpolação longitudinal utilizado. Por exemplo, no caso de interpolação linear a função que permite tomar em consideração o movimento da mesa será triangular, dependendo a base do triângulo do algoritmo específico de interpolação (fig. 3.10). Em vários estudos efectuados verificou-se a perfeita concordância entre os valores calculados e medidos, permitindo evitar complexos procedimentos de medida.

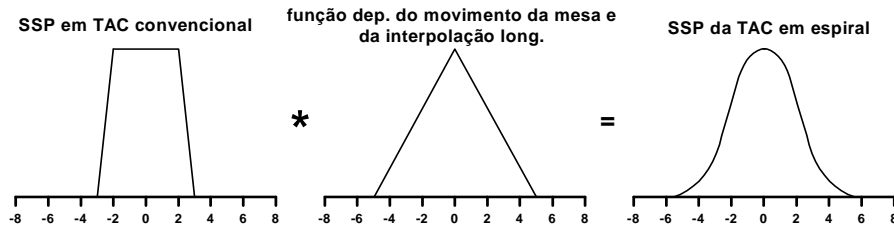


Figura 3.10: Alargamento da SSP devido ao varrimento em espiral (figura adaptada de [61]).

É importante observar que a resolução longitudinal não depende apenas da SSP, mas também da distância longitudinal entre varrimentos (em TAC convencional) ou planos de reconstrução (em TAC helicoidal). Em particular, no caso de varrimento em espiral, o alargamento da SSP é largamente compensado pela possibilidade de reconstruir imagens em posições longitudinais arbitrárias (eventualmente, com secções parcialmente sobrepostas), permitindo a localização de pequenos pormenores. A resolução pretendida para cada aplicação obtém-se conjugando oportunamente o intervalo de reconstrução  $RI$  e a espessura nominal de secção  $S$ . A regra é empírica sendo que Kalender, em [61], sugere a utilização de  $RI = S$  em casos não críticos,  $RI = \frac{S}{2}$  como rotina e  $RI = \frac{S}{3}$  para aplicações 3D de elevada resolução. Assim, dispondo de adequada capacidade computacional, podem ser atingidas resoluções longitudinais milimétricas ou até sub-milimétricas.

### 3.3.3 Resolução de contraste

A resolução de contraste, ou de baixo contraste, caracteriza a detectabilidade de um objecto de baixo contraste em relação ao plano de fundo. Uma avaliação quantitativa da resolução

de baixo contraste, pode ser obtida utilizando fantasmas que contêm vários objectos de baixo contraste e de tamanho diferente, e consiste na determinação do tamanho do mais pequeno objecto detectável dado um determinado nível de contraste e uma determinada dose (ou no nível mínimo de contraste detectável dado um determinado tamanho do objecto e uma determinada dose). Este processo de avaliação, necessariamente subjectivo, é realizado por um conjunto de observadores, sendo escolhida como medida da resolução de contraste o valor médio entre os valores indicados pelos observadores. O nível de contraste é habitualmente especificado em termos de percentagem do coeficiente de atenuação linear, por exemplo, no caso de um objecto num ambiente com coeficiente de atenuação igual ao da água, um contraste de 1% significa que a diferença entre o valor de TAC médio do objecto e o da água é de 10 *HU*.

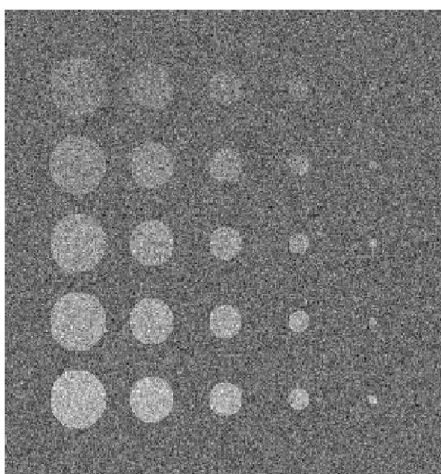


Figura 3.11: Simulação da dependência da visibilidade de um objecto do seu tamanho e da sua intensidade em relação ao plano de fundo em presença de um determinado nível de ruído (40 HU de desvio padrão). A intensidade dos objectos aumenta de cima para baixo na imagem e o tamanho diminui da esquerda para a direita.

Como se pode deduzir da definição de resolução de contraste, e como a figura 3.11 ilustra, a visibilidade de um objecto depende, ao mesmo tempo, do seu tamanho, da sua intensidade (contraste com o plano de fundo) e do ruído presente na imagem, podendo-se concluir que estes factores devem sempre ser considerados em conjunto. A introdução do varrimento em espiral afecta indirectamente a resolução de contraste dado que o algoritmo de interpolação longitudinal pode tornar a reconstrução mais ou menos sensível ao ruído (cap. 3.3.2).

### 3.3.4 Resolução temporal

A resolução temporal em tomografia tem dois aspectos complementares. O primeiro tem a ver com a capacidade de resposta em tempo real do sistema, sendo particularmente importante no caso de procedimentos de intervenção assistida por TAC, enquanto o segundo aspecto considera a janela temporal à qual uma determinada imagem se refere, sendo de importância fundamental em aplicações dinâmicas.

O aspecto que mais interessa considerar nesta dissertação é o segundo. Em aplicações dinâmicas como, por exemplo, a tomografia cardíaca, pretende-se fixar em cada imagem

uma determinada fase da dinâmica do objecto, à qual corresponde uma janela temporal cuja largura deve ser adequada à velocidade do movimento em questão. No caso de movimento não periódico, a resolução temporal depende da velocidade de rotação do foco e pode ser aumentada reduzindo a abertura do arco de trajectória ao qual correspondem as projecções utilizadas na reconstrução (varrimento breve, cap. 5) e, no caso da aquisição helicoidal, do algoritmo de interpolação longitudinal utilizado (cap. 7). O aumento da resolução espacial proporcionado pelo varrimento breve, todavia, é obtido à custa do aumento do nível de ruído pelo que deve ser encontrada uma solução de compromisso.

Como se verá no cap. 10, no caso da tomografia cardíaca, o movimento aproximadamente periódico do coração e a utilização do varrimento contínuo em combinação com o sinal electrocardiográfico adquirido em paralelo, permitem a síntese de um conjunto de dados referente apenas a uma determinada fase do ciclo cardíaco a partir dos dados adquiridos ao longo de múltiplos ciclos. Esta técnica permite uma notável redução na largura da janela temporal representada em cada imagem e, conseqüentemente dos artefactos devidos ao movimento.

### 3.3.5 Artefactos

Nem todos os aspectos da qualidade da imagem podem ser facilmente parametrizados e quantificados como aqueles até aqui descritos. Na avaliação da qualidade de uma imagem não se pode prescindir da fidelidade da representação do objecto, fidelidade que pode ser seriamente comprometida pela presença de artefactos, isto é, erros que assumem características de alguma forma estruturada ou regular. Estes erros, devidos a fenómenos de natureza não aleatória, podem alterar a imagem do ponto de vista qualitativo e/ou quantitativo dificultando a sua análise.

Por exemplo, um dos artefactos mais comuns apresenta-se sob a forma de riscas, isto é, linhas de maior ou menor brilho que atravessam a imagem, causadas pela presença, seja qual for a sua causa, de descontinuidades e medidas inconsistentes nas projecções. Estas inconsistências ou descontinuidades são acentuadas por efeito da filtragem e retroprojectadas ao longo de linhas na imagem.

Como já se adiantou na secção 3.1, a correcção ou minimização de artefactos nas imagens reconstruídas é uma tarefa delicada à qual se destina uma fracção significativa de toda a carga computacional associada ao processo de formação da imagem. Os métodos de correcção são inúmeros e vão desde a utilização de artifícios técnicos ao nível de *hardware*, visando compensar os fenómenos que originam os artefactos, até a utilização de algoritmos de correcção aplicados às projecções (antes da reconstrução) ou, finalmente, à imagem reconstruída. Trata-se de um tópico particularmente complexo e, em parte, insondável devido ao facto que uma grande quantidade de métodos efectivamente utilizados na prática são propriedade exclusiva das empresas produtoras da instrumentação.

Nesta secção, limitamo-nos a uma breve descrição dos principais fenómenos que podem dar lugar a artefactos e dos possíveis métodos de correcção. Uma apresentação mais abrangente e detalhada pode ser encontrada em [51].

### Aliasing

Os artefactos devidos a fenómenos de *aliasing* apresentam-se sob a forma de riscas de maior ou menor brilho que emanam a partir da aresta de objectos de elevado contraste e verificam-se quando a frequência de amostragem é insuficiente. Quando a amostragem é insuficiente na

direcção radial (número de amostras por projecção) as riscas são mais próximas das arestas, enquanto quando a amostragem é insuficiente na direcção azimutal (número de projecções por rotação) as riscas emanam das arestas mas a uma determinada distância do objecto, como no exemplo da figura 3.12. Em qualquer caso, os efeitos do *aliasing* podem ser limitados aumentando a frequência de amostragem. Nomeadamente, na direcção radial o número de amostras por projecção pode ser duplicado através da utilização de técnicas como o desvio do detector de  $\frac{1}{4}$  da largura de um elemento de detecção relativamente ao isocentro (*quarter-detector offset*) ou o foco oscilante, enquanto na direcção azimutal, uma vez atingida a frequência máxima de amostragem suportada pelo sistema, o número de projecções pode ser aumentado por via algorítmica recorrendo a projecções sintetizadas a partir das projecções medidas [51].

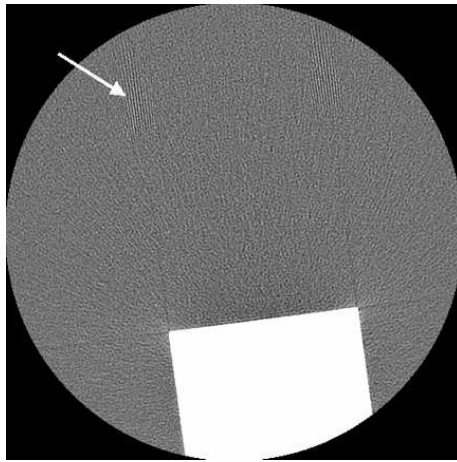


Figura 3.12: Artefacto de *aliasing* devido a insuficiente número de projecções [2].

### Volume parcial

Quando um objecto se encontra apenas parcialmente incluído numa secção de uma determinada espessura, ou tem dimensões pequenas comparativamente com a espessura da secção, a sua caracterização em termos de coeficiente de atenuação torna-se difícil dado que a cada *voxel* é atribuído o valor médio dos valores do coeficiente de atenuação dos tecidos que o compõem. Para além da descaracterização do objecto, este fenómeno, designado por efeito de volume parcial, pode provocar o aparecimento de sombras que irradiam do objecto (fig. 3.13-b). Estas sombras devem-se ao facto que, dada a divergência do feixe do foco em direcção ao detector no plano longitudinal, o objecto pode ser intersectado pelo feixe em certas projecções e não noutras (fig. 3.13-a) dando lugar a conjuntos de dados inconsistentes.

O efeito de volume parcial, estritamente relacionado com a espessura da secção, acentua-se em TAC helicoidal. Neste caso, o efeito pode ser controlado através da redução do *pitch* e da escolha de algoritmos de interpolação longitudinal que não alarguem excessivamente a SSP à custa, no entanto, do aumento do ruído de *pixel* ou da dose de raios X administrada ao doente.

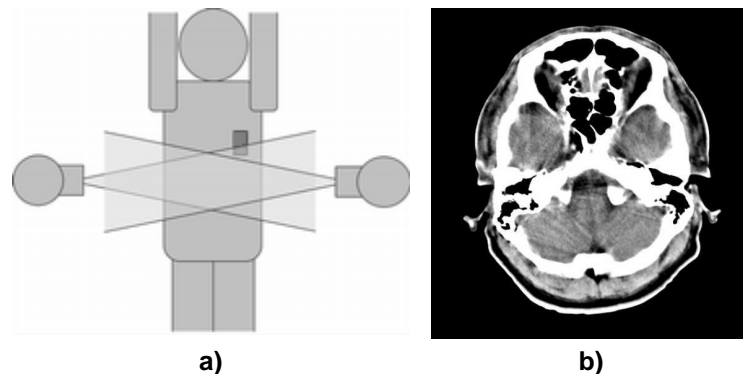


Figura 3.13: O efeito de volume parcial: (a) mecanismo que origina o efeito [2], (b) os artefactos característicos resultantes [61].

### Radiação difusa

Devido ao efeito de Compton, muitos fotões, ao interagirem com os átomos, provocam a libertação de um electrão e a deflecção de um fotão da restante energia segundo uma direcção diferente, resultando numa radiação difusa em todas as direcções. Apesar de terem uma energia inferior relativamente aos fotões primários, os fotões da radiação difusa são igualmente recebidos pelos detectores resultando num sinal de baixa frequência que se sobrepõe ao sinal dado pela radiação primária causando uma redução no contraste.

Os efeitos da radiação difusa são reduzidos colimando o feixe antes da detecção, o que permite eliminar da contagem os fotões provenientes de direcções que não sejam a do foco. Uma correcção eficaz pode também ser obtida por via algorítmica, pois, a baixa frequência espacial do sinal proveniente da radiação difusa permite que este seja estimado a partir de poucas medições esparsamente distribuídas fora do alcance do feixe primário ou a partir das projecções medidas através da decomposição do sinal.

### Movimento do doente

Durante o tempo de aquisição, o corpo do paciente é susceptível a movimentos voluntários (respiratório) ou involuntários (cardíaco, peristáltico, etc.) a maior parte dos quais não pode ser suprimida ou conscientemente controlada. Estes movimentos provocam inconsistências nos dados, dando origem a distorção e também aos artefactos característicos em forma de riscas ou sombras (fig. 3.14-a e b).

Para além de tentar controlar ou minimizar estes movimentos (quando possível), a maneira mais comum para lidar com o problema é a de diminuir o mais possível o tempo de varrimento quer, obviamente, procurando desenvolver tomógrafos cada vez mais rápidos, quer recorrendo a esquemas de amostragem como o varrimento breve (ver secção 5.2.3).

Ainda, como vimos na secção 3.3.4, a quase-periodicidade de certos movimentos pode ser aproveitada efectuando o varrimento numa fase do ciclo na qual o movimento é mais lento, ou adquirindo um conjunto de dados relativo a uma determinada fase do ciclo a partir de um varrimento convencional contínuo que se prolonga ao longo de vários ciclos (por exemplo, aquisição *ECG gated*). Estas técnicas serão introduzidas com maior detalhe no cap. 10.

O varrimento em espiral não apresenta problemas específicos no que se refere ao movimento

do doente no plano transversal. Para além disso, na direcção longitudinal, a extrema rapidez com a qual são adquiridos os dados (comparativamente com o varrimento sequencial) permite reduzir significativamente os efeitos do movimento.

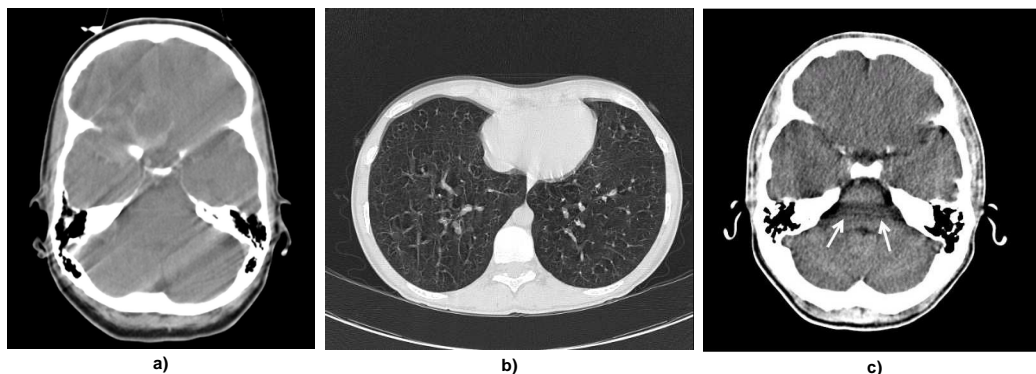


Figura 3.14: Artefactos devidos ao movimento do paciente (a)[2] e (b) e a endurecimento do feixe (c) [61].

### Endurecimento do feixe

O fenómeno de endurecimento do feixe, introduzido na secção 3.1, depende das características de atenuação do material em causa e resulta tanto mais acentuado quanto maior é a espessura do objecto atravessado pelo feixe. No caso de objectos de teste homogéneos, este fenómeno traduz-se no aparecimento de uma ligeira depressão que afecta o valor do coeficiente de atenuação no centro do objecto.

No caso de objectos heterogéneos, constituídos por materiais com características de atenuação muito diferentes (por exemplo, osso e músculo), os efeitos do endurecimento do feixe são mais complexos podendo aparecer sombras escuras entre os objectos de maior coeficiente de atenuação (fig. 3.14-c) e sendo degradada a fronteira entre materiais de elevado contraste.

Os artefactos devidos a endurecimento do feixe, podem ser prevenidos utilizando filtros adicionais que permitem reduzir a largura do espectro de energias do feixe, e também corrigidos por meio de algoritmos apropriados (*bone correction*) tanto em fase de pré-processamento como de pós-processamento [51].

### Projecções incompletas

Em alguns casos particulares, por exemplo no caso do varrimento cardíaco sincronizado com o ECG (cap. 10.2.2) ou no caso de objectos que se estendem fora do campo de visão do tomógrafo (é o caso da imagem representada na figura 3.15-a, na qual os braços do doente resultam fora do campo de visão), podem ser obtidos conjuntos de dados incompletos caracterizados por lacunas de maior ou menor importância.

A principal consequência destas falhas consiste na existência de descontinuidades e inconsistências nos dados que podem dar origem a graves artefactos em forma de riscas na imagem reconstruída. Os possíveis métodos de correcção procuram preencher os vazios recorrendo a dados, de alguma forma, estimados a partir dos dados disponíveis tendo em consideração o problema particular de reconstrução em causa.

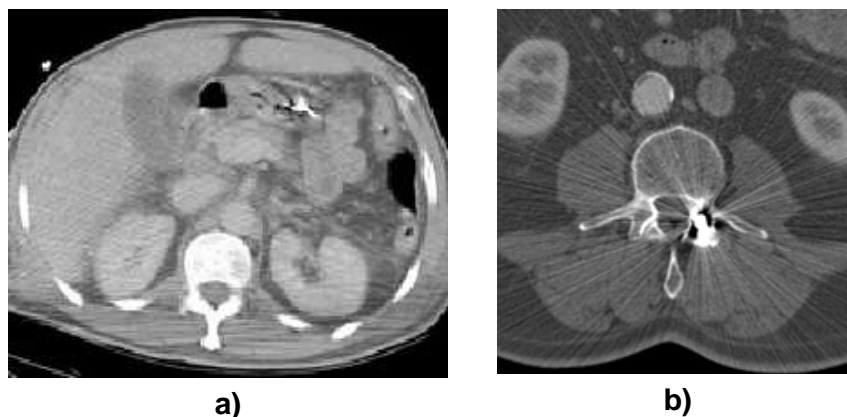


Figura 3.15: Artefactos devidos a projecções incompletas (a) e à presença de objectos metálicos no corpo do doente (b)[2].

## Outros

Entre os outros fenómenos que podem produzir artefactos, citamos o próprio ruído (que em condições particularmente críticas pode dar origem a artefactos em forma de riscas), fenómenos relacionados com características técnicas ou deterioração da instrumentação (oscilação do rotor do tubo de raios X, não linearidade do detector, etc.) e a presença de objectos metálicos no interior do corpo (que podem dar lugar a fenómenos de endurecimento do feixe, volume parcial e outros). Na figura 3.15-b representa-se um exemplo de artefacto devido à presença de um implante metálico na coluna do doente.

No caso da tomografia em espiral, os artefactos são essencialmente os mesmos observados em tomografia convencional, alguns deles (é o caso do volume parcial) podendo assumir maior relevo. Contudo, existe um certo número de artefactos específicos da tomografia em espiral que dependem, de certa forma, do tipo de algoritmo de interpolação longitudinal utilizado. Por exemplo, podem verificar-se artefactos de baixa intensidade na fronteira entre regiões de elevado contraste quando esta se encontra num plano inclinado em relação ao eixo  $z$ . Considere-se, por exemplo, o objecto em forma de cone, alinhado com o eixo  $z$ , representado na figura 3.16-a. Ao longo da trajectória helicoidal do foco, o feixe irradia secções do cone de diâmetro diferente o que, nas imagens reconstruídas (fig. 3.16-b), resulta na presença dos artefactos mencionados. Neste caso, um excessivo alargamento da SSP induz uma maior inconsistência nos dados adquiridos, sendo que o problema pode ser controlado reduzindo o *pitch* ou escolhendo um algoritmo de interpolação mais favorável. Podem ainda, verificar-se problemas de falta de homogeneidade na distribuição do ruído de *pixel*, especialmente visíveis em imagens de projecção de intensidade máxima (MIP – *Maximum Intensity Projection*) em aplicações de angiografia por TAC [144].

De qualquer forma, os artefactos especificamente devidos ao varrimento em espiral não são particularmente significativos e não constituem um problema adicional em relação ao varrimento sequencial.

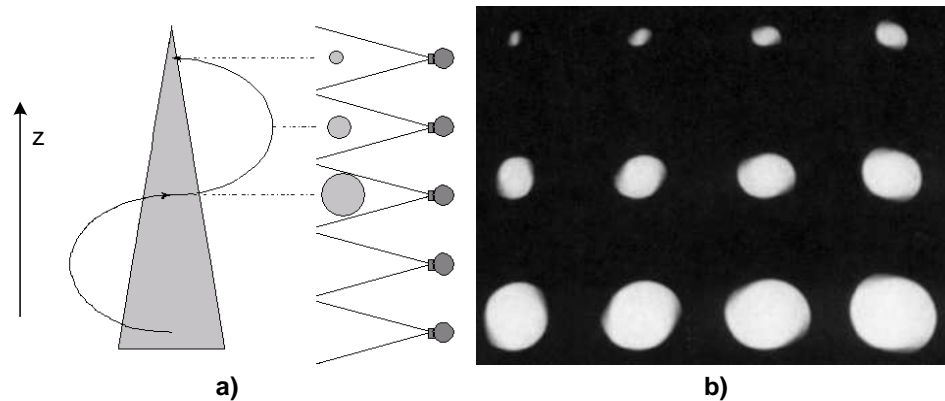


Figura 3.16: Artefactos devidos à presença de fronteiras entre objectos em planos inclinados relativamente ao eixo  $z$  em tomografia helicoidal. Caso de um objecto cónico [144].

### 3.4 Dose

Não se trata, propriamente, de um parâmetro de qualidade da imagem mas, certamente, a dose de radiação transmitida ao doente é um elemento imprescindível no planeamento e na avaliação de todo o processo que leva à formação de uma imagem tomográfica (e radiológica, no geral), dado que constitui o principal factor limitante da qualidade, em primeiro lugar, no que se refere à resolução espacial e ao ruído. Este aspecto é de tal maneira relevante que, na realidade, o que efectivamente se procura não é a a qualidade da imagem em termos absolutos mas sim a qualidade diagnóstica, no sentido que o processo imagiológico deve garantir uma imagem de qualidade suficiente para fins diagnósticos (onde o conceito de suficiência depende, evidentemente, da aplicação clínica específica) com a mínima dose possível.

A dose de radiação é influenciada por vários factores técnicos, entre os quais o produto da corrente no tubo pelo tempo de exposição (em  $mAs$ ) e o potencial (em  $KVp$ ) no tubo de raios X, a colimação do feixe, a distância entre secções sucessivas (no caso de varrimento convencional) e o passo da hélice (no caso de varrimento em espiral). Outros factores podem influenciar a dose de forma indirecta. Considere-se, por exemplo, o facto que uma redução na espessura da secção implica um aumento do ruído sendo que, para garantir o mesmo nível de qualidade pode tornar-se necessário aumentar a dose. Ainda, a utilização de um algoritmo de reconstrução menos sensível ao ruído, pode permitir uma redução da dose mas, por outro lado, degrada a resolução de baixo contraste.

A quantificação da dose administrada ao doente em TAC baseia-se num conjunto de indicadores [61, 87, 12] entre os quais o  $CTDI_{100}$  (*Computed Tomography Dose Index*) definido como a dose de radiação total, medida em grays ou em rads ( $1Gy = 1J/kg = 100rad$ ), ao longo de uma linha de  $100mm$  (o comprimento de uma câmara de ionização de tipo lápis) paralela ao eixo  $z$  e normalizada pela espessura total do feixe, em fórmula:

$$CTDI_{100} = \frac{1}{MS} \int_{-5mm}^{5mm} D_{pontual}(z) dz \quad (3.8)$$

onde  $M$  é o número de cortes adquiridos simultaneamente,  $S$  a espessura de cada corte e  $D_{pontual}$  a dose no ponto  $z$ . Dado que este valor varia com a posição relativamente ao eixo de



rotação, foi proposto o indicador  $CTDI_w$  que representa uma média ponderada dos valores  $CTDI_{100}$  medidos no centro e na periferia do plano de varrimento

$$CTDI_w = \frac{1}{3}(CTDI_{100})_{centro} + \frac{2}{3}(CTDI_{100})_{periferia}. \quad (3.9)$$

Ainda, no caso de varrimento em espiral, a dose é inversamente proporcional ao  $pitch$ , podendo-se utilizar o indicador  $CTDI_{vol}$  definido por:

$$CTDI_{vol} = CTDI_w \frac{MS}{d}. \quad (3.10)$$

Por último, foi estabelecido um índice de dose, designado por dose efectiva  $E$  e medido em unidades chamadas Sievert ( $Sv$ ), que fornece uma medida quantitativa do risco biológico relacionado com um determinado protocolo de aquisição. A dose efectiva é calculada através de simulações tipo Monte-Carlo, utilizando um modelo matemático do corpo humano, informações acerca da dose que atinge os diferentes órgãos e o grau de risco associado a cada órgão. Na tabela 3.1 encontram-se valores médios habituais de dose efectiva calculada para alguns exames radiológicos.

Tipo de exame	dose efectiva (mSv)
TAC cabeça	1-2
TAC tórax	5-7
TAC abdomen e pelvis	8-11
Angiografia coronária	3-10
Raio X tórax	0.04-0.06
Radiação de fundo num ano nos EUA	3.6

Tabela 3.1: Valores médios de dose efectiva associada a alguns exames radiológicos e à radiação de fundo [88].

O varrimento em espiral, não implica, por si, o aumento da dose de radiação administrada ao doente em relação ao varrimento convencional. Isto por várias razões, entre as quais o facto das correntes de tubo serem mais baixas, e de ser possível calcular um número arbitrariamente elevado de imagens com sobreposição sem necessidade de ulteriores varrimentos caso seja precisa uma análise mais detalhada. A introdução da aquisição multi-corte permite, ainda, um melhor aproveitamento do feixe reduzindo a percentagem de dose inutilmente absorvida pelo doente.

Dado o grande número de variáveis em jogo estritamente interligadas e o próprio conceito de qualidade diagnóstica, dificilmente quantificável e dependente da aplicação, a determinação de um protocolo de aquisição visando obter a qualidade necessária com a mínima dose é uma tarefa extremamente complexa que não pode ser, de maneira nenhuma, deixada à improvisação. Daí a existência de um grande número de protocolos de aquisição pré-definidos dependendo do tipo de tomógrafo, da aplicação clínica em causa, da forma e do tamanho da região anatómica sob análise e do próprio doente (nomeadamente, em pediatria a dose pode, e deve, ser reduzida), etc..

Em suma, longe de ser um detalhe secundário, a dose de radiação absorvida pelo doente tem um lugar de destaque entre os muitos factores que, em conjunto, influenciam a qualidade da imagem.

## Capítulo 4

# Fundamentos teóricos

No capítulo 3 vimos como aos dados adquiridos em tomografia de transmissão correspondem, em condições ideais, os integrais de linha (equação 3.5) de uma determinada função, que descreve a distribuição espacial do coeficiente de atenuação linear no interior de um objecto, medidos segundo um determinado conjunto de direcções.

Neste capítulo, procuramos fornecer as bases teóricas necessárias para a compreensão, do ponto de vista matemático, dos processos de projecção e reconstrução em tomografia através da introdução de um modelo matemático formalmente rigoroso e o mais genérico possível do problema. O modelo teórico proposto será inicialmente desenvolvido no espaço contínuo e em condições ideais para depois passarmos a considerar algumas problemáticas que surgem na altura da implementação, quer devido à necessária discretização do modelo, quer à eventual insuficiência dos dados. Neste contexto, o processo de aquisição dos integrais de linha poderá, então, ser visto como um processo de amostragem de uma transformada integral (que poderá ser a de Radon, de feixe paralelo ou de feixe divergente) de uma função  $f$  em  $\mathbb{R}^n$ , enquanto o processo de reconstrução será apenas a procura de uma aproximação de  $f$  a partir de um conjunto suficientemente denso de amostras.

Frisamos, ainda, que o modelo descrito não pretende descrever os fenómenos que intervêm no processo tomográfico em toda a sua complexidade, pois, limita-se a considerar condições ideais, ou seja:

- feixe mono-energético
- ausência de ruído e outros fenómenos de natureza aleatória
- percursos de radiação de largura nula, que permitem a introdução do conceito de integral de linha.

### 4.1 Operadores lineares e problemas inversos

Do ponto de vista matemático, o processo de projecção tomográfica pode ser descrito como a aplicação de um operador linear (a transformada de Radon) a uma função que representa a distribuição de uma determinada propriedade no interior do objecto em análise. Por sua vez, o processo de reconstrução consiste na solução do problema inverso, designado por problema de Radon. Neste contexto, torna-se vantajoso introduzir alguns conceitos básicos sobre operadores lineares e problemas inversos que serão utilizados mais adiante.

Dados dois espaços de funções lineares e normados  $X$  e  $Y$ , um operador linear  $A : X \rightarrow Y$  faz corresponder a cada  $f \in X$  um elemento  $Af \in Y$  de modo que  $\forall f_1, f_2 \in X$  e para qualquer par de números reais (ou complexos)  $\alpha$  e  $\beta$  se verifica

$$A(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha Af_1 + \beta Af_2. \quad (4.1)$$

Sendo o domínio do operador o espaço  $X$ , o contradomínio, ou imagem, de  $A$  é o conjunto  $C(A) = \{g \in Y : g = Af \text{ para alguns elementos } f \in X\}$ .

O operador  $A$  diz-se contínuo se existe uma constante  $c$  tal que

$$\|Af\|_Y \leq c\|f\|_X \quad (4.2)$$

sendo evidente, por esta definição, que a continuidade do operador depende também da escolha das normas  $\|\cdot\|_X$  e  $\|\cdot\|_Y$  definidas nos espaços  $X$  e  $Y$ .

A procura da solução de uma equação do tipo

$$Af = g \quad (4.3)$$

na variável  $f$ , é conhecida como problema inverso. Um problema que nem sempre tem solução pois é frequente tratar-se de um problema mal posto, quer devido à não unicidade da solução, quer à possível não-continuidade do operador inverso.

## 4.2 Transformadas integrais

Antes de introduzirmos as transformadas integrais que serão utilizadas como modelo do processo de projecção, vale a pena enquadrar do ponto de vista matemático as funções que se adequam a representar a distribuição de uma determinada propriedade no interior de um corpo e introduzir algumas importantes definições.

No âmbito da tomografia de transmissão, interessa considerar funções positivas e de variação limitada no espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , sendo este o espaço das funções que tendem a zero para  $x \rightarrow \infty$  mais rapidamente de qualquer potência inversa de  $x$ , o mesmo acontecendo para todas as derivadas. Esta característica permite garantir a integrabilidade de tais funções, logo, a existência das transformadas que iremos definir.

Na maior parte dos casos de interesse prático, podaremos falar em funções de suporte limitado e fechado  $\Omega$  ou, pelo menos, de funções cujo valor é desprezável fora de  $\Omega$ .

No espaço  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  define-se a norma  $L_2$  como

$$\|f\| = \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 dx \right)^{1/2}, \quad (4.4)$$

e a operação de produto interno entre duas funções  $f$  e  $g$  como

$$f \cdot g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx, \quad (4.5)$$

sendo a condição de ortogonalidade entre duas funções dada por  $f \perp g \Leftrightarrow f \cdot g = 0$ .

Por outro lado, a convolução entre duas funções  $f$  e  $g$  é definida pela fórmula

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)dx, \quad (4.6)$$

podendo ser verificada, no domínio de Fourier, a correspondente importante, e extremamente útil, relação

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) \quad (4.7)$$

entre as transformadas de Fourier das funções  $f$  e  $g$  e a transformada da convolução entre elas.

Em  $\mathbb{R}^n$ , identificamos o conjunto das direcções com a hipersfera unitária  $S^{n-1}$ , composta pela totalidade dos vectores unitários de  $\mathbb{R}^n$  e definida pela expressão formal

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \quad (4.8)$$

enquanto  $\theta^\perp$  designa o subespaço ortogonal a  $\theta$ , contendo todos os vectores ortogonais a uma determinada direcção  $\theta$ , isto é

$$\theta^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \theta = 0\}. \quad (4.9)$$

podendo também ser descrito como subespaço tangente à hipersfera unitária em  $\theta$ .

#### 4.2.1 Transformada de Radon

A **transformada de Radon**, indicada pela letra  $\mathcal{R}$ , é um operador linear que estabelece uma correspondência entre uma função  $f$ , definida em  $\mathbb{R}^n$ , e o conjunto dos seus integrais sobre hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$ . Isto é: sendo  $H(\theta, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \theta = s\}$  o hiperplano perpendicular a  $\theta \in S^{n-1}$  (hipersfera unitária) e tendo distância  $s \in \mathbb{R}$  da origem, a transformada de Radon  $\mathcal{R}f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  sobre  $H(\theta, s)$ , é dada pelo integral

$$\mathcal{R}f(\theta, s) = \int_{H(\theta, s)} f(x) dx. \quad (4.10)$$

Em alternativa, podem ser utilizadas as notações:

$$\mathcal{R}f(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(s - x \cdot \theta) f(x) dx, \quad (4.11)$$

onde  $\delta$  é a função de Dirac uni-dimensional, e

$$\mathcal{R}f(\theta, s) = \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy \quad (4.12)$$

com  $\theta^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \theta = 0\}$  o sub-espaço ortogonal a  $\theta$ . O significado geométrico dos parâmetros introduzidos é ilustrado graficamente, para o caso  $n = 2$ , na figura 4.1.

O operador  $\mathcal{R}f$  pode ser considerado como uma função sobre o hipercilindro unitário

$$C^n = \{(\theta, s) : \theta \in S^{n-1}, s \in \mathbb{R}^1\} \quad (4.13)$$

em  $\mathbb{R}^n$ , e pode-se observar que se trata de uma função par em  $C^n$ , ou seja,  $\mathcal{R}f(-\theta, -s) = \mathcal{R}f(\theta, s)$ . Se a função  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , verifica-se que  $\mathcal{R}f \in \mathcal{S}(C^n)$ .

Frequentemente, utiliza-se a notação  $\mathcal{R}_\theta f(s)$  para indicar a transformada de Radon de  $f$  em função de  $s$ , para uma determinada direcção  $\theta$ . Esta notação não deve ser confundida com uma representação em coordenadas polares da função  $\mathcal{R}f$  que seria, de alguma forma, abusiva

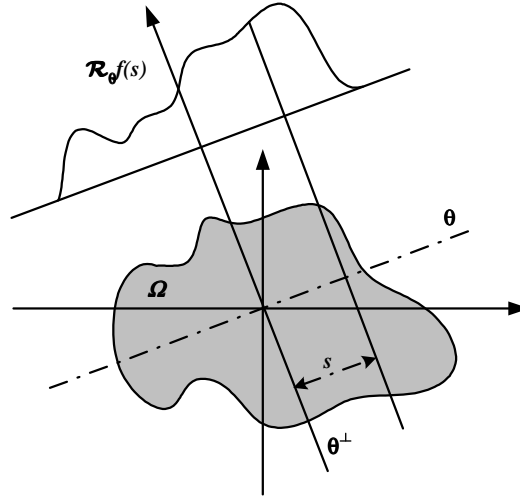


Figura 4.1: Parametrização da transformada de Radon no caso  $n = 2$ .

como se pode facilmente compreender observando, por exemplo, o facto que  $\mathcal{R}_\theta f(0) \neq \mathcal{R}_\varphi f(0)$  para duas direcções  $\theta$  e  $\varphi$  diferentes.

Em  $C^n$  a transformada de Fourier e a função de convolução actuam sobre a segunda variável, sendo definidas da seguinte forma:

$$(g * h)(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta, s - t)h(\theta, t)dt, \quad (4.14)$$

$$\widehat{g}(\theta, \sigma) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta, s)e^{-is\sigma} ds. \quad (4.15)$$

O teorema da secção central, fundamental em tomografia, é assim formulado no caso da transformada de Radon:

**Teorema 4.2.1 (Teorema da secção central)** *Dada  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , a transformada de Fourier uni-dimensional de  $\mathcal{R}f(\theta, s)$  segundo a variável  $s$ , é igual (a menos de um factor de normalização) à transformada de Fourier da função  $f$  ao longo de uma linha radial de direcção  $\theta$  no espaço de Fourier  $n$ -dimensional.*

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\theta, \sigma) = \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta), \quad \sigma \in \mathbb{R} \quad (4.16)$$

**Demonstração.** [90] *A transformada de Fourier de  $\mathcal{R}_\theta f$  é dada pela fórmula:*

$$\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\sigma) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma s} \mathcal{R}_\theta f(s) ds = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma s} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy ds.$$

*Pelo teorema de Fubini, substituindo  $s\theta + y$  por  $x$ , temos  $s = \theta \cdot x$  e  $dx = dy ds$ , logo:*

$$\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\sigma) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sigma\theta \cdot x} f(x) dx = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \widehat{f}(\sigma\theta)$$

■

Define-se operador de retroprojectão,  $\mathcal{R}^\#$ , da transformada de Radon o operador integral:

$$\mathcal{R}^\# g(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta) d\theta, \quad g \in \mathcal{S}(C^n), \quad (4.17)$$

que coincide, no caso  $g = \mathcal{R}f$ , com a soma dos integrais calculados sobre todos os hiperplanos que passam pelo ponto  $x$ .

Matematicamente falando,  $\mathcal{R}^\#$  surge como o operador adjunto de  $\mathcal{R}$ . No caso da transformada de Radon segundo  $\theta$ , para  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , temos:

$$\int_{\mathbb{R}} g(s) \mathcal{R}_\theta f(s) ds = \int_{\mathbb{R}^n} g(\theta \cdot x) f(x) dx \quad (4.18)$$

logo

$$\mathcal{R}_\theta^\# g(x) = g(\theta, x \cdot \theta), \quad (4.19)$$

enquanto, generalizando para todas as direcções, para  $g \in \mathcal{S}(C^n)$  e  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , temos:

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g \mathcal{R} f d\theta ds = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{R}^\# g) f dx, \quad (4.20)$$

onde

$$\mathcal{R}^\# g(x) = \int_{S^{n-1}} \mathcal{R}_\theta^\# g(x) d\theta. \quad (4.21)$$

Exemplificando, em  $\mathbb{R}^2$ , podemos dizer que se ao operador  $\mathcal{R}$  corresponde a integração de uma função  $f$  sobre todos os pontos pertencentes a uma linha, ao operador de retroprojectão  $\mathcal{R}^\#$ , aplicado à função  $g = \mathcal{R}f$  e calculado num ponto  $x \in \mathbb{R}^2$ , corresponde a integração de  $f$  sobre todas as linhas que intersectam o ponto  $x$ .

Como se poderá verificar mais adiante, sendo o operador de retroprojectão relacionado com a inversão da transformada de Radon, torna-se fundamental derivar uma expressão para a composição dos operadores  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}^\#$ . Para isso, recorreremos a um resultado importante da geometria integral que se traduz na seguinte fórmula:

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} g(y) dy d\theta = |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} g(y) |y|^{-1} dy \quad (4.22)$$

onde  $|S^{n-2}|$  representa a superfície de uma hipersfera de dimensão  $(n-2)$  [90].

Neste caso, temos

$$\mathcal{R}^\# \mathcal{R} f(x) = \int_{S^{n-1}} \mathcal{R} f(\theta, x \cdot \theta) d\theta \quad (4.23)$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f((x \cdot \theta)\theta + y) dy d\theta \quad (4.24)$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(x + y) dy d\theta \quad (4.25)$$

dado que  $x - (x \cdot \theta)\theta \in \theta^\perp$ . Por fim, utilizando a fórmula 4.22, podemos derivar a relação

$$\mathcal{R}^\# \mathcal{R} f(x) = |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} f(x + y) |y|^{-1} dy = |S^{n-2}| |x|^{-1} * f. \quad (4.26)$$

### 4.2.2 Transformada de feixe paralelo

A **transformada de feixe paralelo**, indicada pela letra  $\mathcal{P}$ , é um operador linear que estabelece uma correspondência entre uma função  $f$  definida em  $\mathbb{R}^n$  e o conjunto dos seus integrais de linha em  $\mathbb{R}^n$ . Assim, se representarmos uma linha recta em  $\mathbb{R}^n$ , de direcção  $\theta \in S^{n-1}$  e passando por um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , com a notação  $\{x + t\theta : t \in \mathbb{R}^1\}$ , a transformada  $\mathcal{P}f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  será dada pelo integral:

$$\mathcal{P}f(\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + t\theta) dt. \quad (4.27)$$

Dado que o integral é invariante perante uma translação de  $x$  segundo a direcção  $\theta$ , pode restringir-se  $x$  ao subespaço  $\theta^\perp$ , o domínio do operador  $\mathcal{P}$  passando a ser o espaço

$$T^n = \{(\theta, x) : \theta \in S^{n-1}, x \in \theta^\perp\} \quad (4.28)$$

tangente à hipersfera unitária  $S^{n-1}$ . Analogamente ao que acontece no caso da transformada de Radon, para a transformada de feixe paralelo, se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  verifica-se que  $\mathcal{P}f \in \mathcal{S}(T^n)$ .

Parametrizando a transformada de feixe paralelo pela variável  $\theta$ , utiliza-se a notação  $\mathcal{P}_\theta f(x)$  para indicar a operação de transformada em função da variável  $x$ , consistindo no cálculo de integrais de linha segundo linhas paralelas (feixe paralelo). A figura 4.2 ilustra graficamente o significado geométrico dos parâmetros deste operador integral no caso  $n = 2$ .

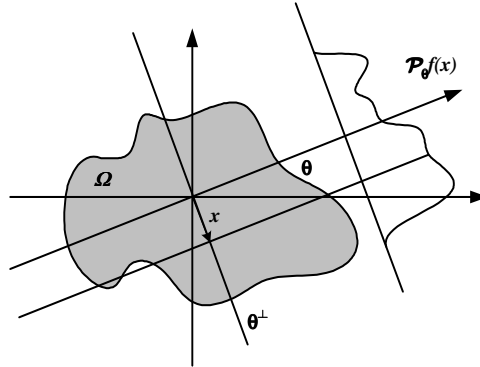


Figura 4.2: Parametrização da transformada de feixe paralelo no caso  $n = 2$ .

É interessante observar como, no caso  $n = 2$ , a transformada de Radon e a transformada de feixe paralelo são equivalentes, consistindo em ambos os casos no cálculo de integrais de linha que diferem exclusivamente na notação dos seus parâmetros (figuras 4.1 e 4.2). O mesmo não se pode dizer, por exemplo, para  $n = 3$  dado que, neste caso, a transformada de Radon consiste no cálculo de integrais sobre planos enquanto que a transformada de feixe paralelo consiste, ainda, no cálculo de integrais de linha. Geralmente, dado  $\theta \perp \omega$  podemos verificar que, entre as duas transformadas  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{P}$ , subsiste a relação

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = \int_E \mathcal{P}f(\theta, x) dx \quad (4.29)$$

sendo o domínio de integração  $E = \{x : x \in \theta^\perp, x \cdot \omega = s\}$ .

A transformada de Fourier e a operação de convolução em  $T^n$  actuam sobre a variável  $x$ , sendo definidas pelas fórmulas:

$$\widehat{g}(\theta, \xi) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int_{\theta^\perp} e^{-ix \cdot \xi} g(\theta, x) dx, \quad \xi \in \theta^\perp \quad (4.30)$$

$$(g * h)(\theta, x) = \int_{\theta^\perp} g(x - y) h(y) dy, \quad x \in \theta^\perp \quad (4.31)$$

para  $g, h \in \mathcal{S}(T^n)$ .

O teorema seguinte estabelece, para a transformada de feixe paralelo, uma relação análoga à estabelecida pelo teorema da secção central 4.2.1 entre a transformada de Fourier calculada no espaço das projecções e a transformada de Fourier da função  $f$ .

**Teorema 4.2.2** *Dada  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , a transformada de Fourier de  $\mathcal{P}f(\theta, x)$  segundo a variável  $x$ , é igual (a menos de um factor de normalização) à transformada de Fourier da função  $f$  no hiperplano  $\theta^\perp$  do espaço de Fourier  $n$ -dimensional.*

$$\widehat{\mathcal{P}f}(\theta, \xi) = \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(\xi) = (2\pi)^{1/2} \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \theta^\perp \quad (4.32)$$

**Demonstração.** [90] *Seguindo o mesmo raciocínio utilizado no teorema 4.2.1, temos*

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}_\theta f}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\theta^\perp} e^{-i\xi \cdot x} \mathcal{P}_\theta f(x) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\theta^\perp} e^{-i\xi \cdot x} \int_{\mathbb{R}} f(x + t\theta) dt dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi \cdot y} f(y) dy \\ &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \theta^\perp. \end{aligned}$$

■

Repare-se como, neste caso, a transformada de Fourier de  $\mathcal{P}_\theta f$  é  $n$ -dimensional, sendo calculada sobre o hiperplano  $\theta^\perp$ , e corresponde à  $\widehat{f}$  no hiperplano  $\theta^\perp$  do espaço de Fourier  $n$ -dimensional.

O operador de retroprojectão da transformada de feixe paralelo é definido pela expressão

$$\mathcal{P}^\# g(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta x) d\theta, \quad g \in \mathcal{S}(T^n), \quad (4.33)$$

onde  $E_\theta x$  significa projecção ortogonal de  $x$  no sub-espaço  $\theta^\perp$ , ou seja,  $E_\theta x = x - (x \cdot \theta)\theta$ .

Do ponto de vista matemático,  $\mathcal{P}^\#$  é o operador adjunto de  $\mathcal{P}$ , podendo-se verificar que, para  $g \in \mathcal{S}(T^n)$  e  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , temos:

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} g \mathcal{P} f dx d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{P}^\# g) f dx. \quad (4.34)$$

Tal como no caso da transformada de Radon, tornar-se-á útil derivar uma expressão para a composição dos operadores  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}^\#$ . Para tal, temos

$$\mathcal{P}^\# \mathcal{P} f(x) = \int_{S^{n-1}} \mathcal{P} f(\theta, E_\theta x) d\theta \quad (4.35)$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(E_\theta x + t\theta) dt d\theta \quad (4.36)$$

$$= 2 \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(x + t\theta) dt d\theta \quad (4.37)$$



dado que  $x - E_\theta x = (x \cdot \theta)\theta$  é múltiplo de  $\theta$ . Operando a substituição  $t\theta = y$ ,  $|y| = t$  e  $dy = t^{n-1} dt d\theta$  obtemos:

$$\mathcal{P}^\# \mathcal{P} f(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) |y|^{1-n} dy = 2 \int_{\mathbb{R}^n} f(y) |x-y|^{1-n} dy \quad (4.38)$$

ou seja:

$$\mathcal{P}^\# \mathcal{P} f(x) = 2|x|^{1-n} * f. \quad (4.39)$$

### 4.2.3 Transformada de feixe divergente

A **transformada de feixe divergente**, indicada pela letra  $\mathcal{D}$ , é um operador linear que estabelece uma correspondência entre uma função  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e o conjunto dos seus integrais calculados ao longo de semi-rectas em  $\mathbb{R}^n$ . Dado um ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  e uma direcção  $\theta \in S^{n-1}$ , a transformada  $\mathcal{D}f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$  é definida pela fórmula

$$\mathcal{D}f(a, \theta) = \int_0^\infty f(a + t\theta) dt \quad (4.40)$$

onde o integral é calculado ao longo da semi-recta de origem no ponto  $a$  e direcção  $\theta$ . Em alternativa, a notação  $\mathcal{D}_a f(\theta)$  indica a transformada de feixe divergente parametrizada na variável  $a$  e em função da variável  $\theta$ . O significado geométrico dos parâmetros utilizados é ilustrado graficamente, para o caso  $n = 2$ , na figura 4.3.

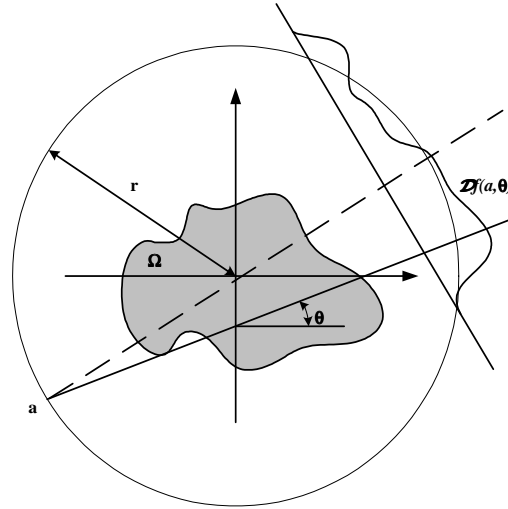


Figura 4.3: Parametrização da transformada de feixe cónico no caso  $n = 2$ .

Dado um ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  e uma direcção  $\theta \in S^{n-1}$ , entre os operadores  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{P}$  subsiste a relação

$$\mathcal{D}f(a, \theta) + \mathcal{D}f(a, -\theta) = \mathcal{P}f(\theta, E_\theta a). \quad (4.41)$$

Se restringirmos, realisticamente, o domínio das origens das semi-rectas à superfície hipersférica,  $A_r$  em  $\mathbb{R}^n$ , de raio  $r$ , centrada na origem e tal que  $\forall x \in \Omega$ ,  $\|x\| < r$  (o domínio do

operador  $\mathcal{D}$  passando a ser o sub-espaço  $Q^n = \{(a, \theta) : a \in A_r, \theta \in S^{n-1}\}$ , pode-se facilmente verificar que  $\mathcal{D}f(a, \theta) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{D}f(a, -\theta) = 0$  ou, vice-versa,  $\mathcal{D}f(a, -\theta) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{D}f(a, \theta) = 0$ .

Neste contexto, utilizando os resultados 4.32 e 4.41, podemos derivar a relação

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{A_r} e^{-ja \cdot \xi} (\mathcal{D}f(a, \theta) + \mathcal{D}f(a, -\theta)) |a \cdot \theta| da = 2r \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \theta^\perp, \quad (4.42)$$

análoga à estabelecida pelo teorema 4.2.2, entre as transformadas de Fourier de  $\mathcal{D}$  (na variável  $a$ ) e de  $f$  ( $n$ -dimensional). Definimos, em primeiro lugar, os sub-conjuntos  $A_r^+ = \{a \in A_r : a \cdot \theta > 0\}$  e  $A_r^- = \{a \in A_r : a \cdot \theta < 0\}$  e dividimos o integral do lado esquerdo nas duas contribuições

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{A_r^+} e^{-ja \cdot \xi} \mathcal{P}f(\theta, E_\theta a) |a \cdot \theta| da + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{A_r^-} e^{-ja \cdot \xi} \mathcal{P}f(\theta, E_\theta a) |a \cdot \theta| da. \quad (4.43)$$

Considerando, para já, só o primeiro integral, efectuamos a substituição  $a = x' + (a \cdot \theta)\theta$ ,  $da = r|a \cdot \theta|^{-1} dx'$  com  $x' = E_\theta a$  e  $\xi \in \theta^\perp$ , obtendo:

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{A_r^+} e^{-ja \cdot \xi} \mathcal{P}f(\theta, E_\theta a) |a \cdot \theta| da \quad (4.44)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{B_r \cap \theta^\perp} e^{-jx' \cdot \xi} \mathcal{P}f(\theta, x') |a \cdot \theta| r |a \cdot \theta|^{-1} dx' \quad (4.45)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} r \int_{\theta^\perp} e^{-jx' \cdot \xi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x' + t\theta) dt dx' \quad (4.46)$$

onde  $B_r$  é a hipersfera delimitada por  $A_r$  e foi introduzida, de forma explícita, a fórmula de  $\mathcal{P}$ . Aplicando o teorema de Fubini e efectuando a substituição  $x' + t\theta = x$ , com  $t = x \cdot \theta$  e  $dx = dt dx'$  (dado que  $x' \perp \theta$ ) obtemos

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} r \int_{\mathbb{R}^n} e^{-jx \cdot \xi} f(x) dx = r \widehat{f}(\xi). \quad (4.47)$$

A contribuição devida a  $A_r^-$  é a mesma, pelo que, somando, obtemos o resultado antecipado na equação 4.42.

Tal como nos casos dos operadores  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{P}$ , o operador de retro projecção de  $\mathcal{D}$  é definido pela expressão

$$\mathcal{D}^\# g(a) = \int_{S^{n-1}} g(a, \theta) d\theta, \quad g \in \mathcal{S}(Q^n) \quad (4.48)$$

que representa a integração de  $\mathcal{D}$  sobre todas as direcções a partir de um ponto fixo  $a$ . Assim, a composição dos operadores  $\mathcal{D}^\#$  e  $\mathcal{D}$  permite-nos obter o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\# \mathcal{D}f(x) &= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(x + t\theta) dt d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) |y|^{1-n} dy \\ &= |x|^{1-n} * f \end{aligned} \quad (4.49)$$

tendo-se realizado a substituição  $y = t\theta$ ,  $dy = t^{n-1} dt d\theta$ .

### 4.3 Inversão das transformadas

As equações 4.26, 4.39 e 4.49 demonstram que os operadores de retroprojectão da transformada de Radon, da transformada de feixe paralelo e da transformada de feixe divergente, apesar de não serem operadores inversos dos respectivos operadores de projectão, se relacionam com estes de forma linear e convolutiva o que permite dizer que, no fundo, o problema da reconstrução tomográfica é antes de mais um problema de desconvolução. Assim, as equações 4.26, 4.39 e 4.49 surgem como ponto de partida para a determinação de fórmulas, e subsequentes algoritmos de inversão, de qualquer uma das transformadas integrais que acabamos de definir.

Entre as várias fórmulas de inversão propostas, merecem destaque aquelas que têm como ponto de partida o recurso aos potenciais de Riesz, pelo que torna-se indispensável introduzir, ainda que muito sinteticamente, estes operadores. Trata-se de operadores de convolução com potências fraccionárias da distância a um ponto em  $\mathbb{R}^n$ . O seu núcleo, que assume a forma

$$I^\alpha(x) = b(n, \alpha)|x|^{\alpha-n} = \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} |x|^{\alpha-n} \quad (4.50)$$

com  $\alpha < n$ , é uma função localmente integrável em  $\mathbb{R}^n$  podendo ser considerada uma distribuição temperada [105]. O coeficiente  $b(n, \alpha)$  é escolhido de maneira que resulte

$$\widehat{I^\alpha f}(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi). \quad (4.51)$$

Ainda, podem ser facilmente verificadas as seguintes propriedades:

$$I^\alpha * I^\beta = I^{\alpha+\beta}, \quad (4.52)$$

$$I^0 = \delta. \quad (4.53)$$

Alguns autores, preferem utilizar o designado operador de Calderón  $\Lambda$  definido, através da sua transformada de Fourier, de forma que

$$\widehat{\Lambda^\alpha f}(\xi) = |\xi|^\alpha f(\xi). \quad (4.54)$$

Importa observar que, do ponto de vista prático, os dois operadores são equivalentes sendo  $\Lambda^\alpha = I^{-\alpha}$  [4].

No teorema que segue introduzimos as fórmulas de inversão, derivadas analiticamente na demonstração [92], para as transformadas  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{P}$  observando que  $I^\alpha$ , quando é aplicado a funções em  $C^n$  e  $T^n$ , actua sobre a segunda variável.

**Teorema 4.3.1** *Dada  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , para cada  $\alpha < n$ , temos*

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} I^{-\alpha} \mathcal{R}^\# I^{\alpha-n+1} g, \quad g = \mathcal{R}f(x) \quad (4.55)$$

$$f(x) = \frac{1}{|S^{n-2}|} (2\pi)^{-1} I^{-\alpha} \mathcal{P}^\# I^{\alpha-1} g, \quad g = \mathcal{P}f(x) \quad (4.56)$$

**Demonstração.** *Para derivar a fórmula 4.55, começamos pela transformada inversa de Fourier de 4.51:*

$$I^\alpha f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi) d\xi. \quad (4.57)$$

Introduzindo as coordenadas polares através da substituição  $\xi = \sigma\theta$ , obtemos

$$I^\alpha f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty e^{i\sigma x \cdot \theta} |\sigma|^{n-1-\alpha} \widehat{f}(\sigma\theta) d\sigma d\theta \quad (4.58)$$

ou seja, utilizando o resultado expresso pelo teorema da secção central 4.2.1,

$$I^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n+\frac{1}{2}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty e^{i\sigma x \cdot \theta} |\sigma|^{n-1-\alpha} \widehat{\mathcal{R}f}(\theta, \sigma) d\sigma d\theta. \quad (4.59)$$

Substituindo  $\theta$  por  $-\theta$ ,  $\sigma$  por  $-\sigma$  e observando que  $\widehat{\mathcal{R}f}$  é uma função par, obtemos o mesmo resultado para o integral entre  $-\infty$  e 0, pelo que podemos escrever

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-n+\frac{1}{2}} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\sigma x \cdot \theta} |\sigma|^{n-1-\alpha} \widehat{\mathcal{R}f}(\theta, \sigma) d\sigma d\theta. \quad (4.60)$$

e, dado que o integral interno é um potencial de Riesz, temos:

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-n+1} \int_{S^{n-1}} I^{\alpha+1-n} \mathcal{R}f(\theta, x \cdot \theta) d\theta \quad (4.61)$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^{-n+1} \mathcal{R}^\# I^{\alpha+1-n} \mathcal{R}f(x). \quad (4.62)$$

A este ponto, a fórmula de inversão 4.55 pode ser obtida aplicando o operador  $I^{-\alpha}$  aos dois membros da equação. Também no caso da fórmula de inversão 4.56, começamos pela transformada inversa de Fourier de 4.51 (eq. 4.57). Introduzindo a fórmula integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) d\xi = \frac{1}{|S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} |\eta| h(\eta) d\eta d\theta \quad (4.63)$$

em 4.57, obtemos

$$I^\alpha f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{|S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} e^{ix \cdot \eta} |\eta|^{1-\alpha} \widehat{f}(\eta) d\eta d\theta \quad (4.64)$$

e, utilizando o teorema 4.2.2

$$I^\alpha f(x) = (2\pi)^{-\frac{(n+1)}{2}} \frac{1}{|S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} e^{ix \cdot \eta} |\eta|^{1-\alpha} \widehat{\mathcal{P}f}(\theta, \eta) d\eta d\theta. \quad (4.65)$$

Por fim, observando que o integral interno é um potencial de Riesz, temos que

$$I^\alpha f(x) = (2\pi)^{-1} \frac{1}{|S^{n-2}|} \int_{S^{n-1}} I^{\alpha-1} \mathcal{P}f(\theta, E_\theta x) d\theta \quad (4.66)$$

$$= (2\pi)^{-1} \frac{1}{|S^{n-2}|} \mathcal{P}^\# I^{\alpha-1} \mathcal{P}f(x) \quad (4.67)$$

e a fórmula de inversão é obtida aplicando o operador  $I^{-\alpha}$  aos dois membros da equação. ■

Várias fórmulas de inversão, mais ou menos úteis do ponto de vista prático, podem ser obtidas instanciando as equações 4.55 e 4.56 para valores específicos do parâmetro  $\alpha$  que

define a forma do núcleo de convolução  $I^\alpha$  [92]. Por exemplo, substituindo nas duas equações  $\alpha = n - 1$  e  $\alpha = 1$ , respectivamente, obtemos:

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} I^{1-n} \mathcal{R}^\# \mathcal{R} f(x) \quad (4.68)$$

$$f(x) = \frac{1}{|S^{n-2}|} (2\pi)^{-1} I^{-1} \mathcal{P}^\# \mathcal{P} f(x) \quad (4.69)$$

e, dado que  $\mathcal{P}^\# \mathcal{P} f(x) = 2\mathcal{D}^\# \mathcal{D} f(x)$  (pelas equações 4.39 e 4.49), podemos também deduzir a seguinte fórmula de inversão para a transformada de feixe divergente

$$f(x) = 2 \frac{1}{|S^{n-2}|} (2\pi)^{-1} I^{-1} \mathcal{D}^\# \mathcal{D} f(x). \quad (4.70)$$

Outras fórmulas de inversão podem ser obtidas seguindo abordagens radicalmente diferentes (por exemplo, através da expansão em harmónicas esféricas do operador, etc.) e encontram-se descritas em [92].

### 4.3.1 Inversão local/global

Um aspecto interessante da família de fórmulas definida pelo teorema 4.3.1, tem a ver com a dependência das propriedades de localidade/globalidade (no sentido da integração) das fórmulas de inversão, em função da dimensão  $n$  e do parâmetro  $\alpha$ . Para esclarecer este ponto, introduzimos a transformada de Hilbert, dada pelo integral

$$Hg(s) = \frac{1}{\pi} \int \frac{g(t)}{s-t} dt, \quad (4.71)$$

calculado no sentido do valor principal de Cauchy, marcadamente global e tal que

$$\widehat{Hg}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{g}(\xi). \quad (4.72)$$

Introduzindo a transformada de Hilbert na definição do potencial de Riesz tem-se

$$I^{-m} g(\theta, \sigma) = \Lambda^m g(\theta, \sigma) = H^m g^{(m)}(\theta, \sigma), \quad (4.73)$$

onde  $g^{(m)}$  é a derivada de ordem  $m$  de  $g$  em função da segunda variável [92], e dado que

$$H^m = \begin{cases} (-1)^{\frac{m-1}{2}} H, & m \text{ ímpar} \\ (-1)^{\frac{m}{2}}, & m \text{ par,} \end{cases} \quad (4.74)$$

verifica-se que, enquanto no caso de  $m$  par a aplicação do potencial de Riesz é uma operação local (no sentido que para o seu cálculo num ponto são necessários valores de  $g$  em hiperplanos que intersectam uma vizinhança do ponto), no caso de  $m$  ímpar a aplicação do potencial de Riesz, implicando o cálculo do integral de Hilbert, é uma operação global (no sentido que para o seu cálculo num ponto são necessários valores de  $g$  em todo o domínio). Por exemplo, se introduzirmos 4.73 na equação 4.68, obtemos

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} H^{n-1} \mathcal{R}^\# g^{(n-1)}, \quad g = \mathcal{R} f(x) \quad (4.75)$$

sendo que a localidade/globalidade da fórmula dependem da dimensão  $n$ . Para  $n$  ímpar, a fórmula resultante:

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \int_{S^{n-1}} g^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta) d\theta \quad (4.76)$$

é local, sendo apenas a média de  $g^{(n-1)}$  calculada sobre todos os hiperplanos passando pelo ponto  $x$ , enquanto para  $n$  par a fórmula resulta ser global.

No caso de  $n$  par a localidade poderá ser reposta, de alguma forma, escolhendo  $\alpha = n - 3$  obtendo a fórmula

$$I^{n-3} f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \mathcal{R}^\# I^{-2} g, \quad (4.77)$$

com  $I^{-2} g = -g''$ .

#### 4.4 Fórmulas de inversão aproximadas

Se o modelo teórico dos processos de projecção e reconstrução pode ser desenvolvido no espaço contínuo, na prática lidamos com um universo discreto e finito de dados, tanto no que se refere às medidas como às imagens eventualmente reconstruídas. A mera discretização das fórmulas propostas na secção anterior implica operações de integração e/ou de diferenciação singulares sobre dados afectados por ruído, podendo comprometer a unicidade da reconstrução e gerar fenómenos de instabilidade numérica que desaconselham a sua utilização.

Uma possível alternativa consiste na procura de uma solução aproximada  $Af = e * f$ , onde a função  $e$ , designada por função de resposta pontual (em inglês: *point spread function*), aproxima a função  $\delta$  e representa o resultado do processo de reconstrução quando  $f = \delta$ . Como veremos, as formulas que se obtêm substituindo  $f$  por  $e * f$ , por exemplo, em 4.68, 4.69 e 4.70, gozam de algumas características importantes que permitem uma implementação numérica eficiente tornando-as mais adequadas à utilização na prática tomográfica. Considerando, em primeiro lugar, a transformada de Radon e a fórmula de reconstrução 4.68, temos

$$e * f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} I^{1-n} \int_{S^{n-1}} \mathcal{R}_\theta(e * f)(x \cdot \theta) d\theta \quad (4.78)$$

ou seja, pela linearidade do operador  $\mathcal{R}$ ,

$$\begin{aligned} e * f(x) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \mathcal{R}_\theta f(x \cdot \theta) * I^{1-n} \mathcal{R}_\theta e(x \cdot \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_\theta f(t) I^{1-n} \mathcal{R}_\theta e((x \cdot \theta) - t) dt d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_\theta f(t) K_{\mathcal{R}}((x \cdot \theta) - t) dt d\theta \end{aligned} \quad (4.79)$$

com

$$K_{\mathcal{R}}(s) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} I^{1-n} \mathcal{R}_\theta e(s). \quad (4.80)$$

Similarmente, para a transformada de feixe paralelo, partindo da fórmula de reconstrução 4.69, obtemos

$$e * f(x) = \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \mathcal{P}_\theta f(y) K_{\mathcal{P}}(E_\theta x - y) dy d\theta \quad (4.81)$$

com

$$K_{\mathcal{P}}(y) = \frac{1}{2\pi|S^{n-2}|} I^{-1} \mathcal{P}_\theta e(y) \quad (4.82)$$

e por fim, após apropriada mudança de variáveis, obtemos também uma fórmula de reconstrução aproximada para a transformada de feixe divergente:

$$e * f(x) = \frac{1}{2r} \int_A \int_{S^{n-1}} (\mathcal{D}_a f(\theta) + \mathcal{D}_a f(-\theta)) |a \cdot \theta| K_{\mathcal{P}}(E_\theta(x - a)) d\theta da. \quad (4.83)$$

Como se pode constatar as expressões 4.79, 4.81 e 4.83 permitem obter uma aproximação de  $f$  mediante retroprojectão da convolução das projectões com um núcleo que depende exclusivamente de  $e$ . O facto do potencial de Riesz (principal responsável pela instabilidade em 4.68, 4.69 e 4.70) ser aplicado, neste caso, exclusivamente à função  $e$ , permite assegurar a estabilidade das fórmulas aproximadas em relação ao ruído e aos erros de medida. Para além disso, através de uma escolha cuidadosa de  $e$  é possível manipular algumas características de  $e * f$  controlando, dentro de certos limites, o nível de aproximação.

Esta abordagem resulta particularmente importante do ponto de vista prático, pois nela se baseia o algoritmo de retroprojectão filtrada quase universalmente utilizado para a reconstrução tomográfica, pelo menos em âmbito radiológico (ver secções 5.2.1 e 5.2.2).

## 4.5 Conjuntos de dados completos

As fórmulas de inversão que acabamos de descrever pressupõem o conhecimento dos integrais da função  $f$  em todo o domínio dos operadores. Na realidade, e ainda sem, para já, considerar os efeitos da discretização, observando as geometrias de amostragem utilizadas em tomografia, veremos como os dados disponíveis são fortemente limitados pela trajectória da fonte de raios X e pela geometria do detector. O problema é especialmente significativo no caso da tomografia 3D pela qual, na melhor das hipóteses, teremos uma trajectória em espiral sobre uma superfície cilíndrica (e não esférica, como seria desejável para ter uma adequada cobertura do espaço de Radon).

Apesar destas limitações, todavia, existem casos nos quais a inversão da transformada baseada num operador pseudo-inverso, apesar de requerer uma formulação apropriada, não é posta em causa. Considerando-se completo qualquer conjunto de dados a partir do qual seja possível inverter a transformada de forma unívoca e estável, é possível estabelecer algumas condições suficientes para que um determinado conjunto de dados possa ser considerado completo.

Por exemplo, no caso do operador  $\mathcal{P}$  e  $n = 3$ , Orlov estabelece que para garantir a invertibilidade de  $\mathcal{P}(\theta, \cdot)$ , com  $\theta$  pertencente a um sub-conjunto de direcções  $S_0^2 \subseteq S^2$ , é suficiente que  $S_0^2$  intersekte qualquer círculo equatorial de  $S^2$  [96]. Pois, neste caso, dado  $\xi \in \mathbb{R}^3$  arbitrário, existe  $\theta \in S_0^2$  tal que  $\theta \perp \xi$ . Logo, pelo teorema 4.2.2,  $\widehat{f}(\xi)$  é determinado univocamente por  $\widehat{\mathcal{P}f}(\theta, \xi)$ . Um exemplo típico de conjunto de dados completo segundo Orlov

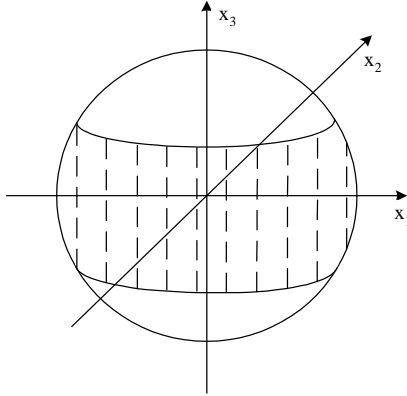


Figura 4.4: Região esférica de Orlov.

é o que corresponde à região esférica, designada por região esférica de Orlov, representada em figura 4.4.

No caso de aquisição em feixe divergente, descrita do ponto de vista matemático pelo operador  $\mathcal{D}$  com  $n = 3$ , supomos que a fonte de raios  $X$  percorre uma curva  $A$  em torno de um objecto de suporte compacto  $f$  e que  $\mathcal{D}f(a, \theta)$  seja, então, conhecida apenas para  $a \in A$  e  $\theta \in S^2$ . Tuy, em [136], estabelece que para garantir a invertibilidade de  $\mathcal{D}f(a, \theta)$  com  $a \in A$  e  $\theta \in S^2$  é suficiente que a trajectória  $A$  atravesse, em pelo menos um ponto, todos os planos que intersectam transversalmente o objecto. Esta condição é conhecida por condição de Tuy e um conjunto de dados que a satisfaça é considerado completo segundo Tuy. Dois anos mais tarde, Smith [126] propõe uma nova condição de suficiência (ligeiramente mais fraca que a de Tuy) afirmando que a função objecto pode ser reconstruída desde que a trajectória  $A$  atravesse, em pelo menos um ponto, cada plano que intersecta o objecto.

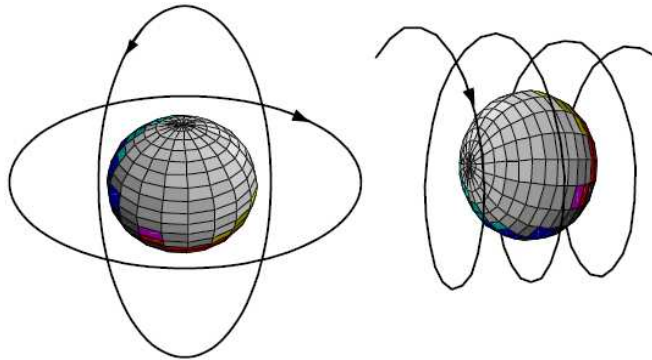


Figura 4.5: Exemplos de trajetórias que permitem satisfazer as condições de Tuy e Smith [125].

A condição de suficiência de Smith é de grande interesse do ponto de vista prático dado que nela se baseia um importante resultado, obtido por Grangeat [41], que permite, dado um conjunto de projecções cónicas completo segundo Smith, calcular a derivada da transformada de Radon segundo a variável  $s$ .



## Fórmula de Grangeat

Dado um conjunto de projecções cónicas completo segundo Smith, a fórmula de Grangeat

$$\mathcal{R}'f(\theta, a \cdot \theta) = \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{R}f)(\theta, a \cdot \theta) = \int_{\omega \in \theta^\perp \cap S^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathcal{D}f)(a, \omega) d\omega, \quad (4.84)$$

permite obter a derivada (segundo a variável  $s$ ) da transformada de Radon 3D calculada em cada plano que intersekte o suporte da função por reconstruir. Para percebermos o significado da fórmula 4.84, consideremos um plano que atravesse o suporte da função objecto e para o qual se queira calcular uma amostra da derivada da transformada de Radon. Pela condição de Smith, nesse plano existe (pelo menos) um ponto focal. Desta forma, considerando a projecção cónica obtida a partir desse ponto e na hipótese que esta abranja todo o suporte da função objecto (projecção não truncada), a amostra pretendida obtém-se calculando o integral de linha ao longo da intersecção entre o plano em questão e o plano do detector virtual, ou seja, o plano ortogonal ao eixo central do feixe passando pelo centro de rotação (figura 4.6).

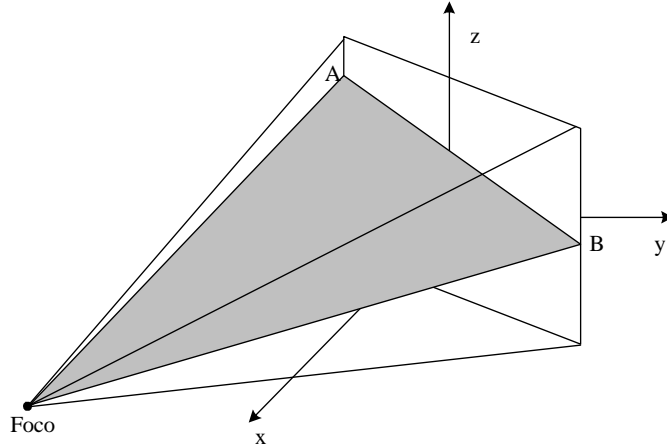


Figura 4.6: O integral de linha da transformada de feixe divergente calculado ao longo da linha AB é igual à derivada da transformada de Radon no plano que contém o foco e a linha AB.

Com base neste resultado, e tendo em conta a fórmula de inversão 4.76 que, no caso  $n = 3$ , resulta ser:

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\mathcal{R}f)(\theta, x \cdot \theta) d\theta = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{R}'f)(\theta, x \cdot \theta) d\theta, \quad (4.85)$$

foi possível, como se verá nas secções 5.3.2 e 7.4, o desenvolvimento de algoritmos de reconstrução exactos ou quase exactos para a geometria de aquisição de feixe divergente.

## 4.6 Reconstrução a partir de conjuntos incompletos de dados

Pode-se afirmar que o problema de Radon, em presença de um universo de dados suficientemente denso e completo, é um problema inverso razoavelmente bem posto. Todavia, na prática, lidamos frequentemente com conjuntos de dados incompletos e o problema tende a

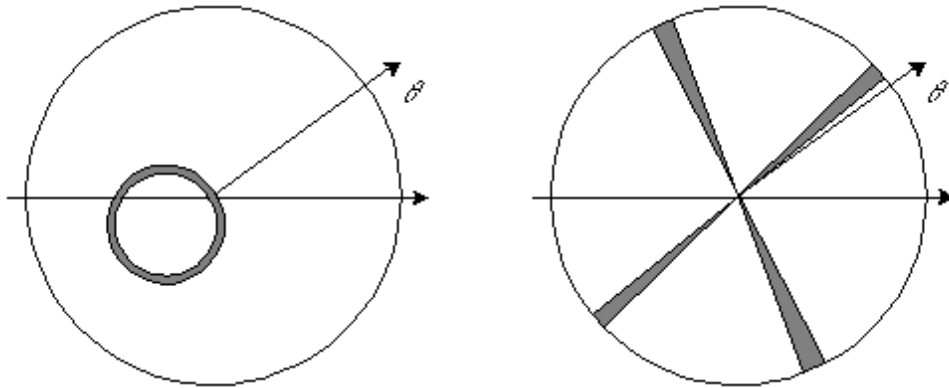


Figura 4.7: No caso de conjuntos de dados incompletos, a distribuição das amostras no espaço de Radon 2D (sistema de coordenadas pseudo-polares) sofre de lacunas ao nível da variável radial e/ou angular.

ser severamente mal posto, tornando-se indispensável a introdução de técnicas de regularização.

Admitindo que a frequência de amostragem seja adequada pela teoria de Nyqvist, a transformada de Radon pode ser conhecida apenas parcialmente, devido à existência de lacunas ou limitações ao nível da variável radial (por exemplo devido à presença de corpos opacos à radiação) ou ao nível da variável angular (*limited angle tomography*).

O mais provável é estarmos perante um problema de subamostragem angular que pode ocorrer, essencialmente, por duas razões. A primeira tem a ver com limitações físicas impostas à trajectória angular da fonte de radiação que se verificam frequentemente no caso de aplicações em ambientes industriais mas também no caso da, um tanto abusivamente denominada, tomografia 3D. A segunda razão tem a ver com aplicações dinâmicas, isto é, nas quais o objecto sob estudo é caracterizado por uma função densidade variável no tempo. Nestes casos, a velocidade de rotação da fonte pode ser insuficiente para garantir uma adequada cobertura angular num determinado segmento temporal. Um exemplo particularmente crítico desta situação verifica-se no caso em que se procura analisar a região cardio-torácica, caracterizada por uma dinâmica rápida, quer ao nível das estruturas vasculares cardíacas quer ao nível das estruturas vasculares pulmonares e dos tecidos envolventes.

Para podermos caracterizar, tanto do ponto de vista quantitativo como qualitativo, o tipo de lacunas que se podem verificar, representamos (de forma algo abusiva) a distribuição das amostras no espaço de Radon bidimensional no sistema de coordenadas pseudo-polares  $\theta$  e  $s$ . Observamos que, no caso bidimensional, a presença de um corpo opaco no interior da secção do objecto em análise provoca uma lacuna em forma de anel circular, enquanto uma limitação angular provoca lacunas em forma de sectores angulares (fig. 4.7). Similarmente, no caso tridimensional, verificar-se-ão lacunas em forma de esfera ouca ou de sector cónico, respectivamente.

Se do ponto de vista quantitativo, uma medida da insuficiência dos dados pode ser facilmente dada pela percentagem do espaço não coberta por amostras, é importante salientar que também a distribuição das lacunas é relevante do ponto de vista da qualidade da reconstrução. Por exemplo, uma distribuição aleatória de múltiplos sectores angulares vazios tem menor impacto sobre a qualidade da reconstrução quando comparada com a presença de um

único e mais amplo sector angular vazio [125]. Na secção 10.2.2 iremos analisar qualitativa e quantitativamente as lacunas que se verificam no caso concreto da aquisição cardíaca sincronizada com o sinal electrocardiográfico e a sua dependência dos parâmetros de aquisição e da descrição estatística do ciclo cardíaco.

Existem duas possíveis abordagens para dar resposta ao problema da reconstrução a partir de conjuntos de dados incompletos. A abordagem tecnológica aposta na tecnologia de aquisição e passa pelo aumento da velocidade angular dos tomógrafos e pelo desenvolvimento de tomógrafos especialmente concebidos para aplicações dinâmicas. Por outro lado, a abordagem matemática, que mais interessa considerar no contexto da presente dissertação, recorre a tomógrafos convencionais (ainda que aproveitando da velocidade de aquisição cada vez maior) e aposta na reformulação do problema da reconstrução de maneira a admitir, desde logo, a insuficiência dos dados (limitação angular).

No geral, quando estamos perante um conjunto de dados incompleto, procura-se uma solução aproximada a partir do subconjunto de dados disponível utilizando técnicas de regularização propriamente ditas (uma panorâmica sobre estas técnicas pode ser encontrada em [125] ou [92]) ou, de forma heurística e recorrendo a toda a informação disponível *a priori* sobre a função objecto, procura-se preencher as lacunas no conjunto de dados (restauro do conjunto de dados) para depois se proceder à reconstrução. Esta última forma de resolver o problema, por ser heurística e depender fortemente do tipo de aplicação, não se adequa a ser abordada genericamente de um ponto de vista teórico, todavia, mais adiante veremos um exemplo desta técnica aplicada à tomografia cardio-torácica sincronizada com o ciclo cardíaco (secção 10.2.2).

## 4.7 Tomografia local

Em algumas aplicações da tomografia o que interessa efectivamente é obter informações qualitativas sobre a estrutura interna do objecto, ficando em segundo plano a reconstrução quantitativamente rigorosa do coeficiente de atenuação.

Isto acontece, por exemplo, quando se pretenda obter imagens que realcem o conteúdo morfológico estrutural do objecto e, também, quando se pretenda reconstruir apenas uma parte de um objecto designada por região de interesse, ou ROI (acrónimo da expressão anglo-saxónica *Region of Interest*), utilizando apenas (ou quase) os integrais obtidos ao longo de linhas ou planos que intersectam esta região. Do ponto de vista teórico, este último é um problema de inversão cuja solução não é única, pois, existem funções que não se anulam dentro da ROI mas cujas projecções nas linhas que intersectam a ROI são nulas (espaço nulo). Todavia, foi demonstrado [91] que os elementos do espaço nulo no interior da transformada de Radon são quase constantes dentro da ROI, o que, do ponto de vista prático, significa a possibilidade de reconstruir valores locais a partir de projecções locais a menos de um erro quase constante.

Na última década, esta área da tomografia tem suscitado o interesse dos investigadores, levando ao aparecimento de um certo número de métodos de reconstrução que podem ser classificados [29] em métodos estritamente locais, nos quais a reconstrução num ponto  $x$  requer apenas integrais ao longo de linhas que intersectam uma vizinhança arbitrariamente pequena de  $x$ , e tomografia regional, que utiliza integrais ao longo de linhas que intersectam uma região um pouco maior que a ROI.

Estes métodos assumem cada vez mais interesse do ponto de vista prático, pois trata-se

de ferramentas valiosas para um grande número de aplicações dado que permitem reduzir a região irradiada (diminuindo a dose de raios X transmitida ao doente), aumentar a resolução espacial utilizando o mesmo número de detectores e ajustar a energia do feixe (mantendo-se o compromisso entre dose e ruído ao nível do *pixel*) de maneira a otimizar a visualização de uma determinada região quando esta se caracteriza por uma densidade substancialmente diferente daquela das regiões vizinhas.

Do ponto de vista da complexidade computacional, a redução do número de amostras consideradas na reconstrução não constitui uma grande vantagem, pois permite reduzir o número de operações associadas à fase de convolução mas não o número de operações associadas ao algoritmo de retro projecção, cujo peso computacional depende do tamanho da imagem por reconstruir e não do número de amostras.

A título de exemplo, mencionamos a chamada tomografia Lambda [30, 108, 29], que é um método estritamente local, e o método designado por tomografia multiresolução baseada em *wavelets* [109], que se enquadra nos métodos de tomografia regional. Um tópico particularmente interessante do ponto de vista prático e ainda não completamente explorado, é a tomografia local 3D a partir de projecções de feixe cónico [63, 148].



## Capítulo 5

# Algoritmos de reconstrução em tomografia sequencial

No capítulo anterior enquadrámos do ponto de vista formal o processo de formação da imagem tomográfica, apresentando as transformadas de Radon, de feixe paralelo e de feixe cónico e as respectivas transformadas inversas, definidas no espaço contínuo, em  $n$  dimensões e sem fazer referência a uma geometria específica de aquisição dos dados. Vimos também como, atendendo à natureza discreta dos processos de aquisição dos dados e reconstrução da imagem, estes podem ser modelados respectivamente como amostragem da transformada de Radon segundo um determinado esquema e como aproximação da transformada inversa de Radon a partir do conjunto de amostras adquiridas.

Tendo em conta que, na prática, a necessidade de dispor (seja qual for o esquema de amostragem da transformada de Radon) de algoritmos de reconstrução cada vez mais rápidos, eficientes ou vocacionados para tarefas específicas, tem levado ao aparecimento de uma grande variedade de algoritmos. Do ponto de vista formal, estes algoritmos podem ser classificados como pertencentes à família dos métodos analíticos (que derivam directamente da fórmula de inversão analítica da transformada de Radon, discretizada a posteriori) ou dos métodos algébricos (nos quais o problema é discretizado a priori, consistindo na resolução de um sistema de equações lineares).

No contexto do presente trabalho, restringimos o foco do nosso interesse apenas à classe dos métodos analíticos. Entre a vasta literatura no âmbito dos métodos algébricos podem ser apontadas as referências [39], [45], [80], [89] e [33].

Para além da distinção entre algoritmos analíticos e algébricos, que abrange transversalmente todos os métodos de reconstrução, é possível propor uma classificação com base na geometria de aquisição à qual cada método se destina. De facto, os diferentes métodos de reconstrução utilizados na prática passam, em primeiro lugar, pela especificação das dimensões do problema e da geometria de aquisição dos dados que define, em última instância, o leque dos algoritmos aplicáveis.

Seguindo a classificação baseada na geometria de aquisição, ao longo deste capítulo, consideraremos métodos de reconstrução aplicáveis a dados adquiridos com diferentes geometrias de feixe (paralelo, divergente e cónico) mas sempre com varrimento sequencial (trajectória da fonte circular num plano transversal). Serão analisadas as várias geometrias de feixe e as propriedades que caracterizam os conjuntos de amostras correspondentes, passando depois a descrever os possíveis métodos de reconstrução.

À reconstrução de volumes a partir de dados adquiridos com varrimento em espiral será dedicado um capítulo específico (capítulo 7). Os métodos de Fourier, que assumem uma importância fulcral no contexto do presente trabalho, serão analisados no capítulo 6.

Apesar de não termos implementado e avaliado nenhum método de reconstrução completamente 3D, achamos conveniente abordar algumas questões fundamentais relacionadas com esta classe de métodos, descrevendo alguns algoritmos básicos e focalizando as condições necessárias para este tipo de reconstrução.

## 5.1 Geometrias de aquisição e amostragem

Considerando o sistema de referência descrito na secção 3.2 e introduzindo também a variável temporal, o objecto que interessa analisar resulta descrito por uma função  $f$  definida no espaço cartesiano  $(x, y, z, t)$ , sendo  $z$  a direcção longitudinal (paralela ao eixo de rotação do sistema de aquisição) e  $t$  a variável temporal. Em rigor, qualquer processo de aquisição e reconstrução tomográfica pode ser descrito no espaço tetra-dimensional  $(x, y, z, t)$  permitindo um enquadramento geral independentemente da geometria de aquisição e da trajectória da fonte. Todavia, devido ao percurso histórico e por razões de simplicidade, é habitual reduzir ao mínimo as dimensões do espaço no qual se realiza este processo. Assim, por exemplo, no caso da tomografia sequencial mono-corte, que visa obter imagens correspondentes a planos transversais utilizando apenas dados adquiridos no próprio plano da imagem, tanto a função objecto como os processos de aquisição e reconstrução podem ser definidos apenas no espaço  $(x, y, t)$  (ou  $(x, y)$  no caso de um objecto estático). Por outro lado, em muitos casos torna-se imprescindível o enquadramento das geometrias de aquisição e dos métodos de reconstrução no espaço tri- ou tetra-dimensional.

As limitações geométricas e a discretização implícitas nas técnicas de aquisição e reconstrução em tomografia, impõem algumas considerações acerca da distribuição e quantidade de amostras da transformada de Radon necessárias para que seja possível reconstruir a função objecto com um determinado nível de detalhe. A teoria da amostragem tem um papel de importância fundamental em tomografia, tendo sido aplicada de forma rigorosa por vários autores (entre os trabalhos mais recentes [92, 28, 22]). Nesta dissertação, iremos apenas mencionar alguns resultados, especialmente úteis do ponto de vista prático, que estabelecem as condições mínimas de amostragem, tanto no que se refere à distribuição das amostras (definida pela geometria de aquisição e pela trajectória do foco) como no que se refere à frequência de amostragem. Para enquadrarmos o problema, admitiremos que a função  $f$  tenha banda essencialmente limitada a  $b$  radianos/unidade de comprimento, isto é, que  $\hat{f}(\xi)$  seja desprezível para  $|\xi| > b$ . Neste caso,  $\frac{2\pi}{b}$  será a dimensão do mais pequeno detalhe representado na função  $f$ .

Vamos, então, introduzir as geometrias de aquisição mais comuns, começando pelas que se inscrevem no espaço bidimensional, onde a cada uma corresponde uma particular grelha de amostragem do espaço de Radon.

### 5.1.1 Geometria paralela

Esta geometria de aquisição, definida no espaço bidimensional, foi a primeira geometria de aquisição a ser utilizada na história da tomografia e prevê a irradiação de uma secção transversal do objecto com um feixe de raios X paralelos, segundo um determinado conjunto de orientações.

No espaço  $(x, y)$ , as equações formais 4.11 que caracterizam a transformada de Radon da função  $f$  ao longo da linha de equação

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = s, \quad (5.1)$$

traduzem-se, em concreto, na fórmula

$$\mathcal{R}f(s, \theta) = \iint f(x, y) \delta(x \cos \alpha + y \sin \alpha - s) dx dy \quad (5.2)$$

onde o parâmetro  $\alpha$  indica o ângulo entre o versor  $\theta$  e o eixo  $x$ , enquanto o parâmetro  $s$  representa a distância entre a linha e o centro de rotação, coincidente com a origem dos eixos.

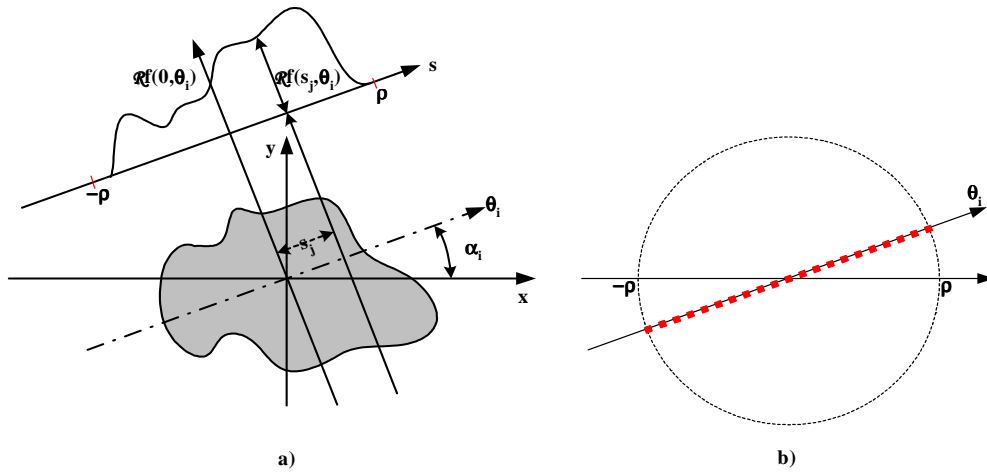


Figura 5.1: Representação gráfica de uma projecção paralela  $\mathcal{R}_\theta f(s)$  no plano  $(x, y)$  (a), e dos correspondentes pontos de amostragem no espaço de Radon (b).

Uma projecção paralela  $\mathcal{R}_\theta f(s)$ , representada graficamente na figura 5.1-a, consiste numa colecção de integrais de linha (5.2) calculados ao longo de linhas paralelas no plano o que, na representação do espaço de Radon em coordenadas pseudo-polares, corresponde a um conjunto de pontos de amostragem uniformemente distribuídos ao longo da linha de coordenada radial  $\theta$  (fig. 5.1-b).

A aquisição de um conjunto de projecções paralelas segundo direcções uniformemente distribuídas ao longo de um arco de  $\pi$  radianos, permite preencher todo o espaço de Radon segundo a grelha  $(\theta_i, s_j)$  em que

$$\theta_i = (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)^T \quad \alpha_i = \alpha_0 + i\Delta\alpha \quad i = 0, \dots, p-1 \quad (5.3)$$

$$s_j = j\Delta s \quad j = -q, \dots, q \quad (5.4)$$

onde  $p$  é o número de projecções adquiridas em  $\pi$  radianos e  $2q + 1$  o número de amostras uniformemente espaçadas entre si por um intervalo  $\Delta s$ . Caso o número de amostras por projecção seja par, isto é  $2q$ , será  $s_j = j\Delta s$ , com  $j = -q, \dots, q - 1$ . Se o suporte da imagem for inscrito num círculo de raio  $\rho$ , a distância radial entre amostras será  $\Delta s = \frac{\rho}{q}$ , enquanto a distância angular será  $\Delta\alpha = \frac{\pi}{p}$ .



Para determinar os valores mínimos para os parâmetros  $p$  e  $q$  que permitam resolver detalhes de dimensão  $\frac{2\pi}{b}$  na imagem reconstruída, seguiremos uma abordagem simplificada considerando, em primeiro lugar, a amostragem na direcção radial. Pela teoria da amostragem, a distância entre amostras  $\Delta s$  deverá ser menor ou igual a  $\frac{\pi}{b}$ , o que implica

$$q \geq \frac{\rho b}{\pi}. \quad (5.5)$$

Por outro lado, se queremos que a distância entre amostras de  $\hat{f}$  na direcção angular, cujo valor máximo será  $\frac{b\pi}{p}$ , não ultrapasse a distância entre amostras na direcção radial,  $\frac{b}{q}$ , deverá ser  $\frac{\rho\pi}{p} \leq \frac{\rho}{q}$ , ou seja

$$p \geq \pi q. \quad (5.6)$$

Apesar da forma aparentemente simplista com a qual foram obtidas, estas condições coincidem com as que podem ser deduzidas seguindo uma análise formalmente muito mais rigorosa no âmbito da teoria da amostragem como, por exemplo, em [92].

Um conjunto de dados projecção adquiridos com geometria paralela designa-se por sinograma e pode ser representado graficamente sob a forma de uma matriz de  $p$  linhas e  $2q + 1$  colunas (fig. 5.4-a) onde a cada linha corresponde um valor para o parâmetro  $\theta$  (ou  $\alpha$ ), ou seja, uma projecção paralela, e a cada coluna um valor para o parâmetro  $s$ .

### 5.1.2 Geometria divergente

No caso da geometria divergente, em que a cada posição angular do foco corresponde um leque de linhas foco-detector, torna-se conveniente definir cada linha no plano  $(x, y)$  pelos parâmetros  $r$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , onde  $r$  é o raio do círculo descrito pelo foco,  $\beta$  é o ângulo entre a linha central do feixe (que coincide com a linha que une o foco ao centro de rotação) e o eixo  $x$ , e  $\gamma$  é o ângulo entre a linha em questão e a linha central do feixe (fig. 5.2).

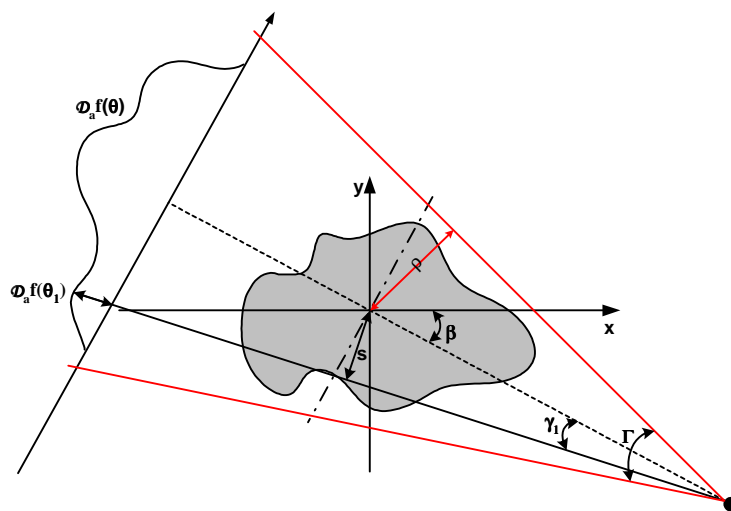


Figura 5.2: Representação gráfica de uma projecção divergente no plano  $(x, y)$ .

Utilizando os parâmetros anteriormente definidos, uma linha no plano  $(x, y)$  será descrita univocamente pela equação:

$$x \cos(\beta + \gamma - \frac{\pi}{2}) + y \sin(\beta + \gamma - \frac{\pi}{2}) = -r \sin \gamma, \quad (5.7)$$

e o integral de  $f$ , calculado ao longo desta linha, corresponderá a uma amostra da transformada de Radon de  $f$  em

$$\theta = (\cos(\beta + \gamma - \frac{\pi}{2}), \sin(\beta + \gamma - \frac{\pi}{2}))^T \quad (5.8)$$

$$s = -r \sin \gamma. \quad (5.9)$$

Uma projecção divergente, representada gráficamente na figura 5.2, consiste numa colecção de amostras da transformada de Radon obtidas com um determinado valor de  $\beta$  e com uma sequência de valores de  $\gamma \in [-\frac{\Gamma}{2}, \frac{\Gamma}{2}]$ , sendo  $\Gamma$  a abertura do feixe. Uma definição alternativa de projecção divergente obtem-se recorrendo à transformada de feixe cónico no espaço bidimensional (neste caso, uma projecção divergente será dada por  $\mathcal{D}_a f(\theta)$ , onde  $a$  representa a posição do foco e  $\theta = (\cos(\beta + \gamma), \sin(\beta + \gamma))^T$ ). No espaço de Radon representado em coordenadas pseudo-polares, uma projecção divergente corresponde a um conjunto de amostras uniformemente distribuídas ao longo de um arco de círculo assim como representado na figura 5.3-a.

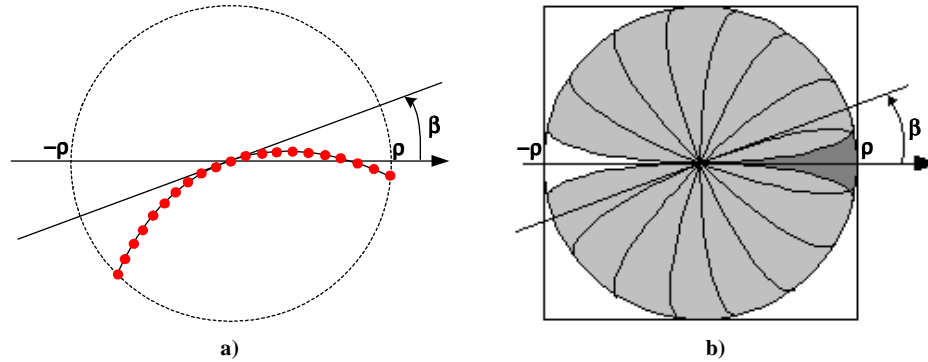


Figura 5.3: Pontos de amostragem do espaço de Radon correspondentes a uma projecção divergente (a) e cobertura do espaço de Radon correspondente a um conjunto de projecções com  $\beta$  entre 0 e  $\pi$  (b). A área de cor branco não resulta coberta pela amostragem, enquanto a área de cor cinzento mais escuro é amostrada duas vezes.

A aquisição de um conjunto completo de dados projecção com geometria divergente corresponde à amostragem do espaço de Radon segundo a grelha  $(\beta_i, \gamma_j)$ , definida por:

$$\begin{aligned} \beta_i &= \beta_0 + i\Delta\beta & i &= 0, \dots, p-1 \\ \gamma_j &= j\Delta\gamma & j &= -q, \dots, q, \end{aligned}$$

sendo  $p$  o número de projecções adquiridas ao longo de uma rotação completa ( $2\pi$  radianos),  $2q+1$  o número de amostras por cada projecção,  $\Delta\beta = \frac{2\pi}{p}$  a distância angular entre projecções sucessivas e  $\Delta\gamma = \frac{\Gamma}{2q+1}$  a distância angular entre amostras da mesma projecção (fig. 5.6-b). Caso o número de amostras por projecção seja par, será  $\gamma_j = j\Delta\gamma$  com  $j = -q, \dots, q-1$ .

É interessante observar como, no caso das projecções divergentes, a aquisição de um conjunto de projecções ao longo de um arco de  $\pi$  radianos, não permita preencher todo o espaço de Radon (fig. 5.3-b), sendo necessário estender a aquisição a um arco de, pelo menos,  $\pi + \Gamma$  radianos (varrimento breve ou *short-scan*). Todavia, neste caso, verifica-se uma amostragem completa mas não uniforme do espaço de Radon dando lugar a artefactos na imagem reconstruída. Ao longo desta dissertação, designaremos por varrimento completo o correspondente a um arco de  $2\pi$  radianos e por varrimento breve o correspondente a um arco de  $\pi + \Gamma$  radianos.

Tal como no caso das projecções paralelas, pretendemos determinar o número mínimo de amostras que permitam resolver detalhes de dimensão  $\frac{2\pi}{b}$  na imagem reconstruída. Considerações análogas às efectuadas naquele caso, com alguma complexidade adicional, permitem chegar [92] às condições mínimas de amostragem para projecções divergentes e varrimento completo

$$\Delta\beta \leq \frac{r + \rho}{r} \frac{\pi}{b\rho} \quad (5.10)$$

$$\Delta\gamma \leq \frac{\pi}{br}. \quad (5.11)$$

Destas, substituindo as espessões para  $\Delta\gamma$  e  $\Delta\beta$ , obtemos o número mínimo de projecções e amostras por projecção:

$$p \geq \frac{2r}{r + \rho} b\rho \quad (5.12)$$

$$q \geq \frac{\Gamma}{2} \frac{br}{\pi}. \quad (5.13)$$

As mesmas fórmulas nos permitem deduzir, dada uma geometria de amostragem específica, o tamanho do menor detalhe que pode ser resolvido. Por exemplo, para um tomógrafo no qual  $r = 70\text{cm}$ ,  $\rho = 25\text{cm}$ ,  $\Gamma = \frac{\pi}{4}$ ,  $p = 1000$  e  $q = 500$ , o tamanho do menor detalhe que pode ser resolvido é cerca de  $2\text{mm}$ , o que indica uma efectiva resolução espacial bastante aquém do que o tamanho do *pixel* (submilimétrico) poderia sugerir.

Em analogia com o caso da geometria paralela, o conjunto de dados adquirido com geometria divergente pode ser representado graficamente sob a forma de uma matriz de  $p$  linhas e  $2q + 1$  colunas onde a cada linha corresponde um valor para o parâmetro  $\beta$  e a cada coluna um valor para o parâmetro  $\gamma$ . De forma algo abusiva, designaremos esta matriz por "sinograma divergente" (fig. 5.4-b) tendo apenas, como alternativa, a designação mais correcta mas menos incisiva de "conjunto de dados adquiridos com geometria divergente".

A figura 5.4, sugere a possibilidade de, reorganizando e interpolando os dados, obter um sinograma a partir de um sinograma divergente ou vice-versa. Este processo, designado pelo termo inglês de *rebinning* (secção 5.1.4), é de grande interesse, sendo que permite aplicar a dados adquiridos com geometria divergente métodos de reconstrução que, de outra forma, só poderiam ser aplicados a dados adquiridos com geometria paralela.

### 5.1.3 Geometria cónica

Mesmo continuando a considerar apenas trajectórias planares da fonte, que assumimos percorrer uma trajectória circular de raio  $r$  num plano ortogonal ao eixo  $z$ , a geometria de feixe cónico é uma geometria de aquisição intrinsecamente tri-dimensional, podendo ser descrita no espaço cartesiano  $(x, y, z)$ .

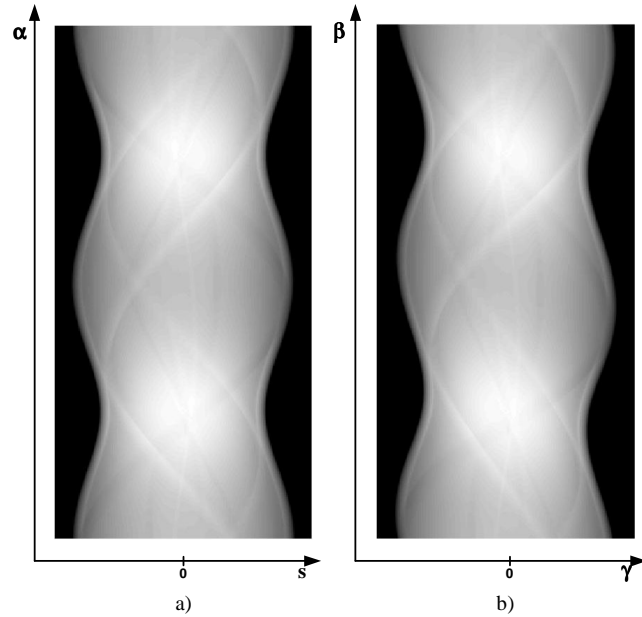


Figura 5.4: Exemplos de sinogramas obtidos a partir do *Herman head phantom* com geometria paralela e divergente. Para facilitar a comparação, tanto as projecções paralelas como as divergentes foram adquiridas ao longo de uma rotação completa ( $2\pi$ ). a) sinograma (512 projecções em  $2\pi$ , 255 amostras); b) sinograma divergente (512 projecções em  $2\pi$ , 255 amostras).

O feixe cónico é definido pela posição do foco  $(x_0, y_0, z_0)$ , pela abertura transversal  $\Gamma$  no plano ortogonal ao eixo  $z$  passando pela posição do foco e pela abertura longitudinal  $\Phi$  no plano definido pelo eixo  $z$  e pela posição do foco (caso  $\Phi$  seja nulo, estaríamos perante um feixe divergente). Os parâmetros  $r$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\varphi$  (fig. 5.5) identificam univocamente cada linha do feixe, sendo que  $\beta \in [0, 2\pi[$  representa o ângulo de projecção,  $\gamma \in [-\frac{\Gamma}{2}, \frac{\Gamma}{2}]$  o desvio angular da linha relativamente ao eixo do feixe (*fan-angle*) no plano transversal de coordenadas  $(x, y, z_0)$ , e  $\varphi \in [-\frac{\Phi}{2}, \frac{\Phi}{2}]$  o desvio angular da linha (*cone-angle*) relativamente ao plano transversal.

Em três dimensões a transformada de Radon  $\mathcal{R}f(\theta, s)$  é definida como integral da função distribuição  $f$  calculado no plano ortogonal ao versor  $\theta$  e cuja distância do isocentro é  $s$ . Cada um destes integrais fornece uma amostra do espaço de Radon tri-dimensional do qual se requer uma adequada cobertura para que seja possível a reconstrução do objecto irradiado. Dado que esta definição se afasta do modelo, até aqui utilizado, segundo o qual uma projecção é constituída por um conjunto de integrais da função  $f$  ao longo de linhas correspondentes às trajetórias ideais dos raios X, achamos mais conveniente descrever o processo de projecção com geometria cónica fazendo recurso à transformada de feixe cónico.

Assim, no enquadramento geométrico anteriormente definido, ao integral de  $f$  calculado ao longo de uma linha identificada pelos parâmetros  $a = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\varphi$  corresponde a amostra da transformada de feixe cónico

$$\mathcal{D}_a f(\theta) = \int_0^\infty f(a + t\theta) dt, \quad (5.14)$$

onde  $\theta = (\cos(\beta + \gamma), \sin(\beta + \gamma), \sin(\varphi))$ .

Habitualmente, em TC, utilizam-se detectores cilíndricos constituídos por um determinado

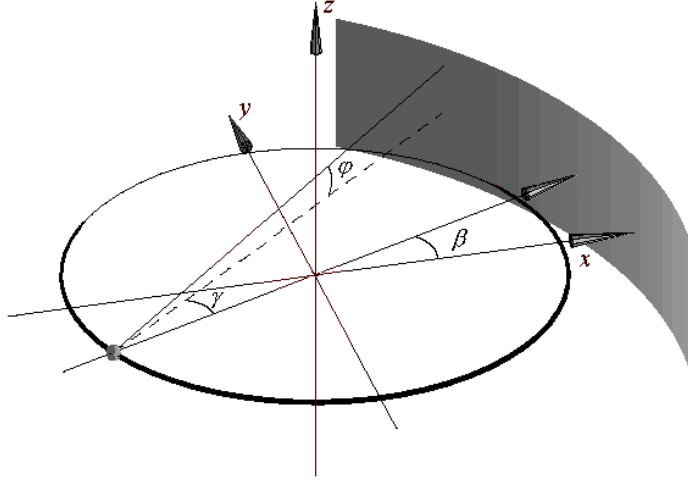


Figura 5.5: Representação gráfica da geometria de aquisição com feixe cónico e trajetória circular da fonte no espaço  $(x, y, z)$ . A fonte percorre uma trajetória circular num plano ortogonal ao eixo  $z$ .

número de linhas de elementos de detecção. Admitindo que seja possível adquirir  $M$  linhas de amostras equi-espaciaadas, a distância entre amostras na direcção longitudinal, definida (como se ilustra na figura 5.6-a) recorrendo a um hipotético detector posicionado no centro de rotação e centrado na fonte, resulta ser

$$\Delta\zeta = \frac{r \tan \frac{\Phi}{2}}{\frac{M}{2}}. \quad (5.15)$$

Um conjunto de dados projecção com geometria cónica corresponde, então, à amostragem do espaço da transformada de feixe cónico segundo uma grelha  $(\beta_i, \gamma_j, \varphi_k)$  definida por:

$$\beta_i = \beta_0 + i\Delta\beta \quad i = 0, \dots, p-1 \quad (5.16)$$

$$\gamma_j = j\Delta\gamma \quad j = -q, \dots, q \quad (5.17)$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{\zeta_k}{r} \quad k = 1, \dots, M \quad (5.18)$$

sendo  $p$  o número de projecções cónicas adquiridas ao longo de uma rotação completa (com  $\Delta\beta = \frac{2\pi}{p}$ ),  $2q+1$  o número de amostras adquiridas por cada corte (colunas da matriz de detecção), separadas pela distância angular  $\Delta\gamma = \frac{\Gamma}{2q+1}$ , e  $M$  o número de cortes com  $\zeta_k = (k - \frac{M}{2} - \frac{1}{2})\Delta\zeta$ . Neste caso, exemplificado graficamente na figura 5.6, foi considerado um número de cortes par (como é habitual) e um número ímpar de colunas, mas não se trata de uma regra.

Como já foi dito na secção 4.5, a aquisição com geometria cónica e trajetória circular não fornece um conjunto completo de dados a partir do qual seja possível reconstruir de forma exacta, em três dimensões, o objecto sujeito ao varrimento. Para obter um conjunto de dados completo (segundo Tuy ou segundo Smith), seria necessário estender a trajetória adicionando pelo menos outra trajetória circular (ou linear) não paralela à original.

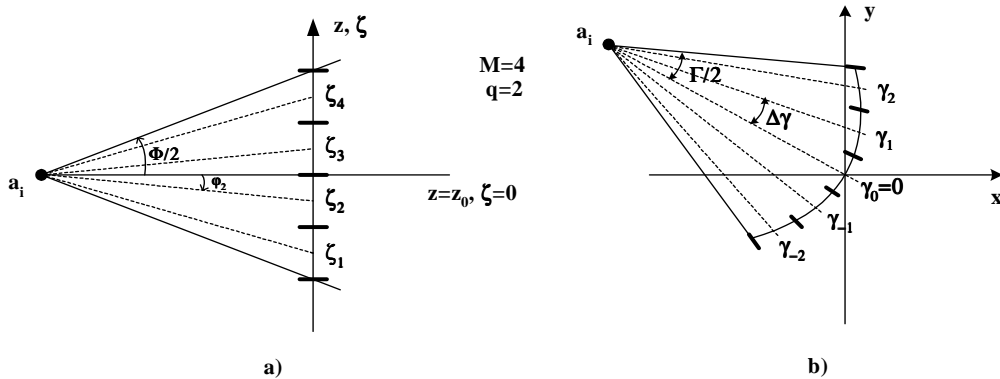


Figura 5.6: Esquemática da geometria de amostragem de um feixe cónico: a) no plano longitudinal passando pelo eixo  $z$  e pela  $i$ -ésima posição do foco; b) no plano transversal ao eixo  $z$  passando pela  $i$ -ésima posição do foco.

No que se refere ao número mínimo de amostras necessárias para obter uma determinada resolução ( $\frac{2\pi}{b}$ ), pode-se dizer que, na direcção transversal mantêm-se as condições 5.12 e 5.13 válidas para o caso do feixe divergente, enquanto na direcção longitudinal (admitindo que seja possível uma adequada reconstrução) o problema é mais complexo, sendo que, no caso de repetidas aquisições circulares, deve ser encontrado um compromisso entre o número de cortes adquiridos simultaneamente, a espessura de secção e a distância entre planos de aquisição.

#### 5.1.4 Rebinning

Em geral, dado um conjunto suficientemente denso e completo de amostras de uma função, adquiridas segundo uma determinada grelha de amostragem, é possível sintetizar um novo conjunto de amostras, correspondente a outra grelha de amostragem, através da interpolação das amostras dadas. Este processo de reamostragem é bastante utilizado em tomografia permitindo, por exemplo, a síntese de um conjunto de dados projectivos correspondente a uma determinada geometria de amostragem, a partir de outro conjunto adquirido com uma geometria diferente, operação, esta, que se designa pelo termo inglês de *rebinning*.

O tipo de *rebinning* mais utilizado é o que permite obter um sinograma a partir de um sinograma divergente (ou "conjunto de dados projecção adquiridos com geometria divergente"), contudo, procedimentos similares podem ser utilizados para obter conjuntos de amostras correspondentes a outras geometrias de projecção (como por exemplo a geometria de linograma, definida em [26]) a partir de dados obtidos com geometria paralela ou divergente [82] (ou vice-versa).

Em particular, com o aparecimento dos primeiros tomógrafos de feixe divergente, não havendo ainda métodos de reconstrução para esta geometria, a reconstrução passava necessariamente pela síntese prévia de um sinograma a partir dos dados adquiridos com geometria divergente. Sucessivamente, esta técnica foi abandonada para dar lugar a métodos que permitiam executar o processo de reconstrução em paralelo com a aquisição dos dados (como o algoritmo de retroprojecção filtrada para geometria divergente). Hoje em dia, devido à

introdução da aquisição em espiral, que implica a reconstrução a posteriori, a possibilidade de executar em paralelo os processos de aquisição e reconstrução já não constitui um valor acrescentado, tendo sido reavaliado o papel dos métodos de reconstrução para geometria paralela precedidos por *rebinning* dos dados. De facto, como demonstram as nossas experiências (cap. 9), estes métodos têm todo o potencial para produzir imagens de elevada qualidade.

Comparando as equações 5.1 e 5.7, vemos que os parâmetros de uma linha na geometria paralela são relacionados com os parâmetros da mesma linha na geometria divergente pelas equações:

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha - \gamma + \frac{\pi}{2} \\ \gamma &= -\arcsin \frac{s}{r}.\end{aligned}\tag{5.19}$$

Assim, a cada amostra do sinograma por determinar corresponde, no espaço das projecções divergentes representado nas coordenadas cartesianas  $(\gamma, \beta)$ , um ponto no qual o valor da transformada de Radon pode ser calculado por interpolação (fig. 5.7). A interpolação no domínio de Radon, representado nas coordenadas  $(\gamma, \beta)$ , não é uma operação particularmente crítica pelo que podem ser utilizados métodos de interpolação mais simples sem que a qualidade da imagem fique afectada de forma apreciável. Para além disso, a distribuição regular tanto das amostras dadas como dos pontos de interpolação faz com que o erro de interpolação seja uniformemente distribuído, não dando origem a artefactos na imagem reconstruída.

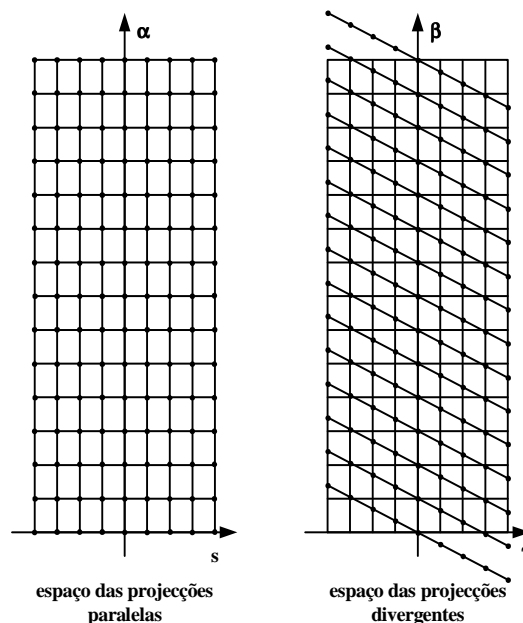


Figura 5.7: O processo de *rebinning*: os pontos representam as amostras de sinograma no espaço das projecções paralelas e no espaço das projecções divergentes.

Analisando a representação das amostras de sinograma dada na figura 5.7, podemos fazer algumas observações interessantes. Em primeiro lugar, repare-se como a uma linha de amostras no sinograma (uma projecção paralela) corresponda uma linha de pontos inclinada

de  $-\frac{\pi}{4}$  no espaço das projecções divergentes (se os eixos  $\gamma$  e  $\beta$  são representados na mesma escala). Outra observação interessante, refere-se ao facto que um sinograma completo, isto é com  $\alpha \in [A, A + \pi]$ , pode ser obtido por interpolação a partir de projecções divergentes adquiridas apenas ao longo de um arco de  $\pi + \Gamma$  radianos ( $\beta \in [A + \frac{\pi}{2} - \Gamma/2, A + \frac{3\pi}{2} + \Gamma/2]$ ), confirmando quanto já foi dito na pag. 70, ou seja, que o varrimento breve fornece informação suficiente para a reconstrução da imagem.

No capítulo dedicado aos métodos de Fourier (cap. 6), será apresentada uma técnica alternativa, que chamaremos de *rebinning* sem interpolação, que permite obter um conjunto de projecções paralelas generalizadas sem recurso à interpolação (sec. 6.2.1). A razão pela qual optamos por incluir este método no capítulo 6, deve-se ao facto que, devido à distribuição irregular das amostras nas projecções generalizadas, estas não se adaptam a qualquer método de reconstrução, podendo ser utilizadas apenas no âmbito dos métodos de Fourier.

### 5.1.5 Convenção sobre o número de amostras

Para manter a necessária generalidade, ao introduzir as geometrias de varrimento utiliza-se a letra  $p$  para indicar o número de projecções, a letra  $M$  para indicar o número de projecções (igual ao número de cortes) adquiridas simultaneamente e a expressão  $2q + 1$  (ou  $2q$ ) para indicar o número de amostras por projecção. Seguindo uma orientação comum, para reconstruir uma imagem de dimensões  $N \times N$ , iremos escolher o número de projecções  $p$  (por cada  $\pi$  radianos de rotação) e o número de amostras por projecção,  $2q + 1$ , da mesma ordem de grandeza de  $N$ .

Esta escolha de parâmetros, que respeita os vínculos impostos pelo teorema de amostragem, justifica-se pelas simplificações que permite introduzir na determinação da complexidade computacional dos algoritmos. No caso de feixe multi-corte, ou cónico, a letra  $M$  continuará a indicar o número de cortes adquiridos em cada projecção.

## 5.2 Algoritmos de reconstrução 2D

Como já foi adiantado no capítulo 4, na reconstrução a partir de projecções é de fundamental importância o teorema da secção central 4.2.1 que, no caso bidimensional, estabelece que a transformada de Fourier unidimensional  $\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\sigma)$  de uma projecção paralela de uma função objecto  $f(x, y)$  segundo uma determinada direcção  $\theta = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , corresponde a uma secção da transformada de Fourier bidimensional de  $f(x, y)$ , subtendendo um ângulo  $\alpha$  com o eixo  $u$ , ou seja:

$$\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\sigma) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(\sigma \cos \alpha, \sigma \sin \alpha), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \quad (5.20)$$

Isto significa, baseando-nos na representação gráfica dada na figura 5.8, que a transformada de Fourier unidimensional de  $\mathcal{R}_\theta f(s)$  fornece amostras de  $\widehat{f}(u, v)$  ao longo da linha BB no espaço de Fourier e que, a partir de um sinograma completo, é possível obter um conjunto de amostras do espaço de Fourier bidimensional uniformemente distribuídas sobre uma grelha polar. Assim, teoricamente, a imagem poderia ser obtida a partir destas amostras por inversão da transformada de Fourier bidimensional. O problema é que para aplicar a transformada inversa bidimensional as amostras devem ser uniformemente distribuídas sobre uma grelha cartesiana, tornando necessária a interpolação que, no domínio de Fourier é um



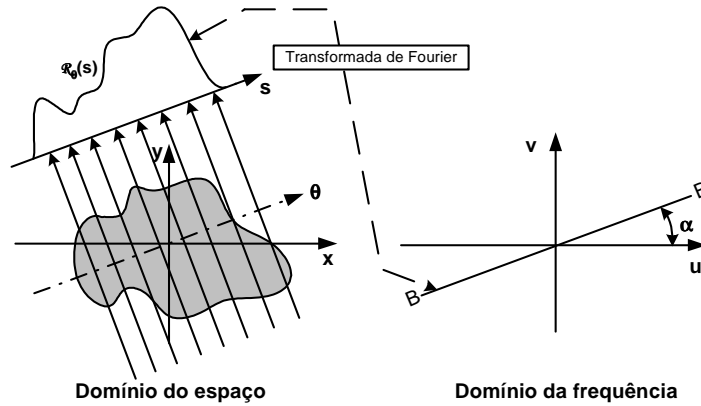


Figura 5.8: Representação grafica do enunciado do teorema da secção central no caso bidimensional.

processo particularmente delicado. Neste contexto se insere uma classe de algoritmos, conhecidos por métodos directos de Fourier, que procuram resolver este problema utilizando técnicas de interpolação complexas ou grelhas de amostragem modificadas de forma a reduzir o erro de interpolação. Estes métodos, que se revelaram de grande interesse no âmbito desta dissertação, serão descritos no capítulo 6.

Entre os outros métodos de reconstrução analíticos, descrevemos aqui apenas os mais significativos.

### 5.2.1 Retro projecção Filtrada para geometria paralela

O método de reconstrução habitualmente utilizado nos tomógrafos comerciais é o método da retro projecção filtrada, nas suas variantes relativas à especificidade da geometria de amostragem utilizada. Trata-se de um método analítico, tendo a sua origem numa fórmula analítica de inversão da transformada de Radon. A aplicação da fórmula ao domínio discreto e a sua implementação numérica dão lugar ao algoritmo conhecido também pelo acrónimo FBP, do inglês *Filtered BackProjection*.

Do ponto de vista intuitivo, trata-se de "retroprojectar" para o plano da imagem as amostras adquiridas, somando o seu valor ao longo das linhas às quais se referem, assim como ilustrado na figura 5.9. A operação de filtragem torna-se necessária devido ao efeito passa-baixo que a operação de retro projecção implica.

Do ponto de vista formal, no caso de projecções obtidas com geometria paralela, o método deriva da fórmula de inversão aproximada da transformada de Radon 4.79 que, em duas dimensões, resulta ser:

$$e * f = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_\theta f(t) K_{\mathcal{R}}((x, y) \cdot \theta - t) dt d\alpha \quad (5.21)$$

$$K_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2(2\pi)} I^{-1} \mathcal{R}_\theta e(s) \quad (5.22)$$

onde  $\theta = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $s = (x, y) \cdot \theta$  e  $I$  é um potencial de Riesz, tal como definido na secção 4.3. A própria fórmula sugere os passos do algoritmo. O primeiro passo (representado pelo integral interior) será, para cada valor de  $\theta$ , a convolução na variável radial da projecção com

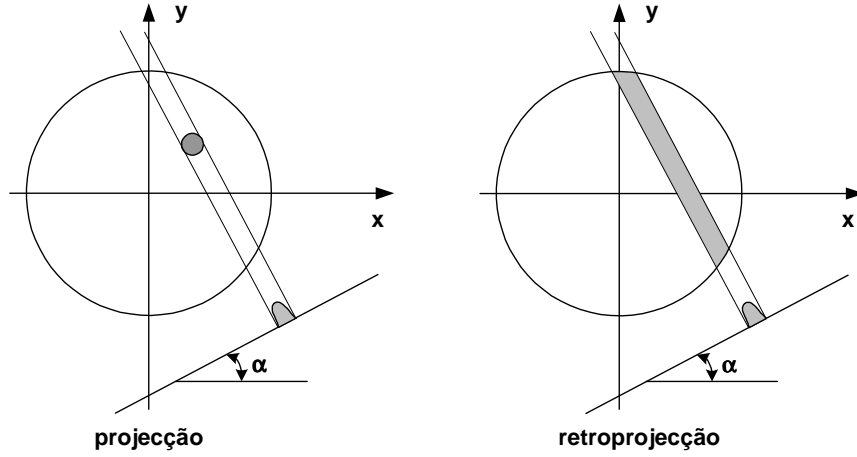


Figura 5.9: Representação gráfica da operação de retroprojecção de uma projecção paralela de uma função objecto constituída por apenas uma pequena área circular de densidade não nula.

um núcleo  $K_{\mathcal{R}}$  de tipo passa-alto restringido por uma função janela, obtendo as projecções filtradas

$$Q_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{\theta}f(t)K_{\mathcal{R}}(s-t)dt \quad (5.23)$$

que podem, em alternativa, ser calculadas recorrendo à multiplicação no domínio da frequência

$$Q_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}_{\theta}f}(\sigma)\widehat{K_{\mathcal{R}}}(\sigma)e^{j\sigma s}d\sigma. \quad (5.24)$$

O segundo passo, representado pelo integral exterior, será dado pelo somatório das contribuições de cada uma das projecções filtradas (retroprojecção), de tal forma que:

$$e * f(x, y) = \int_0^{2\pi} Q_{\theta}(x \cos \alpha + y \sin \alpha)d\alpha. \quad (5.25)$$

Para percebermos melhor o papel do núcleo de convolução, consideramos a função equivalente de filtragem no domínio da frequência (correspondente à eq. 5.22 no domínio do espaço):

$$\widehat{K_{\mathcal{R}}}(\sigma) = \frac{1}{4\pi} |\sigma| \widehat{\mathcal{R}_{\theta}e}(\sigma). \quad (5.26)$$

Trata-se do produto de uma função em rampa  $|\sigma|$  por uma função de corte, transformada de Fourier de uma projecção da função de resposta pontual  $e$ . Sendo o objectivo a reconstrução de uma função  $f$  de banda essencialmente limitada  $b$ , assumimos que a função de resposta pontual seja uma função de corte no domínio da frequência, isto é, um filtro passa-baixo com frequência de corte  $b$ , tal que:  $0 \leq \widehat{e}(\xi) \leq \frac{1}{2\pi}$  para  $|\xi| \leq b$  e  $\widehat{e}(\xi) = 0$  para  $|\xi| > b$ . Tendo, ainda, em consideração a natureza radial da função de resposta pontual e recorrendo ao teorema da

secção central, podemos substituir, na equação 5.26,  $\widehat{\mathcal{R}}_{\theta}e(\sigma)$  com  $\sqrt{2\pi}\widehat{e}(\sigma) = \sqrt{2\pi}\widehat{e}(|\xi|)$ , obtendo:

$$\widehat{K}_{\mathcal{R}}(\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\sigma| \widehat{e}(\sigma) \quad (5.27)$$

ou

$$\widehat{K}_{\mathcal{R}}(\sigma) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} |\sigma| \widehat{\Psi}(\sigma/b) \quad (5.28)$$

sendo  $\widehat{\Psi}(\sigma/b) = 2\pi\widehat{e}(\sigma)$ , uma função de filtro (janela) normalizada com  $0 \leq \widehat{\Psi}(\lambda) \leq 1$  para  $\lambda \leq 1$  e  $\widehat{\Psi}(\lambda) = 0$  para  $\lambda > 1$ . Existem várias possibilidades para a escolha da função janela  $\widehat{\Psi}$  que, uma vez combinada com o filtro em rampa, se reflecte em diferentes funções de filtragem  $\widehat{K}_{\mathcal{R}}$ . Por exemplo, escolhendo a função janela ideal

$$\widehat{\Psi}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \leq 1 \\ 0 & \lambda > 1 \end{cases} \quad (5.29)$$

obtem-se o filtro, designado por filtro de "Ram-Lak" dos nomes dos cientistas (Ramachandran e Lakshminarayanan) que o propuseram (fig. 5.10):

$$\widehat{K}_{\mathcal{R}}(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2} |\sigma| & |\sigma| \leq b \\ 0 & |\sigma| > b \end{cases} \quad (5.30)$$

Outra possibilidade, utilizando como janela uma função sinc truncada, é o filtro de Shepp-Logan (fig. 5.10)

$$\widehat{K}_{\mathcal{R}}(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2} |\sigma| \operatorname{sinc}\left(\frac{\sigma\pi}{2b}\right) & |\sigma| \leq b \\ 0 & |\sigma| > b \end{cases} \quad (5.31)$$

Devido à ênfase dada às frequências mais elevadas e à extensão ilimitada do núcleo de convolução no domínio espacial, os filtros de Ram-Lak e de Shepp-Logan tornam-se responsáveis pelo aparecimento de artefactos (*aliasing*) na imagem reconstruída e pela elevada sensibilidade ao ruído do algoritmo de reconstrução (por isso são chamados filtros "ásperos"). Por esta razão, foram propostas outras janelas que, combinadas com o filtro em rampa, permitem limitar o peso das frequências mais elevadas com vantagens significativas em relação aos filtros anteriormente mencionadas (filtros "suaves"). Entre os filtros propostos neste sentido, os mais utilizados são o filtro de tipo Cosseno (fig. 5.10)

$$\widehat{K}_{\mathcal{R}}(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2} |\sigma| \cos\left(\frac{\sigma\pi}{2b}\right) & |\sigma| \leq b \\ 0 & |\sigma| > b \end{cases} \quad (5.32)$$

e o filtro de Hamming (fig. 5.10)

$$\widehat{K}_{\mathcal{R}}(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2} |\sigma| (c + (1-c) \cos\left(\frac{\sigma\pi}{b}\right)) & |\sigma| \leq b \\ 0 & |\sigma| > b \end{cases} \quad (5.33)$$

no qual o parâmetro  $c$  pode variar entre 0 e 1, sendo que com  $c = 1$  obtem-se um filtro igual ao filtro Ram-Lak enquanto com  $c = 0.54$  obtem-se o filtro conhecido pelo nome de Hanning. Ao longo desta dissertação, quando se fala genericamente em filtro de Hamming entende-se, mais especificamente, filtro de Hamming com  $c = 0.54$ .

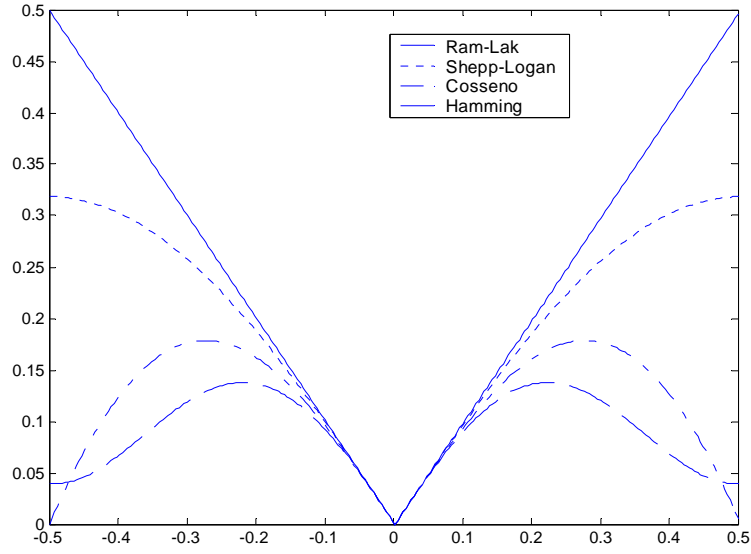


Figura 5.10: Algumas funções de filtragem habitualmente utilizadas no método de retroprojectão filtrada.

Na prática, os vários fabricantes disponibilizam uma escolha de filtros sendo que o nome de cada filtro fornece informação codificada acerca das suas características. Cada fabricante tem o seu próprio código, por exemplo, nos equipamentos Siemens, no caso de exames do tronco (*body*) será possível escolher um dos filtros BXXs, onde XX pode ir de 10 até 90 (quanto mais elevado o número, mais "áspero" o filtro), enquanto no caso da cabeça (*head*) temos os filtros HXXs ( $10 < XX < 90$ ) e no caso da cabeça em âmbito pediátrico (*child*) os filtros CXXs ( $20 < XX < 60$ ).

Uma vez escolhida a função de filtragem e a respectiva largura de banda, a discretização das fórmulas de inversão 5.24 e 5.25, equivalentes à 5.21 mas com a filtragem executada no domínio da frequência, conduz ao procedimento numérico descrito de seguida.

### Algoritmo 5.2.1 (FBP)

1. Para cada direcção de projecção  $\theta_i = (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)^T$ ,  $i = 0, \dots, p-1$ , calcular a projecção filtrada  $Q_{i,j}$ , com  $j = -q, \dots, q$  seguindo os passos:

- (a) adicionar amostras de valor nulo às extremidades do sinal (zero padding) até ter um número de amostras  $N_z = n_z N$  (sendo  $n_z$  o factor de padding) equivalente a uma potência de dois
- (b) calcular a transformada de Fourier discreta

$$\widehat{\mathcal{R}_{\theta_i} f}(\sigma_j) = (2\pi)^{-1/2} \frac{r}{q} \sum_{l=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}} \mathcal{R}_{\theta_i} f(s_l) e^{-i\pi s_l \sigma_j} \quad j = -\frac{N_z}{2}, \dots, \frac{N_z}{2} \quad (5.34)$$

utilizando o algoritmo FFT 1D

- (c) realizar a filtragem por multiplicação com a função de filtro  $\widehat{K_{\mathcal{R}}}(\sigma_j)$ ,  $j = -\frac{N_z}{2}, \dots, \frac{N_z}{2} - 1$
- (d) calcular a transformada inversa de Fourier (IFFT 1D)
- (e) retirar as amostras excedentes (unpadding).

2. Para cada ponto  $(x, y)$  do suporte de  $f$  calcular, aplicando a quadratura trapezoidal, a retroprojectão:

$$f(x, y) \approx \sum_{i=0}^{p-1} (1-u)Q_{i,k} + uQ_{i,k+1} \quad (5.35)$$

onde  $k = \lfloor \frac{s}{\Delta s} \rfloor$  e  $u = \frac{s}{\Delta s} - k$ , sendo  $s = \theta_i \cdot (x, y) = x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i$  a distância do ponto  $(x, y)$  da linha central do feixe.

No algoritmo descrito, a operação de *zero padding* (ponto 1-a) tem o duplo objectivo de tornar mais eficiente o cálculo da FFT (que é mais rápido quando o número de amostras é uma potência de dois) e de reduzir o efeito de *aliasing* devido à convolução circular, enquanto a operação de interpolação entre as amostras  $Q_{i,k}$  e  $Q_{i,k+1}$  (ponto 2) deve-se à necessidade de determinar o valor de uma amostra virtual em  $s$  a partir das duas amostras mais próximas.

Tendo em consideração as convenções do parágrafo 5.1.5, dado que a fase de filtragem e a fase de retroprojectão requerem, respectivamente,  $\mathcal{O}(N^2 \log N)$  e  $\mathcal{O}(N^3)$  operações [82], podemos concluir que a complexidade do algoritmo é  $\mathcal{O}(N^3)$ .

Repare-se, ainda, que no algoritmo de retroprojectão filtrada (não apenas no caso de geometria paralela) a operação de retroprojectão realiza-se *pixel a pixel (pixel oriented)*, o que permite a reconstrução de regiões de interesse sendo, eventualmente, aumentada a resolução de visualização. Esta característica, considerada exclusiva desta classe de algoritmos, torna-os extremamente flexíveis, todavia não se trata de tomografia local (tal como foi formalmente definida na secção 4.7) dado que o método, baseado no conhecimento e filtragem das projecções completas, é intrinsecamente global. Do ponto de vista do custo computacional, a redução da região de interesse não implica a diminuição do número de operações dado que este depende apenas das dimensões da imagem por reconstruir, isto é da resolução pretendida.

## 5.2.2 Retroprojectão Filtrada para geometria divergente

Similarmente ao que acontece no caso da geometria paralela, o método de retroprojectão filtrada para geometria divergente (DB FBP – *Divergent Beam FBP*) deriva da fórmula de inversão aproximada da transformada de feixe cónico 4.83 que, em duas dimensões e utilizando as notações geométricas introduzidas na secção 5.1.2, pode ser escrita da seguinte forma:

$$e * f = \frac{1}{2r} \int_A \int_{S^1} (\mathcal{D}_a f(\theta) + \mathcal{D}_a f(-\theta)) |a \cdot \theta| K_{\mathcal{P}}(E_{\theta}(x - a)) d\theta da \quad (5.36)$$

$$K_{\mathcal{P}}(s) = \frac{1}{4\pi} I^{-1} \mathcal{P}_{\theta} e(s) \quad (5.37)$$

sendo  $x$  um ponto pertencente à região de interesse,  $a$  a posição da fonte e  $A$  a trajectória circular de raio  $r$ . Na perspectiva da utilização prática desta fórmula, torna-se útil efectuar algumas mudanças de variável passando da parametrização em  $(a, \theta)$  à parametrização em  $(\beta, \gamma)$ . Assim,  $\mathcal{D}_a f(\theta)$  pode ser substituída por  $\mathcal{D}_{\beta} f(\gamma)$  com  $\theta = -(\cos(\beta + \gamma), \sin(\beta + \gamma))$ ,

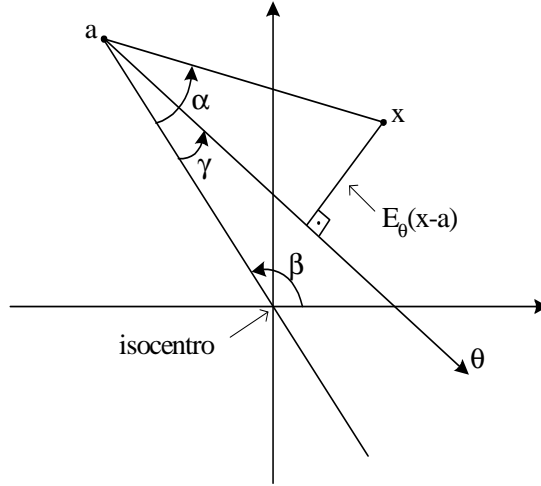


Figura 5.11: Representação geométrica da mudança de parâmetros que permite chegar à fórmula 5.38.

$a = r(\cos \beta, \sin \beta)$  e  $da = rd\beta$ . Ainda, utilizando a geometria esquematizada na figura 5.11 podemos efectuar as substituições  $|a \cdot \theta| = r \cos \gamma$  e  $E_\theta(x - a) = |x - a| \sin(\alpha - \gamma)$ , lembrando que  $E_\theta(x - a)$  é a projecção de  $(x - a)$  no sub-espaço ortogonal a  $\theta$ . A equação 5.36 pode, então, ser rescrita da seguinte forma:

$$e * f = \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\Gamma}{2}}^{\frac{\Gamma}{2}} \mathcal{D}_\beta f(\gamma) \cos \gamma K_{\mathcal{P}}(|x - a| \sin(\alpha - \gamma)) d\gamma d\beta. \quad (5.38)$$

Se assumirmos que a função de resposta pontual (de espectro essencialmente limitado a  $b$ ) seja homogénea de grau -2, o correspondente núcleo de convolução  $K_{\mathcal{P}}$  será também homogéneo de grau -2, podendo-se escrever:

$$K_{\mathcal{P}}(|x - a| \sin(\alpha - \gamma)) = |x - a|^{-2} K_{c\mathcal{P}}(\sin(\alpha - \gamma)) \quad (5.39)$$

com  $c = b|x - a|$  e, conseqüentemente:

$$e * f = \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} |x - a|^{-2} \int_{-\frac{\Gamma}{2}}^{\frac{\Gamma}{2}} \mathcal{D}_\beta f(\gamma) \cos \gamma K_{c\mathcal{P}}(\sin(\alpha - \gamma)) d\gamma d\beta \quad (5.40)$$

onde, para calcularmos eficientemente o integral 5.40, efectuamos uma aproximação homogénea, substituindo  $c = b|x - a|$  com uma constante, independente de  $x$  e  $a$ , tal que  $c \geq b|x - a|$  para cada par  $(x, a)$ . Em termos de dimensões normalizadas, podemos dizer que a largura de banda de filtragem  $c$  deve ser pelo menos  $(1 + r)b$ .

A fórmula 4.70 sugere os passos do algoritmo de retroprojecção filtrada para geometria divergente. O primeiro passo sendo a convolução de cada projecção divergente  $\mathcal{D}'_\beta f(\gamma)$ , ponderada em  $\cos \gamma$ , com o núcleo de convolução  $K_{c\mathcal{P}}$  obtendo as projecções filtradas

$$G_\beta(\alpha) = \int_{-\frac{\Gamma}{2}}^{\frac{\Gamma}{2}} \mathcal{D}'_\beta f(\gamma) K_{c\mathcal{P}}(\sin(\alpha - \gamma)) d\gamma \quad (5.41)$$

e o segundo passo a retroprojectão das projectões filtradas  $G_\beta(\alpha)$  ponderadas em  $|x - a|^{-2}$ . Discretizando, dado um conjunto de amostras  $\mathcal{D}_{\beta_i}f(\gamma_j)$ , o algoritmo de retroprojectão filtrada pode ser esquematizado como segue:

**Algoritmo 5.2.2 (DB FBP I)**

1. Para cada direcção de projectão  $\beta_i$ ,  $i = 0, \dots, p - 1$ , calcular a projectão ponderada em  $\cos \gamma$  e filtrada:

$$G_{i,j} = \Delta\gamma \sum_{l=-q}^q \mathcal{D}_{\beta_i}f(\gamma_l) \cos \gamma_l K_{c\mathcal{P}}(\sin(\gamma_j - \gamma_l)) \quad j = -q, \dots, q \quad (5.42)$$

2. Para cada ponto  $x$  do suporte de  $f$ , cálculo da retroprojectão ponderada em  $|x - a_i|^{-2}$ ,  $i = 0, \dots, p - 1$ , aplicando a fórmula:

$$f(x) \approx \frac{r}{2} \Delta\beta \sum_{i=0}^{p-1} |x - a_i|^{-2} ((1 - u)G_{i,j} + uG_{i,j+1}) \quad (5.43)$$

onde  $j = \left\lfloor \frac{\alpha}{\Delta\gamma} \right\rfloor$  e  $u = \frac{\alpha}{\Delta\gamma} - \left\lfloor \frac{\alpha}{\Delta\gamma} \right\rfloor$ , sendo  $\alpha$  a desviação angular de  $x$  relativamente ao eixo central do feixe  $i$ -ésimo, dada por

$$\alpha = \pm \arccos \frac{(x - a_i) \cdot a_i}{|x - a_i|r} \quad (5.44)$$

com sinal positivo caso  $x \cdot a_i^\perp \leq 0$  e negativo, caso contrário.

Em alternativa, assumindo  $r \gg |x|$ , o ângulo  $\alpha - \gamma$  será suficientemente pequeno de se poder aproximar  $\sin(\alpha - \gamma)$  com  $\alpha - \gamma$ . Esta aproximação permite calcular as projectões filtradas recorrendo à multiplicação no domínio da frequência através da fórmula simplificada

$$G_\beta(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{D}'_\beta f}(\zeta) \widehat{K_{c\mathcal{P}}}(\zeta) e^{j\zeta\alpha} d\zeta \quad (5.45)$$

onde

$$\widehat{K_{c\mathcal{P}}}(\zeta) = \frac{1}{4\pi} |\zeta| \widehat{P_\theta e}(\zeta). \quad (5.46)$$

Utilizando o teorema da secção central, neste caso para a transformada de feixe paralelo (teorema 4.2.2), e considerando a natureza radial da função de resposta pontual, podemos escrever  $\widehat{P_\theta e}(\zeta) = \sqrt{2\pi} \widehat{e}(\zeta) = \sqrt{2\pi} \widehat{e}(|\zeta|)$ , chegando à expressão

$$\widehat{K_{c\mathcal{P}}}(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\zeta| \widehat{e}(\zeta) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} |\zeta| \widehat{\Psi}(\zeta/c), \quad (5.47)$$

equivalente à 5.28, na qual  $\widehat{\Psi}(\zeta/c) = 2\pi \widehat{e}(\zeta)$  é uma função janela normalizada, com  $0 \leq \widehat{\Psi}(\lambda) \leq 1$  para  $\lambda \leq 1$  e  $\widehat{\Psi}(\lambda) = 0$  para  $\lambda > 1$ , que pode ser escolhida como no caso da geometria paralela (pag. 78). Pode-se, assim, chegar a uma formulação alternativa do algoritmo da retroprojectão filtrada para projectões divergentes no qual a filtragem realiza-se no domínio da frequência através da multiplicação das projectões (ponderadas em  $\cos \gamma$  e Fourier transformadas) com uma função de filtro  $\widehat{K_{c\mathcal{P}}}(\zeta)$  que resulta da combinação de um filtro em rampa e de uma função janela normalizada  $\Psi$ . No domínio discreto o algoritmo resulta ser o seguinte:

### Algoritmo 5.2.3 (DB FBP II)

1. Para cada direcção de projecção  $\beta_i$ ,  $i = 0, \dots, p-1$ , calcular a projecção (ponderada em  $\cos \gamma$  e filtrada)  $G_{i,j}$ ,  $j = -q, \dots, q$ , seguindo os passos:

(a) calcular a projecção ponderada  $\mathcal{D}'_{\beta_i} f(\gamma_j)$ , onde

$$\mathcal{D}'_{\beta_i} f(\gamma_j) = \mathcal{D}_{\beta_i} f(\gamma_j) \cos \gamma_j \quad j = -q, \dots, q \quad (5.48)$$

(b) adicionar amostras de valor nulo às extremidades do sinal (zero padding) até ter um número de amostras  $N_z = n_z N$  equivalente a uma potência de dois

(c) calcular a transformada de Fourier de  $\widehat{\mathcal{D}'_{\beta_i} f}(\gamma_l)$ ,  $l = -\frac{N_z}{2}, \dots, \frac{N_z}{2} - 1$  utilizando o algoritmo FFT 1D

(d) realizar a filtragem por multiplicação com a função de filtro  $\widehat{K}_{c\mathcal{P}}(\zeta_l)$ ,  $l = -\frac{N_z}{2}, \dots, \frac{N_z}{2} - 1$

(e) calcular a transformada inversa de Fourier (IFFT 1D)

(f) retirar as amostras excedentes (unpadding).

2. Como no algoritmo 5.2.2.

Também neste caso, a complexidade computacional é da ordem dos  $\mathcal{O}(N^3)$ .

### 5.2.3 Varrimento breve

Como já se apontou em 5.1.4, um varrimento breve (correspondente a um arco de  $\pi + \Gamma$  radianos) com geometria divergente fornece dados suficientes para a reconstrução. Todavia, se tentarmos reconstruir uma imagem utilizando o algoritmo 5.2.2 (ou 5.2.3) a partir de um conjunto de dados deste tipo, obtemos uma imagem distorcida devido à presença de dados redundantes. A redundância nos dados pode ser ilustrada recorrendo à figura 5.12-a, na qual se representa o espaço das projecções divergentes parametrizado em  $(\beta, \gamma)$  com  $\beta \in [\beta_0, \beta_0 + \pi + \Gamma[$ . De facto, podemos constatar que para a síntese de um sinograma são apenas necessárias as amostras contidas no paralelogramo ABCD, enquanto as amostras contidas nos triângulos CDE e ABF são redundantes.

Intuitivamente, o problema poderá ser resolvido, por exemplo, pré-multiplicando o conjunto de amostras pela janela

$$W(\beta, \gamma) = \begin{cases} 1 & \frac{\Gamma}{2} - \gamma \leq \beta \leq \frac{\Gamma}{2} + \pi - \gamma \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}, \quad (5.49)$$

representada na figura 5.12-b, que permite anular o peso das amostras redundantes. Verifique-se, todavia, que este tipo de janela não resolve completamente o problema, persistindo artefactos tangenciais às zonas de transição abrupta. A solução ao problema consiste na determinação de uma janela mais suave, obedecendo a critérios de continuidade tanto em  $W(\beta, \gamma)$



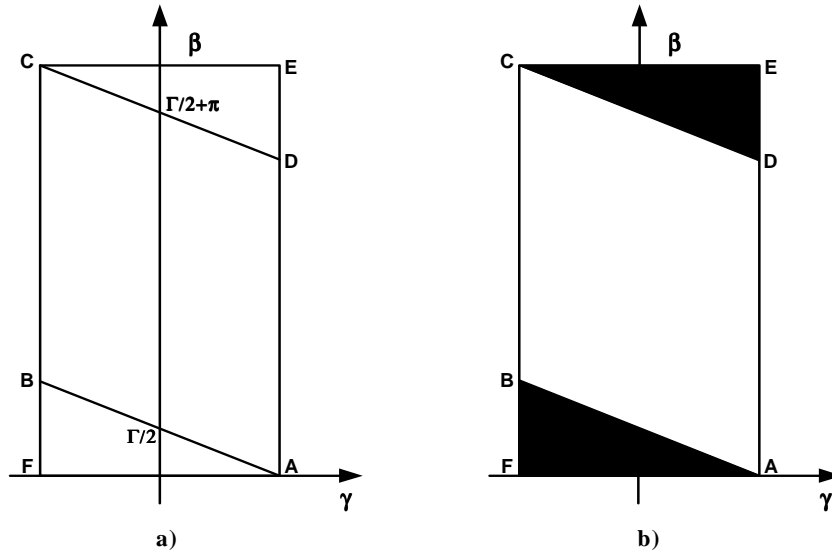


Figura 5.12: Redundância num conjunto de projecções divergentes correspondente a um varrimento breve. a) Representação gráfica dos dados redundantes (triângulos ABF e CDE). b) Janela para a eliminação das amostras redundantes.

como nas respectivas derivadas. Uma possível solução será, por exemplo, a função de ponderação

$$W(\beta, \gamma) = \begin{cases} \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} \frac{\beta}{\frac{\Gamma}{2} - \gamma} \right) & 0 \leq \beta < \Gamma - 2\gamma \\ 1 & \Gamma - 2\gamma \leq \beta \leq \pi - 2\gamma \\ \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} \frac{\pi + \Gamma - \beta}{\frac{\Gamma}{2} + \gamma} \right) & \pi - 2\gamma < \beta \leq \pi + \Gamma \end{cases}, \quad (5.50)$$

proposta por Parker [99] e representada graficamente na figura 5.13, que permite obter imagens de qualidade semelhante às obtidas a partir de conjuntos de dados correspondentes a uma rotação completa do scanner. Após a multiplicação do sinograma pela janela de ponderação, o algoritmo de reconstrução proseguirá normalmente como nos algoritmos 5.2.2 ou 5.2.3, considerando apenas as projecções com  $\beta_i \in [\beta_0, \beta_0 + \pi + \Gamma[$ .

Salienta-se, também, o recente desenvolvimento de métodos eficientes para a reconstrução de regiões de interesse (ROI) a partir de projecções divergentes adquiridas ao longo de um arco de trajectória inferior ao do varrimento breve (varrimento super-breve – *super-short scan*) [93, 73]. Apesar de permitir a reconstrução de regiões de interesse, estes algoritmos não podem ser considerados locais, pois baseiam-se no conhecimento de projecções completas (não apenas dos raios projecção que intersectam a ROI) sendo, por isso, métodos de reconstrução global.

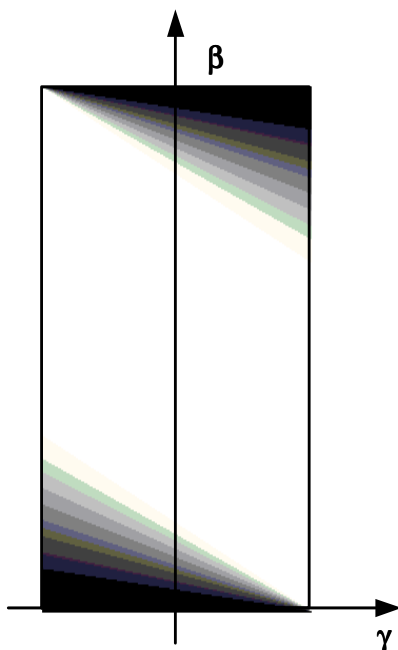


Figura 5.13: Representação gráfica da janela de ponderação de Parker (os diferentes tons de cinzento indicam diferentes pesos, branco=1, preto=0).

## 5.3 Algoritmos de reconstrução 3D

No caso de trajectória circular da fonte, a única geometria de aquisição que poderá, eventualmente, permitir a reconstrução 3D do objecto varrido é a geometria cónica. Todavia, como já se adiantou nas secções 4.5 e 5.1.3, os dados obtidos com geometria cónica e varrimento circular permitem apenas uma reconstrução aproximada do objecto. Somente uma extensão da trajectória (circular + linha longitudinal, ou helicoidal, por exemplo) poderá permitir a satisfação de uma condição de suficiência (sec. 4.5) tornando possível a reconstrução exacta.

Os métodos que permitem a reconstrução 3D aproximada no caso de trajectória circular podem ser fundamentalmente considerados variantes do algoritmo FDK (das iniciais dos seus autores: Feldkamp, Davis e Kress [31]) ou, como o algoritmo de Radon [41], ser reconduzidos à fórmula de Grangeat (descrita na secção 4.5) que permite relacionar as projecções cónicas com a transformada de Radon 3D. Os algoritmos do tipo FDK são métodos aproximados por natureza, enquanto os que derivam da fórmula de Grangeat são potencialmente exactos desde que se disponha de um conjunto completo de dados (o que não se verifica no caso de trajectória circular).

### 5.3.1 Algoritmo FDK

O algoritmo FDK constitui uma extensão intuitiva do método de retro projecção filtrada ao caso de projecções cónicas. Na versão original do algoritmo, consideram-se projecções adquiridas por um detector planar, enquanto na versão que aqui descrevemos [111] consideram-se projecções obtidas com detector cilíndrico centrado na fonte, seguindo o enquadramento

geométrico descrito na secção 5.1.3.

Numa primeira fase do algoritmo, as projecções cónicas são consideradas linha a linha, sendo cada linha ponderada em  $\cos \gamma \cos \varphi$  e filtrada utilizando um núcleo de convolução equivalente aos definidos para o algoritmo de retroprojecção filtrada a partir de projecções divergentes. Numa segunda fase, para cada *voxel* pertencente ao volume de reconstrução e cada posição do foco, determinam-se as amostras do feixe cónico mais próximas e, após interpolação, procede-se à retroprojecção do valor obtido, ponderado em  $|x - a_i|^{-2}$  tal como no algoritmo de retroprojecção filtrada para geometria divergente. Mais formalmente, e recorrendo às notações introduzidas na secção 5.1.3, o algoritmo pode ser assim esquematizado:

### Algoritmo 5.3.1 (FDK)

1. Para cada linha de detectores (correspondente ao ângulo  $\varphi_k, k = 1, \dots, M$ ) e cada direcção de projecção  $\beta_i, i = 0, \dots, p - 1$ , calcular a projecção ponderada em  $\cos \gamma \cos \varphi$  e filtrada

$$G_{i,j,k} = \Delta\gamma \sum_{l=-q}^q \mathcal{D}f(\beta_i, \gamma_l, \varphi_k) \cos \gamma_l \cos \varphi_k K_{c\mathcal{P}}(\sin(\gamma_j - \gamma_l))$$

$$j = -q, \dots, q$$

2. Para cada ponto  $x$  do volume de reconstrução, calcular a retroprojecção ponderada em  $|x - a_i|^{-2}, i = 0, \dots, p - 1$ , das amostras virtuais  $G'_i$  aplicando a fórmula

$$f(x) \approx \frac{r}{2} \Delta\beta \sum_{i=0}^{p-1} |x - a_i|^{-2} G'_i \quad (5.51)$$

equivalente à fórmula 5.43. Neste caso, as amostras virtuais  $G'_i$  são obtidas por interpolação (por exemplo, bilinear) das amostras  $G_{i,j',k'}, G_{i,j'+1,k'}, G_{i,j',k'+1}$  e  $G_{i,j'+1,k'+1}$  sendo:

$$j' = \left\lfloor \frac{\alpha}{\Delta\gamma} \right\rfloor \quad (5.52)$$

$$k' = \left\lfloor \frac{r \tan \varphi}{\Delta\zeta} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \frac{M}{2} \quad (5.53)$$

onde  $\alpha$  é a componente da desviação angular de  $x$ , relativamente ao eixo central do feixe, no plano transversal (fig. 5.11), e  $\varphi$  a componente da desviação angular de  $x$ , relativamente ao eixo central do feixe, no plano longitudinal passando pelo eixo  $z$  e pela posição do foco.

Como se pode observar, a inclinação  $\varphi$  que caracteriza cada amostra é tomada em consideração tanto na ponderação das amostras (sendo atribuído maior peso às amostras obtidas com menor inclinação relativamente ao plano transversal) como na determinação das amostras que contribuem ao valor num determinado *voxel* do volume de reconstrução. O número de amostras reprojectadas em cada *pixel* num determinado plano de reconstrução depende da localização do *pixel* neste plano e diminui com o aumentar da sua distância do plano intermédio ( $z = z_0$ ), evidenciando a insuficiência da amostragem. Como consequência, o erro

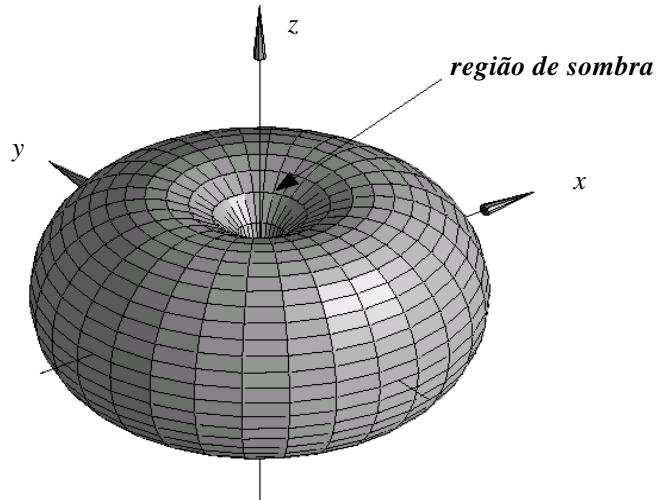


Figura 5.14: A trajetória circular permite obter amostras da derivada da transformada de Radon contidas numa região toroidal (figura adaptada de [134]).

de aproximação em cada *pixel* aumenta com a sua distância do plano da trajetória do foco, no qual o algoritmo FDK resulta equivalente ao algoritmo DB FBP. Esta aproximação poderá ser considerada aceitável apenas para ângulos cónicos reduzidos, ou seja, para um número limitado de cortes adquiridos simultaneamente.

Admitindo que  $M$  seja o número de cortes adquiridos simultaneamente e que, a menos de constantes multiplicativas, o número de operações necessárias para a reconstrução de um corte seja, como no caso da retro projecção filtrada,  $\mathcal{O}(N^3)$ , a complexidade do algoritmo será  $\mathcal{O}(MN^3)$ . Caso  $M$  seja da mesma ordem de grandeza de  $N$ , a complexidade do algoritmo será  $\mathcal{O}(N^4)$ . Importa também referir que têm sido desenvolvidas muitas variantes do algoritmo FDK, entre as quais P-FDK [133], T-FDK e HT-FDK [42], a variante proposta em [145] que permite reduzir a complexidade a  $\mathcal{O}(N^3 \log N)$  e outras baseadas em varrimento breve e superbreve [73, 147]. Dada a sua eficiência e a possibilidade de ser implementado em paralelo, este algoritmo tem vindo a ser efectivamente utilizado em alguns sistemas comerciais.

### 5.3.2 Algoritmo de Radon

Na secção 4.5 descreveu-se a fórmula de Grangeat que, dado um conjunto de projecções cónicas completo segundo Smith, permite obter a derivada (segundo a variável  $s$ ) da transformada de Radon 3D calculada em cada plano que intersecte o suporte da função por reconstruir. Dado que a fórmula é válida apenas no caso de projecções cónicas não truncadas (isto é, tais que o suporte esférico da função objecto seja completamente abrangido pelas projecções), iremos, para já, supor que esta condição seja satisfeita.

O algoritmo de Radon, também desenvolvido por Grangeat, consiste numa primeira fase na qual, aplicando a fórmula 4.84, calculam-se amostras da derivada da transformada de Radon numa grelha de amostragem esférica regular, e numa segunda fase na qual, aplicando 4.85, reprojecta-se a derivada da transformada de Radon reconstruindo a função  $f$ .

O problema principal, no caso de trajetória circular no plano  $(x, y)$ , é que o corresponden-

te conjunto de dados projecção obtidos com geometria cónica não é completo segundo Smith, o que implica que a derivada da transformada de Radon não pode ser calculada em todo o espaço 3D. Mais especificamente, neste caso é possível determinar apenas amostras contidas num toro tendo como centro o centro de rotação (fig. 5.14). As regiões que se encontram no interior do suporte esférico  $\Omega$  da função e no exterior do toro ao longo do eixo  $z$  constituem regiões de sombra e os pontos nelas contidos correspondem a planos de integração paralelos (ou quase paralelos) ao plano de rotação, não intersectando, portanto, a trajectória do foco. Valores aproximados para a derivada da transformada de Radon nestes pontos podem ser obtidos por interpolação seguindo o esquema da figura 5.15 na qual se representa uma secção longitudinal do espaço de Radon. Uma amostra no ponto  $P$  pode ser obtida interpolando (por interpolação linear, por exemplo) as amostras calculadas para os pontos  $A$  e  $B$  que têm a mesma distância do centro de rotação.

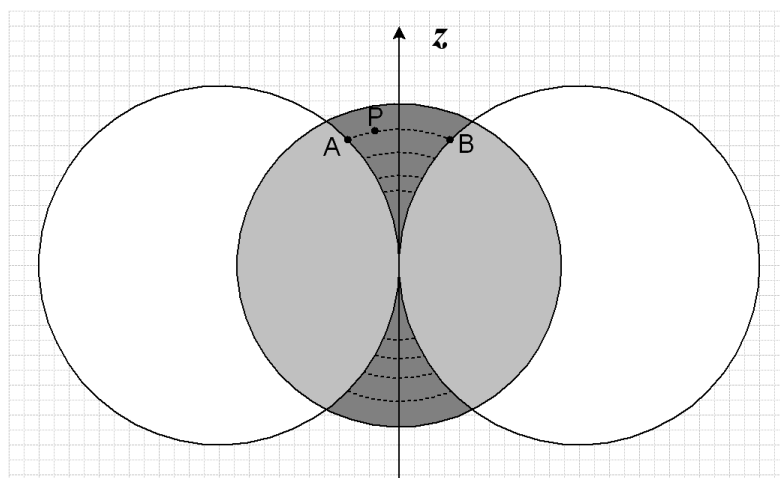


Figura 5.15: Vista de um plano longitudinal do espaço da derivada (segundo a variável  $s$ ) da transformada de Radon. Neste plano representa-se uma secção do toro e uma secção do suporte esférico da função objecto (de cor cinzento). A linha horizontal representa o plano de rotação sendo  $r$  o raio da trajectória circular. As regiões de sombra são representadas em cinzento escuro.

Sem entrar em detalhes acerca da implementação do algoritmo (que podem ser encontrados em [41] e [54]), admitimos dispor de amostras da derivada da transformada de Radon, quer obtidas pela fórmula 4.84 quer por interpolação, regularmente distribuídas em todo o suporte esférico e a partir das quais pretendemos reconstruir a função  $f$ .

Introduzindo os parâmetros angulares  $\xi$  e  $\psi$  (cujo significado geométrico se ilustra na figura 5.16) na fórmula de inversão 4.85, a reconstrução consiste na avaliação do integral duplo

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{R}' f)(\theta, x \cdot \theta) \sin \xi d\xi d\psi. \quad (5.54)$$

O método utilizado por Grangeat na computação deste integral (proposto por Marr [85]), prevê a integração em  $\xi$  (ou seja, em planos longitudinais) seguida pela integração em  $\psi$  (ou seja, em planos transversais). O primeiro integral corresponde a uma retro projecção filtrada e permite obter uma projecção paralela bidimensional  $\mathcal{X}f$  adquirida num plano detector virtual

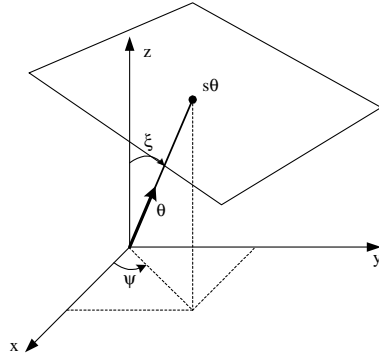


Figura 5.16: Parametrização da transformada de Radon 3D segundo Grangeat.

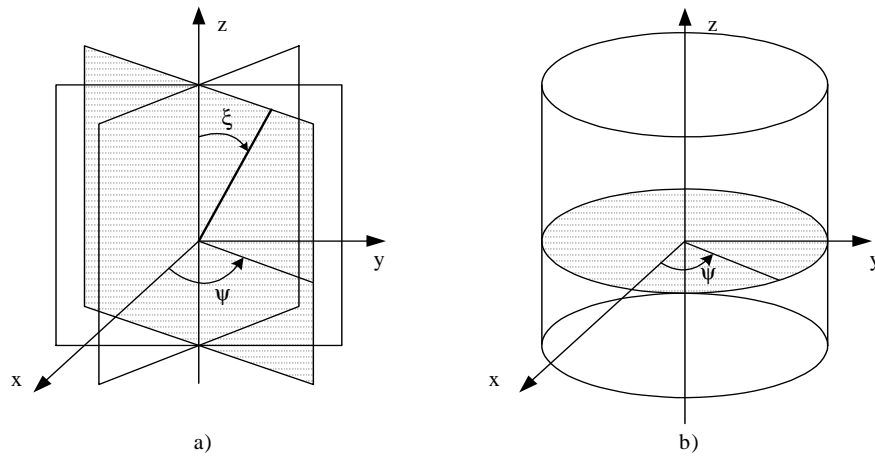


Figura 5.17: A técnica de integração utilizada por Grangeat passa por duas fases: a) integração em  $\xi$ , b) integração em  $\psi$ .

longitudinal rodado de um ângulo  $\psi$  (representado na figura 5.17-a) e filtrada. Num ponto de coordenadas polares  $t\eta$  no plano de detecção, a amostra da projecção paralela bidimensional será dada por

$$\mathcal{X}f(\psi, t\eta) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{R}'f)(\theta, t\eta \cdot \theta) \sin \xi d\xi, \quad (5.55)$$

sendo  $\frac{\partial}{\partial s} \sin \xi$  o filtro a aplicar.

O segundo integral corresponde a uma retroprojecção 2D, calculada em planos transversais (figura 5.17-b), das projecções paralelas  $\mathcal{X}f$ , sendo a fórmula

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathcal{X}f(\psi, t\eta) d\psi, \quad (5.56)$$

onde o ponto  $t\eta$  é a projecção de  $x$  no plano longitudinal definido por  $\psi$ .

No que se refere ao peso computacional, tanto a fase de cálculo como a fase de inversão da derivada da transformada de Radon têm complexidade  $\mathcal{O}(N^4)$ , resultando numa complexidade global de  $\mathcal{O}(N^4)$ .

Em alternativa, a fórmula 5.54 pode ser resolvida como no algoritmo de retro projecção filtrada para geometria cónica (CB-FBP– *Cone-Beam-Filtered BackProjection*) [72, 21] no qual, tal como nos outros algoritmos de retro projecção filtrada, cada projecção cónica é processada independentemente das outras, o que torna o método mais eficiente do ponto de vista computacional.

## Capítulo 6

# Métodos de Fourier

No capítulo 5, destacou-se o papel do teorema da secção central 4.2.1 na teoria da reconstrução tomográfica, e falou-se em como o próprio teorema, estabelecendo uma relação entre a transformada de Fourier das projecções paralelas de uma função objecto  $f$  e a sua transformada de Fourier, sugeria uma abordagem simples de reconstrução e projecção. A adaptação destes procedimentos ideais ao caso real (discreto) deu origem a uma classe de métodos de reconstrução, conhecidos por métodos directos de Fourier ou, simplesmente, métodos de Fourier (indicados pelo acrónimo DFM – *Direct Fourier Methods*), o primeiro dos quais, aplicado à astronomia, foi descrito por Bracewell em 1956 [7].

A introdução do algoritmo para o cálculo rápido da transformada de Fourier FFT – *Fast Fourier Transform* – permitiu a implementação de métodos de Fourier de complexidade computacional  $\mathcal{O}(N^2 \log N)$  (em contraste com o  $\mathcal{O}(N^3)$  da retro projecção filtrada), tornando estes métodos os mais utilizados em aplicações computacionalmente intensivas como a microtomografia [35] e sugerindo a sua eventual extensão para reconstrução em três dimensões [113].

Apesar da reduzida complexidade computacional e dos elevados níveis de qualidade atingidos pelos métodos de Fourier, nos tomógrafos comerciais destinados à aplicações médicas o método de eleição continua a ser a retro projecção filtrada. É legítimo, então, questionar acerca das razões que motivam (ou têm motivado até agora) esta preferência.

Em primeiro lugar, a execução dos processos de aquisição e reconstrução em paralelo, viável em FBP e não nos DFMs, já não pode ser considerada uma grande vantagem dado que, com o advento da aquisição em espiral, a reconstrução se realiza *a posteriori*. Também, a existência de *hardware* dedicado à execução de algumas tarefas computacionais, permitindo acelerar a reconstrução pelo algoritmo de FBP, não pode ser vista como uma vantagem exclusiva deste algoritmo dado que *hardware* igual ou parecido pode ser utilizado para acelerar os DFMs.

Um argumento mais determinante é relacionado com a possibilidade de extensão do método de reconstrução ao caso tri-dimensional. Enquanto existem implementações tri-dimensionais do algoritmo de FBP já consolidadas e utilizadas na prática, no caso dos DFMs a extensão para três dimensões encontra-se ainda numa fase de ensaio. Outra desvantagem dos DFMs, em relação à FBP, reside na alegada impossibilidade de com estes se realizar reconstrução de regiões de interesse (pelo menos nos moldes descritos no capítulo 5).

Serão, estes, problemas incontornáveis ou, pelo contrário, dentro da classe dos DFMs existe a potencialidade para que sejam desenvolvidos algoritmos satisfazendo estas exigências?



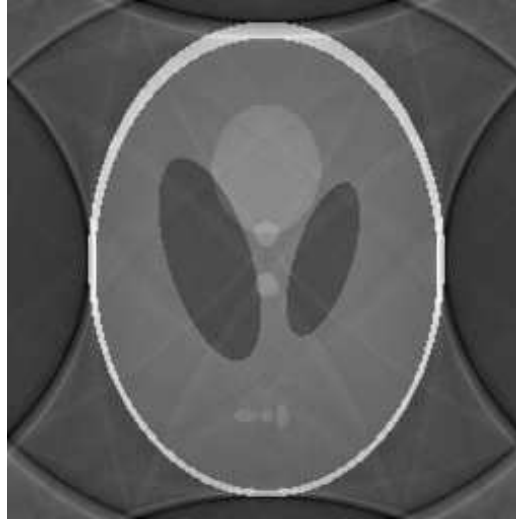


Figura 6.1: Exemplo de imagem reconstruída com o método de Fourier descrito no algoritmo 6.1.1. A presença de artefactos afecta a qualidade da imagem (dim=256, sinograma 256x256).

Tentar-se-á, neste capítulo, dar resposta a esta questão analisando em pormenor os DFMs e fazendo o ponto do estado da arte com atenção para os possíveis desenvolvimentos.

Entre os métodos descritos, será dada especial atenção a alguns métodos por nós desenvolvidos, entre os quais o DFM para projecções paralelas baseado na mudança de sistema de coordenadas no espaço de Fourier, o DFM para projecções divergentes baseado na NFFT, e o método de projecção rápida de Fourier.

## 6.1 Reconstrução no espaço de Fourier 2D

O teorema da secção central 4.2.1 (em duas dimensões) estabelece uma relação de equivalência entre a transformada de Fourier uni-dimensional das projecções paralelas de uma função objecto e a transformada de Fourier bi-dimensional da mesma função, sugerindo um simples método de reconstrução. A aplicação do teorema da secção central ao caso real (discreto) em duas dimensões, pode ser esquematizada no seguinte algoritmo:

### Algoritmo 6.1.1 (Fourier básico)

1. *Cálculo da transformada de Fourier uni-dimensional discreta (FFT 1D) das  $p$  projecções paralelas correspondentes às direcções de projecção  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{p-1}$  no plano da imagem*
2. *Interpolação bi-dimensional no espaço de Fourier das amostras obtidas no passo 1 (regularmente distribuídas sobre a grelha polar, fig. 6.3-a) para pontos regularmente distribuídos sobre a grelha Cartesiana*
3. *Cálculo da transformada inversa de Fourier bi-dimensional (IFFT 2D)*

De facto, o resultado que se obtém utilizando este método de reconstrução na solução de um problema real não é satisfatório. Admitindo que o número de amostras satisfaça a

condição de amostragem (pag 68), o erro devido ao *aliasing* no passo 1 assim como o erro devido à truncagem no passo 3 são negligíveis. Por consequência, a principal fonte de erro em todo o procedimento é a interpolação da grelha polar à grelha Cartesiana no passo 2 [91] e os diferentes métodos de Fourier surgem precisamente em resposta à necessidade de diminuir o erro relacionado com esta operação.

### 6.1.1 O problema da interpolação

A interpolação no domínio de Fourier é, só por si, uma operação que deve ser realizada com o máximo cuidado, pois, a pequenos erros no domínio de Fourier correspondem, no domínio da imagem, efeitos aos quais o sistema visual humano é particularmente sensível (artefactos). No caso em análise, tratando-se de interpolação da grelha polar à grelha Cartesiana, o problema é ainda mais crítico devido ao facto que a distribuição das amostras segundo a grelha polar não oferece uma adequada cobertura do domínio de Fourier. Observando a representação da grelha polar sobreposta à grelha Cartesiana (fig. 6.3-a) torna-se evidente como, perto da origem (onde se verifica a maior concentração de informação), as amostras se encontram separadas por uma curta distância angular e uma longa distância radial, indicando que a componente principal do erro de interpolação será na direcção radial. Ainda, dado que a densidade de amostras diminui na periferia da grelha polar, o erro de interpolação será maior para as frequências mais elevadas.

Para além do erro de interpolação propriamente dito, o processo de interpolação no domínio da frequência pode implicar efeitos de *aliasing* no domínio do espaço. Para se constatar este facto pode-se interpretar o processo de interpolação como convolução (filtragem) com uma função de interpolação seguida por reamostragem, para se ver como é possível que se verifique *aliasing* dependendo da extensão da função de interpolação escolhida [82].

Os esforços realizados, no sentido de propor soluções para o problema descrito, têm levado ao desenvolvimento de métodos de interpolação complexos que combinam, de várias formas, um conjunto de técnicas visando aperfeiçoar a qualidade da interpolação. Estas técnicas podem ser esquematicamente reunidas nos seguintes grupos:

- Utilização de grelhas polares oportunamente modificadas, obtidas através da alteração do padrão de amostragem do espaço de Radon e/ou da localização dos pontos nos quais são calculadas as transformadas de Fourier das projecções (fig. 6.3), com o objectivo de atingir uma melhor cobertura do domínio de Fourier ou, simplesmente, de permitir esquemas alternativos de interpolação que permitam diminuir o erro relacionado com esta operação (ver secção 6.1.2).
- Implementação de esquemas de interpolação híbridos que permitam explorar as características da distribuição geométrica das amostras. O processo de interpolação bidimensional da grelha polar à grelha Cartesiana pode ser decomposto numa sequência de dois processos de interpolação uni-dimensional nas direcções radial e angular (ou horizontal e vertical para certas grelhas polares modificadas), sendo possível a utilização de diferentes funções de interpolação. Por exemplo, a distribuição das amostras segundo a geometria polar regular sugere a utilização de funções de interpolação de ordem superior na direcção radial relativamente à direcção angular (onde uma simples interpolação por *nearest neighbour* é considerada aceitável [90]). Um esquema simples de interpolação híbrido é ilustrado na figura 6.2 onde, numa primeira fase, são obtidos os valores associados aos pontos 1 e 2 por interpolação linear entre os pares de pontos

(A,B) e (C,D) enquanto, numa segunda fase, o valor associado ao ponto P é obtido por interpolação *nearest neighbour* entre os pontos 1 e 2.

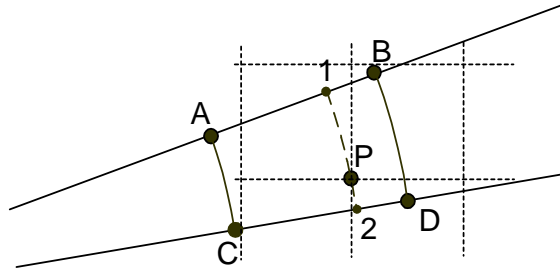


Figura 6.2: Esquema de interpolação híbrida nas direcções radial e angular.

- Refinamento das grelhas.
  - Refinamento da grelha polar. A introdução de *zero padding* (adição de amostras suplementares nulas às extremidades do sinal) das projecções antes da transformação, permite aumentar a densidade de amostras na direcção radial no domínio de Fourier (grelha polar sobreamostrada na direcção radial). Por exemplo, utilizando um factor de *padding*  $n_z = 2$ , ou seja um número de amostras por projecção  $N_z = n_z N$ , a distância radial entre amostras no domínio de Fourier reduz-se de um factor  $\frac{1}{2}$ .
  - Refinamento da grelha Cartesiana. A interpolação da grelha polar (eventualmente sobreamostrada) para uma grelha Cartesiana mais fina, permite afastar as réplicas do sinal no domínio do espaço após transformada inversa bidimensional. Por exemplo, à utilização de um factor de refinamento  $n_r = 2$ , ou seja de uma grelha Cartesiana com o dobro da densidade  $N_r = n_r N$ , corresponde o aumento de um factor 2 das dimensões do suporte da imagem (*padding*), podendo a imagem ser facilmente extraída por meio de uma mascara. Alguns autores de língua inglesa referem-se à técnica de refinamento com o termo de *gridding* porém, para evitar equívocos com o método de *gridding* propriamente dito, descrito no parágrafo 6.1.4, optou-se, aqui, pela introdução do termo refinamento.

A utilização em conjunto das duas técnicas de refinamento da grelha polar e da grelha Cartesiana, independentemente da função de interpolação e da grelha polar utilizadas, permite diminuir o erro de interpolação e, ao mesmo tempo, controlar os efeitos de *aliasing* devidos à convolução com a função de interpolação. Por outro lado, o implícito aumento do volume de dados deteriora a performance computacional do algoritmo obrigando a uma escolha cuidadosa dos factores de *padding* e refinamento.
- Escolha de funções de interpolação apropriadas (dependendo em grande parte do esquema de interpolação adoptado), que permitam minorar o erro sem, ao mesmo tempo, implicar um elevado custo computacional. A função *sinc*, apesar de ser a função de interpolação ideal, tem suporte ilimitado e, por isso, é irrealizável na prática. No entanto, outras funções podem ser utilizadas fornecendo resultados satisfatórios tanto no espaço

como na frequência (*spline*, *sinc* truncado, cúbica, linear etc.) [82]. Seja ela qual for, relembramos que uma boa função de interpolação  $i(\xi)$  deve satisfazer alguns requisitos essenciais:

- deve ter valor um na origem,  $i(0) = 1$ , e valor nulo nas outras amostras  $i(nT) = 0$  (onde  $T$  é o período de amostragem e  $n$  um inteiro  $\neq 0$ ) para que sejam mantidos os valores correspondentes às amostras originais.
- deve ser simétrica, contínua, e ter derivadas (pelo menos de primeira ordem) contínuas em cada ponto.
- deve ter suporte limitado e dimensões  $M \ll N$  (onde  $N$  é o número de amostras da função por interpolar), para ter baixo custo computacional
- na frequência, o valor DC deve ser igual a um,  $I(0) = 1$  para não alterar o valor médio da imagem reconstruída, enquanto  $I$  deve ser o mais plano possível na banda passante e íngreme nas margens (isto é, parecido com a função *rect*).

A distribuição não uniforme das amostras no plano de Fourier limita fortemente a utilização de técnicas de interpolação intrinsecamente bidimensionais, já que não é possível a aplicação directa do paradigma convolução-reamostragem (em duas dimensões) e que outras técnicas de interpolação bi-dimensionais (baseadas na triangulação) não são aliciantes do ponto de vista do custo computacional. Existem, contudo, duas possíveis abordagens intrinsecamente bi-dimensionais. A primeira passa por uma mudança do sistema de referência no plano de Fourier que conduza a uma distribuição uniforme das amostras. Esta técnica foi por nós implementada fornecendo resultados muito bons e será descrita na secção 6.1.3.

Outra possível abordagem, alternativa à interpolação propriamente dita, consiste na utilização da técnica de *gridding* (sec. 6.1.4) que prevê a convolução dos dados com uma função janela bi-dimensional seguida por reamostragem segundo a grelha Cartesiana. Esta operação que (no caso de dados não uniformemente distribuídos) não pode ser confundida com a interpolação, provoca distorções no domínio espacial pelo que os métodos baseados nesta técnica deverão também incluir formas de compensação adequadas.

Por fim, a recente disponibilização de técnicas para o cálculo rápido da transformada *chirp-z* (que permite lidar com dados equi-espaciais mas com distância entre amostras não canónica) e da transformada de Fourier com amostras não uniformemente distribuídas ou não equi-espaciais (NFFT, nas duas versões FFT NED –*non-equispaced data*– e FFT NER –*non-equispaced results*–), tem permitido a implementação de métodos de Fourier nos quais se evita (pelo menos explicitamente, dado que o cálculo da NFFT implica uma forma de amostragem como descrito na apêndice A) a tão problemática interpolação no espaço das frequências sem, com isto, aumentar a complexidade computacional do algoritmo. Estes métodos serão descritos na secção 6.1.5.

### 6.1.2 Grelhas polares modificadas

Uma vez que a grelha polar convencional demonstra-se particularmente ineficiente na amostragem do espaço de Fourier, afectando a qualidade da interpolação para a grelha Cartesiana, vários autores propuseram a utilização de grelhas polares modificadas no sentido de melhorar a distribuição das amostras e tornar a interpolação mais rápida e precisa. Em todos os casos, o erro de interpolação pode ser ulteriormente reduzido recorrendo ao refinamento da grelha na direcção radial, obtido através de *zero padding* das projecções.

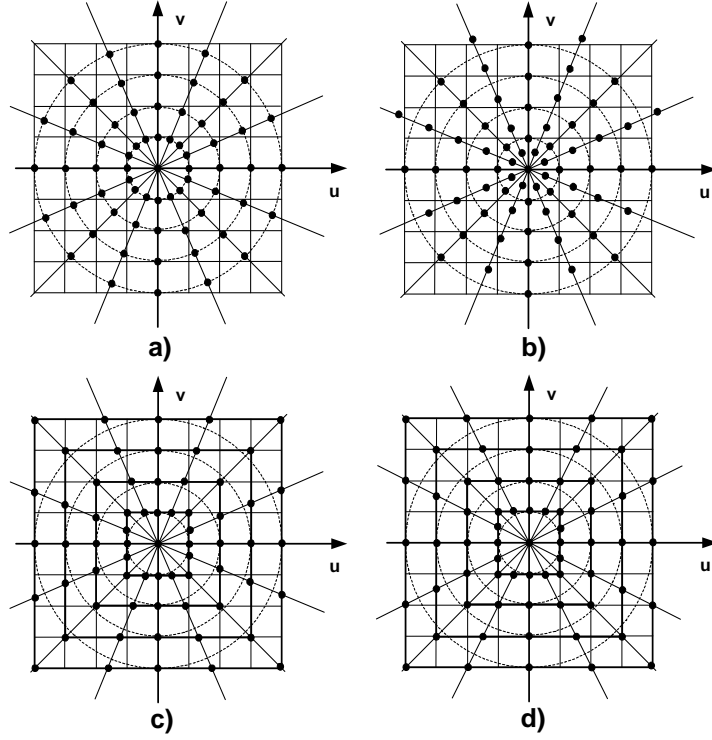


Figura 6.3: Exemplos de grelhas polares sobrepostas à grelha Cartesiana. a) Grelha polar convencional. b) Grelhas polares intercaladas com um *offset* radial entre amostras em ângulos alternados. c) Grelha "polar quadrada" com amostras calculadas às intersecções com quadrados concêntricos. d) Grelha polar modificada para projecções de linograma.

### Grelhas polares intercaladas

Lewitt, em [81], demonstra que o desempenho do método de Fourier pode ser melhorado intercalando duas grelhas polares no espaço de Fourier segundo o esquema ilustrado na figura 6.3-b. Este padrão pode ser obtido por translação das amostras no espaço de Fourier em projecções alternadas, isto é, a transformada de Fourier unidimensional das projecções pares (por exemplo) deverá ser calculada com um *offset* de metade da distância radial entre amostras ( $\Delta\sigma = \frac{b}{q}$ ) relativamente às projecções ímpares, calculando  $\widehat{\mathcal{R}}_{\theta_i} f((j + \frac{1}{2})\Delta\sigma)$ ,  $j = -q, \dots, q$ , para  $i$  par e  $\widehat{\mathcal{R}}_{\theta_i} f(j\Delta\sigma)$ ,  $j = -q, \dots, q$ , para  $i$  ímpar.

Sendo que:

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\theta} f((j + \frac{1}{2})\Delta\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Delta s \sum_{l=-q}^q \mathcal{R}_{\theta}(l\Delta s) e^{-i\pi\Delta\sigma l\Delta s} e^{-i2\pi j\Delta\sigma l\Delta s}, \quad (6.1)$$

o cálculo das amostras translacionadas não implica elevados custos computacionais já que pode ser efectuado por FFT da função  $\mathcal{R}_{\theta}(l\Delta s) e^{-i\pi\Delta\sigma l\Delta s}$ .

A grelha polar, assim modificada, permite uma considerável diminuição da distância média entre amostras, que pode ser ulteriormente reduzida utilizando, em combinação, a técnica de *zero padding* das projecções. Entre as possíveis funções de interpolação, Lewitt experimentou a interpolação por *nearest neighbour*, aplicada aos quatro pontos mais próximos, e a

interpolação bilinear aplicada (sempre aos quatro pontos mais próximos) nas direcções radial e angular em sequência.

### Grelha polar quadrada

Considere-se um padrão de amostragem do domínio de Radon baseado na geometria paralela e no qual a distância entre raios projecção consecutivos varia de um factor  $\cos \alpha$  para projecções com orientação  $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  e  $\sin \alpha$  para projecções com orientação  $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$ . O efeito no domínio de Fourier pode ser observado na figura 6.3-c, onde as amostras são distribuídas sobre uma grelha polar quadrada (grelha de quadrados concêntricos). A vantagem da grelha polar quadrada, que se deve a Pasciak [90], reside na possibilidade de se realizar a interpolação para a grelha Cartesiana numa só dimensão (na vertical para ângulos entre  $-\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{\pi}{4}$  e na horizontal para ângulos entre  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{3}{4}\pi$ ) sendo suficiente a utilização de uma função de interpolação de ordem mais baixa (por exemplo, linear).

É interessante reparar em como a mesma distribuição de amostras no domínio de Fourier pode ser obtida a partir de um conjunto de dados projecção convencional paralelo (sinograma) através da aplicação da transformada *chirp-z*, com a desejada distância radial entre amostras no espaço de Fourier, em lugar da transformada de Fourier uni-dimensional.

### Grelha de linograma

Neste caso, o padrão de amostragem do domínio de Radon baseia-se nas chamadas projecções de linograma que são adquiridas variando a distância entre raios projecção consecutivos de um factor  $\cos \alpha$  para  $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  e  $\sin \alpha$  para  $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$  e, ao mesmo tempo, considerando ângulos de projecção não equidistantes, mas com incrementos variáveis de um factor  $\tan \alpha$  para  $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  e de um factor  $\cot \alpha$  para  $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$ .

A transformada de Fourier uni-dimensional das projecções de linograma fornece, no domínio de Fourier, o resultado esquematizado na figura 6.3-d, onde nos sectores entre  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  e  $[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$  as amostras são equidistribuídas ao longo de linhas radiais e verticais enquanto nos sectores  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$  e  $[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$  as amostras são equidistribuídas ao longo de linhas radiais e horizontais. Este padrão é parecido com o de figura 6.3-c com a diferença que as amostras não são uniformemente distribuídas na direcção angular e, por isso, não podem ser obtidas simplesmente aplicando a transformada *chirp-z* ao conjunto de projecções convencionais paralelas como naquele caso. Aqui, a única alternativa à aquisição de projecções de linograma, é a reamostragem prévia do espaço de Radon (*rebinning*) de sinograma para linograma.

Neste caso, como no caso da grelha polar quadrada, a interpolação para a grelha Cartesiana pode ser realizada numa só direcção (vertical ou horizontal).

### Grelha para interpolação exclusivamente angular

Este tipo de grelha, que se deve a Fourmont [36], é concebida de maneira a poder-se realizar a interpolação exclusivamente na direcção angular, sendo o padrão de amostragem determinado numa fase de pre-processamento. Para cada ponto  $P$  da grelha Cartesiana que se pretende avaliar, determinam-se os dois segmentos radiais mais próximos no sistema de coordenadas polares angularmente discretizado e, ao longo destes segmentos, os pontos (representados por bolinhas pretas na figura 6.4) com a mesma coordenada radial de  $P$ . O resultado é uma grelha polar com amostras irregularmente distribuídas na direcção radial.

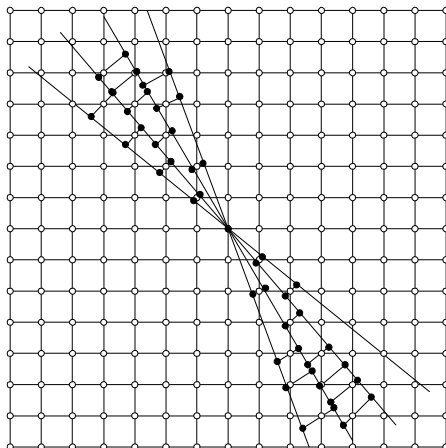


Figura 6.4: O padrão de amostragem proposto por Fourmont.

O método proposto aplica-se a conjuntos de dados convencionais paralelos e pode implementar-se segundo o seguinte algoritmo:

**Algoritmo 6.1.2 (Fourmont)**

1. *Determinação do padrão de amostragem no espaço de Fourier e dos coeficientes de interpolação, associados a cada par de pontos para permitir o cálculo da correspondente amostra na grade Cartesiana (em pre-processamento)*
2. *Cálculo, para cada projecção, da transformada de Fourier uni-dimensional só nos pontos determinados ao passo 1 (FFT 1D)*
3. *Determinação das amostras na grade Cartesiana, através de interpolação linear dos pares de amostras associadas utilizando os coeficientes de interpolação pré-calculados ao passo 1*
4. *Transformada inversa de Fourier bidimensional (IFFT 2D).*

Repare-se que o padrão de amostragem no espaço de Fourier e os coeficientes de interpolação linear, obtidos ao passo 1, são univocamente determinados pelas características geométricas do conjunto de projecções (nomeadamente, número de projecções e de amostras por projecção), de maneira que podem ser pré-calculados para ser utilizados sempre que a geometria se mantenha inalterada.

**6.1.3 Método baseado na mudança do sistema de referência**

Sendo que o problema principal, na interpolação da grade polar à Cartesiana no domínio de Fourier, é a distribuição não uniforme das amostras, é natural pensar numa mudança de variáveis tal que, no novo sistema de referência, as amostras dadas sejam uniformemente distribuídas.

Neste método de Fourier por nós implementado, transformamos a grade polar regular nas coordenadas  $(\sigma, \theta)$  numa grade Cartesiana nas mesmas coordenadas. Neste novo sistema

de referência as amostras dadas resultam uniformemente distribuídas na grelha Cartesiana, enquanto a distribuição dos pontos de interpolação segue o padrão exemplificado na figura 6.5. Por outras palavras, podemos dizer que, em vez de realizar a interpolação no espaço de Fourier 2D da imagem, realizamos a interpolação no espaço de Fourier das projecções (ou espaço da transformada de Fourier 1D segundo as linhas do sinograma).

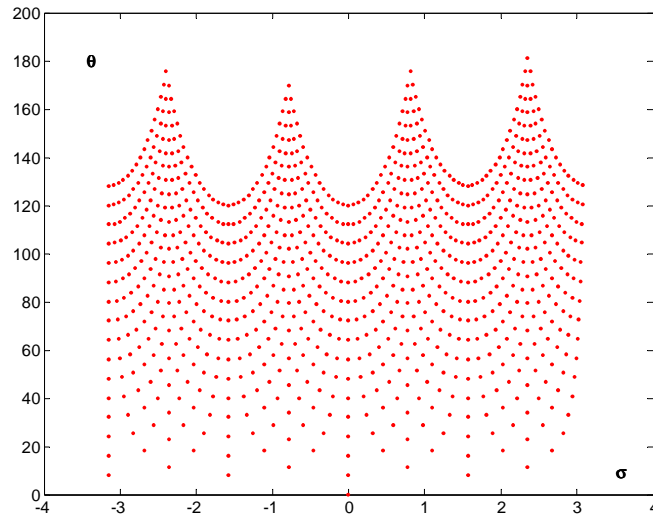


Figura 6.5: Distribuição dos pontos de interpolação no plano de Fourier segundo o sistema de referência Cartesiano de coordenadas  $(\sigma, \theta)$ .

Nesta situação, torna-se possível aplicar um método de interpolação intrinsecamente bidimensional (por exemplo bicúbica) obtendo uma implementação particularmente simples e rápida:

#### Algoritmo 6.1.3 (DFM)

1. *Zero-padding e transformada de Fourier unidimensional das projecções paralelas correspondentes às  $p$  direcções de projecção  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{p-1}$  no plano da imagem (FFT 1D)*
2. *Referenciação das amostras e dos pontos de interpolação no plano de Fourier relativamente ao sistema Cartesiano  $(\sigma, \theta)$*
3. *Interpolação bicúbica em duas dimensões [67]*
4. *Transformada inversa de Fourier bidimensional (IFFT 2D) e extracção da imagem reconstruída (unpadding).*

A introdução de *zero-padding* das projecções torna-se necessária para melhorar a qualidade da imagem reconstruída, permitindo atingir resultados de qualidade comparável com a obtida pelo método de FBP (como veremos no cap. 9), com uma considerável redução do custo computacional.



É interessante observar como este método não necessita da filtragem em rampa das projecções, à diferença do que acontece em quase todos os outros métodos. Este facto será ulteriormente comentado na secção 6.3, dedicada à filtragem implícita no processo de interpolação.

#### 6.1.4 Método de gridding

O método de *gridding*, considerado um dos métodos de Fourier mais eficazes, foi originalmente proposto por Brouw (em 1975) para aplicações em radio astronomia [9], e posteriormente (em 1985) adaptado à reconstrução tomográfica por O’Sullivan [97] e outros autores [118, 119]. Este método é caracterizado pela convolução da função  $F = \hat{f}$ , amostrada segundo a grelha polar, com uma função janela  $W$  apropriada, sendo a função resultante  $G = W * F$  amostrada segundo a grelha Cartesiana (é a esta operação que se refere o termo *gridding*). Pelo teorema da convolução, a transformada inversa de Fourier bidimensional de  $G$ ,  $\tilde{G} = g$ , é igual ao produto entre a função de peso  $w = \tilde{W}$  e a função incógnita  $f$ . Esta última pode, assim, ser facilmente obtida através da remoção ( $f = g/w$ ) da função de peso. A operação de convolução é sensível à densidade não uniforme das amostras, distribuídas segundo a grelha polar, pelo que se torna necessária a introdução de factores de normalização (*density compensation factors* – DCF), inversamente proporcionais à densidade de amostragem local, que devem ser aplicados aos dados antes da convolução.

Essencial é a escolha da função janela  $W$ , que deve ser o mais possível concentrada em torno do 0 (para não implicar um excessivo peso computacional), e da correspondente função de peso  $w$ , que deve ser não nula na região de reconstrução  $|x| < \rho$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  e nula na região  $|x| \geq a > \rho$ . Entre outras, uma boa escolha para a função de peso é o produto tensorial  $w(x) = w_1(x_1)w_1(x_2)$  de funções de Kaiser-Bessel [92] da forma

$$w_1(x_1) = \begin{cases} I_0(K\sqrt{a^2 - x_1^2}), & |x_1| \leq a, \\ 0, & |x_1| > a. \end{cases} \quad (6.2)$$

Assim, a função janela, também da forma  $W(u) = W_1(u_1)W_1(u_2)$ , resulta ser

$$W_1(u_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sinh(a\sqrt{K^2 - u_1^2})}{\sqrt{K^2 - u_1^2}}, \quad (6.3)$$

com  $I_0$  função de Bessel de ordem zero modificada. Os valores dos parâmetros  $a$  e  $K$  (que determina a largura da janela) devem ser cuidadosamente escolhidos para garantir as características desejadas para a função janela e para a função de peso.

Essencialmente, o algoritmo pode ser assim esquematizado:

#### Algoritmo 6.1.4 (*Gridding*)

1. *Transformada de Fourier uni-dimensional discreta das projecções paralelas correspondentes às  $p$  direcções de projecção  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{p-1}$  no plano da imagem (FFT 1D), sendo obtidas amostras de  $\hat{f}$  regularmente distribuídas sobre a grelha polar*
2. *Normalização das amostras obtidas ao passo 1 utilizando factores multiplicativos para compensação da densidade de amostragem não uniforme (filtro em rampa)*

3. *Aproximação numérica da função de convolução  $G = W * F$  calculada em pontos regularmente distribuídos numa apropriada grelha Cartesiana, utilizando as amostras de  $\hat{f}$  obtidas ao passo 2*
4. *Transformada inversa de Fourier bi-dimensional da função  $G$  (IFFT 2D), sendo obtida a função  $g = w \cdot f$*
5. *Obtenção da função  $f$  através da remoção da função de peso ( $f = g/w$ ).*

A operação de *gridding* (convolução e reamostragem) não deve ser confundida com uma operação de interpolação no sentido mais rigoroso do termo. Pois, a função  $W$  não respeita obrigatoriamente as condições próprias para uma função de interpolação (pag. 95), de modo que a superfície de interpolação não passa necessariamente pelos valores dados correspondendo aos pontos de amostragem. A este respeito, importa frisar que as operações de convolução e reamostragem correspondem à operação de interpolação só em presença de amostras uniformemente distribuídas e de uma função janela que permita manter os valores correspondentes às amostras dadas. Só neste caso a função janela poderá ser considerada uma função de interpolação propriamente dita.

### 6.1.5 Métodos sem interpolação no espaço de Fourier

Nos métodos descritos nos parágrafos anteriores, o recurso à interpolação no domínio de Fourier tornava-se obrigatório devido à necessidade de limitar o custo computacional do algoritmo, dado que até à pouco tempo as técnicas para o cálculo rápido da transformada de Fourier eram limitadas ao caso de amostras uniformemente distribuídas no espaço Cartesiano (FFT).

Nesta secção, vamos descrever alguns algoritmos nos quais o recurso à transformada *chirp-z* ou à NFFT permite evitar completamente a interpolação no espaço de Fourier.

#### Método baseado no linograma

Este método (descrito detalhadamente em [82]) baseia-se nas chamadas projecções de linograma, adquiridas segundo o esquema descrito na secção 6.1.2, às quais corresponde, no domínio de Fourier, um padrão de amostragem caracterizado por amostras equidistribuídas ao longo de linhas radiais e verticais nos sectores entre  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  e  $[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$  e equidistribuídas ao longo de linhas radiais e horizontais nos sectores  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$  e  $[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$  (fig. 6.3-c).

O conjunto de amostras no espaço de Fourier é decomposto em dois sub-espacos  $F_0$  e  $F_1$ , correspondentes aos ângulos de projecção  $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  e  $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$ , que são mantidos separados até ao último passo do algoritmo (fig. 6.6). A transformada inversa bidimensional de  $F_0$  é calculada em dois tempos: aplica-se primeiro a transformada inversa unidimensional na direcção vertical (através de transformada *chirp-z* inversa) e depois na direcção horizontal (através de IFFT 1D). Por outro lado, a transformada inversa bidimensional de  $F_1$  calcula-se aplicando primeiro a transformada inversa unidimensional na direcção horizontal (através de transformada *chirp-z* inversa) e depois na direcção vertical (através de IFFT 1D). Por fim, somando as duas funções  $f_0$  e  $f_1$  completa-se a reconstrução. Técnicas de *zero-padding* das projecções e de filtragem (um filtro em rampa é aplicado a  $F_0$  na direcção horizontal e a  $F_1$  na direcção vertical antes da FFT inversa) são introduzidas para melhorar a qualidade final do método.

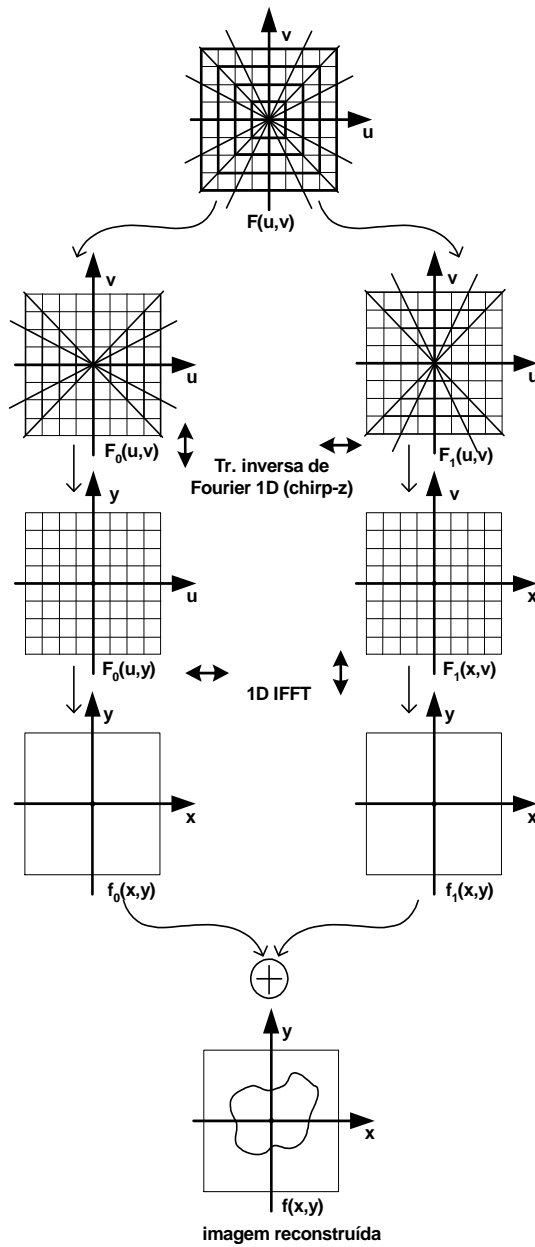


Figura 6.6: Diagrama de fluxo do método de Fourier baseado nas projecções de linograma começando pela fase de decomposição do domínio de Fourier.

Um algoritmo semelhante, proposto em [100], baseia-se na grelha polar quadrada (apesar de ser identificada pelos autores com o termo linograma) e desenrola-se exactamente como na figura 6.6, com a diferença que, dado que as amostras no domínio de Fourier não são equidistantes nem na direcção horizontal nem na vertical, na primeira fase da transformada inversa de Fourier aplica-se a NFFT (IFFT NED 1D, algoritmo A.2.1) em vez que a transformada *chirp-z*.

### Método de inversão directa por NFFT

Dadas as amostras de  $\hat{f}$  distribuídas sobre a grelha polar regular (passo 1 do algoritmo 6.1.1), a maneira mais óbvia de calcular a função objecto  $f$  seria a de aplicar a fórmula de inversão da transformada de Fourier bidimensional, expressa em coordenadas polares:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{f}(\sigma \cos \alpha, \sigma \sin \alpha) e^{i2\pi\sigma(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \sigma d\sigma d\alpha \quad (6.4)$$

directamente às amostras distribuídas sobre a grelha polar, obtendo a fórmula discreta

$$f(x_h, y_k) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=-q}^q j \Delta\sigma \hat{f}(\alpha_i, \sigma_j) e^{i2\pi j \Delta\sigma (x_h \cos \alpha_i + y_k \sin \alpha_i)} \Delta\sigma \Delta\alpha \quad (6.5)$$

onde  $h, k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$ ,  $N$  é a dimensão da imagem,  $p$  o número de projecções e  $2q + 1$  o número de amostras por projecção.

Infelizmente, o cálculo directo da equação 6.5 requer  $\mathcal{O}(N^2(2q+1)^2)$  ( $\sim \mathcal{O}(N^4)$ ) operações aritméticas, não constituindo uma solução aliciante do ponto de vista computacional. Todavia, o recente desenvolvimento de métodos aproximados para o cálculo rápido da transformada de Fourier com amostras não uniformemente distribuídas (apêndice A) tem permitido o cálculo de 6.5 em  $\mathcal{O}(N^2 \log N)$  operações, viabilizando o seguinte algoritmo de complexidade  $\mathcal{O}(N^2 \log N)$  proposto por Potts e Steidl [100], assim como por Fourmont [36]:

#### Algoritmo 6.1.5 (NFFT DFM)

1. *Cálculo da transformada de Fourier uni-dimensional das projecções paralelas correspondentes às  $p$  direcções de projecção  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{p-1}$  (com  $\theta_i = (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)^T$ ) no plano da imagem (FFT 1D)*
2. *Filtragem de cada projecção no espaço de Fourier uni-dimensional*
3. *Cálculo, através de NFFT (IFFT NED 2D), da transformada inversa de Fourier bi-dimensional aplicada ao conjunto de amostras obtidas ao passo 2, regularmente distribuídas sobre a grelha polar.*

A utilização de *zero padding* das projecções, com a consequente sobreamostragem do espaço de Fourier, complementa o algoritmo permitindo atingir elevados níveis de qualidade.

Aparentemente, o método descrito não implica nenhuma interpolação no espaço das frequências. Contudo, uma vez que o algoritmo para o cálculo aproximado da IFFT NED 2D (algoritmo A.2.1) se baseia na técnica de *gridding*, pode-se afirmar que, efectivamente, este método de inversão não inclui nenhuma interpolação explícita mas é, na realidade, um método de *gridding* (equivalente ao descrito na secção 6.1.4).

A filtragem das projecções, no segundo passo do algoritmo, torna-se necessária devido ao facto do algoritmo de *gridding* ser sensível à densidade não uniforme das amostras dadas. Sendo que a densidade das amostras diminui linearmente com as frequências, o filtro a ser aplicado será parecido com um filtro em rampa: Potts e Steidl propõem uma função *sinc* truncada enquanto Fourmont propõe uma função em rampa com um filtro de alisamento adicional.

Nas nossas implementações quer deste algoritmo quer dos outros algoritmos baseados na NFFT, utilizaremos os mesmos filtros de tipo rampa utilizados no algoritmo de Retro projecção Filtrada, com o objectivo de simplificar a análise e a comparação do desempenho dos diferentes algoritmos.

### Método das séries de Fourier

O teorema da secção central, reformulado a partir das séries de Fourier das projecções  $\mathcal{R}f_\theta(s)$  e da função objecto  $f(x, y)$ , permite estabelecer uma relação analítica entre os coeficientes de Fourier de  $\mathcal{R}f_\theta(s)$  e de  $f(x, y)$ . O método das séries de Fourier, proposto por Gottlieb [40], consiste na implementação numérica desta fórmula analítica permitindo aproximar os coeficientes de Fourier de  $f(x, y)$  e, a partir destes, a própria função  $f(x, y)$ .

A implementação numérica deste método comporta aproximação devida, essencialmente, à truncagem de somatórios infinitos. Todavia, uma adequada escolha do número de termos a considerar permite manter o desejado nível de aproximação. Um desempenho comparável com o algoritmo da retro projecção filtrada, em termos de qualidade da imagem, pode ser obtido em  $\mathcal{O}(N^2 \log N + N^{2.4})$  operações.

## 6.2 Métodos de Fourier para projecções divergentes

Infelizmente, o teorema da secção central só se aplica ao caso de projecções paralelas, o que impede a reconstrução por DFM a partir de dados obtidos com geometria divergente. A este respeito, vale a pena mencionar um trabalho, recentemente publicado por Chen et al [11], no qual se propõe uma versão do teorema da secção central generalizado ao caso de projecções divergentes ou cónicas (apelidado de GSPT – *Generalized Slice Projection Theorem*). O teorema estabelece que a transformada de Fourier da função objecto pode ser obtida somando as transformadas de Fourier (oportunamente modificadas) de cada projecção divergente retro projectada num certo número de pontos ao longo dos raios projecção (com função de peso  $\frac{1}{r}$  sendo  $r$  a distância entre o ponto de retro projecção e o ponto focal). Recorrendo a este teorema, seria possível obter a transformada de Fourier da função objecto e, a partir desta, reconstruir a imagem calculando a transformada de Fourier inversa, o que, segundo o autor, constituiria um método directo de Fourier para projecções divergentes. Todavia, a implementação numérica proposta aparenta ser bastante complicada, e implica a interpolação no espaço de Fourier com as consequências já descritas sobre a qualidade da imagem reconstruída. O algoritmo, ainda não suficientemente validado e de complexidade computacional indeterminada, não constitui, para já, uma solução interessante do ponto de vista prático, todavia, nada impede que, no futuro, sejam desenvolvidas novas e mais eficientes implementações.

Voltando, para já, aos métodos de Fourier baseados no clássico teorema da secção central, estes podem ser aplicados a dados adquiridos com geometria divergente recorrendo ao processo de *rebinning* que, como descrito na secção 5.1.4, permite obter um sinograma a partir de um conjunto completo de projecções divergentes através de interpolação no domínio de Radon. Ao

sinograma assim obtido, poderá ser aplicado qualquer método de reconstrução para projecções paralelas inclusive, obviamente, os métodos directos de Fourier.

Apresentamos, aqui, uma abordagem alternativa, à qual chamamos de *rebinning* sem interpolação, que permite obter um conjunto de projecções paralelas generalizadas sem recurso à interpolação. Aplicando a NFFT unidimensional (FFT NED 1D) às projecções paralelas generalizadas, será possível obter amostras da transformada de Fourier bi-dimensional de  $f(x, y)$  distribuídas sobre a grelha polar regular às quais aplicar um dos métodos de inversão descritos nos parágrafos anteriores. Parece-nos que o recurso ao método de *rebinning* sem interpolação tem utilidade prática fundamentalmente no âmbito dos métodos de Fourier (pois, as projecções generalizadas não se adequam a qualquer método de reconstrução), pelo que escolhemos descrever aqui este método, enquanto o método geral de *rebinning*, propriamente dito, foi já descrito no capítulo 5.

### 6.2.1 Rebinning sem interpolação

Consideremos um conjunto de dados projecção divergente completo, constituído por  $p \times Q$  amostras (onde  $p$  é o número de projecções em  $2\pi$  radianos e  $Q = 2q + 1$ , ou  $2q$ , o número de amostras por projecção), identificadas pelo valor dos parâmetros  $\beta$  (posição angular do foco),  $r$  (raio da trajectória do foco) e  $\gamma$  (offset angular relativamente ao eixo central do feixe divergente) do correspondente raio projecção, segundo a notação e a geometria de projecção descritas na secção 5.1.2.

A ideia de realizar *rebinning* sem interpolação numa geometria de feixe divergente assenta no seguinte: trata-se de reorganizar o conjunto de amostras com base na orientação do respectivo raio projecção, obtendo classes de amostras correspondentes a raios projecção "quase" paralelos. Uma vez realizada a mudança de variáveis de  $(\beta, \gamma)$  para

$$\alpha = (\beta + \gamma - \frac{\pi}{2}) \bmod \pi \quad (6.6)$$

$$s = -r \sin \gamma (\text{sign}(\sin(\beta + \gamma - \frac{\pi}{2}))), \quad (6.7)$$

passando as amostras a ser caracterizadas pelas coordenadas  $(\alpha, s)$  com  $\alpha \in [0, \pi[$ , divide-se o intervalo  $[0, \pi[$  em  $p_{gen}$  sub-intervalos de largura  $\Delta\alpha = \frac{\pi}{p_{gen}}$ .

Definem-se, então, as  $p_{gen}$  projecções paralelas generalizadas onde por  $i$ -ésima projecção paralela generalizada ( $i = 0, \dots, p_{gen} - 1$ ) entende-se o conjunto de  $Q_i \simeq \frac{p \times Q}{p_{gen}}$  amostras cuja orientação  $\alpha$  (dada pela fórmula 6.6) está incluída no intervalo  $[i\Delta\alpha - \frac{\Delta\alpha}{2}, i\Delta\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}[$ .

Assumindo  $\alpha_i = i\Delta\alpha$  como orientação comum a todas as amostras da  $i$ -ésima projecção paralela generalizada, esta pode ser considerada um sinal uni-dimensional na coordenada  $s$ , permitindo a aplicação da transformada de Fourier uni-dimensional. O erro de aproximação azimuthal assim introduzido resulta ser uniformemente distribuído, tendo valor máximo  $E_{\max} = \frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\pi}{2p_{gen}}$  dependente do número de projecções generalizadas escolhido.

À partida, cada projecção paralela generalizada será constituída por um número variável de amostras não equi-espaçadas na coordenada  $s$  de modo que, aplicando a NFFT unidimensional (FFT NED 1D), será possível obter amostras da transformada de Fourier bi-dimensional de  $f$  equi-espaçadas ao longo de linhas radiais.

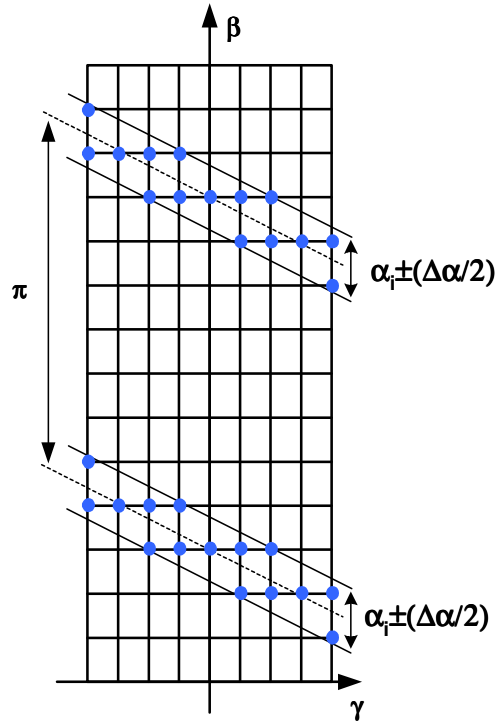


Figura 6.7: Esquematização da  $i$ -ésima projeção paralela generalizada. As amostras do conjunto de dados projeção divergente são representadas no plano de Radon de coordenadas cartesianas  $\gamma$  e  $\beta$ .

### Projeções paralelas generalizadas

As simetrias próprias da distribuição geométrica das amostras reflectem-se na estrutura das projeções generalizadas que gozam de interessantes características de regularidade. Tentamos aqui descrever algumas destas características que poderão, eventualmente, ser exploradas no algoritmo de reconstrução.

Se representarmos a localização das amostras obtidas com geometria divergente no plano  $(\gamma, \beta)$ , como na figura 6.7, vemos que uma projeção paralela generalizada é constituída por dois sub-conjuntos de amostras que distam  $\pi$  radianos um do outro segundo a coordenada  $\beta$ . No geral, estes dois subconjuntos não constituem apenas uma repetição do mesmo padrão de amostragem em  $(\alpha, s)$  e a (eventual) redução da projeção generalizada a um dos dois subconjuntos degrada ligeiramente a qualidade da imagem. É o que acontece quando (como veremos no capítulo 9), em vez de considerarmos um sinograma divergente completo, extraímos as projeções paralelas generalizadas a partir de um sinograma correspondente a varrimento breve ( $\pi + \Gamma$  radianos).

Cada coluna da matriz dos dados projeção divergente (fig. 6.7) é caracterizada por um valor discreto da coordenada  $\gamma$ , uniformemente amostrada, ao qual corresponde um determinado valor da coordenada  $s$ , calculado segundo a fórmula 6.7. Por consequência, às amostras das projeções paralelas generalizadas correspondem valores discretos da coordenada  $s$ , sendo que a distância, em  $s$ , entre pontos de amostragem distintos (pertencentes a colunas adjacentes

na figura 6.7) varia segundo a fórmula

$$|\Delta s| = r |\sin(j\Delta\gamma) - \sin((j+1)\Delta\gamma)|, \quad j = -q, \dots, q-1 \quad (\text{ou } j = -q, \dots, q) \quad (6.8)$$

representada graficamente na figura 6.8, onde se vê que a distância em  $s$  entre raios projecção adjacentes e distintos é maior na parte central do feixe paralelo generalizado.

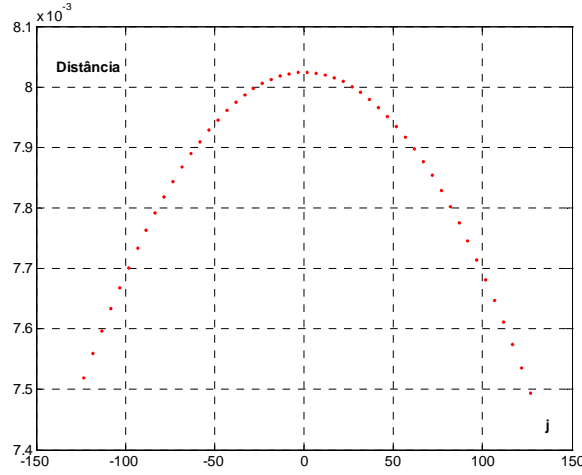


Figura 6.8: Distribuição da distância entre pontos de amostragem distintos em  $s$ , em função do índice  $j$ .

Por questões de simetria entre os raios projecção, as características de maior ou menor regularidade na estrutura das projecções paralelas generalizadas dependem, em larga medida, da relação entre o número  $p_{gen}$  de projecções generalizadas e o número  $p$  de projecções divergentes dadas. Torna-se necessário, então, analisar mais detalhadamente esta relação procurando estabelecer um critério para a escolha de  $p_{gen}$  dado  $p$ .

Sem nos preocuparmos, para já, com a forma como são obtidas as projecções (que será descrita no capítulo 8) exemplificamos a nossa análise, considerando um conjunto de dados projecção com geometria divergente adquirido a partir de um qualquer fantoma bidimensional de  $256 \times 256$  pixels e constituído por  $p = 512$  projecções (sobre os  $2\pi$  radianos) e  $Q = 256$  amostras por projecção ( $\Gamma = 42.2^\circ$ ,  $r = \frac{1}{\sin \frac{\Gamma}{2}}$ ) e as projecções paralelas generalizadas extraídas deste conjunto de dados utilizando diferentes valores de  $p_{gen}$  ( $p_{gen} = 64, 128, 192, 256, 320, 384, 448$  e  $512$ ).

Em primeiro lugar, observamos que o número  $Q_i$  de amostras que fazem parte de cada projecção generalizada (tab. 6.1) é, na maior parte dos casos, efectivamente variável com algumas excepções (nomeadamente, nos casos  $p_{gen} = 256$  e  $p_{gen} = 512$ ) onde, devido à particular simetria envolvida, o número de amostras em cada projecção generalizada é constante e igual a  $\frac{p \times Q}{p_{gen}}$ .

Em geral, ordenando as amostras pelo valor da coordenada  $s$ , pode-se observar que uma projecção paralela generalizada é constituída por grupos, mais ou menos numerosos (dependendo da largura do intervalo  $\Delta\alpha$ ), de amostras às quais corresponde o mesmo valor da coordenada  $s$  mas diferentes valores de  $\alpha$  (dentro do intervalo  $[\alpha_i - \frac{\Delta\alpha}{2}, \alpha_i + \frac{\Delta\alpha}{2}]$ ). Por exemplo, no caso  $p_{gen} = 64$  as projecções são constituídas por um número de amostras que varia



$p_{gen}$	$Q_i$	grupos de
64	2046–2050	8 amostras
128	1022–1026	4 amostras
192	680–684	2–3 amostras
256	512	2 amostras
320	408–412	1–2 amostras
384	340–344	1–2 amostras
448	290–296	1–2 amostras
512	256	1 amostra

Tabela 6.1: As projecções generalizadas são constituídas por grupos de amostras tendo a mesma coordenada  $s$ .

entre 2046 e 2050, reunidas em grupos de 8 amostras com a mesma coordenada  $s$  (tab. 6.1). Em termos rigorosos, não se pode falar em amostras duplicadas (ou múltiplas) por causa das diferentes coordenadas  $\alpha$ , todavia, considerando a projecção paralela generalizada como um sinal uni-dimensional na coordenada  $s$ , esta particular distribuição de amostras tem uma interessante consequência aquando da aplicação da transformada de Fourier. O cálculo do valor médio das amostras múltiplas permite reduzir o número de amostras acelerando, por consequência, o algoritmo. Infelizmente, esta estratégia não compensa, pois, o custo computacional adicional, relacionado com o processo de ordenação e média das amostras, ultrapassa a diminuição do custo computacional, devida à redução do número de amostras. Todavia, este facto permitirá justificar o bom desempenho em presença de ruído dos métodos baseados nas projecções paralelas generalizadas (cap. 9).

Do ponto de vista quantitativo, as projecções generalizadas não podem ser directamente comparadas com as correspondentes projecções paralelas (pois, os pontos de amostragem não são os mesmos) todavia, a comparação pode ser realizada no domínio de Fourier. Consideramos uma projecção paralela  $\mathcal{R}f_\theta(s)$  (que, por simplicidade, passaremos a indicar com  $p_\theta(s)$ ), obtida a partir do fantoma de Shepp-Logan modificado segundo uma determinada direcção  $\theta = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ , uniformemente amostrada e constituída por  $Q = 256$  amostras e calculamos a sua transformada de Fourier  $\widehat{p}_\theta(j\Delta\sigma)$ ,  $j = -q, \dots, q-1$ ,  $q = \frac{Q}{2}$ .

Consideramos, também, as projecções paralelas generalizadas  $pg_\theta^{p_{gen}}(s)$  (obtidas a partir do conjunto de dados anteriormente descrito com diferentes valores de  $p_{gen}$ ) segundo a mesma direcção  $\theta$  e calculamos, utilizando a NFFT (FFT NED 1D), as suas transformadas de Fourier uni-dimensionais em  $Q$  pontos  $\widehat{pg}_\theta^{p_{gen}}(j\Delta\sigma)$ ,  $j = -q, \dots, q-1$ .

O erro cometido aproximando a transformada de Fourier da projecção paralela com a transformada de Fourier de uma projecção paralela generalizada, pode ser avaliado utilizando como medida o erro quadrático médio normalizado:

$$NMSE^{p_{gen}} = \left[ \frac{\sum_{j=-q}^{q-1} |\widehat{p}_\theta(j\Delta\sigma) - \widehat{pg}_\theta^{p_{gen}}(j\Delta\sigma)|^2}{\sum_{j=-q}^{q-1} |\widehat{p}_\theta(j\Delta\sigma)|^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.9)$$

Na figura 6.9 representa-se graficamente o valor do erro quadrático médio normalizado em função de  $p_{gen}$ . Como se pode observar, para além de uma certa sensibilidade à regularidade/irregularidade na distribuição das amostras (aumento do erro quando  $p_{gen}$  não é

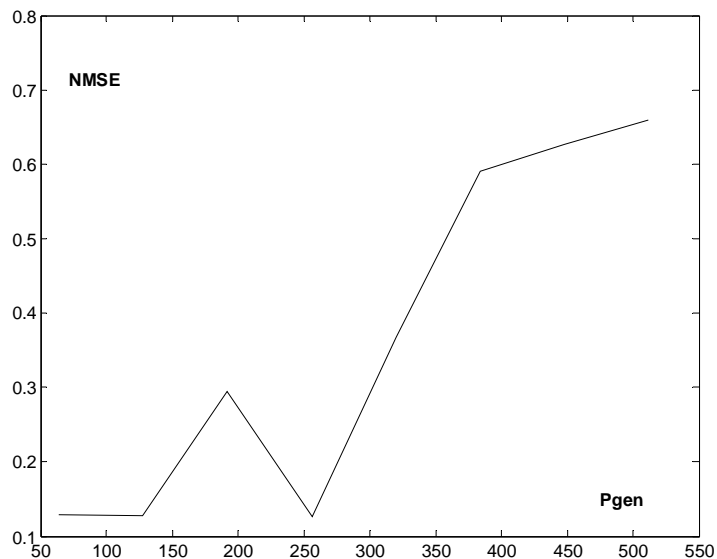


Figura 6.9: Valor absoluto do erro quadrático médio normalizado na aproximação da transf. de Fourier da projecção paralela com a transf. de Fourier da projecção paralela generalizada em função de  $p_{gen}$ .

sub-múltiplo de  $p$ , caso  $p_{gen} = 192$ ), a tendência é para o aumento do erro com o aumentar de  $p_{gen}$ . Relembrando que com o aumentar de  $p_{gen}$  diminui o erro de aproximação azimutal mas também diminui o número de amostras em cada projecção, deduzimos que, para além de um certo valor de  $p_{gen}$ , a diminuição do número de amostras torna-se responsável pela degradação da aproximação.

Neste caso, assim como em outros casos analisados, o valor mínimo do erro de aproximação verifica-se para  $p_{gen} = 256$ , o que nos leva a conjecturar, extrapolando para o caso geral, que a escolha de  $p_{gen} = \frac{p}{2}$ , para além de fornecer projecções generalizadas de estrutura bastante regular, permite obter uma melhor aproximação às correspondentes projecções paralelas.

## 6.2.2 Método de Fourier para projecções divergentes baseado na NFFT

A técnica de *rebinning* sem interpolação pode ser aplicada em combinação com qualquer um dos métodos de Fourier para projecções paralelas anteriormente descritos. Em particular, propomos um método de Fourier, esquematizado na figura 6.10, que permite a reconstrução a partir de projecções divergentes sem recurso à interpolação tanto no domínio de Radon como no domínio de Fourier.

O algoritmo procede da seguinte forma:

### Algoritmo 6.2.1 (DB NFFT DFM)

1. *Filtragem de cada projecção divergente no espaço de Fourier uni-dimensional sobreamostrado (através de zero-padding das projecções)*
2. *Unpadding das projecções*

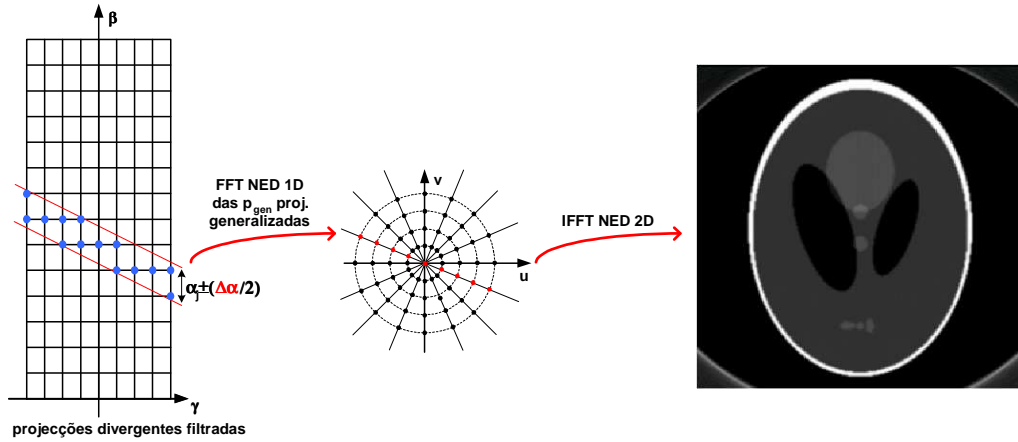


Figura 6.10: Esquema simplificado do método de Fourier para projecções divergentes baseado na NUFFT.

3. *Rebinning sem interpolação obtendo  $p_{gen}$  projecções paralelas generalizadas*
4. *Transformada de Fourier das  $p_{gen}$  projecções paralelas generalizadas obtidas ao ponto 2 (FFT NED 1D)*
5. *Transformada inversa de Fourier bi-dimensional (IFFT NED 2D) aplicada ao conjunto de amostras obtidas ao passo 3, uniformemente distribuídas sobre a grelha polar regular.*

Tal como no caso do algoritmo 6.1.5, devido ao facto que o cálculo aproximado da NFFT se baseia na técnica de *gridding* (ver apêndice A), podemos afirmar que o algoritmo descrito, apesar de não incluir nenhuma interpolação explícita, é, na realidade, um método de *gridding*.

A realização da filtragem antes da reconstrução propriamente dita merece uma justificação. De facto, podia parecer mais lógico efectuar a filtragem após a NFFT 1D das projecções generalizadas (ponto 4), todavia, devido à necessidade de realizar a filtragem no espaço de Fourier 1D sobreamostrado, teria sido necessário prolongar (*zero-padding*) as projecções generalizadas, aumentando o peso computacional do algoritmo. Para além disso, como se verá no capítulo 9, a sobreamostragem do espaço de Fourier 2D, como resulta da aplicação do algoritmo NFFT DFM às projecções generalizadas, apenas permite eliminar o artefacto circular (devido a *aliasing*) visível na imagem reconstruída da figura 6.10, mas não melhora a qualidade da imagem dentro da área de interesse.

No que se refere à complexidade computacional deste algoritmo, em primeiro lugar é preciso dizer que (como se descreve na secção 9.1.2) o processo de *rebinning* sem interpolação pode ser parcialmente executado em fase de pré-processamento (sendo comum a todos os conjuntos de dados projecção obtidos com a mesma geometria e número de amostras) não implicando, desta forma, um elevado acréscimo do custo computacional. O peso computacional do algoritmo resulta da operação de filtragem das projecções divergentes, que no caso  $p_{gen} = \frac{p}{2}$  é da ordem de  $\mathcal{O}(N^2 \log N)$ , das  $p_{gen}$  transformadas de Fourier das projecções generalizadas (FFT NED 1D), implicando um custo total de  $\mathcal{O}(p_{gen} N \log N) \simeq \mathcal{O}(N^2 \log N)$ , e da transformada inversa de Fourier bidimensional, cujo custo é também  $\mathcal{O}(N^2 \log N)$ . Somando as várias contribuições, a complexidade total do algoritmo resulta ser de  $\mathcal{O}(N^2 \log N)$ .

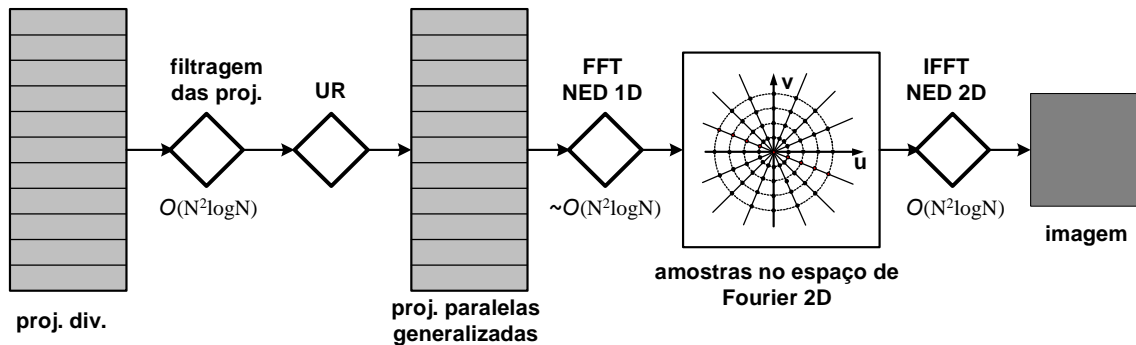


Figura 6.11: Diagrama de fluxo computacional do algoritmo DB NFFT DFM.

Como vimos na secção anterior, a qualidade das projecções paralelas generalizadas depende da escolha de  $p_{gen}$  (fig. 6.9), pelo que este parâmetro deverá influenciar também a qualidade da imagem reconstruída. Para quantificar os efeitos relacionados com a utilização das projecções paralelas generalizadas (mais especificamente, com o número destas) recorremos, mais uma vez, ao conjunto de dados projecção divergente descrito na secção anterior e avaliamos a qualidade da imagem reconstruída pelo algoritmo 6.2.1 (tendo-se utilizado filtro de tipo RamLak para a filtragem das projecções divergentes) em função do valor de  $p_{gen}$ . Na figura 6.12 representa-se graficamente a variação da qualidade das imagens reconstruídas, quantificada pela sua distância da imagem original segundo as métricas  $-d, r, e-$  propostas por Herman (descritas na apêndice B), juntamente com os respectivos tempos de reconstrução para diferentes valores de  $p_{gen}$ . Os índices de mérito  $d, r$  e  $e$  evidenciam como o erro de reconstrução tende a diminuir com o aumentar do número de projecções generalizadas, atingindo o seu mínimo em  $p_{gen} = 256$ , para depois voltar a aumentar ligeiramente. Comparando esta evolução com a do erro de aproximação da projecção generalizada, que aumenta rapidamente para valores elevados de  $p_{gen}$ , concluímos que a maior densidade de amostras na direcção angular no plano de Fourier permite compensar o aumento do erro de aproximação nas mesmas amostras. De qualquer forma, valores elevados de  $p_{gen}$  não são aconselháveis dado que implicam o aumento do tempo de reconstrução, como se pode verificar na figura 6.12.

Por fim, constatando que tanto neste como noutros casos analisados, o erro de reconstrução atinge o valor mínimo em correspondência de  $p_{gen} = \frac{p}{2}$ , podemos confirmar que  $p_{gen} = \frac{p}{2}$  será uma boa escolha para o número de projecções generalizadas, permitindo minimizar tanto o erro de reconstrução como o erro de aproximação das projecções paralelas generalizadas.

### 6.3 Interpolação: filtragem implícita

É interessante observar como alguns entre os métodos de reconstrução descritos necessitam da aplicação de um filtro em rampa (ou outro tipo de filtro mais suave) às projecções e outros não. Tentaremos, aqui, esclarecer o papel do filtro em rampa no método de reconstrução.

No caso da FBP, o filtro em rampa é introduzido explicitamente por aparecer na derivação formal do método [59] e, de um ponto de vista intuitivo, por compensar o efeito de filtro passa-baixo introduzido pelo processo de projecção/retroprojecção.

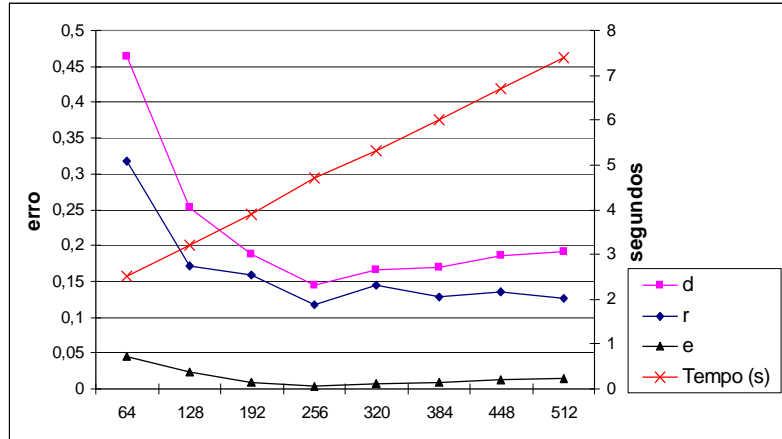


Figura 6.12: Representação gráfica do erro de reconstrução e do tempo de cálculo do algoritmo DB NFFT DFM (com filtro de RamLak) em função de  $p_{gen}$ .

Da mesma maneira, se considerarmos os métodos de Fourier, o filtro em rampa aparece na expressão formal da transformada inversa de Fourier bi-dimensional quando aplicada a dados em coordenadas polares  $(\theta, R)$ :

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(xu+yv)} dudv = \int_0^{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} F(R \cos \theta, R \sin \theta) |R| e^{j2\pi R(x \cos \theta + y \sin \theta)} dR \right] d\theta. \quad (6.10)$$

Evidentemente, caso a inversão da transformada de Fourier se aplique directamente a partir das amostras distribuídas sobre a grelha polar, como nos métodos baseados na NFFT, a equação 6.10 (devidamente discretizada) traduz-se na aplicação de um filtro em rampa seguido pela transformada inversa de Fourier bidimensional (FFT NED 2D).

No entanto, caso o método de Fourier passe, de alguma forma, pela interpolação das amostras no domínio das frequências, nem sempre se torna necessária a filtragem, sugerindo a existência de uma forma de filtragem implícita em alguns métodos de interpolação.

O factor que determina a existência, ou não, da filtragem implícita nos métodos de interpolação reside nas diferentes formas de lidar com a densidade não uniforme das amostras.

Relembrando que a densidade de amostras uniformemente distribuídas sobre a grelha polar diminui, variando em função de  $\frac{1}{r}$ , do centro em direcção à periferia do plano de Fourier, a aplicação de um método de interpolação que não tome em consideração este facto (por exemplo, utilizando um número fixo de amostras independentemente da distância entre elas), acaba por induzir um efeito de filtro passa baixo que deve ser oportunamente compensado com a introdução de um filtro em rampa explícito.

Por outro lado, existem técnicas de interpolação que realizam uma filtragem implícita incluindo, na fórmula de interpolação, uma forma de compensação da densidade não uniforme das amostras (por exemplo, um coeficiente proporcional à área ocupada por um número fixo de amostras em torno do ponto de interpolação), não necessitando de filtragem explícita.

Um caso particular é o do algoritmo 6.1.3 onde a interpolação é feita a partir de amostras uniformemente distribuídas no plano Cartesiano  $(\theta, \sigma)$ . Neste caso a densidade de amostras

é uniforme e não se verifica filtragem implícita nem se torna necessária alguma filtragem explícita.

Por fim, vale a pena frisar que o filtro em rampa é normalmente truncado através da multiplicação com uma janela (como, por exemplo, a janela de Hamming) e que a escolha do filtro é uma tarefa delicada, pois este influencia significativamente o desempenho dos métodos em presença de ruído.

## 6.4 Reconstrução de ROI

Contrariamente ao que se tem vindo afirmar, ou seja, que apenas a reconstrução *pixel a pixel*, característica do algoritmo FBP, permite a reconstrução de regiões de interesse (ROI), podemos demonstrar que também os métodos de Fourier permitem restringir a região de reconstrução aumentando o nível de detalhe com um menor custo computacional relativamente ao método de FBP.

Em primeiro lugar, relembra-se a relação que existe entre a frequência de amostragem da imagem (ou o seu recíproco, isto é, o tamanho do *pixel*) e as dimensões do suporte da imagem no domínio da frequência. Se os *pixels* são quadrados de lado  $a$  a máxima frequência presente na imagem será, no limite,  $\frac{1}{2a}$  pelo que a transformada de Fourier 2D da imagem será contida num quadrado de lado  $\frac{1}{a}$ . Multiplicar por um factor  $k$  o tamanho do *pixel* equivale a multiplicar por  $\frac{1}{k}$  a frequência máxima presente na imagem, pelo que o suporte da correspondente transformada de Fourier 2D passa a ser um quadrado de lado  $\frac{1}{ka}$ . Desta observação, deduzimos que operando uma oportuna mudança de escala no espaço das frequências, podemos alterar a extensão do suporte da imagem de forma a reconstruir apenas uma região de interesse, tal como se ilustra na figura 6.13 na qual  $k = 1/2$ .

Dado que a mudança de escala no espaço das frequências pode ser facilmente introduzida em qualquer um dos métodos de Fourier descritos (tanto para projecções paralelas como divergentes, com ou sem interpolação no espaço das frequências), podemos concluir que os métodos de Fourier permitem a reconstrução em regiões de interesse. A única limitação consiste no facto que a região de reconstrução deve ser obrigatoriamente quadrada e isocéntrica com a imagem original pelo que, se a região de interesse não satisfaz esta condição, deverá ser considerada como região de reconstrução a mais pequena região quadrada e isocéntrica com a imagem original que inclua a região de interesse, sendo depois necessário extrair da imagem reconstruída as amostras correspondentes à região de interesse. Neste caso, se a região de interesse for um quadrado de lado  $l$  e a região de reconstrução um quadrado de lado  $L$  e se quisermos que a região de interesse seja representada numa imagem  $N \times N$ , será necessário calcular a IFFT 2D em  $N\frac{L}{l} \times N\frac{L}{l}$  amostras.

Por exemplo, no enquadramento geométrico genérico, exemplificado na figura 6.14, o algoritmo 6.2.1 adaptado à reconstrução de uma região de interesse procede da seguinte forma:

### Algoritmo 6.4.1 (DB NFFT DFM ROI)

1. *Filtragem de cada projecção divergente no espaço de Fourier uni-dimensional sobreamostrado (através de zero-padding das projecções), unpadding*
2. *Rebinning sem interpolação obtendo  $p_{gen}$  projecções paralelas generalizadas*

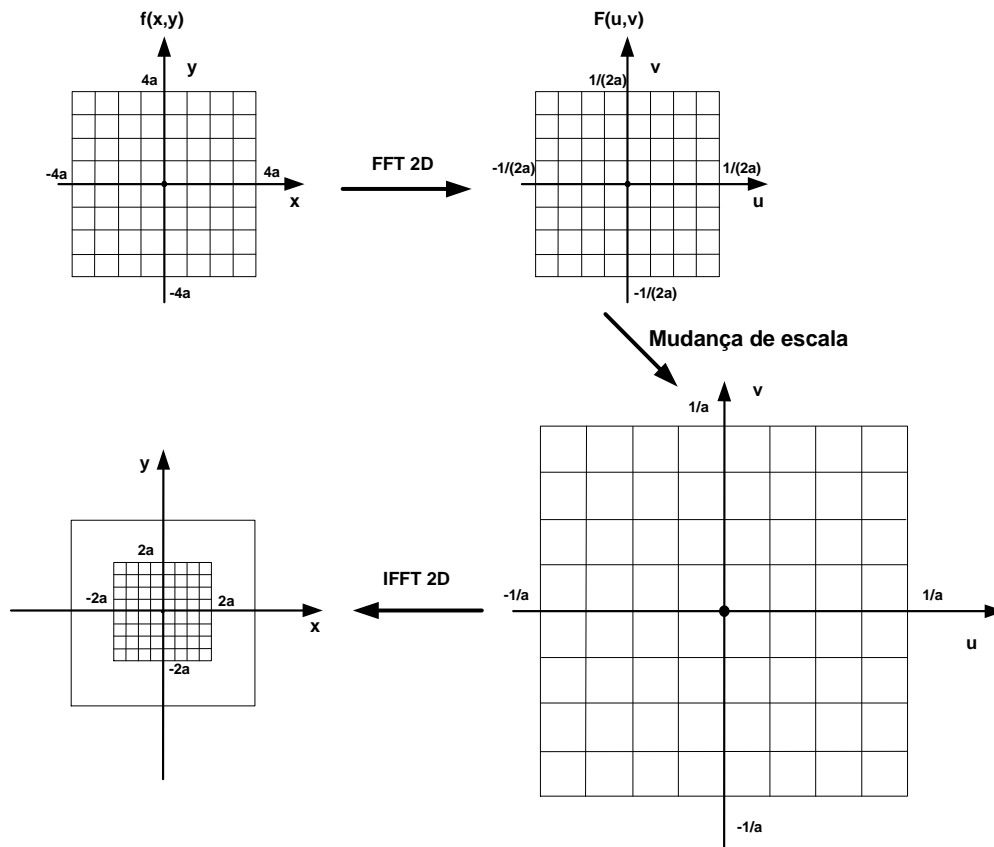


Figura 6.13: Esquemática do método de Fourier para a reconstrução de uma região de interesse.

3. Transformada de Fourier das  $p_{gen}$  projeções paralelas generalizadas obtidas ao ponto 2 (FFT NED 1D)
4. Mudança de escala no espaço de Fourier utilizando o coeficiente  $k$  determinado, utilizando simples argumentos geométricos, pela fórmula

$$k = \frac{l}{c} \quad (6.11)$$

onde  $l = \max(l_1, l_2)$ . Pela mudança de escala, uma amostra em  $(\theta, \sigma)$  passa a estar localizada em  $(\theta, \frac{1}{k}\sigma)$  no espaço de Fourier.

5. Cálculo das dimensões da região de reconstrução quadrada e isocêntrica com o campo de visão:

$$L = 2 \max(|P1_x|, |P1_y|, |P2_x|, |P2_y|, |P3_x|, |P3_y|, |P4_x|, |P4_y|) \quad (6.12)$$

onde  $P1, P2, P3$  e  $P4$  são os vértices da região de interesse

6. Transformada inversa de Fourier bi-dimensional (IFFT NED 2D) aplicada ao conjunto de amostras obtidas ao passo 3, uniformemente distribuídas sobre a grelha polar regular no espaço de Fourier definido ao passo 4, e calculada em  $N \frac{L}{l} \times N \frac{L}{l}$  pontos.

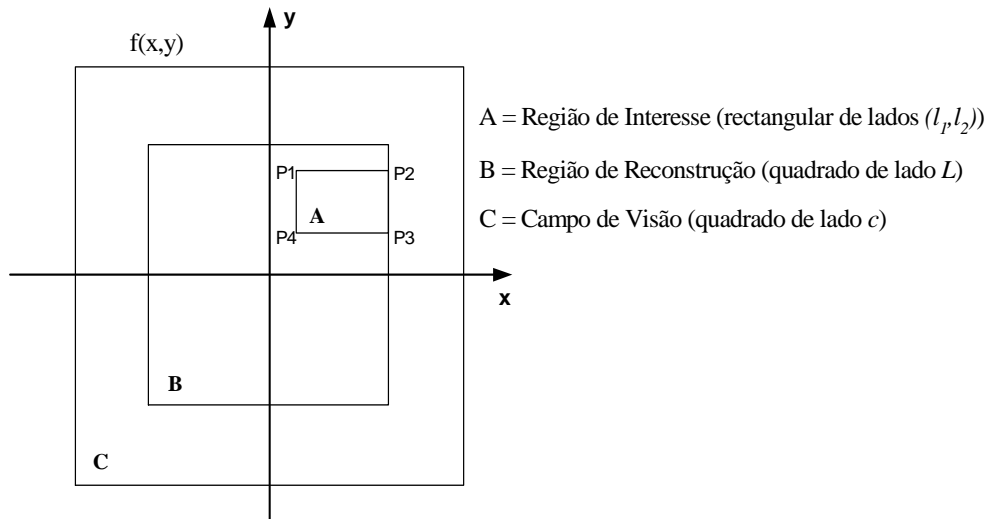


Figura 6.14: Enquadramento geométrico para a reconstrução da região de interesse A.

### 7. *Extracção da imagem correspondente à região de interesse.*

Tal como no caso do método de FBP, também neste caso a reconstrução de regiões de interesse não pode ser considerada uma técnica de tomografia local dado que baseia-se no conhecimento das projecções completas sendo, por isso, intrinsecamente global. Relativamente ao custo computacional, podemos dizer que a reconstrução de uma região de interesse pelos métodos de Fourier implica um número de operações  $\mathcal{O}((N \frac{L}{l})^2 \log(N \frac{L}{l}))$  dependendo, portanto, não apenas das dimensões da região de interesse mas também da sua localização no campo de visão, isto é, das dimensões da região de reconstrução. Apesar deste pormenor, podemos afirmar que, na maior parte das situações que se verificam na prática, para uma dada região de interesse a complexidade do método descrito é inferior à complexidade do método de FBP.

## 6.5 Métodos de projecção rápida no espaço de Fourier

Para efeitos de simulação e/ou no caso de métodos iterativos, nos quais a imagem reconstruída é obtida por sucessivas aproximações através de um processo iterativo de projecção e retroprojecção [32, 86], tornam-se também indispensáveis métodos de projecção rápida.

Os métodos de Fourier podem ser aplicados na ordem inversa permitindo calcular um conjunto de projecções paralelas a partir de um objecto digital bi-dimensional. O método de projecção básico será, então, o seguinte:

### Algoritmo 6.5.1 (Fourier projecção básico)

1. *Transformada de Fourier bi-dimensional da função objecto (FFT 2D)*
2. *Obtenção de amostras segundo a grelha polar através de interpolação sobre a grelha Cartesiana no espaço de Fourier ( $p$  direcções angulares em  $[0, \pi[$  e  $Q$  amostras por cada direcção)*



3. Transformada inversa de Fourier uni-dimensional (IFFT 1D) das amostras que se encontram ao longo das  $p$  direcções angulares obtendo as projecções paralelas.

Neste caso, a interpolação no espaço de Fourier não é uma operação especialmente crítica pois, ao contrário do que acontece no caso da reconstrução, aqui a interpolação é efectuada a partir de pontos regularmente distribuídos sobre a grelha Cartesiana. Contudo, como no caso da reconstrução, a qualidade dos resultados obtidos por este método não é satisfatória, pois, também neste caso se verifica *aliasing* e o sinograma calculado é caracterizado por artefactos evidentes (fig. 6.15-a).

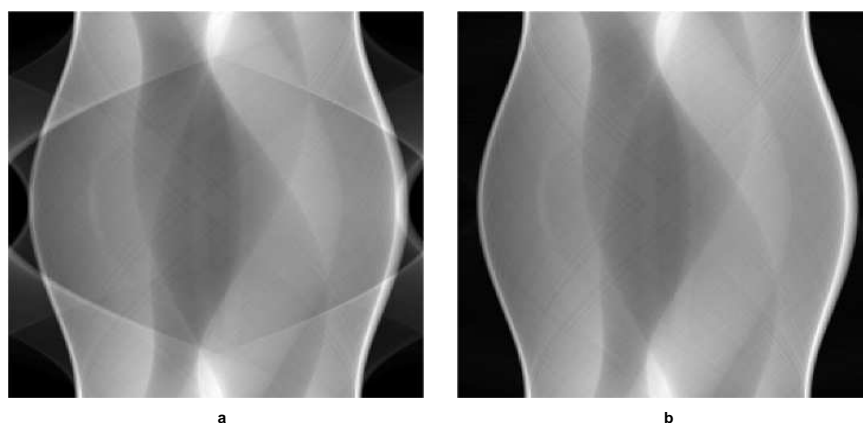


Figura 6.15: Sinogramas obtidos pelo método de projecção de Fourier. a) sinograma obtido pelo método básico (é evidente a presença de artefactos). b) sinograma obtido pelo método DFPM.

Recorrendo a *zero-padding* da imagem, e conseqüente sobreamostragem do plano de Fourier, é possível evitar o aparecimento destes artefactos obtendo sinogramas de elevada qualidade (fig. 6.15-b). O algoritmo resultante, indicado pelo acrónimo DFPM (*Direct Fourier Projection Method*) procede da seguinte forma:

#### Algoritmo 6.5.2 (DFPM)

1. *Zero-padding* (com coeficiente de padding  $\alpha$ ) e transformada de Fourier bi-dimensional da imagem (FFT 2D)
2. Obtenção de amostras segundo a grelha polar através de interpolação sobre a grelha Cartesiana no espaço de Fourier sobreamostrado ( $p$  direcções angulares em  $[0, \pi[$  e  $\alpha Q$  amostras por cada direcção)
3. Transformada inversa de Fourier uni-dimensional das amostras que se encontram ao longo das  $p$  direcções angulares obtendo as projecções paralelas (*padded*) segundo aquelas direcções
4. *Unpadding* das projecções obtidas ao ponto anterior.

Nas secções 8.2.4 e 8.2.5, analisaremos alguns detalhes da implementação deste algoritmo e veremos como a qualidade das projecções obtidas com este método é comparável com a qualidade que caracteriza os métodos de projecção numéricos convencionais (baseados em técnicas tipo *ray-casting*), mas com um custo computacional muito reduzido.

## 6.6 Reconstrução no espaço de Fourier 3D

O teorema da secção central em três dimensões estabelece que a transformada de Fourier radial (na coordenada  $s$ ) da transformada de Radon  $\mathcal{R}_\theta f(s)$  de uma função  $f(x, y, z)$  (ou seja, a transformada de Fourier dos dados que se encontram ao longo de uma linha passando pela origem do espaço de Radon 3D com orientação  $\theta$ ), é equivalente à transformada de Fourier tri-dimensional da função  $f$  ao longo da mesma linha. Assim, teoricamente, dispendo de uma adequada cobertura do espaço de Radon 3D, seria possível obter amostras da transformada de Fourier 3D de  $f(x, y, z)$ , logo, reconstruir a função por transformada inversa de Fourier 3D.

Para além do facto de que seriam necessárias projecções 2D paralelas (o que não é praticamente viável), o problema fundamental é o de garantir uma cobertura suficiente do espaço de Radon 3D. A este propósito, relembramos as condições de suficiência de Tuy e Smith (definidas na secção 4.5), e o facto que no caso de projecções cónicas adquiridas com trajectória circular as condições de suficiência não são satisfeitas, enquanto no caso de projecções cónicas adquiridas com trajectória helicoidal resulta idealmente satisfeita a condição de Smith (secção 5.3), podendo um conjunto de dados deste tipo ser considerado completo. No entanto, como vimos na secção 5.3.2, Grangeat desenvolveu um método para o cálculo da derivada (segundo  $s$ ) da transformada de Radon em todo o suporte esférico a partir de projecções cónicas (mesmo que estas sejam adquiridas apenas com trajectória circular). Do resultado de Grangeat, deriva uma variedade de algoritmos como os que foram descritos em 5.3.2 para trajectória circular e em 7.4.1 para trajectória helicoidal, nos quais a função objecto pode ser obtida a partir da derivada da transformada de Radon, regularmente amostrada sobre uma grelha esférica, com um procedimento semelhante ao da retroprojecção filtrada.

Em alternativa, vários autores têm proposto a introdução de métodos de Fourier para a inversão da derivada da transformada de Radon, dando lugar a algoritmos [54, 83, 113] que, seguindo o esquema do algoritmo de Grangeat, podem ser enquadrados na classe dos métodos de Fourier 3D e permitem a redução da complexidade da fase de retroprojecção da derivada da transformada de Radon de  $\mathcal{O}(N^4)$  para  $\mathcal{O}(N^3 \log N)$ .

Por exemplo, partindo da fórmula

$$f(x, y, z) = \int \int \int \int \mathcal{R}f(s, \xi, \psi) e^{-j2\pi s\sigma} ds e^{j2\pi\sigma(x \cos \xi \cos \psi + y \cos \xi \sin \psi + z \sin \xi)} \sigma^2 \cos \xi d\sigma d\xi d\psi \quad (6.13)$$

que resume o enunciado do teorema da secção central em coordenadas esféricas (o significado dos parâmetros  $\xi$  e  $\psi$  é ilustrado na figura 5.16), e considerando que

$$\int \mathcal{R}'f(s, \xi, \psi) e^{-j2\pi s\sigma} ds \frac{\sigma}{j2\pi} = \int \mathcal{R}f(s, \xi, \psi) e^{-j2\pi s\sigma} ds \sigma^2, \quad (6.14)$$

Schaller [113] obtém a seguinte fórmula para a inversão da derivada da transformada de Radon

$$f(x, y, z) = \int \int \int \int \mathcal{R}'f(s, \xi, \psi) e^{-j2\pi s\sigma} ds e^{j2\pi\sigma(x \cos \xi \cos \psi + y \cos \xi \sin \psi + z \sin \xi)} \frac{\sigma}{j2\pi} \cos \xi d\sigma d\xi d\psi. \quad (6.15)$$

Discretizando 6.15 e aplicando a fórmula para o cálculo da transformada de Fourier discreta, Shaller deriva uma expressão multiplicativa para o cálculo da transformada de Fourier

3D (amostrada numa grelha esférica) de  $f$  a partir das transformadas de Fourier radiais de  $\mathcal{R}'f(s, \xi, \psi)$ . O algoritmo prossegue com a interpolação da transformada de Fourier 3D de  $f$  da grelha esférica para a grelha Cartesiana, sendo a interpolação realizada com método de gridding (equivalente ao descrito na secção 6.1.4) em 3D, seguida pela transformada inversa de Fourier 3D (IFFT).

Métodos de Fourier (neste caso, de projecção) podem ser utilizados também no cálculo das amostras da derivada da transformada de Radon a partir das projecções cónicas dado que, como já se observou em 5.3.2, cada amostra corresponde a um integral de linha da projecção cónica no plano do detector virtual [18, 1, 54]. A utilização de métodos de Fourier no cálculo das amostras de  $\mathcal{R}'f(s, \xi, \psi)$  permite a redução da complexidade computacional desta fase do algoritmo de  $\mathcal{O}(N^4)$  para  $\mathcal{O}(N^3 \log N)$ .

A utilização, em conjunto, de métodos de Fourier tanto na fase de cálculo das amostras de  $\mathcal{R}'f(s, \xi, \psi)$  como na sua retroprojecção permite a redução da complexidade total do algoritmo de  $\mathcal{O}(N^4)$  para  $\mathcal{O}(N^3 \log N)$ .

Alguns autores [46, 1, 54, 83] sugerem a utilização de métodos de linograma, ou da NFFT [117], quer na fase de cálculo da derivada da transformada de Radon quer na fase de retroprojecção, com o objectivo de reduzir o erro associado à interpolação no domínio de Fourier.

Uma abordagem alternativa poderá derivar do método de Fourier proposto por Chen e baseado no já mencionado teorema da secção central generalizado (ver pag. 104), aplicado ao caso de projecções cónicas. Todavia, até ao momento, desconhecemos a existência de implementações numéricas deste método.

Por fim, mencionamos um método que segue uma abordagem 2-3D, tal como os algoritmos que serão descritos na secção 7.3, mas utilizando técnicas de Fourier na reconstrução. Trata-se do algoritmo MFR –*Multirow Fourier Reconstruction*– [112] no qual, assim como no algoritmo AAI –*Adaptive Axial Interpolation*– (descrito na secção 7.2.1), o primeiro passo consiste no *rebinning* parcial das projecções cónicas realizado independentemente para cada corte obtendo projecções paralelas multicorte oblíquas (fig. 7.6), neste caso, uniformemente espaçadas. Uma vez fixado um plano de reconstrução (transversal), sintetiza-se um conjunto de projecções paralelas no plano através de filtragem longitudinal das projecções paralelas multicorte oblíquas, sendo aplicada a cada amostra uma função de peso que depende da distância entre o respectivo raio projecção e o plano de reconstrução. Dado que a distância raio-plano varia ao longo do raio, o valor do peso, assim como a resultante amostra de sinograma no plano de reconstrução, será variável ao longo do raio. Este conceito de amostras variáveis pode ser integrado de forma eficiente no método de reconstrução de Fourier onde, na hipótese que uma projecção paralela seja modelada como uma série de Fourier de  $2N_\mu + 1$  coeficientes, contribuirá com  $2N_\mu + 1$  linhas de amostras no plano de Fourier assim como se ilustra na figura 6.16. A interpolação no plano de Fourier, realizada recorrendo ao método de *gridding*, e a transformada inversa de Fourier 2D completam o algoritmo cuja complexidade computacional também é  $\mathcal{O}(N^3 \log N)$ .

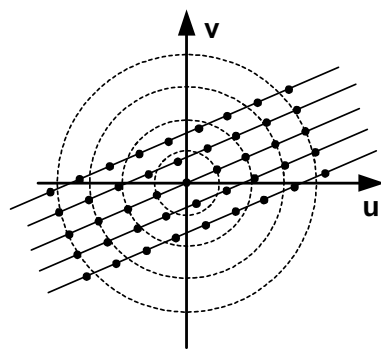


Figura 6.16: Algoritmo MFR: uma projecção paralela variável contribui com amostras no plano de Fourier distribuídas num certo número de linhas paralelas.



## Capítulo 7

# Algoritmos de reconstrução em tomografia helicoidal

Após termos analisado os principais métodos de reconstrução a partir de dados adquiridos com trajectória circular da fonte, neste capítulo passamos a considerar o problema da reconstrução a partir de dados adquiridos com trajectória helicoidal. Hoje em dia, esta técnica de varrimento, cujas vantagens do ponto de vista tecnológico e prático foram descritas no capítulo 2, é a mais utilizada em tomografia clínica, podendo ser associada à aquisição (nos moldes descritos nas secções 2.2.1 e 2.2.2) de um único corte ou de múltiplos cortes simultaneamente. Os recentes avanços tecnológicos nesta área, nomeadamente, o aumento da velocidade de rotação do sistema foco-detector ( $\sim 0.5s$ ), o aumento do número de cortes adquiridos simultaneamente (actualmente, até 64) e a introdução de novos algoritmos de reconstrução completamente tridimensionais, têm permitido alcançar resultados até à pouco tempo impensáveis tanto no que se refere à extensão das regiões do corpo humano analisadas (por ex., o tronco ou até o corpo inteiro) como à qualidade dos volumes de dados obtidos (volumes isotrópicos, eliminação dos artefactos devidos ao feixe cónico, etc.). A este propósito, relembramos o descrito na secção 2.2.1, ou seja, que a principal vantagem do varrimento helicoidal consiste na possibilidade de escolher à posteriori os planos onde se pretende reconstruir as imagens, podendo, inclusivamente, ser utilizada uma distância entre planos de reconstrução inferior à espessura de corte (sobreposição de imagens). Esta característica permite a reconstrução de volumes isotrópicos com transição suave entre imagens transversais.

Em primeiro lugar, após o enquadramento geométrico desta particular forma de amostragem do espaço de Radon, falaremos sobre o necessário compromisso entre os parâmetros de varrimento (escolha do *pitch*). Em seguida, passaremos a descrever as possíveis metodologias de reconstrução que podem ser esquematicamente reconduzidas às três diferentes abordagens:

- 2D – Passa pela síntese (interpolação longitudinal) de sinogramas correspondentes a planos transversais e sucessiva reconstrução 2D e pode ser utilizada apenas caso a abertura angular do feixe no plano longitudinal seja desprezável, isto é, aquisição mono ou multicorte com baixo número de cortes (até 4 [115]).
- 2-3D (ou 2.5D) – Os planos de reconstrução são inclinados e escolhidos de forma a minimizar o erro de reconstrução tendo em consideração a trajectória da fonte e a inclinação dos cortes relativamente ao plano longitudinal. Pode ser utilizada no caso de aquisição mono ou multicorte com um número limitado de cortes (até 16)

- 3D – Utilizável no caso de aquisição multicorte com elevado número de cortes (feixe cónico).

Tal como no caso do varrimento circular, apesar de não termos especificamente trabalhado na área dos métodos de reconstrução 3D, incluímos neste capítulo a descrição de alguns métodos desta classe aplicáveis a dados adquiridos com trajectória helicoidal da fonte. Trata-se de métodos de reconstrução que, após uma fase de interesse puramente académico, começam a ser utilizados nos tomógrafos clínicos mais avançados que permitem a aquisição simultânea de um número cada vez mais elevado de cortes (acima dos 16).

## 7.1 Geometria de amostragem

Em tomografia helicoidal utilizam-se as geometrias de aquisição divergente ou cónica (no caso de aquisição multicorte), tal como foram definidas nas secções 5.1.2 e 5.1.3, com a diferença que, em vez de uma trajectória circular num plano transversal ( $z = z_0$ ), o foco segue uma trajectória helicoidal no sistema de referência do doente, cujo eixo longitudinal se encontra alinhado com o eixo  $z$ . Esta trajectória resulta da composição de um movimento circular de raio  $r$  no plano transversal com um movimento de translação segundo a direcção longitudinal (fig. 2.8). Isto é, em cada instante  $t$  a posição do foco será dada por

$$a = (r \cos(\beta_0 + \beta_t t), r \sin(\beta_0 + \beta_t t), Z_0 + d' t)^T \quad (7.1)$$

onde  $\beta_0$  e  $Z_0$  são, respectivamente, as posições angular e longitudinal iniciais do foco,  $\beta_t$  a velocidade de rotação e  $d'$  a velocidade de translação do foco segundo as definições dadas na secção 2.2.1. A linha central do feixe intersecta perpendicularmente o eixo  $z$  que constitui o eixo de rotação (isocentro) do sistema.

Utilizando as definições da secção 5.1.3 e o esquema geométrico da figura 5.6, sem perda de generalidade (pois, no caso de geometria divergente basta considerar  $M = 1$ ), podemos dizer que a aquisição com varrimento helicoidal corresponde à amostragem do espaço da transformada de feixe cónico segundo uma grelha  $(z_h, \beta_i, \gamma_j, \varphi_k)$  definida por:

$$z_h = Z_0 + h \Delta z \quad h = 0, \dots, pL - 1 \quad (7.2)$$

$$\beta_i = \text{mod}(\beta_0 + i \Delta \beta, 2\pi) \quad i = 0, \dots, pL - 1 \quad (7.3)$$

$$\gamma_j = j \Delta \gamma \quad j = -q, \dots, q \quad (7.4)$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{\zeta_k}{r} \quad k = 1, \dots, M \quad (7.5)$$

sendo  $L$  o número de rotações,  $p$  o número de projecções cónicas (ou divergentes) adquiridas ao longo de cada rotação completa (com  $\Delta \beta = \frac{2\pi}{p}$ ),  $Q = 2q + 1$  o número (neste caso, ímpar, mas não necessariamente) de amostras adquiridas em cada corte, separadas pela distância angular  $\Delta \gamma = \frac{\Gamma}{2q+1}$ , e  $M$  o número de cortes cuja coordenada longitudinal medida no eixo de rotação é  $z_h + \zeta_k$  com  $\zeta_k = (k - \frac{M}{2} - \frac{1}{2}) \Delta \zeta$  (onde  $\Delta \zeta$  é a espessura dos cortes medida no eixo  $z$ , figura 5.6-a).

É interessante observar como o esquema de amostragem utilizado no caso de varrimento helicoidal com uma única linha de detectores pode ser também aplicado ao caso da tomografia dinâmica em 2D (aquisição convencional mono-corte em rotação contínua de um objecto dinâmico). De facto, é imediato estabelecer um paralelo entre as duas situações enquadrando

a tomografia dinâmica com varrimento convencional contínuo no mesmo modelo geométrico cilíndrico tendo por eixo longitudinal o eixo temporal.

O problema da definição da frequência de amostragem, que permita garantir uma determinada resolução na imagem reconstruída, é dificilmente generalizável para dimensões acima da segunda. Todavia, podemos afirmar que, no caso de varrimento helicoidal e dados o raio da trajetória  $r$  e a abertura do feixe  $\Gamma$ , a resolução no plano transversal depende unicamente dos parâmetros  $q$  e  $p$ , continuando válidas as condições indicadas na secção 5.1.2. No entanto, a questão da resolução na direcção longitudinal é, como vimos na secção 3.3.2, bastante mais complexa e dificilmente quantificável, resultando do compromisso entre o *pitch* ( $= \frac{d}{M\Delta\zeta}$  onde  $d$  é o passo da hélice,  $M$  o número de cortes e  $\Delta\zeta$  a espessura dos cortes), o algoritmo de interpolação longitudinal utilizado e o intervalo de reconstrução  $RI$  (isto é, a distância entre planos de reconstrução).

Como já se adiantou na secção 3.3, devido à sua influência na qualidade da imagem, o *pitch* constitui um parâmetro essencial na definição de um protocolo de aquisição com varrimento helicoidal. Uma questão frequentemente abordada nos estudos sobre tomografia helicoidal é a determinação do valor óptimo de *pitch*, ou seja do valor de *pitch* que mais favorece a qualidade da imagem (em termos de resolução longitudinal, ruído e razão sinal/ruído) dada a especificidade da geometria do sistema e o algoritmo de interpolação escolhido. Por exemplo, utilizando um modelo da tomografia helicoidal monocorte, que permitia tomar em consideração o tipo de algoritmo de interpolação e as características geométricas e físicas do sistema, Wang conseguiu deduzir analiticamente [137, 139] o valor óptimo para este parâmetro resolvendo os seguintes problemas de optimização:

- dado o volume por analisar e um nível máximo para o desvio padrão do ruído de imagem, minimizar a espessura de corte
- dado o volume por analisar e uma espessura de corte, minimizar o ruído de imagem
- dado o volume por analisar, minimizar o produto da espessura de corte e do ruído de imagem (que permite encontrar um compromisso entre as duas exigências contrastantes e corresponde à maximização da razão sinal/ruído).

O estudo levado a cabo por Wang permitiu demonstrar que, para um determinado modelo do sistema (incluindo o algoritmo de interpolação longitudinal), o valor de *pitch* que resolve estes problemas de optimização é único. No caso do modelo por ele definido, em que a interpolação longitudinal realiza-se pelo algoritmo 180°LI, este valor é  $\sqrt{2}$ , enquanto, por exemplo, utilizando o algoritmo 360°LI o valor óptimo de *pitch* seria  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . No caso de sistemas mais complexos (por exemplo, multicorte ou utilizando algoritmos de reconstrução completamente 3D), torna-se mais difícil modelar o problema de forma a poder determinar analiticamente o valor óptimo de *pitch*. Nestes casos a escolha do valor óptimo deste parâmetro realiza-se experimentalmente.

## 7.2 Abordagem 2D

A abordagem bidimensional implica, para cada imagem a ser reconstruída, a síntese (a partir dos dados adquiridos pelo varrimento helicoidal) de um sinograma correspondente ao que seria obtido por varrimento convencional no plano da imagem. Dado que, uma vez sintetizado o sinograma, a imagem será reconstruída utilizando um dos algoritmos 2D descritos



nos capítulos 5 e 6, nesta secção consideraremos apenas os diferentes algoritmos utilizados para a síntese do sinograma, designados por algoritmos de interpolação longitudinal ou de interpolação longitudinal.

No caso de aquisição multicorte a abordagem bidimensional não considera a inclinação dos cortes relativamente ao plano transversal. Os diferentes cortes de uma projecção adquirida com o foco em  $z = z_h$  (indicados pelo índice  $k = 1, \dots, M$ ) são considerados como se estivessem definidos em planos transversais de coordenada longitudinal igual à coordenada com a qual intersectam o eixo  $z$  (isto é,  $z = z_h + \zeta_k$ ). Esta aproximação afecta principalmente os cortes periféricos do feixe e faz com que a abordagem bidimensional se adequa apenas ao caso de um número limitado de cortes dependendo da espessura de corte e do algoritmo de interpolação longitudinal utilizado.

### 7.2.1 Interpolação longitudinal

O varrimento helicoidal fornece um único conjunto de dados obtidos analisando o volume num determinado número de voltas do emissor de raios X ao longo de uma trajectória helicoidal. Neste contexto, a interpolação longitudinal é o procedimento que, a partir deste conjunto de dados "volumétrico", permite calcular um conjunto de dados "planar" (um sinograma) para a reconstrução de uma imagem correspondente a um determinado plano transversal. Isto é, uma vez seleccionado um valor  $z$  ao longo do eixo longitudinal correspondente ao corte que se pretende reconstruir, sintetiza-se um conjunto de dados que aproxime, quanto melhor possível, aquele que teria sido obtido por TAC convencional naquela posição longitudinal.

Nos parágrafos que seguem, descrevemos os métodos de interpolação longitudinal mais utilizados, baseados em interpolação linear e descritos em [60]. Existem também algoritmos baseados em interpolação de ordem superior e alguns, como o  $180^\circ\text{LW}$  (*Linear Weighting*) nos quais, em vez de se gerar um conjunto de dados planar, os dados volumétricos são pesados, filtrados e retroprojectados sem interpolação explícita. Os algoritmos de ordem mais elevada conseguem melhorar o perfil de sensibilidade do corte mas podem, em contrapartida, afectar a sensibilidade ao ruído e a qualidade da imagem.

Começaremos pela descrição dos principais métodos de interpolação linear aplicáveis a dados obtidos com varrimento de corte único (360 LI, 180 LI) para depois passarmos a métodos aplicáveis ao caso de dados adquiridos com varrimento multicorte (360-180 MLI, 180 MFI).

#### Interpolação linear, 360 LI

Neste algoritmo (também conhecido por FI -*Full scan with Interpolation*- [138]), os valores utilizados para a interpolação linear correspondendo a uma determinada coordenada longitudinal  $z_r$  e posição angular  $\beta_i$ , são os valores medidos na mesma posição angular nas duas rotações contíguas à posição longitudinal  $z_r$  (fig. 7.1-a). O algoritmo deve o seu nome ao facto que estes valores são medidos em posições separadas exactamente por  $360^\circ$  de rotação.

Dada uma posição de reconstrução  $z_r$ , a fórmula que permite calcular a projecção para cada posição angular  $\beta_i$  no plano transversal de coordenada  $z_r$  é:

$$\mathcal{D}(\beta_i, \gamma) = (1 - w) \cdot \mathcal{D}_l(\beta_i, \gamma) + w \cdot \mathcal{D}_{l+1}(\beta_i, \gamma) \quad (7.6)$$

onde indicámos com  $\mathcal{D}_l(\beta_i, \gamma)$ ,  $\beta_i \in [0, 2\pi[$ ,  $\gamma \in [-\frac{\Gamma}{2}, \frac{\Gamma}{2}]$ , o conjunto de dados projecção correspondente à  $l$ -ésima rotação do foco, sendo  $l$  o número da última passagem (rotação) do

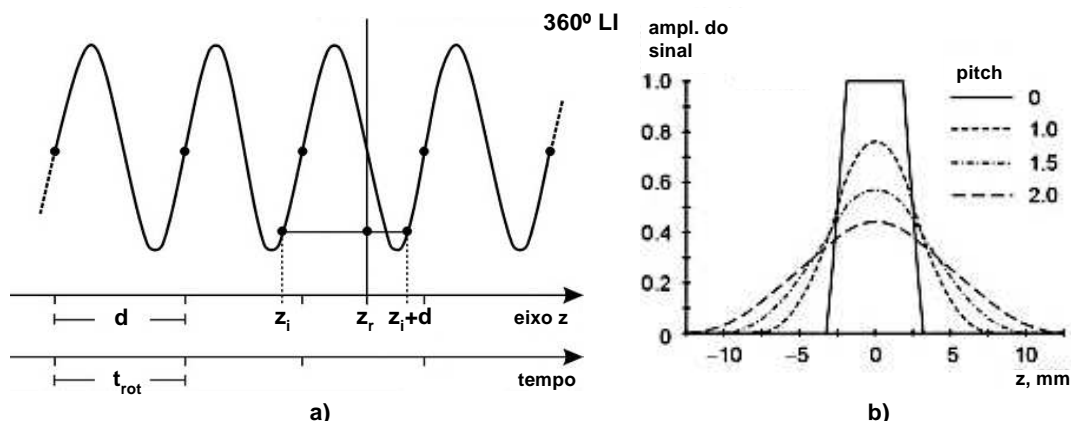


Figura 7.1: 360 LI. a) Para cada posição angular  $\beta_i$ , realiza-se a interpolação linear entre os valores adquiridos nas posições longitudinais  $z_i$  e  $z_i + d$ . b) Alargamento do perfil de sensibilidade de secção para diferentes valores de *pitch* (exemplo com largura nominal de secção 5 mm) [61].

tubo pelo ângulo  $\beta_i$  antes que seja atingida a posição longitudinal  $z_r$ . O valor do peso  $w$  é dado por:

$$w = \frac{z_r - z_i}{d} \quad (7.7)$$

onde  $z_i$  é a posição longitudinal na qual é obtida a projecção  $\mathcal{D}_l(\beta_i, \gamma)$  e  $d$  é o deslocamento da maca por cada rotação.

Este algoritmo, caracterizado pela extrema simplicidade de implementação e robustez em relação ao ruído, tem, em contrapartida, a desvantagem de alargar notavelmente o perfil de sensibilidade do corte. Neste caso, a largura da função triangular que representa o movimento da maca no cálculo da SSP (secção 3.3.2) é igual a  $2d$ , tornando impraticável, devido à espessura de corte excessiva, o uso deste método de interpolação para valores de *pitch* elevados (fig. 7.1-b).

### Interpolação linear, 180 LI

Este método tira partido do facto que numa rotação de  $360^\circ$ , se o número de posições angulares e de elementos de detecção considerados for suficientemente elevado, é possível dizer-se que são exploradas duas vezes as mesmas direcções. Assim, seguindo o esquema geométrico ilustrado na figura 7.2, é possível sintetizar uma projecção completa para uma posição angular arbitrária  $\beta + \pi$  a partir das projecções medidas num intervalo de rotação angular de  $2\Gamma$  (onde  $\Gamma$  é o ângulo do *fan beam*) centrado em  $\beta$ . Repetindo o cálculo para todas as posições angulares  $\beta$ , obtem-se um conjunto de dados correspondente a uma trajectória helicoidal virtual (designada por "complementar") tendo um atraso angular de  $180^\circ$  em relação à espiral medida. Utilizando a informação contida nas projecções medidas e nas complementares, na interpolação linear podem ser considerados valores correspondentes a posições separadas por apenas  $180^\circ$  de rotação, ou seja por uma distância longitudinal de  $\frac{d}{2}$  (fig. 7.3). Em geral, os algoritmos baseados neste princípio são conhecidos por algoritmos de  $180^\circ$ , nomeadamente, no caso de interpolação linear o algoritmo é chamado de 180 LI (o algoritmo mais utilizado), ou HI –*Half scan with Interpolation*– na notação de Wang.

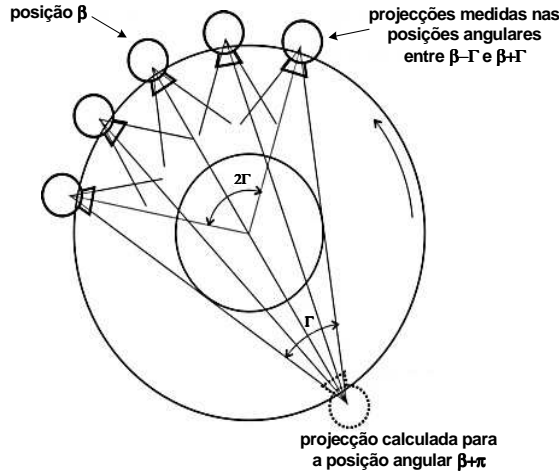


Figura 7.2: A projecção complementar em  $\beta + \pi$  (adaptado de [61])

Em condições ideais, a geometria dos feixes apresenta simetrias que permitem determinar de maneira simples as amostras de cada projecção complementar. Repare-se (fig. 7.2) como o  $j$ -ésimo raio da projecção por calcular (que forma um ângulo  $\gamma_j$  com o eixo central do feixe) intersecta o círculo do lado oposto num ponto correspondente à posição angular  $\beta + 2\gamma_j$ . Admitindo que exista uma projecção correspondendo a essa posição angular, o raio de índice  $-j$  desta projecção forma com o eixo central do feixe um ângulo  $-\gamma_j$  e coincide com o raio  $j$  da projecção complementar. Neste caso, indicando com  $\mathcal{D}^m$  a projecção medida, a fórmula geral para o cálculo da  $j$ -ésima amostra da projecção complementar  $\mathcal{D}^c$  será simplesmente:

$$\mathcal{D}^c(\beta + \pi, \gamma_j) = \mathcal{D}^m(\beta + 2\gamma_j, \gamma_{-j}). \quad (7.8)$$

Caso não exista uma projecção medida na posição angular  $\beta + 2\gamma_j$ , para determinar o valor da amostra complementar será necessário introduzir uma forma de interpolação (por exemplo, interpolação linear entre os valores das amostras  $(-j)$ -ésimas das duas projecções adquiridas nas posições angulares mais próximas de  $\beta + 2\gamma_j$ ).

Uma vez calculadas as projecções complementares, o sinograma em  $z = z_r$  pode ser sintetizado considerando, na interpolação, tanto as amostras medidas como as complementares. Cada projecção de sinograma, à qual corresponde uma determinada posição angular  $\beta_i$ , é obtida interpolando as duas projecções (medida e complementar), correspondentes à mesma posição angular, mais próximas da posição  $z_r$ . Se indicarmos com  $z_i$  e  $z'_i$  as coordenadas longitudinais nas quais se verificam as últimas passagens das trajectórias, respectivamente, efectiva (na  $l$ -ésima rotação) e complementar (na  $l'$ -ésima rotação) pela posição angular  $\beta_i$  antes que seja atingida a coordenada longitudinal  $z_r$ , a interpolação deverá ser efectuada entre as projecções correspondentes às coordenadas mais próximas de  $z_r$  entre  $z_i$ ,  $z'_i$ ,  $z_i + d$  e  $z'_i + d$ . Por exemplo, na figura 7.3, as projecções a interpolar serão a complementar  $\mathcal{D}_{l'}^c(\beta_i, \gamma)$ , correspondente à coordenada longitudinal  $z'_i$ , e a medida  $\mathcal{D}_{l+1}^m(\beta_i, \gamma)$ , correspondente à coordenada longitudinal  $z_i + d$ .

Em geral, para o cálculo da projecção  $\mathcal{D}(\beta_i, \gamma)$  será necessário distinguir os dois casos:

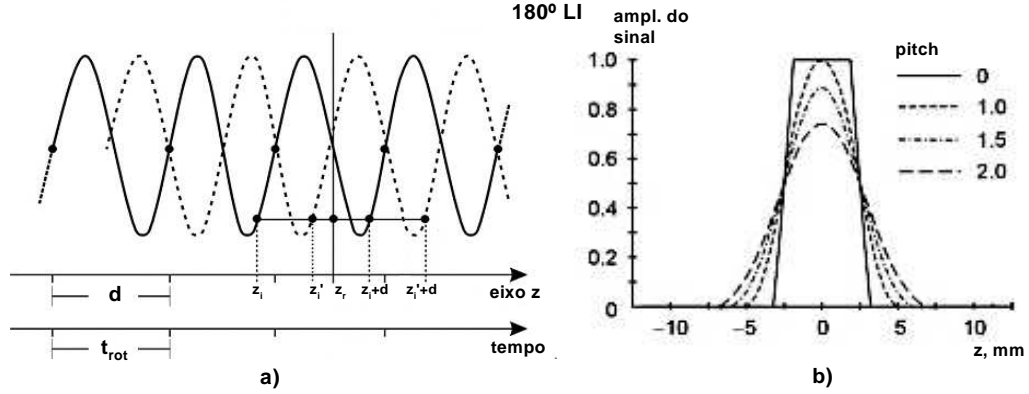


Figura 7.3: 180 LI. a) Para cada posição angular  $\beta_i$ , realiza-se a interpolação linear entre as projecções correspondentes à mesma posição angular mais próximas de  $z_r$ . b) Alargamento do perfil de sensibilidade de secção para diferentes valores de  $pitch$  (exemplo com largura nominal de secção 5 mm) [61].

- $z'_i > z_i$  (interpolação entre projecções nas posições long.  $z'_i$  e  $z_i + d$ )

$$\mathcal{D}(\beta_i, \gamma) = (1 - w)\mathcal{D}_{l'}^c(\beta_i, \gamma) + w\mathcal{D}_{l'+1}^m(\beta_i, \gamma)$$

onde  $w = \frac{z_r - z'_i}{d/2}$ .

- $z_i > z'_i$  (interpolação entre projecções nas posições long.  $z_i$  e  $z'_i + d$ )

$$\mathcal{D}(\beta_i, \gamma) = (1 - w)\mathcal{D}_l^m(\beta_i, \gamma) + w\mathcal{D}_{l'+1}^c(\beta_i, \gamma)$$

onde  $w = \frac{z_r - z_i}{d/2}$ .

No algoritmo 180 LI, a largura da função triangular que representa o movimento da maca no cálculo do perfil de sensibilidade de corte é igual ao deslocamento da maca por rotação  $d$  o que, em comparação com o algoritmo 360 LI, permite reduzir o alargamento da SSP (fig. 7.3-b). Devido a esta característica, os algoritmos 180° permitem melhorar significativamente a qualidade da imagem na direcção longitudinal, no entanto, dado que a reconstrução se baseia num número inferior de amostras, os algoritmos de 180° são mais sensíveis ao ruído relativamente aos de 360°. Nomeadamente, em relação ao caso de aquisição sequencial, os algoritmos 360° permitem uma redução do desvio padrão do ruído de  $\sqrt{2/3}$ , enquanto os de 180° implicam um aumento de  $\sqrt{4/3}$  [61].

### Interpolação linear para multicorte: 360 e 180 MLI

No caso de aquisição multicorte, os algoritmos de interpolação 360 e 180 MLI representam uma natural extensão dos algoritmos 360 LI e 180 LI. Aqui descrevemos apenas o algoritmo 180 MLI que, analogamente ao que acontece no caso mono-corte, permite reduzir a largura da SSP sendo, por isso, mais utilizado.

No algoritmo 180 MLI, para cada um dos  $M$  conjuntos de dados adquiridos em espiral calcula-se (tal como no caso mono-corte) o conjunto de dados complementar. Na figura 7.4

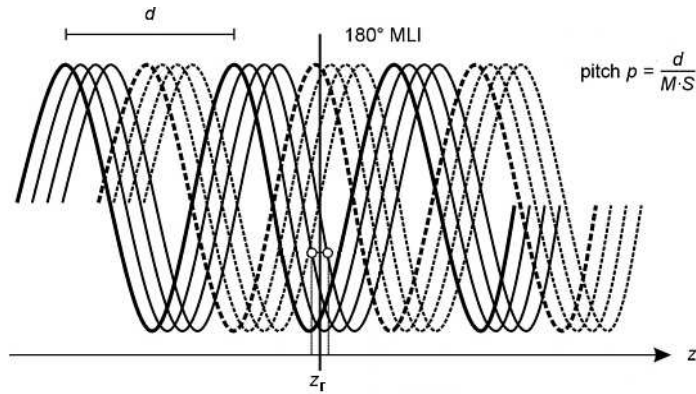


Figura 7.4: 180 MLI. Para cada posição angular  $\beta_i$  calcula-se uma projecção por interpolação linear das duas projecções mais próximas (escolhidas entre as medidas e as complementares) correspondentes à mesma posição angular do foco [61].

representam-se graficamente com linhas contínuas os  $M$  conjuntos de dados medidos ( $M = 4$ ) e com linhas traçadas os  $M$  conjuntos de dados complementares.

Tal como no algoritmo 180 LI, uma vez calculadas as projecções complementares, para cada coordenada longitudinal  $z_r$  em relação à qual se pretenda reconstruir uma imagem, sintetiza-se um sinograma considerando, na interpolação, tanto as amostras medidas como as complementares. Para cada posição angular da fonte  $\beta_i$ , no plano  $z = z_r$ , sintetiza-se uma projecção interpolando apenas as duas projecções longitudinalmente mais próximas entre todas as projecções medidas e calculadas correspondendo à posição angular  $\beta_i$ .

Note-se que no algoritmo 180 MLI (assim como no 360 MLI) a distância longitudinal entre as duas projecções utilizadas na interpolação não é constante. Caso as duas projecções pertençam a dois cortes adjacentes do mesmo conjunto de dados (medido ou complementar) como no caso ilustrado na figura 7.4, a distância será igual à espessura de corte  $S$ . No entanto, caso as duas projecções pertençam, por exemplo, uma ao corte  $M$  do conjunto de dados medido e a outra ao corte 1 do conjunto de dados complementar, a distância será  $\frac{d}{2} - (M - 1)S$ . Esta variabilidade torna mais difícil determinar analiticamente os efeitos que o varrimento helicoidal multicorte, associado com o algoritmo de interpolação longitudinal 180 MLI, tem no perfil de sensibilidade de corte. A avaliação da SSP resultante será efectuada, neste caso, por via experimental.

### Filtragem longitudinal para multicorte: 360-180 MFI, AAI

Uma abordagem alternativa à interpolação consiste na aplicação de um filtro "longitudinal", centrado na coordenada longitudinal do plano da imagem, ao conjunto de todas as projecções correspondentes a uma determinada posição angular (fig. 7.5). A escolha, que pode ser interactiva, da largura da função de filtragem permite estabelecer a espessura nominal de corte (largura a meia altura da SSP) enquanto a sua forma determina o peso que cada projecção deve ter em função da sua distância longitudinal do plano de reconstrução.

No caso do algoritmo 180 MFI, começa-se pelo cálculo dos  $M$  conjuntos de dados complementares, para depois passar à síntese do sinograma onde, para cada posição angular  $\beta_i$  é obtida uma projecção filtrando todas as projecções, medidas e complementares, correspon-

dentos àquela mesma posição angular.

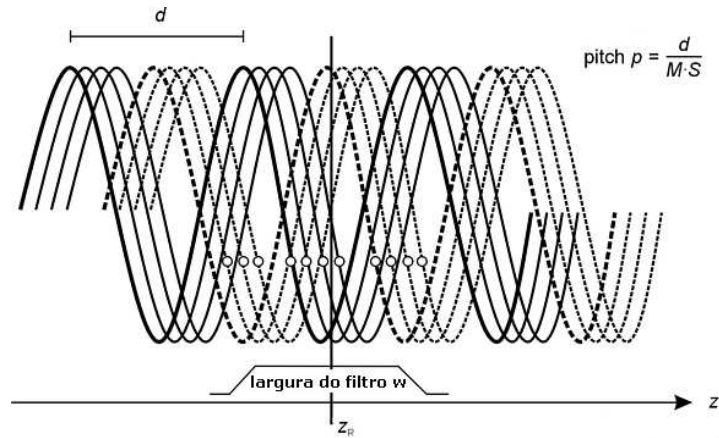


Figura 7.5: 180 MFI. Para cada posição angular  $\beta_i$  aplica-se um filtro longitudinal a todas as projecções, medidas e complementares, correspondentes à mesma posição angular [61].

Este tipo de abordagem, apesar de aplicável também ao caso de aquisição mono-corte, torna-se particularmente atractiva com o aumentar do número de cortes dado que, neste caso, tende a aumentar a densidade longitudinal de amostras mesmo que o volume a analisar seja extenso. Ainda, a possibilidade de variar a espessura nominal de corte (e com esta influenciar o nível de ruído e a resolução longitudinal) permite adaptar a qualidade da reconstrução à aplicação específica tendo contribuído para que a técnica de filtragem longitudinal (com algumas variantes [53, 129]) seja actualmente a mais utilizada nos sistemas comerciais até aos 4 cortes.

Entre as técnicas que podem ser consideradas variantes deste tipo de abordagem, mencionamos a AAI –*Adaptive Axial Interpolation*– [115, 37] que inclui, numa primeira fase do algoritmo, um *rebinnning* parcial das projecções cónicas, realizado independentemente para cada corte tal como acontece no algoritmo MFR (pag. 118), obtendo um conjunto de projecções paralelas multicorte virtualmente adquiridas com um varrimento helicoidal (fig. 7.6). Nas projecções paralelas multicorte virtuais, cada corte é caracterizado pela mesma inclinação (ângulo cónico) do correspondente corte do feixe cónico, no entanto as amostras do mesmo corte não são uniformemente espaçadas e correspondem a diferentes posições longitudinais. Neste caso, sem necessidade de cálculo de projecções complementares, a interpolação longitudinal realiza-se por filtragem (realizada de forma análoga à dos algoritmos 360 e 180 MFI) das projecções paralelas multicorte, obtendo um sinograma paralelo em correspondência de cada posição longitudinal na qual se pretenda reconstruir uma imagem.

### 7.3 Abordagem 2-3D

Com o aumento do número de cortes aumenta o erro que se introduz omitindo a sua inclinação relativamente ao plano transversal e a conseqüente falta de consistência dos dados leva a acentuar de artefactos conhecidos por artefactos de feixe cónico.

Até um certo limite (16 cortes) é possível tomar em consideração a inclinação dos cortes evitando, contudo, o recurso a algoritmos de reconstrução completamente 3D, caracterizados

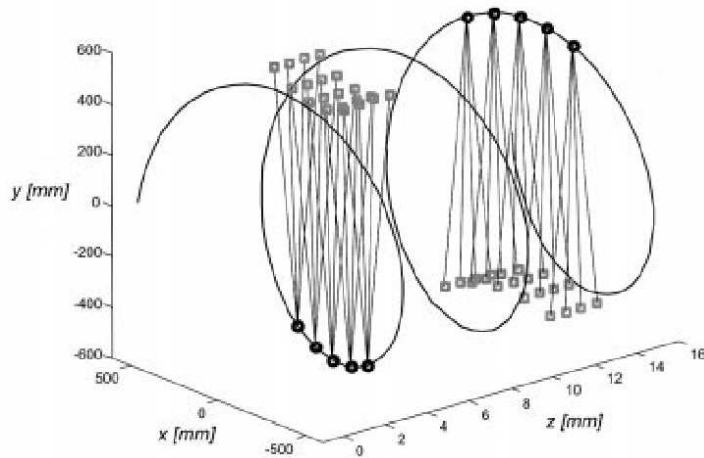


Figura 7.6: Projecções paralelas multicorte obtidas através de rebinning parcial das projecções cónicas adquiridas em espiral (algoritmos AAI e MFR) [115].

pelo elevado peso computacional.

Tipicamente, este tipo de abordagem, que designaremos por 2-3D (alguns autores utilizam a designação 2.5D), consiste na reconstrução em planos inclinados (ou hiperplanos) escolhidos de forma a minimizar a distância entre o plano de reconstrução e a trajectória helicoidal. Sucessivamente, as imagens em planos transversais são obtidas interpolando as imagens correspondentes aos planos inclinados (ou hiperplanos) de reconstrução mais próximos.

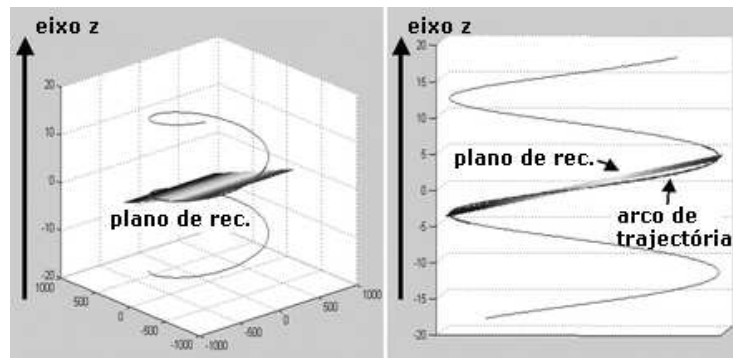


Figura 7.7: Algoritmo ASSR: representação gráfica de um plano de reconstrução inclinado e do arco de trajectória helicoidal que deve ser considerado na reconstrução da respectiva imagem.

Por exemplo, no algoritmo ASSR –*Advanced Single-Slice Rebinning*– proposto por Kachelrieß *et al.* [57], uma vez escolhido um determinado número de pontos ao longo da trajectória helicoidal do foco, a cada ponto (de posição angular  $\beta_R$ ) associa-se um plano de reconstrução cuja inclinação é escolhida de forma a minimizar a máxima distância longitudinal entre o plano e um arco da trajectória helicoidal centrado em  $\beta_R$  e de  $\pi + \Gamma$  radianos (fig. 7.7). Utilizando as projecções cónicas adquiridas ao longo deste arco de trajectória (conceito de varrimento breve), o objectivo do algoritmo é de obter, para cada plano de reconstrução inclinado, um

sinograma paralelo a partir do qual se pode reconstruir a respectiva imagem. Entre as possíveis técnicas para a síntese deste sinograma, os autores sugerem a selecção, em cada projecção cónica, de uma projecção divergente correspondente à intersecção entre o plano do detector e o plano de reconstrução, seguida pelo *rebinning* do conjunto de projecções divergentes assim obtido. Por último, as imagens em planos transversais são obtidas por interpolação das imagens nos planos inclinados mais próximos (fig. 2.13) [57]. Em [10], propõe-se uma extensão do algoritmo ASSR, designada por ESSR –*Extended Single Slice Rebinning*–, recorrendo à filtragem longitudinal para a determinação do sinograma no plano de reconstrução e realiza-se um estudo comparativo entre os métodos MFR (pag. 118) e ESSR chegando à conclusão que este último algoritmo, graças à introdução da reconstrução em planos inclinados, permite obter imagens de qualidade bastante superior, comparável (até 46 cortes,  $d = 64\text{mm}$ ) com a qualidade obtida com um varrimento helicoidal de corte único ( $pitch = 1.5$  e interpolação longitudinal  $180LI$ ). Dado que o peso computacional do algoritmo ASSR é dominado pela retro projecção nos planos inclinados e que, como foi demonstrado em [57], para a reconstrução de um determinado volume o algoritmo ASSR requer aproximadamente o mesmo número de reconstruções por espessura de corte necessário nos algoritmos 2D baseados na interpolação longitudinal, pode-se afirmar que o peso computacional deste algoritmo é apenas ligeiramente superior ao dos algoritmos 2D devido à presença dos processos de rebinning e de interpolação no domínio da imagem. Uma outra característica interessante do algoritmo ASSR consiste na sua elevada resolução temporal ( $\sim t_{rot}/2$ ), dado que cada imagem inclinada é obtida a partir de um varrimento breve.

Uma limitação do algoritmo ASSR consiste no facto que, apesar de poder ser teoricamente aplicado independentemente do valor de  $pitch$   $p$ , o desempenho óptimo obtém-se com  $p = 1.5$  enquanto com valores de  $pitch$  superiores degrada-se a qualidade da imagem e com valores inferiores reduz-se a taxa de utilização da dose. Esta limitação é ultrapassada pelo algoritmo AMPR –*Advanced Multiple Plane Reconstruction*– [116], cujo desempenho não depende do valor de  $pitch$ . Neste algoritmo, dado um valor de  $pitch$  e uma posição longitudinal de reconstrução  $z_R$ , observa-se que o plano  $z = z_R$  é atravessado por raios projecção que pertencem a projecções cónicas num arco de trajectória helicoidal de  $[-\alpha_{max}, \alpha_{max}]$  radianos, com  $\alpha_{max} = M\pi/p$ , sendo  $M$  o número de cortes e  $p$  o  $pitch$ . Divide-se este segmento de trajectória em  $n_{ima}$  segmentos parcialmente sobrepostos de  $\pi + \Gamma$  radianos (separados por um máximo de  $\pi$  radianos) e, para cada um dos  $n_{ima}$  segmentos, reconstrói-se uma imagem num plano que passa pelo ponto de intersecção entre a trajectória e o plano  $z = z_R$  e cuja inclinação é escolhida de forma a minimizar a sua distância longitudinal com o respectivo arco de trajectória. De forma equivalente, pode-se dizer que cada arco de trajectória de  $\pi + \Gamma$  radianos é utilizado para a reconstrução de  $n_{ima}$  imagens em planos com diferente posição longitudinal e inclinação. Uma escolha oportuna de  $n_{ima}$  e da inclinação dos planos (neste caso, tanto em torno do eixo do feixe na posição central do arco como segundo a direcção ortogonal ao eixo) permite otimizar a taxa de utilização da dose aplicada. A reformatação necessária para a obtenção de imagens transversais realiza-se com as mesmas técnicas de interpolação utilizadas no algoritmo ASSR.

Para melhorar ainda mais a qualidade da imagem e o aproveitamento da dose, Stierstorfer *et al.* propõem o algoritmo SMPR –*Segmented Multiple Plane Reconstruction*– [127], que se baseia num esquema de reconstrução alternativo. Uma vez dividida a trajectória helicoidal em pequenos segmentos parcialmente sobrepostos (correspondentes, por exemplo, a um arco de  $20^\circ$ ), realiza-se o *rebinning*, corte a corte, das projecções cónicas correspondentes a cada arco de trajectória, obtendo pequenos conjuntos de projecções paralelas que são filtradas e



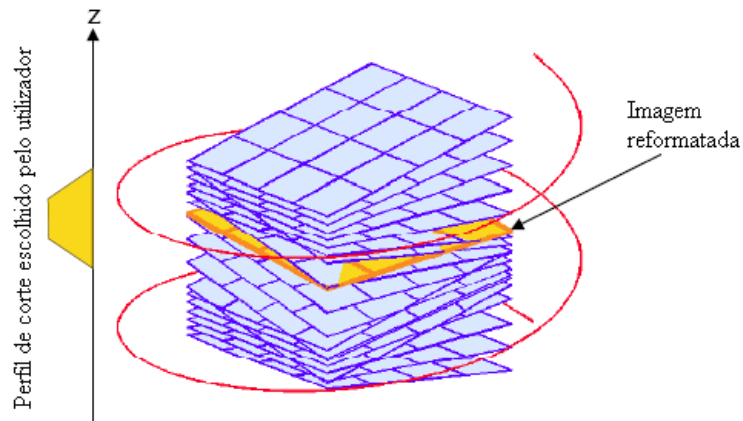


Figura 7.8: No algoritmo AMPR são reconstruídas  $n_{ima}$  imagens correspondentes a múltiplos planos inclinados para cada arco de trajectória de  $[-\alpha_{max}, \alpha_{max}]$  radianos.

retroprojectadas para o plano que melhor aproxima a trajectória e a inclinação do respectivo corte. Desta forma, obtém-se, para cada arco de trajectória, uma pilha de segmentos de imagem com diferente inclinação, assim como se ilustra na figura 7.9. Dado um plano transversal de reconstrução, para cada arco no intervalo  $[0, \pi]$ , calcula-se o respectivo segmento de imagem filtrando longitudinalmente todos os segmentos de imagem correspondentes àquele arco (e ao complementar) e, por fim, reconstrói-se a imagem juntando as contribuições dos segmentos de imagem.

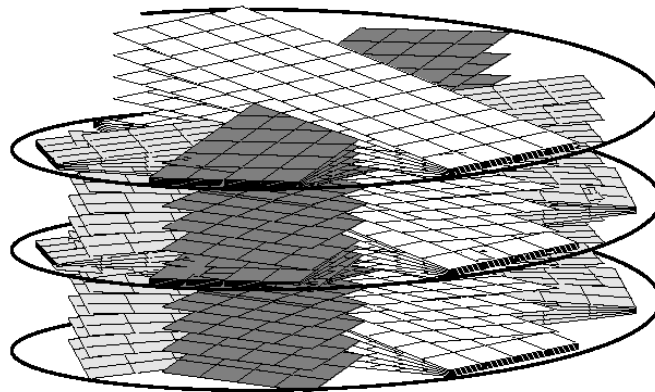


Figura 7.9: Segmentos de imagem obtidos retroprojectando os dados correspondentes a pequenos arcos de trajectória no algoritmo SMPR [127].

Um aspecto interessante do algoritmo SMPR é que constitui um elo de ligação entre os algoritmos 2-3D e o algoritmo de Feldkamp adaptado à trajectória helicoidal (descrito na secção 7.4 dedicada aos algoritmos completamente 3D). De facto, considerando arcos de trajectória cada vez mais pequenos obtemos, ao limite, segmentos de imagem constituídos pela retroprojectação de apenas uma projecção paralela e o algoritmo, proposto em [128], resulta ser equivalente ao algoritmo de Feldkamp para trajectória helicoidal sendo designado por

### Weighted FBP.

Uma abordagem alternativa encontra-se descrita no trabalho de Hsieh *et al.* [52, 50, 51, 49] que propõem a utilização de hiperplanos convexos de reconstrução em forma de duplo cone (fig. 7.10). O método de Hsieh, conhecido por WHR – *Weighted Hyperplane Reconstruction* – tira proveito da amostragem redundante, que se verifica especialmente no caso de baixos valores de *pitch*, através da introdução de subconjuntos de linhas de detectores que resultam suficientes para a reconstrução de uma imagem. Por exemplo, num determinado sistema de 16 cortes, com um *pitch* de 0.5 são suficientes os dados adquiridos por nove linhas de detectores. Assim, para uma determinada posição longitudinal podem ser reconstruídas múltiplas imagens (uma utilizando os dados adquiridos pelas linhas 1-9, outra pelas linhas 2-10, etc.) a partir das quais, por média ponderada, calcular a imagem final.

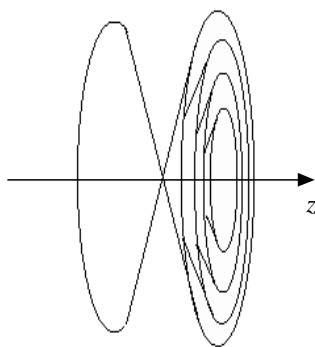


Figura 7.10: Hiperplanos convexos de reconstrução utilizados no algoritmo WHR. O ângulo que define os cones é, na realidade, muito mais aberto, de forma a que a distância entre as bases dos cones é apenas uma pequena fracção da espessura da secção [52].

Por último, mencionamos uma família de algoritmos, conhecidos por *PI-methods* (*PI-original* [19], *n-PI* [104], *PI-SLANT* [135], etc), que permite a reconstrução de imagens de elevada qualidade mas apenas a partir de dados adquiridos com uma geometria de aquisição específica. Segundo esta geometria, o detector, designado por *PI-detector*, deve ajustar-se (sendo utilizada para o efeito uma janela de colimação) à janela de Tam [130], ou seja à área entre duas voltas consecutivas da hélice (como se representa na figura 7.11), garantindo a existência de um conjunto de dados idealmente completo e não redundante. Similarmente, nos métodos *n-PI*, com *n* ímpar, o *n-PI-detector* ajusta-se a *n* vezes a janela de Tam (área entre *n + 1* voltas da hélice). Em geral, podemos dizer que estes algoritmos baseiam-se no *rebinning* das projecções cónicas para projecções paralelas em planos oblíquos e na retroprojecção filtrada (que pode ser 2D ou 3D) destas últimas sendo utilizadas várias técnicas de filtragem. Apesar da elevada qualidade dos resultados, a pouca flexibilidade da geometria de aquisição faz com que estes métodos não tenham sido utilizados nos sistemas desenvolvidos para aplicações médicas. Por isto, e dada a complexidade desta família de métodos optamos não entrar em detalhes. Uma excelente e completa revisão pode ser encontrada em [134].

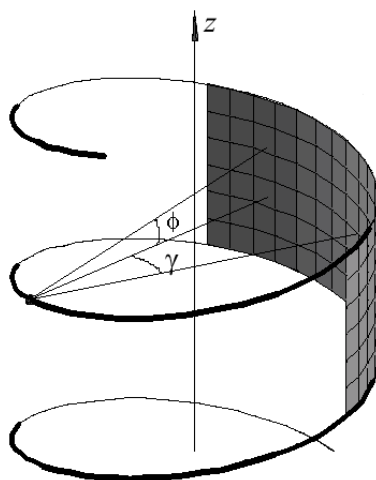


Figura 7.11: Representação gráfica do PI-detector, ajustado à janela de Tam, utilizado nos PI-methods (adaptado de [134])

## 7.4 Abordagem 3D

Tal como no caso de trajectória circular da fonte, os algoritmos de reconstrução 3D para geometria cónica e trajectória helicoidal podem ser fundamentalmente enquadrados nas classes de algoritmos exactos e aproximados, onde os primeiros derivam das fórmulas que permitem relacionar as projecções cónicas com a transformada de Radon 3D (nomeadamente, a fórmula de Grangeat) e consistem na implementação numérica de uma expressão analítica para a solução do problema da reconstrução, enquanto os segundos baseiam-se numa abordagem aproximada logo à partida e incluem os algoritmos 2-3D apresentados na secção anterior.

### 7.4.1 Algoritmos exactos

A trajectória helicoidal satisfaz a condição de Smith, sendo possível, teoricamente, a reconstrução 3D exacta da função objecto através de algoritmos como o de Radon (descrito na secção 5.3.2) oportunamente adaptado para esta trajectória. Todavia, nas aplicações médicas (entre outras), verifica-se uma insuficiente cobertura longitudinal do objecto, devido à extensão limitada da trajectória helicoidal relativamente ao comprimento do objecto e ao facto de que o detector fornece projecções não truncadas apenas na direcção transversal e truncadas na direcção longitudinal. Esta limitação, bem enquadrada do ponto de vista teórico como problema do "long object", tem sido alvo de inúmeros estudos dado que existe um grande interesse do ponto de vista prático para o desenvolvimento de algoritmos de reconstrução capazes de lidar com este problema. Como resultado, têm sido propostos vários algoritmos (alguns exactos, outros quase exactos) para a reconstrução do long object (ou melhor, de um volume de interesse pertencente ao long object), entre os quais destacam-se os que têm como ponto de partida a generalização da fórmula de Grangeat para projecções cónicas truncadas, proposta por Tam [131] e aplicada ao caso particular da aquisição helicoidal. A ideia de Tam consiste no cálculo da transformada de Radon 3D não a partir de uma única projecção cónica (como no algoritmo de Radon 5.3.2) mas de uma combinação de várias projecções, o que fornece uma espécie de triangulação do plano que permite a utilização de projecções truncadas. O

algoritmo proposto tinha algumas limitações entre as quais o facto de que as projecções cónicas eram consideradas em conjunto (não sequencialmente) e que se supunha como condição fundamental a utilização do detector de Tam (ou *PI-detector*, descrito na secção anterior) resultando num algoritmo computacionalmente pesado e pouco flexível.

Kudo *et al.* [75] introduzem algumas melhorias no algoritmo de Tam e conseguem adaptá-lo de forma a considerar as projecções cónicas sequencialmente, filtrando-as com um filtro 2D espacialmente variável e reprojectando-as, similarmente ao que acontece no algoritmo CB-FBP para trajectória de aquisição circular (sec. 5.3.2). Tanto no algoritmo de Tam como no de Kudo, tornava-se necessário complementar a trajectória helicoidal com duas trajectórias circulares no princípio e no fim da hélice, sendo possível reconstruir todo o volume de interesse delimitado pelo campo de visão cilíndrico e pelos planos das duas trajectórias circulares. Posteriormente, algoritmos propostos por Kudo *et al.* [76] e por Schaller *et al.* [114] (este último alegadamente exacto e designado por *PHI-method*) tornaram possível a reconstrução a partir de dados adquiridos ao longo de uma trajectória helicoidal apenas ligeiramente mais extensa relativamente ao volume de interesse, eliminando a necessidade das trajectórias circulares complementares.

Por fim, Katsevich [64, 65] propõe uma solução exacta e ao mesmo tempo eficiente para o problema do "long object". A implementação da fórmula de Katsevich pode ser classificada como retro projecção filtrada 3D, processando-se em dois passos: no primeiro as projecções cónicas são diferenciadas relativamente ao comprimento da trajectória helicoidal e filtradas com um filtro de Hilbert (especialmente invariante), enquanto, no segundo passo realiza-se a retro projecção 3D.

Um problema comum a todos os algoritmos até aqui mencionados, exactos e quase exactos, é a limitação no que se refere à forma do detector (*PI-detector*) que torna estes algoritmos pouco flexíveis na escolha do valor de *pitch* dado que, para valores de *pitch* diferentes do valor óptimo, diminui a eficiencia do algoritmo ou o aproveitamento da dose. Uma forma de ultrapassar esta limitação consiste no recurso a métodos aproximados que apresentam maior flexibilidade mas cujo desempenho, em termos de qualidade da imagem, piora com o aumentar do ângulo cónico ou do *pitch*.

## 7.4.2 Algoritmos aproximados

A pedra angular dos algoritmos aproximados é, sem dúvida, o algoritmo FDK (cuja versão original para trajectória circular da fonte encontra-se descrita na secção 5.3.1) adaptado para a trajectória de aquisição helicoidal (entre outras) em [146], [71] e [140]. Por exemplo, no algoritmo de Wang [140] (aplicável a uma trajectória genérica e especificado para a trajectória helicoidal em [111]) considera-se, em primeiro lugar, que um determinado *voxel* será interceptado por raios projecção pertencentes a diferentes projecções cónicas adquiridas com o foco na mesma posição angular, isto é, correspondendo a rotações consecutivas do foco, como se ilustra na figura 7.12 onde  $n_0$  é o índice de uma determinada posição angular e  $\lambda$  identifica as diferentes aquisições correspondentes a rotações sucessivas. Para cada *voxel* do volume por reconstruir e cada posição angular, escolhe-se o  $\lambda$  de forma a que os ângulos cónicos dos raios utilizados para a reconstrução do respectivo *voxel* sejam mais pequenos possível. Por exemplo, no caso da figura 7.13 e para a posição angular  $\beta_{n_0} = 0$ , ao *voxel*  $V_1$  associa-se  $\lambda = 0$  e ao *voxel*  $V_2$  associa-se  $\lambda = 1$ . Uma vez ponderadas as projecções bidimensionais (da mesma forma que no ponto 1 do algoritmo 5.3.1), a reconstrução procede como no algoritmo 5.3.1 com apenas algumas pequenas alterações nas fórmulas (ver [111]), que permitem retro projec-

tar em cada *voxel* apenas amostras obtidas por interpolação longitudinal da projecção cónica escolhida em correspondência de cada posição angular.

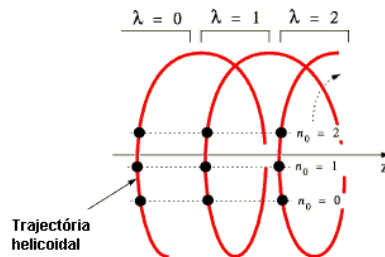


Figura 7.12: Na aquisição em espiral, um determinado voxel será interceptado por diferentes projecções correspondentes à mesma posição angular e rotações sucessivas do foco.

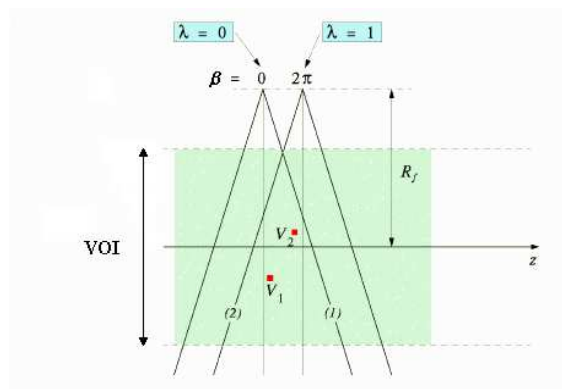


Figura 7.13: Escolha das amostras que devem ser utilizadas na reconstrução com o algoritmo FDK para trajectória helicoidal.

O algoritmo de Wang é caracterizado por algumas limitações relativas ao valor de *pitch* (que não pode ultrapassar um determinado valor), à forma como são interpoladas as amostras (que provoca desfocagem na direcção longitudinal) e à utilização da dose (que é escassa dado que, quando se escolhe uma determinada projecção para o cálculo da amostra a ser retro-projectada, as outras não são utilizadas). Para ultrapassar estas limitações, Shaller propõe o algoritmo CFBP (*Complementary Filtered Backprojection* [111]) que, recorrendo ao conceito de projecções complementares já ilustrado na secção anterior e a esquemas de interpolação mais sofisticados, consegue uma maior resolução longitudinal e um melhor aproveitamento da dose sem restrições ao valor de *pitch*.

Recentemente, têm sido propostas outras versões do algoritmo FDK com o objectivo de melhorar a eficiencia computacional (entre outros: [74, 150]), ou reduzir o arco de trajectória necessario para a reconstrução, como nos algoritmos para a reconstrução de volumes de interesse a partir de varrimento super breve propostos em [73] e [147].

Apesar da natureza não exacta, os algoritmos de tipo FDK têm sido muito utilizados

devido à elevada eficiência computacional (que se deve à utilização do filtro em rampa 1D) e à simplicidade na manipulação das projecções truncadas, todavia, dado que a aproximação introduzida aumenta com a abertura do feixe na direcção longitudinal afectando a qualidade das imagens reconstruídas, no caso de ângulos cónicos de maior amplitude poderá ser necessário o recurso a métodos exactos ou quase exactos.

### 7.4.3 Complexidade e desempenho

Um problema comum aos algoritmos completamente 3D consiste na elevada complexidade computacional, pois, independentemente do facto de alguns deles poderem ser implementados de forma mais eficiente, segundo o esquema típico da retro projecção filtrada, a realização da retro projecção 3D, faz com que a sua complexidade seja da ordem dos  $\mathcal{O}(N^4)$ . Por esta razão, a utilização destes algoritmos nos tomógrafos comerciais é limitada apenas ao caso de ângulos cónicos muito amplos, para os quais uma abordagem 2-3D seria insuficiente, e baseia-se na utilização de *hardware* dedicado.

Do ponto de vista da qualidade da reconstrução, os métodos exactos têm um desempenho elevado apenas em condições ideais (sem ruído, dados completos, no domínio contínuo) enquanto numa situação real (devido a ruído, discretização, falta de dados, interpolação, movimento do doente, limitações na dose, etc.) verifica-se uma notável degradação da qualidade da imagem. Assim, na prática, os métodos aproximados (entre os quais incluímos também os baseados na abordagem bi-dimensional descritos na secção anterior) continuam a ser preferidos, apresentando algumas vantagens interessantes entre as quais: maior resolução espacial e de contraste em exames de baixa dose, maior resolução temporal (devido ao facto que os métodos exactos necessitam de dados adquiridos com o foco em pontos longínquos da trajectória, enquanto os métodos aproximados baseiam-se apenas em dados adquiridos num varrimento completo ou num varrimento curto), maior eficiência computacional.



## Capítulo 8

# Um ambiente de simulação

Para podermos avaliar os algoritmos de reconstrução desenvolvidos, comparando-os com outros algoritmos descritos na literatura, tornava-se necessário desenvolver um ambiente de simulação que incluísse modelos anatómicos virtuais (digitais), ou "fantomas", e um simulador de TAC versátil que, com base nas características físicas e geométricas de um tomógrafo real, permitisse a aquisição virtual de dados projecção dos referidos fantomas, com trajectória circular ou helicoidal, e segundo os paradigmas mono- ou multi-corte.

A partir do fantoma, escolhido para o efeito (bi- ou tri-dimensionais, conforme o caso), o simulador de TAC iria fornecer um conjunto de dados projecção aos quais aplicar os diferentes métodos de reconstrução.

Após uma breve descrição dos fantomas considerados, este capítulo será centrado no desenvolvimento do simulador, no ambiente de computação e visualização MATLAB (versão 7.3) sobre um computador pessoal.

### 8.1 Fantomas

A principal razão para a utilização de fantomas virtuais na simulação do processo de aquisição deve-se ao facto de se conhecer *a priori* a "anatomia" e "fisiologia" do fantoma, sendo que este constitui uma referência para a avaliação da qualidade de imagens obtidas utilizando diferentes técnicas de aquisição e/ou reconstrução. Além disso, como veremos mais adiante, os fantomas podem ser facilmente alterados de forma a modelar diferentes anatomias e situações clínicas fornecendo uma ampla amostra de casos que em ambiente clínico seria eticamente e praticamente impossível de obter. Por outro lado, por mais sofisticados que sejam, os fantomas constituem modelos muito simples quando comparados com a complexidade da anatomia e fisiologia humana, pelo que para uma avaliação rigorosa de novas técnicas de reconstrução é indispensável a realização de testes com dados reais.

Entre os vários fantomas digitais disponíveis, escolhemos utilizar os clássicos fantomas de Shepp-Logan [124] (modificado de forma a aumentar o contraste entre diferentes objectos) e Herman [45], que representam idealmente cortes transversais da cabeça e são largamente utilizados para a avaliação de algoritmos de reconstrução 2D, e o fantoma dinâmico 4D MCAAT [121, 103] que reproduz de forma esquemática o torso humano, incluindo os principais órgãos e algumas características dinâmicas relacionadas com os ciclos respiratório e cardíaco.



### 8.1.1 Fantomas da cabeça de Shepp-Logan e de Herman

O fantoma da cabeça proposto por Shepp e Logan [124] consiste num anel elíptico maior, com coeficiente de atenuação elevado, que representa a caixa craniana e contém, no seu interior, um determinado número de elipses mais pequenas, algumas delas parcialmente sobrepostas e caracterizadas por diferentes valores de coeficiente de atenuação, que representam hipotéticas estruturas cerebrais. Cada elipse é definida geometricamente e caracterizada pela sua contribuição relativa ao valor do coeficiente de atenuação no seu interior, de forma que, em cada região do fantoma, o coeficiente de atenuação linear é dado pela soma das contribuições de todas as elipses que resultam sobrepostas nessa região.

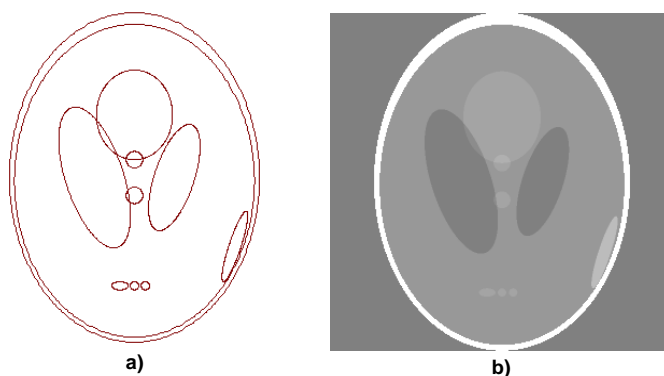


Figura 8.1: O fantoma 2D da cabeça de Shepp-Logan: a) definição geométrica do fantoma. b) imagem do fantoma (com ajuste da janela de visualização de forma a melhorar a visibilidade dos pormenores).

Este fantoma, do qual existe também uma versão 3D (SLP – *Shepp-Logan Phantom*) e uma versão 3D diferenciável (DSLPP – *Differentiable Shepp-Logan Phantom*) [149], tem um lugar de destaque na história da tomografia tendo sido utilizado na avaliação de praticamente todos os novos algoritmos de reconstrução, no que se refere à capacidade de reconstruir com rigor secções de objectos que, como no caso da cabeça, são caracterizados pela presença de estruturas pouco contrastadas envolvidas numa estrutura de elevado coeficiente de atenuação (o crâneo).

Analogamente ao fantoma de Shepp-Logan, o fantoma da cabeça de Herman é definido por um anel elíptico maior com coeficiente de atenuação elevado, no interior do qual se encontra um conjunto de figuras geométricas (neste caso, não apenas elipses) que representam algumas estruturas cerebrais e algumas patologias (hematoma, meningioma, metástase) caracterizadas por baixos níveis de contraste (inferiores aos do fantoma de Shepp-Logan).

Uma importante característica dos fantomas geométricos descritos consiste na possibilidade de calcular analiticamente as projecções (que resultam da soma das projecções analíticas dos objectos geométricos elementares no domínio contínuo) evitando, desta forma, os artefactos que derivam da utilização de métodos de projecção aproximados aplicados à imagem discretizada.

### 8.1.2 Phantoma dinâmico do tórax (4D MCAT)

O fantoma que utilizamos como modelo do tórax humano é o 4D MCAT –*Mathematical Cardiac Torso*– (versão D3.01), desenvolvido em várias etapas por um grupo de investigadores

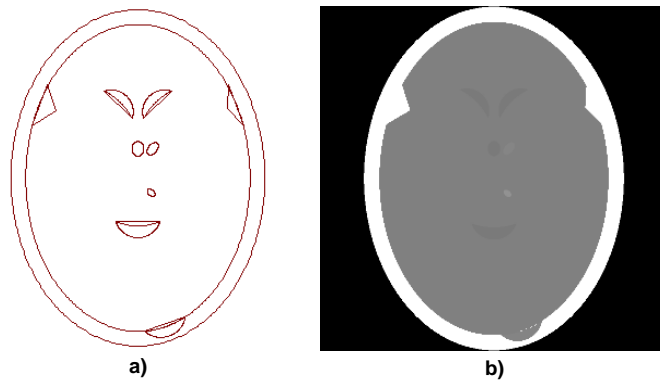


Figura 8.2: O fantoma da cabeça de Herman: a) definição geométrica do fantoma. b) imagem do fantoma (com ajuste da janela de visualização de forma a melhorar a visibilidade dos pormenores).

das Universidades de Massachusetts Medical Center e North Carolina (Chapel Hill) [121, 103, 122], para além de representar todos os principais órgãos no interior do tórax (figura 8.3) inclui o modelo mecânico dos movimentos respiratório e cardíaco.

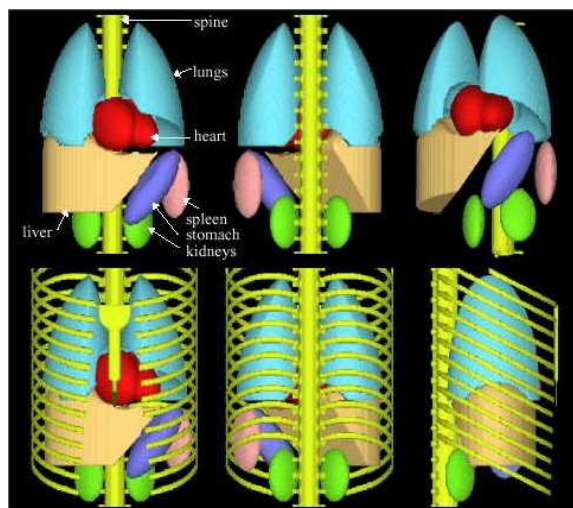


Figura 8.3: Visualização 3D do fantoma 4D MCAT. Para facilitar a apreciação dos órgãos internos, as primeiras três imagens foram obtidas retirando a caixa torácica da visualização.

O fantoma resulta da evolução [79] de um modelo originalmente idealizado por Terry em 1992 [132] que representava os órgãos do torso através de uma combinação de objectos e superfícies (por exemplo: elipsoides, planos e cilindros) descritos por equações matemáticas relativamente simples. Entre as contribuições mais importantes ao desenvolvimento do fantoma salientam-se o aperfeiçoamento do modelo do coração e a introdução da pulsação cardíaca que se devem a Pretorius e Xia [103], a introdução dos movimentos respiratórios, incluindo os movimentos induzidos pela respiração no coração (alteração de posição e orientação), que se devem a Segars [121, 120], juntamente com a definição dos mesmos movimentos baseada em NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) [122] que permitiu aumentar a resolução temporal

(virtualmente ilimitada), sendo possível gerar o fantoma dinâmico com um número arbitrário de *frames* por segundo.

Mais recentemente, foi disponibilizado um novo modelo, o 4D NCAT –*NURBS-based Cardiac-Torso*– [123] (agora disponível na versão 2.0), de aspecto muito mais realístico e, sem dúvida, mais cativante como se pode observar na figura 8.4. Neste modelo, os diferentes órgãos são definidos ligando, através de superfícies NURBS, conjuntos de pontos seleccionados no *Visible Human CT (The Visible Human Project, National Library of Medicine)*, enquanto os movimentos cardíaco e respiratório se baseiam em estudos dinâmicos realizados, respectivamente, com Ressonância Magnética (*4D tagged MRI*) e TAC *respiratory-gated* de elevada resolução.

Apesar das características mais sofisticadas do modelo 4D NCAT, escolhemos utilizar apenas o modelo mais antigo dado que apenas este é disponibilizado juntamente com o código, o que nos permitiu introduzir algumas alterações que considerámos essenciais para a avaliação dos algoritmos de reconstrução desenvolvidos.

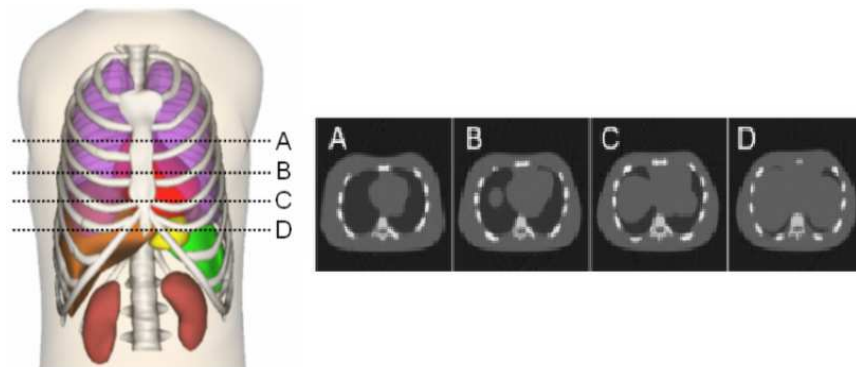


Figura 8.4: O fantoma 4D NCAT e alguns cortes transaxiais.

O programa, disponibilizado na forma de código em linguagem C++, permite gerar dois volumes de dados que descrevem diferentes fenómenos físicos: um, destinado a simulações de SPECT –*Single Photon Emission Computed Tomography*–, representa a concentração de radionuclido absorvido pelos diferentes órgãos, outro, que é de interesse neste estudo, é destinado a simulações de TAC e representa a distribuição do coeficiente de atenuação linear nos vários tecidos assumindo uma energia máxima do feixe de raios X de 140 KeV. Modificando um conjunto de parâmetros que se encontram reunidos num ficheiro (`general.samp.par`), podem ser obtidas muitas variantes do fantoma, tanto no que se refere às características estáticas como dinâmicas, ao volume de interesse e à resolução espacial e temporal.

Os volumes gerados pelo programa, que podem ser apenas um no caso estático ou um número arbitrário no caso dinâmico (*frames*), são gravadas em ficheiros separados na forma de *arrays* 3D de valores *floats-32bits*, sendo toda a informação com eles relacionada guardada num ficheiro `*.log`.

### Características estáticas

Sem entrar em detalhes sobre a geometria dos diferentes órgãos, amplamente tratada em [79] e [120], uma visão geral do modelo utilizado é dada pelas figuras 8.3 e 8.5.

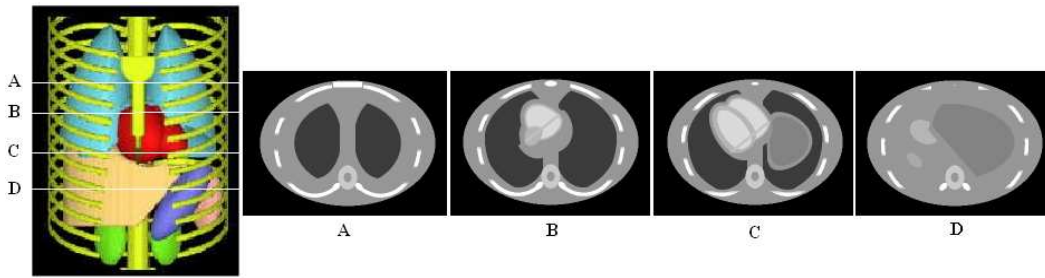


Figura 8.5: Alguns cortes transversais do fantoma 4D MCAT e sua localização no volume tridimensional.

O tórax é representado por um cilindro elíptico classificado, em termos de coeficiente de atenuação linear, como tecido adiposo. Este constitui o meio dentro do qual se encontram os vários órgãos caracterizados por diferentes valores do coeficiente de atenuação. Cada elemento de volume, de dimensões  $\Delta x, \Delta y (= \Delta x), \Delta z$ , é classificado como pertencente a um determinado órgão (caracterizado pelo coeficiente de atenuação linear  $\mu_{linear}$ ), sendo-lhe atribuído um valor calculado segundo a fórmula

$$\mu_{voxel} = \mu_{linear} \times \Delta x. \quad (8.1)$$

Uma vez gerado o fantoma, verificámos que muitos órgãos não resultavam visíveis (logo, não existiam!) devido ao facto de não ter sido definido um valor de coeficiente de atenuação específico para eles (4D MCAT tem sido maiormente utilizado para simulação de SPECT). Assim, como primeira contribuição, começamos por introduzir alguns novos valores de coeficiente de atenuação linear, determinados de forma empírica escolhendo o valor médio do coeficiente de atenuação em pequenas regiões de interesse dentro dos respectivos órgãos em imagens reais, para tornar visíveis todos os órgãos definidos no modelo. Na tabela 8.1, apresentam-se os novos valores introduzidos juntamente com os valores que se encontravam já definidos no 4D MCAT.

No caso do sangue, que originalmente não se diferenciava do miocárdio sendo os dois tecidos caracterizados pelo mesmo coeficiente de atenuação, foram definidos diferentes valores de coeficiente de atenuação, de forma a poder simular técnicas de aquisição com e sem utilização de produto de contraste.

### Características dinâmicas

O programa para a geração do fantoma, para além de permitir incluir ou excluir os movimentos cardíaco e respiratório (que são modelados de forma completamente independente entre eles), deixa ao utilizador o controlo sobre um certo número de parâmetros dinâmicos como por exemplo a duração e a fase inicial (representada na primeira *frame*) tanto do ciclo cardíaco como do pulmonar. Os parâmetros que definem a fase cardíaca e respiratória em cada instante têm ambos valor no intervalo  $[0,1[$  sendo que, por exemplo, a fase cardíaca correspondente ao valor 0 do parâmetro é o fim da diástole do ventrículo esquerdo enquanto a fase respiratória correspondente ao mesmo valor do parâmetro é a expiração completa. Um conjunto de valores possíveis para estes parâmetros é dado, a título de exemplo, na tabela 8.2.

Tipo de tecido	coeficiente de atenuação linear (1/cm)
tecido adiposo	0.1384*
músculo	0.1499
pulmão	0.0430
osso trabecular (coluna)	0.1663
osso corticoidal (costelas)	0.2090
coração (músculo)	0.1499
fígado	0.1080*
estômago (músculo)	0.1499*
rins	0.1300*
baço	0.1400*
sangue (com contraste)	0.1799*
válvulas cardíacas	0.1600*
(*) valores acrescentados ou modificados	

Tabela 8.1: Coeficientes de atenuação linear para uma energia de feixe de 140 keV.

Duração ciclo cardíaco	1s
Duração ciclo respiratório	5s
Fase cardíaca inicial	0 (LV end-systole)
Fase respiratória inicial	0.455 (fully inhaled)
Tempo total considerado (A)	10s
Número de frames (B)	20
Tempo por frame (A/B)	0.5s

Tabela 8.2: Possível selecção de valores para os parâmetros que definem o comportamento dinâmico do fantoma.

É de salientar que, como já se antecipou, na versão do 4D MCAT por nós utilizada, os movimentos são definidos por meio de NURBS, o que torna possível gerar o fantoma dinâmico com um número arbitrário de *frames* por ciclo ou por segundo.

O modelo da pulsação cardíaca inclui alterações dos volumes auricular e ventricular, e alterações da espessura das paredes do ventrículo esquerdo, enquanto o modelo dos movimentos respiratórios inclui o movimento de expansão e compressão do tórax (caixa torácica e pulmões), os movimentos oscilatórios do diafragma e dos órgãos contíguos (pulmões, fígado e coração) e o movimento de rotação do coração relativamente ao plano aurículo-ventricular. O modelo do movimento de rotação cardíaco encontra-se ainda numa fase experimental sendo a sua introdução opcional.

Devido às exigências específicas da nossa investigação, tornou-se indispensável dotar o modelo de novas funcionalidades dinâmicas. Em primeiro lugar foi introduzido um modelo da variação do coeficiente de atenuação nos pulmões durante o ciclo cardíaco devido à perfusão. Em [5], Botelho afirma que o volume de sangue nos pulmões varia durante o ciclo cardíaco descrevendo uma curva que pode ser aproximadamente representada por uma meia senoide começando no fim da sístole do ventrículo direito. Como consequência desta oscilação, o coeficiente de atenuação deverá seguir a mesma curva. No nosso modelo supomos que o coeficiente de atenuação nos pulmões seja constituído por duas componentes: uma constante, devida à atenuação no tecido pulmonar (que inclui uma quantidade basal de sangue), e outra

variável, devida à atenuação relacionada com o caudal sanguíneo pulsátil. A componente variável descreve um arco de seno sendo a máxima variação correspondente a 5% do coeficiente de atenuação do sangue. Este valor foi determinado a partir de um valor estimado para a variação do volume de sangue nos pulmões durante o ciclo cardíaco correspondente a 5% do volume total dos pulmões [5]. Assim, para uma determinada frame correspondente à fase cardíaca  $\Phi$  (entre 0 e 1), a fórmula global que determina o coeficiente de atenuação linear do tecido pulmonar resulta ser:

$$\mu_{pul}(\Phi) = \mu_{pul\_basal} + 0.37 \times \mu_{sangue} \times \sin(\Phi * \pi). \quad (8.2)$$

Num modelo mais sofisticado deveria ser tomado em consideração o facto de que, na realidade, a distribuição do volume sanguíneo pulsátil nos pulmões não é espacialmente homogênea (sendo maior a variação nas proximidades da artéria pulmonar e menor na periferia) e depende, de forma complexa, de muitas variáveis fisiológicas.

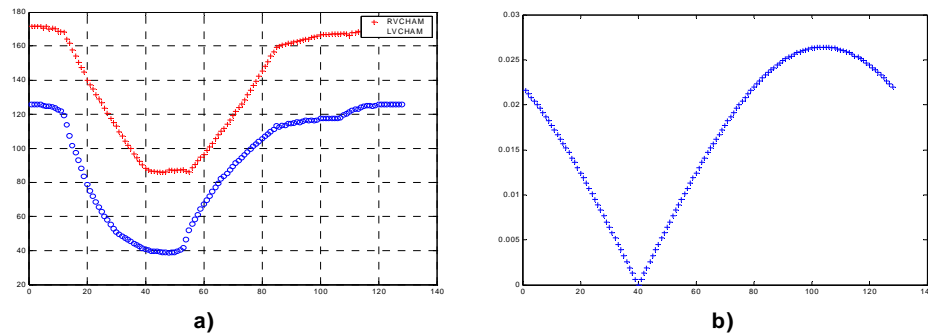


Figura 8.6: Evolução do volume do ventrículo esquerdo (LVCHAM) e do ventrículo direito (RVCHAM) ao longo de um ciclo cardíaco no fantoma dinâmico 4D MCAT (a) e respectiva variação do coeficiente de atenuação no tecido pulmonar (b).

A fase cardíaca na qual começa a aumentar o coeficiente de atenuação do tecido pulmonar devido ao fluxo sanguíneo (isto é, o fim da sístole do ventrículo direito) foi determinada no fantoma observando os gráficos da variação de volume dos dois ventrículos. Por exemplo, no caso do fantoma dinâmico com 128 *frames/s* ao longo de um ciclo cardíaco de 1s começando pela diástole do ventrículo esquerdo, obtivemos o gráfico da figura 8.6-a no qual o fim da sístole do ventrículo direito pode ser associada à quadragésima *frame* (nas 128), o que corresponde a um atraso de 0.3125 vezes o período do ciclo cardíaco. A correspondente variação do coeficiente de atenuação no tecido pulmonar devido à perfusão ao longo do ciclo cardíaco é representada no gráfico da figura 8.6-b.

Outra nossa contribuição ao modelo foi motivada pelo facto que no fantoma original o ciclo cardíaco repete-se sempre com o mesmo período o que constitui uma simplificação excessiva e pouco significativa para a avaliação dos algoritmos de reconstrução dinâmicos. O período do ciclo cardíaco foi por nós modelado como uma variável aleatória gaussiana com média e desvio padrão ajustáveis de forma a poder simular diferentes situações clínicas. Por exemplo, na figura 8.7 ilustra-se a distribuição da duração do ciclo cardíaco numa simulação de 206 pulsações com duração média de 0.9s e desvio padrão de 5%.

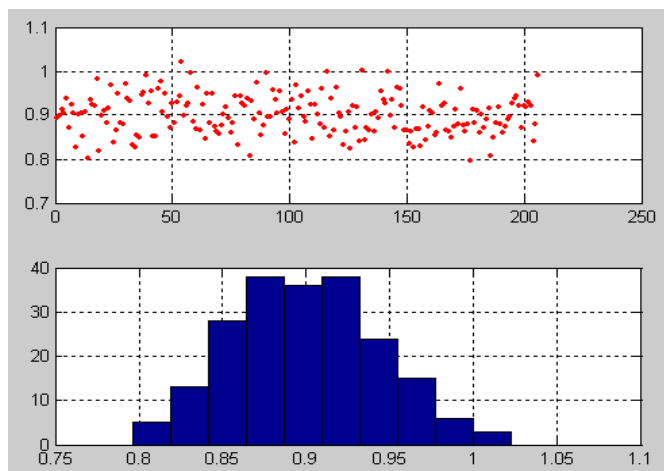


Figura 8.7: Representação gráfica da distribuição da duração do ciclo cardíaco em torno do valor médio segundo o modelo proposto. Simulação de 206 ciclos com duração média de 0.9s e variância 0.5%.

## 8.2 Métodos para o cálculo das projecções

Como se viu no capítulo 4, do ponto de vista matemático o processo projectivo segundo a geometria paralela pode ser descrito pela transformada de Radon  $\mathcal{R}$  do objecto calculada segundo as direcções de projecção, enquanto no caso de geometria divergente podemos recorrer à transformada de feixe cónico  $\mathcal{D}$ . De qualquer forma, independentemente da geometria de projecção, trata-se de calcular os integrais de linha da função distribuição do coeficiente de atenuação ao longo das linhas rectas que representam geometricamente o feixe. Teoricamente, dado que os fantasmas por nós utilizados são analíticos, seria possível calcular analiticamente as transformadas, todavia, esta tarefa é complicada pelo facto de utilizarmos geometria divergente (no caso 2D) e se revela inviável no caso do fantoma MCAT, pelo que optamos pela implementação de alguns métodos de projecção numéricos, aplicáveis aos fantasmas discretizados, que serão de seguida descritos (por simplicidade, apenas em duas dimensões) e comparados.

Todos os métodos por nós implementados baseiam-se num modelo simplificado que não considera a largura do percurso de radiação justificando a utilização do integral de linha como ferramenta matemática para o cálculo da projecção. Um modelo mais rigoroso tornaria necessária a introdução do conceito de integral ao longo de uma tira (*strip integral*) definida sobre a imagem segundo a direcção de projecção.

No processo de projecção pode ser opcionalmente incluído um modelo simplificado do ruído, descrito na secção 8.3, obtendo projecções ideais e/ou afectas por ruído.

### 8.2.1 Método A

Para um objecto discretizado, a transformada de Radon pode ser determinada numericamente através dum modelo integral discreto, tornando-se útil para este efeito o cálculo prévio da transformada de um elemento de imagem quadrado de densidade unitária, centrado na origem e de lado  $dx$  [125]. A transformada é calculada para um determinado número de posições angulares  $\theta$  no intervalo  $[0, \pi/4]$  (por motivos de simetria este intervalo é suficiente)

e um determinado número de posições radiais  $\rho$  no intervalo  $\left[0, \frac{\sqrt{2}dx}{2}\right]$  (também suficiente por motivos de simetria), sendo o resultado armazenado numa tabela (a tabela de Radon representada graficamente na figura 8.8) que permite uma estimativa rápida da transformada de Radon do objecto (soma integral das transformadas de cada *pixel* atravessado pelo raio) segundo qualquer direcção.

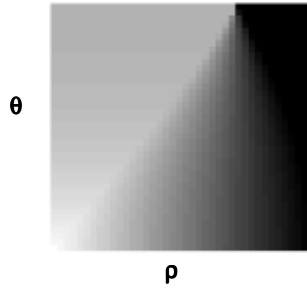


Figura 8.8: Representação gráfica da tabela dos valores da transformada de Radon do quadrado elementar. Neste exemplo foram utilizadas 40 posições angulares  $\theta$  no intervalo  $[0, \pi/4]$  e 40 posições radiais  $\rho$  no intervalo  $\left[0, \frac{\sqrt{2} \times dx}{2}\right]$ .

Segundo este método, o integral de linha ao longo de um hipotético raio  $i$  representado pela recta de equação  $s_i = x \cos(\theta_i) + y \sin(\theta_i)$ , calcula-se determinando os *pixels* atravessados pelo raio e somando as contribuições de cada um ao integral de linha. Cada *pixel*  $j$  centrado nas coordenadas  $(x_j, y_j)$  e atravessado pelo raio  $i$  contribui para o integral de linha ao longo do raio  $i$ , com um valor dado pelo produto do próprio valor de *pixel* por um coeficiente  $c_{i,j}$  (proporcional ao comprimento da intersecção recta-*pixel*) que pode ser estimado por interpolação a partir da tabela de Radon indexada em  $\rho$  e  $\theta$  onde:

$$\rho_{ij} = s_i - x_j \cos \theta_i - y_j \sin \theta_i \quad (8.3)$$

é a distância entre a recta e o centro do *pixel* (fig. 8.9).

O valor  $c_{ij}$  extraído da tabela é o do elemento de índices  $(h, k)$  correspondentes aos valores discretos  $(h\Delta\rho, k\Delta\theta)$  mais próximos dos valores de  $\rho_{i,j}$  e  $\theta_i$  para cada raio e *pixel* considerados. Em alternativa, podiam ser utilizados esquemas de interpolação mais sofisticados (por exemplo, interpolação linear entre os quatro (ou mais) elementos mais próximos do ponto  $(\rho_{i,j}, \theta_i)$ ). Na prática, se a tabela for suficientemente densa (uma tabela  $40 \times 40$ , como no exemplo da figura 8.8, já fornece uma boa aproximação), a estimativa por interpolação linear ou de ordem superior não melhora significativamente a qualidade da projecção.

Por fim, calcula-se o integral de linha

$$P_i = \sum_{j=1}^N c_{i,j} f(j) \quad (8.4)$$

onde  $N$  é o número de *pixels* interessados pelo feixe e  $f$  é a função densidade que se pretende projectar.

Para determinar os *pixels* atravessados pelo raio utilizamos um algoritmo normalmente utilizado em computação gráfica para traçar uma recta no ecrã [44]. Trata-se de um algoritmo



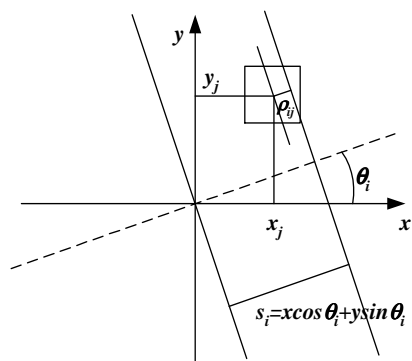


Figura 8.9: A contribuição do pixel  $j$  para o integral de linha ao longo da recta  $s_i = x \cos(\theta_i) + y \sin(\theta_i)$  pode ser estimada através de uma tabela pré-calculada de valores da transformada de Radon com índices  $(\rho, \theta)$ .

muito rápido, mas incapaz de especificar todos os *pixels* interessados pelo raio, o que, como se verá, torna-se numa desvantagem.

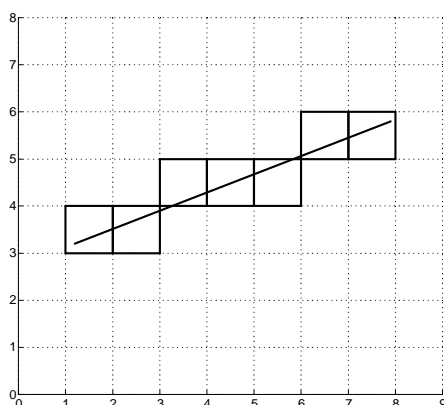


Figura 8.10: Pixels seleccionados pelo algoritmo A.

Fundamentalmente, este algoritmo discrimina as rectas em função da inclinação. No caso de rectas com inclinação ligeira, avalia a grelha da imagem coluna a coluna e selecciona, para cada coluna, a linha que se encontra mais próxima da recta. No caso de rectas de inclinação mais elevada, avalia a grelha da imagem linha a linha seleccionando, para cada linha, a coluna mais próxima da recta.

Os casos críticos relacionados com este algoritmo são os casos das rectas com inclinação próxima de  $\frac{\pi}{4} \pm k\frac{\pi}{2}$ . Nestes casos acentua-se a falha na detecção dos *pixels* atravessados pelo raio (fig. 8.10 e 8.11). Este problema implica, na altura do cálculo da soma integral, o facto que a mesma soma seja efectuada com base num número reduzido de *pixels* e com coeficientes pequenos (ver as intersecções recta-*pixels* na figura 8.11). Podemos, então, falar apenas em somas parciais, verificando-se o aparecimento de descontinuidades e oscilações no valor calculado correspondendo aos raios próximos entre si, mesmo para uma imagem

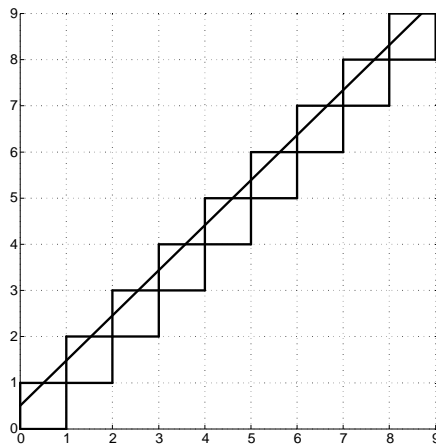


Figura 8.11: Pixeis seleccionados pelo algoritmo A (caso crítico:  $\simeq 45^\circ$ )

de teste monocromática. Estas discontinuidades e oscilações tornam-se visíveis na imagem reconstruída na forma de artefactos com inclinação  $45^\circ$  (fig. 8.12).



Figura 8.12: Uma imagem reconstruída na qual são visíveis os artefactos diagonais.

Uma técnica que permite resolver este problema (tornando até mais rápido o algoritmo de projecção) consiste no cálculo dos coeficientes  $c_{i,j}$  como se a recta passasse pelo centro de cada *pixel* ( $\rho == 0$  em todos os casos). Assim, apesar de se continuar a não considerar todos os *pixels* atravessados pelo raio, aumenta o valor dos coeficientes e evitam-se as oscilações no valor da soma parcial calculada.

Em suma, após o cálculo prévio da tabela de Radon, o cálculo do integral de linha para cada raio inclui os seguintes passos:

1. *Determinação dos pixels intersectados pelo raio*
2.  $\rho_{i,j} == 0$  em todos os casos

3. *Cálculo do vector dos coeficientes  $c_{i,j}$*
4. *Cálculo da soma integral.*

### 8.2.2 Método B

O segundo método implementado tira partido da eficiência da ferramenta MATLAB no que se refere ao cálculo vectorial. Num primeiro passo são detectados todos os pontos de intersecção do raio com a grelha da imagem, ou seja, com as rectas de separação entre colunas e linhas de *pixels*. Os pontos intersecção assim detectados são guardados num vector e ordenados segundo uma das coordenadas (por exemplo segundo os valores de abscissa), sendo guardados num outro vector os pontos intermédios entre cada par de pontos intersecção sucessivos.

O vector dos pontos intermédios permite determinar todos os *pixels* intersectados pelo feixe, enquanto a partir do vector dos pontos intersecção podem ser directamente calculados os coeficientes  $c_{i,j}$  (comprimento da intersecção entre o feixe  $i$  e o *pixel*  $j$ ), dados pela distância entre pares de pontos sucessivos, sem a necessidade de recorrer à tabela de Radon.

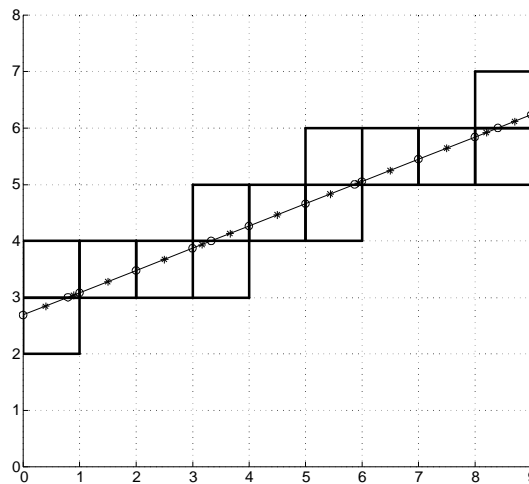


Figura 8.13: Selecção dos *pixels* pelo algoritmo B.

Este algoritmo consegue determinar todos os *pixels* atravessados por um dado raio (figura 8.13), o que permite que seja efectivamente calculada a soma "integral" sem que se verifiquem os artefactos característicos do método anterior. Por outro lado, o peso computacional da operação de ordenação constitui, como se verá mais adiante, o ponto fraco deste algoritmo.

O método de projecção B inclui os seguintes passos para cada raio considerado:

1. *Determinação dos pontos de intersecção do raio com a grelha da imagem e dos pontos intermédios.*
2. *Determinação dos pixels intersectados pelo raio*
3. *Cálculo dos coeficientes  $c_{i,j}$*
4. *Cálculo da soma integral.*

### 8.2.3 Método C

Este método baseia-se na amostragem dos valores de *pixel* em pontos equiespaçados ao longo de cada raio. As amostras obtidas são somadas e a soma normalizada em função da frequência de amostragem espacial. Na figura 8.14 representa-se graficamente o esquema de amostragem do plano normalizado para o cálculo da projecção paralela com ângulo de visão  $\beta = \frac{\pi}{4}$ . A escolha da frequência de amostragem é essencial para garantir que todos os *pixels* intersectados pelo raio (ou, pelo menos, cuja intersecção tenha comprimento significativo) contribuam para o somatório sem, contudo, considerar um número excessivo de amostras dado que o tempo de cálculo aumenta com este parâmetro. Considerou-se que uma frequência de amostragem igual a duas vezes a frequência espacial do fantoma (n<sup>o</sup> de *pixels* por unidade de comprimento) deveria ser suficiente.

Na prática viu-se como, por exemplo, no caso de um fantoma 2D de  $256 \times 256$  *pixels* integrado no espaço normalizado definido na figura 8.18 (quadrado de lado 2 unidades normalizadas) uma frequência de amostragem de 200 amostras por unidade de comprimento já permite o cálculo do integral de linha com qualidade superior à obtida com os métodos anteriormente descritos (secção 8.2.5).

Para cada projecção por calcular, o algoritmo procede da seguinte forma:

1. *Determinação dos pontos de amostragem necessários ao cálculo da projecção*
2. *Somatório das amostras segundo a direcção de projecção*
3. *Normalização do somatório tendo em conta o numero de amostras consideradas.*

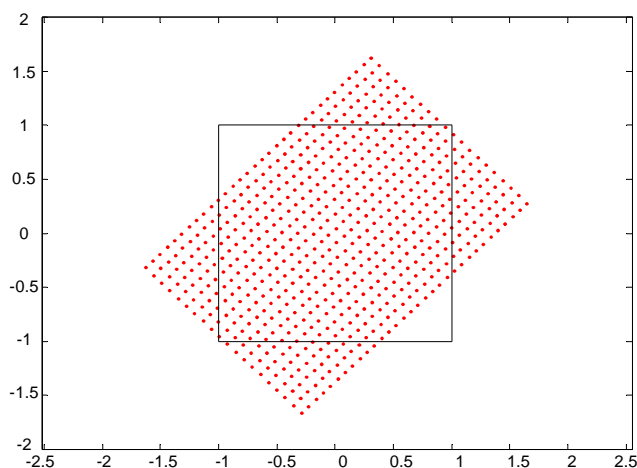


Figura 8.14: Método C: esquema de amostragem (para maior clareza foi utilizada uma frequência de amostragem baixa) do espaço normalizado para o cálculo da projecção paralela com  $\beta = \frac{\pi}{4}$ .

## 8.2.4 Método D

Uma abordagem alternativa para o cálculo das projecções (relativamente aos métodos tipo *ray-casting* anteriormente descritos) passa pela utilização de técnicas de Fourier nos moldes descritos na secção 6.5. O método por nós implementado baseia-se no algoritmo DFPM (algoritmo 6.5.2) que permite o cálculo do sinograma completo num único ciclo representado no diagrama de fluxo da figura 8.15.

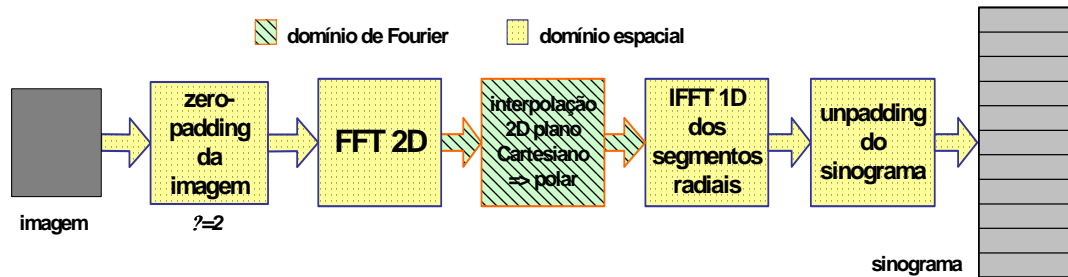


Figura 8.15: Diagrama de fluxo do algoritmo DFPM no qual se baseia o método D.

Tal como em todos os métodos de Fourier, para assegurarmos a qualidade da interpolação, é essencial garantir a perfeita sobreposição entre os sistemas de coordenadas Cartesianas e polares, pelo que o enquadramento geométrico das amostras (tanto as dadas como as interpoladas) no espaço de Fourier é extremamente importante. Nomeadamente, dado  $\alpha * dim$  (com  $\alpha = 2$ ) ser um número par, o valor "dc" (ou amostra central) da transformada de Fourier 2D encontra-se no *pixel*  $(\frac{\alpha * dim}{2} + 1, \frac{\alpha * dim}{2} + 1)$ , ao qual deverão corresponder as coordenadas cartesianas  $(0, 0)$  e polares  $(\theta, 0)$ .

A fase mais interessante do algoritmo consiste na organização dos dados de forma a poder realizar a interpolação bidimensional no espaço de Fourier. Para isto, armazenámos as coordenadas Cartesianas das amostras dadas (FFT 2D da imagem após *zero-padding*) e dos pontos de interpolação nas seguintes estruturas de dados:

- Matriz das coordenadas  $u$  das amostras dadas, ordenadas segundo a sua distribuição no espaço de Fourier. Os elementos de cada coluna desta matriz, que designaremos de  $U$ , são iguais.
- Matriz das coordenadas  $v$  das amostras dadas, ordenadas segundo a sua distribuição no espaço de Fourier. Os elementos de cada linha desta matriz, que designaremos de  $V$ , são iguais.
- Matriz das coordenadas  $u$  e matriz das coordenadas  $v$  dos pontos de interpolação. Neste caso, os pontos são ordenados de forma que a cada linha das matrizes, que designaremos de  $U1$  e  $V1$ , correspondem os pontos de amostragem com a mesma coordenada polar  $\theta$  (FFT 1D da projecção segundo a direcção  $\theta$ ).

Dada a matriz  $F$ , na qual são armazenadas as amostras da FFT 2D da imagem (*zero-padded*), e as matrizes  $U$  e  $V$ , cujos elementos são as coordenadas Cartesianas dessas amostras, podemos calcular o valor da FFT 2D da imagem nos pontos de interpolação dados pelas matrizes  $U1$  e  $V1$ , utilizando a função Matlab `interp2`:

```
H=interp2(U,V,F,U1,V1,'cubic');
```

onde, entre os diferentes métodos de interpolação disponíveis ('nearest neighbor', 'linear' e 'cubic'), escolhamos o método de interpolação bicúbica ('cubic') no qual o valor da amostra calculada num determinado ponto de interpolação é uma combinação dos valores das 16 amostras mais próximas [67].

Obtemos, assim, a matriz H na qual os elementos de cada linha são a FFT 1D de uma projecção da imagem segundo uma determinada direcção. Calculando a IFFT 1D de cada linha, obtemos o sinograma (*zero-padded*) pretendido.

Uma característica importante deste método consiste na sua actuação "global" sobre a imagem que permite calcular o sinograma de forma extremamente eficiente. No entanto, devido a esta característica, o cálculo de apenas uma projecção resulta ser menos eficiente implicando, inevitavelmente, o cálculo da FFT 2D da imagem. Já a interpolação 2D no plano Cartesiano pode ser feita apenas para as amostras que se encontram ao longo do segmento radial com direcção angular igual ao ângulo de projecção pretendido. A projecção será então calculada por IFFT 1D das amostras assim obtidas e sucessivo *unpadding*.

### 8.2.5 Comparação dos métodos de projecção

Para podermos avaliar o desempenho dos diferentes métodos de projecção implementados e escolher, conseqüentemente, qual devia ser utilizado no simulador, realizámos uma experiência que nos permitiu comparar as projecções paralelas obtidas pelos vários métodos numéricos com a correspondente projecção analítica. Todas as projecções, as numéricas e a analítica, foram obtidas do fantoma de Shepp-Logan com o mesmo ângulo de visão ( $\beta = \frac{\pi}{4}$ , por ser mais crítico) e a mesma geometria.

Em primeiro lugar, de um ponto de vista meramente qualitativo, analisando o gráfico da figura 8.16, podemos observar como as diferentes projecções obtidas com métodos numéricos são essencialmente sobreponíveis com a projecção analítica.

Do ponto de vista quantitativo, os diferentes métodos foram avaliados no que se refere ao tempo de cálculo e à diferença entre as projecções numéricas e a analítica, quantificada pelo erro quadrático médio normalizado calculado segundo a fórmula

$$NMSE = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n |proj\_num(i) - proj\_analitica(i)|^2}{\sum_{i=1}^n |proj\_analitica(i)|^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8.5)$$

Os valores obtidos para o tempo de cálculo de uma projecção e o respectivo erro quadrático médio normalizado são apresentados nas primeiras duas linhas da tabela 8.3 onde se pode constatar, em primeiro lugar, que o método de projecção A é o mais rápido mas apresenta o nível de qualidade pior e que o método B tem qualidade ligeiramente superior à do método A mas é extremamente pesado do ponto de vista computacional (devido às operações de ordenação), sendo por isso desaconselhável a sua utilização. O método que apresenta o melhor nível de qualidade é o método C, enquanto o método D tem qualidade de pouco inferior à do método C mas resulta ser extremamente rápido. Globalmente, avaliando tanto o tempo de cálculo de uma projecção como o erro relacionado, podemos dizer que o desempenho melhor é o do método directo de projecção de Fourier (método D).

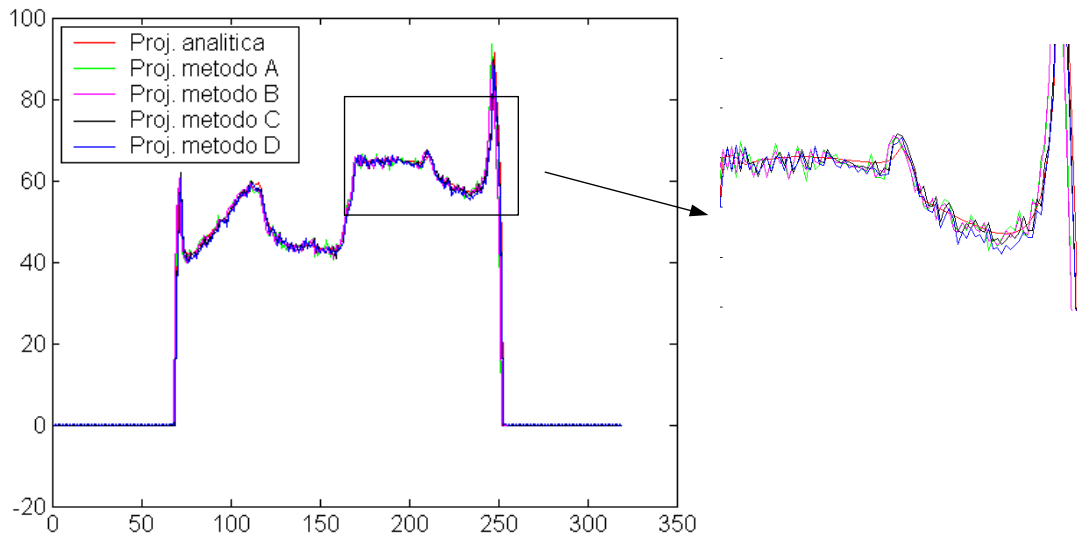


Figura 8.16: Projecções paralelas do fantoma de Shepp-Logan obtidas pelos diferentes métodos numéricos de projecção comparadas com a correspondente projecção analítica.

No que se refere ao tempo de cálculo, considerando que o tempo necessário para a obtenção de uma projecção segundo o método A não inclui o cálculo da tabela de Radon (que é só calculada uma vez) e que o cálculo de apenas uma projecção segundo o método D não é particularmente eficiente, é importante considerar também os tempos necessários para o cálculo de um sinograma completo (isto é, correspondente a uma rotação de  $\pi$  radianos) pelos diferentes métodos (última linha da tabela 8.3).

	Método A	Método B	Método C	Método D
NMSE	0.0952	0.0934	0.0291	0.0323
tempo proj. (s)	0.5010	6.8000	1.9730	0.5510
tempo sinog. (s)	55.9600	561.5670	343.2940	3.0050

Tabela 8.3: Tempo de cálculo e distância da projecção analítica para as projecções obtidas com os diferentes métodos de projecção numéricos implementados.

Os valores apresentados na tabela são extremamente clarificadores do desempenho dos métodos implementados e permitem tirar algumas indicações acerca do método a ser utilizado no simulador:

- o método B tem o desempenho pior tanto no que se refere ao tempo de cálculo como à qualidade da projecção obtida (pelo que não será utilizado no simulador). Dada a eficiência do MATLAB no cálculo vectorial, podia-se esperar deste método um desempenho melhor. A razão pela qual este método é tão demorado pode ser encontrada no tamanho das estruturas de dados acedidas e nas tarefas de ordenação cujo peso computacional é elevado.
- o método D tem um desempenho elevado tanto no que se refere ao tempo de cálculo

como à qualidade da projecção obtida sendo, por isso, utilizado no simulador sempre que possível. Todavia, pela sua natureza "global", este método revela-se extremamente eficiente no caso de geometria de projecção 2D, mas de difícil extensão ao caso de geometria de projecção 3D (aquisição em espiral ou com projecções cónicas).

- os métodos A e C (um mais rápido e o outro com melhor qualidade), caracterizados por uma abordagem "local" que permite o cálculo do sinograma projecção a projecção (ou até raio a raio), podem ser mais facilmente estendidos ao caso tri-dimensional (comparativamente com o método D) e serão utilizados na aquisição em espiral e/ou com geometria de projecção cónica.

### 8.3 Modelo do ruído

O ruído no processo de projecção é um fenómeno complexo, associado à natureza estatística da produção, transmissão e detecção de fotões. Num estudo recente [143] demonstrou-se que o efeito conjunto das diferentes componentes de ruído pode ser descrito como uma composição de ruído Gaussiano e de Poisson, todavia, convencionalmente continua-se a utilizar um modelo simplificado de Poisson [59] sendo que a diferença entre os dois modelos é apenas detectável no caso dos métodos de reconstrução estatísticos.

Se, do ponto de vista teórico, o valor da projecção para o raio  $i$  é dado pela fórmula (8.4), em presença de ruído o valor medido será um valor aleatório que depende das flutuações estatísticas no número de fotões registados pelo detector [59]. O valor da projecção medido para o raio  $i$  será:

$$P_i^m = \ln \frac{N_{in}}{N_d(i)} \quad (8.6)$$

onde  $N_{in}$  representa o número de fotões emitidos pela fonte para o raio  $i$  e pode ser modelado como uma constante determinística conhecida, enquanto que  $N_d(i)$  representa o número de fotões registados pelo detector para o raio  $i$  e é estatisticamente descrito como um processo de Poisson com valor médio

$$\overline{N}_d(i) = N_{in} e^{-P_i}. \quad (8.7)$$

O procedimento para a geração de uma projecção ruidosa consiste no cálculo do valor do integral de linha  $P_i$ , produção de uma amostra  $N_d(i)$  do processo de Poisson com média  $\overline{N}_d(i)$  (utilizando um algoritmo para a geração de números aleatórios distribuídos segundo Poisson [102]) e, por último, no cálculo da projecção ruidosa através da fórmula 8.6.

Este modelo simplificado do ruído permite a avaliação do desempenho dos algoritmos de reconstrução face ao ruído de imagem, e a avaliação do efeito da diminuição da dose e/ou do tempo de aquisição (que influenciam  $N_{in}$ ) sobre a qualidade da imagem. A figura 8.17 mostra os efeitos da redução de  $N_{in}$  sobre a qualidade da imagem.

### 8.4 Simulador de TAC em espiral multicorte

Numa primeira fase, o simulador foi desenhado com base na geometria de um tomógrafo monocorte real, o Somatom AR.C/AR.T da Siemens. Trata-se de uma geometria divergente



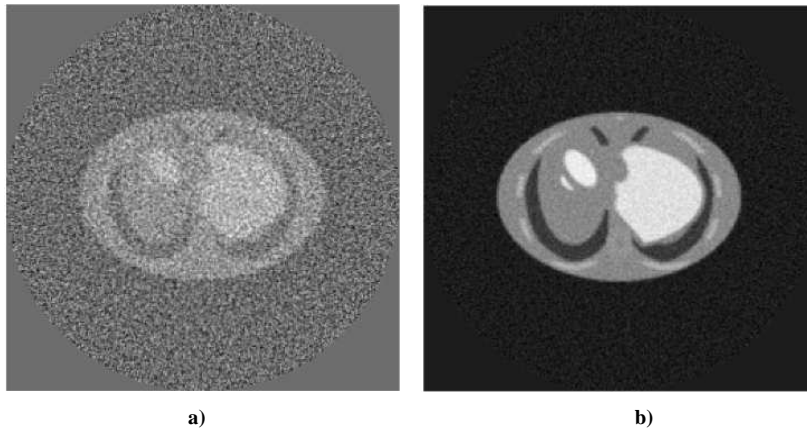


Figura 8.17: Imagens obtidas a partir de projecções ruidosas: a)  $N_{in}=10^4$ ; b)  $N_{in}=10^6$ .

com  $42.2^\circ$  de abertura de feixe, 352 detectores (*numdetect*), 480 posições de amostragem do foco por rotação (*numfocos*), diâmetro da área varrida  $45cm$ , distância foco-detector de  $89cm$ , e distância foco-isocentro  $r = 51cm$ . Contudo, para garantir a versatilidade do simulador e tornar os algoritmos aplicáveis ao caso geral, os processos de projecção e reconstrução enquadram-se no espaço normalizado esquematizado na figura 8.18 (que se refere apenas ao plano axial), sendo possível alterar todo e qualquer parâmetro geométrico.

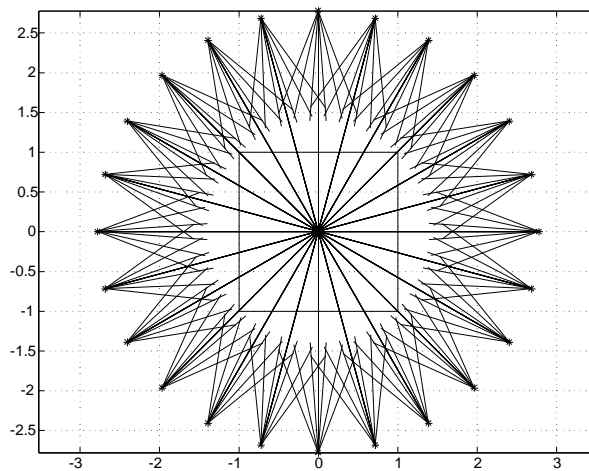


Figura 8.18: Espaço geométrico normalizado.

Uma vez desenvolvido o modelo de tomógrafo monocorte, foi possível introduzir o movimento em espiral de uma forma muito simples, dado que, no caso monocorte, as direcções segundo as quais se realiza o processo projectivo continuam a pertencer a planos transversais. Por fim, foi desenvolvido o modelo de tomógrafo multicorte no qual o detector é constituído por um certo número (relativamente pequeno) de fileiras de elementos de detecção. A adaptação a este modelo dos algoritmos de projecção desenvolvidos não foi trivial dado que, neste caso, o processo projectivo não se limita a planos transversais.

De seguida será descrita a aquisição das projecções no espaço 3D da forma mais genérica e completa, isto é, para o caso de aquisição em espiral multicorte. Uma escolha adequada dos parâmetros permite simular todos os protocolos de aquisição específicos (convencional, espiral, mono- e multi-corte).

### 8.4.1 Aquisição no espaço 3D

Em primeiro lugar, antes de podermos simular a aquisição é imprescindível o correcto enquadramento do fantoma digital (seja 2 ou 3D) no espaço cartesiano 3D do simulador. Na figura 8.19-a representa-se esquematicamente um volume de dados 3D constituído por um *array* de  $dim \times dim \times nz$  *voxels* e de dimensões  $(imageside, imageside, zmax - zmin)$  no espaço cartesiano  $(x, y, z)$ . Cada *voxel* é caracterizado pela sua posição no *array* (por exemplo, o *voxel*  $(a, b, c)$  encontra-se na linha  $a$ , na coluna  $b$  e na "fatia"  $c$ ) e pela sua posição no plano cartesiano, dada pelas coordenadas  $(x = (-n2 + b - 1) * dx, y = (n2 - a + 1) * dx, z\_ini + (c - 1) * dz)$  do seu ponto central. O fantoma encontra-se virtualmente posicionado de forma que o eixo central do sistema, que coincide com o eixo  $z$ , passe (em cada fatia do fantoma), pelo centro do *voxel* que se encontra na  $\frac{dim}{2} + 1$ -ésima linha e na  $\frac{dim}{2} + 1$ -ésima coluna (fig. 8.19-b). Este pormenor, aparentemente insignificante, deve-se ao facto que, para o bom desempenho dos métodos que utilizam a transformada de Fourier é importante que o isocentro do sistema coincida com um *voxel* e não com a intersecção entre *voxels*.

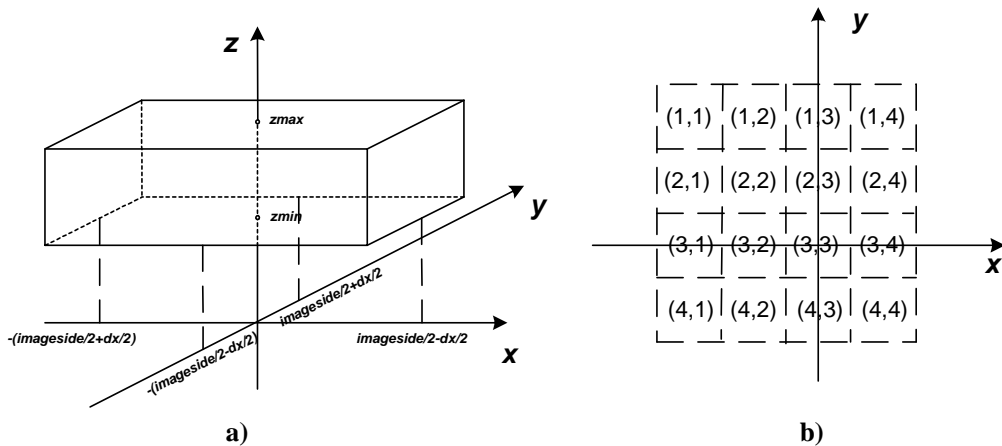


Figura 8.19: Enquadramento geométrico de um volume de dados (fantoma) no espaço cartesiano  $(x,y,z)$  (a) e posicionamento do fantoma num plano transversal no caso de um hipotético fantoma com  $dim = 4$  (b)

Dadas as dimensões e o número de *voxels* do fantoma segundo os três eixos cartesianos, são criados três *arrays* nos quais se guardam as coordenadas  $(x, y, z)$  dos centros de todos os *voxels*. No espaço cartesiano assim definido, tendo em consideração a geometria do sistema e o protocolo de aquisição (convencional ou em espiral), desenvolvemos a função `emiss3D()`, que calcula as posições ocupadas pelo foco durante a aquisição e guarda na matriz `focos` as coordenadas  $(x, y, z)$  de tais pontos e o ângulo de visão  $\beta$  (ângulo entre a recta foco-isocentro, que constitui o eixo central do feixe, e o eixo  $x$  na figura 5.2). A matriz `focos` terá  $numfocos \times numrotações$  linhas e quatro colunas para os quatro parâmetros  $(x, y, z, \beta)$ .

No caso de aquisição em espiral, ao movimento rotacional do foco adiciona-se o deslocamento ao longo do eixo longitudinal. Na realidade, como sabemos, é o volume (não o foco) a ser translacionado mas, por convenção, o sistema de referência (fig. 2.8) é solidário com o volume sob estudo (neste caso o fantoma). Em termos rigorosos, não seria correcto falar em "pitch", dado que a sua definição ( $pitch = \frac{d(=passo\ da\ hélice)}{S(=espessura\ da\ secção-colimação)}$ ) implica a introdução do conceito de espessura do feixe, que o nosso modelo simplificado não contempla. Todavia, dado que na aquisição multicorte iremos considerar como espessura da colimação  $S$  a distância entre cortes calculada no isocentro (fig. 8.20), podemos estender, mesmo que um pouco abusivamente, ao caso mono-corte a mesma espessura de colimação, o que nos permite introduzir o conceito de *pitch*. Em alternativa, e de forma mais rigorosa, para definir a geometria da hélice iremos utilizar como parâmetro adicional o passo da hélice  $d$  (em *mm*).

Seguindo a notação utilizada na secção 5.1.3, o feixe cónico é geometricamente representado por um conjunto de  $numdetect \times numcortes \times numfocos$  rectas definidas pela posição do foco e pelos ângulos:

- $\beta \in [0, 2\pi[$  o ângulo de visão,
- $\gamma \in [-\frac{\Gamma}{2}, \frac{\Gamma}{2}]$  o desvio angular da recta relativamente ao eixo do feixe (*fan-angle*) no plano transversal
- $\varphi \in [-\frac{\Phi}{2}, \frac{\Phi}{2}]$  o desvio angular da linha (*cone-angle*) relativamente ao plano transversal.

Um processo genérico de aquisição implica o cálculo de  $numrotações \times numcortes \times numfocos \times numdetect$  integrais de linha, pelo que devem ser guardados todos os parâmetros geométricos das respectivas rectas. Na nossa implementação, escolhemos representar cada uma destas rectas utilizando a equação  $x \cos(\beta + \gamma - \frac{\pi}{2}) + y \sin(\beta + \gamma - \frac{\pi}{2}) = -r \sin \gamma$  da sua projecção no plano transversal passando pelo foco e o ângulo  $\varphi$ . Desenvolvemos a função `feixes3D()` para calcular o ângulo  $\gamma$  e guardar no vector `feixes` os valores  $\beta + \gamma$  e  $s = r \sin \gamma$ , enquanto o valor do ângulo  $\varphi$  para cada corte é calculado com base na geometria do detector e guardado num vector de  $numcortes$  elementos. Na figura 8.20 representa-se a geometria de projecção no caso de um sistema de quatro cortes num plano longitudinal definido pelo eixo  $z$  e pela posição do foco. É importante reparar que, habitualmente, no caso multicorte o número de cortes é par, pelo que a nenhum deles corresponde uma projecção no plano transversal. Mesmo assim, na altura da reconstrução, um número de cortes reduzido (até 4-6) permitirá a aproximação de "transversalidade" que consiste em considerar cada projecção pertencente ao  $i$ -ésimo corte como se tivesse sido adquirida no plano transversal em  $z_{0i} = z_0 + (\frac{numcortes+1}{2} - i)\Delta\zeta$  (sendo  $z_0$  a coordenada longitudinal do foco e  $\Delta\zeta$  a distância entre cortes calculada no eixo  $z$ ).

O cálculo dos integrais de linha pode ser efectuado utilizando um dos métodos descritos na secção 8.2, sendo o método D (método DFPM) aplicável apenas no caso de aquisição convencional, enquanto no caso de aquisição em espiral, mono- ou multi-corte, podem ser aplicados o método A ou o método C oportunamente adaptados às três dimensões. As extensões dos métodos A e C às três dimensões não serão aqui descritas dado que, do ponto de vista metodológico, não diferem da sua implementação bidimensional. Apenas frisamos que no caso do método A foi necessário o desenvolvimento de uma função para o cálculo da tabela de Radon de um *voxel* cúbico e de uma função para a determinação dos *voxels* atravessados pela linha no volume de dados 3D, enquanto no caso do método C a extensão para as três dimensões foi bastante imediata não necessitando de algum desenvolvimento suplementar.

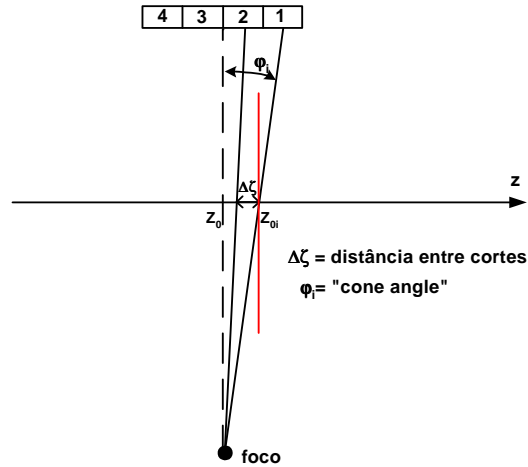


Figura 8.20: Geometria de projecção no plano longitudinal definido pelo eixo  $z$  e pela posição do foco.

Uma vez inicializadas todas as variáveis e estruturas de dados necessárias e, eventualmente (caso se pretenda utilizar o método de projecção A), calculada a tabela de Radon de um *voxel*, podemos começar o ciclo para o cálculo das projecções. O ciclo repete-se para cada um dos cortes produzindo um único volume de dados projecção, designado `sino3D`, de dimensões ( $numcortes$ ,  $numfocos$ ,  $numdetect$ ,  $numrotações$ ).

Seja qual for o método de projecção, devido às dimensões das estruturas de dados utilizadas (tanto no que se refere ao fantoma, como aos *arrays* que guardam os parâmetros geométricos de cada raio projecção, como ao próprio sinograma), o processo de projecção torna-se extremamente pesado, sendo necessário introduzir estratégias de acesso aos volumes de dados que permitam melhorar a eficiência. Assim, começa-se por extrair do fantoma apenas as secções necessárias para a aquisição pretendida, tendo em conta o facto que, no caso de aquisição multicorte, o volume varrido excede longitudinalmente o comprimento da trajectória do foco, sendo o volume em excesso (*offset*) dependente da geometria do cone. Ainda, antes de iniciar o ciclo para o cálculo de cada projecção, podem ser guardadas numa variável temporária de dimensões reduzidas apenas as secções necessárias para o cálculo daquela projecção tornando mais rápidas a pesquisa e o acesso aos seus elementos. É de salientar que a mesma instância desta variável temporária pode servir para o cálculo de várias projecções, não sendo necessário determiná-la em cada ciclo.

### 8.4.2 Aquisição dinâmica

O fantoma dinâmico consiste num determinado número de instâncias (*frames*) do modelo do tórax, correspondentes a uma sucessão de instantes regularmente distribuídos num determinado intervalo de tempo, guardadas em ficheiros separados. O intervalo de tempo e o número de instâncias são definidos pelo utilizador (juntamente com todos os outros parâmetros, dinâmicos e não).

Para podermos simular o processo de aquisição sobre o fantoma dinâmico torna-se necessária a introdução da variável temporal, de forma que cada elemento do fantoma seja definido pelas quatro coordenadas  $(x, y, z, t)$ , onde a coordenada  $t$  determina qual a instância que deve

ser utilizada para o cálculo de uma projecção.

Dado o tempo de observação e o correspondente número de instâncias podemos determinar os instantes de tempo  $t_i$  nos quais, ao longo do processo de aquisição, se muda de uma *frame* para a sucessiva. Da mesma forma, considerando o tempo de aquisição e o número total de projecções ( $numrotações \times numfocos$ ) por calcular, podemos associar a cada projecção o instante no qual é virtualmente obtida e, por consequência, a *frame* que deve ser utilizada para o cálculo da projecção. Na aquisição dinâmica em espiral, pode ser estabelecida uma correspondência entre coordenada longitudinal do foco  $zf$  e coordenada temporal, sendo determinadas as posições do foco  $zf_i$  nas quais deve mudar a *frame* utilizada. No caso multicorte, o esquema para a determinação do volume por varrer em cada *frame*, representado na figura 8.21, deve ter em consideração o *offset* devido à abertura cónica do feixe.

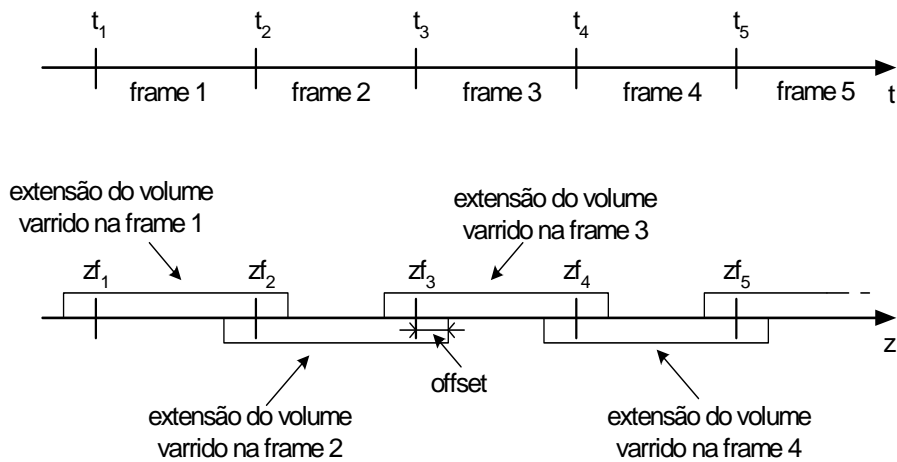


Figura 8.21: Representação esquemática da correspondência entre coordenada longitudinal e coordenada temporal na aquisição dinâmica em espiral e da extensão do volume varrido nas várias *frames* do fantoma.

## Capítulo 9

# Análise experimental: tomografia estática

O ambiente de simulação descrito no capítulo 8 permite-nos adquirir virtualmente dados projecção de um fantoma 2 ou 3D, estático ou dinâmico, utilizando diferentes geometrias e protocolos de aquisição, em condições ideais ou com diferentes níveis de ruído. Utilizando os dados projecção assim obtidos, podemos avaliar o desempenho de diferentes algoritmos de reconstrução nas mais variadas situações.

Neste capítulo e no próximo, iremos descrever alguns exemplos de como este instrumento pode ser aproveitado na avaliação de novos métodos computacionais para a reconstrução tomográfica.

Em primeiro lugar, iremos avaliar os métodos de reconstrução de Fourier propostos no capítulo 6 comparando o seu desempenho com o desempenho dos métodos de reconstrução habitualmente utilizados nos sistemas tomográficos comerciais e, em segundo lugar, iremos descrever e comparar os métodos de interpolação longitudinal aplicáveis a dados projecção obtidos com varrimento helicoidal quer no caso de aquisição monocorte, quer multicorte.

### 9.1 Tomografia sequencial monocorte

No capítulo 6 descrevemos algumas novas possíveis implementações do método de reconstrução de Fourier aplicáveis, no caso de tomografia sequencial monocorte, a projecções paralelas ou divergentes.

Em ambos os casos, iremos descrever alguns aspectos da implementação dos algoritmos que pretendemos avaliar, assim como dos algoritmos (de tipo FBP) utilizados como referência, para depois passarmos à avaliação comparativa.

#### 9.1.1 Projecções paralelas

No que se refere aos algoritmos de reconstrução aplicáveis a projecções paralelas, iremos avaliar o algoritmo DFM (6.1.3) e o algoritmo NFFT DFM (6.1.5), também numa versão mais rápida designada NFFT DFM FAST, comparando-os com o algoritmo clássico de Retroprojecção Filtrada (5.2.1).

## FBP

O algoritmo de retroprojectão filtrada ou FBP, descrito na secção 5.2.1 (algoritmo 5.2.1), segue os passos representados no diagrama de blocos da figura 9.1, onde, aproveitando da eficiência do cálculo matricial em Matlab, a retroprojectão pode ser implementada da seguinte forma:

1. criação da matriz **imagem** com elementos todos nulos
2. para cada direcção de projectão **i**
  - (a) determinação da matriz **S** cujos elementos são os valores da coordenada **s** nos quais se projecta cada *pixel* da imagem
  - (b) determinação das matrizes **K** e **K1** contendo os índices das amostras da projectão mais próximas (a anterior e a sucessiva) dos elementos de **S**
  - (c) determinação da matriz **U** das diferenças entre os elementos de **S** e as coordenadas **s** das amostras da projectão em **K**
  - (d) determinação da **i**-ésima retroprojectão por interpolação linear nos pontos **S** das amostras de índices **K** e **K1** utilizando as distâncias **U**
  - (e) soma da **i**-ésima retroprojectão à matriz **imagem**
3. normalização (divisão da matriz **imagem** pelo número de projectões utilizadas)

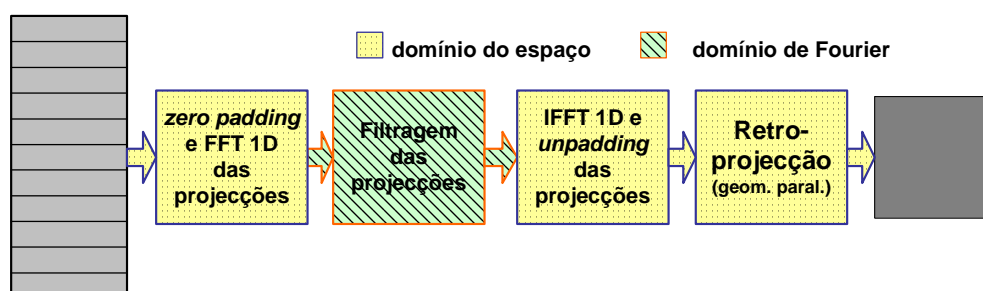


Figura 9.1: Diagrama de blocos do algoritmo FBP.

A filtragem das projecções antes da retroprojectão procura, como já vimos, compensar o efeito passa baixo implícito no processo de retroprojectão, sendo o filtro a utilizar um elemento determinante para a qualidade da imagem. A forma como um determinado filtro lida com as frequências próximas da frequência de corte (algumas possíveis funções de filtro foram descritas no capítulo 5) determina a suavidade ou aspereza da reconstrução sendo, por isso, os possíveis filtros classificados como mais "suaves" ou mais "asperos" (ou "agudos"). A selecção do tipo de filtro (por exemplo: Ram-Lak, Shepp-Logan, Cossenos e Hamming ordenados do mais aspero ao mais suave) e dos parâmetros a aplicar depende da qualidade pretendida para a imagem e da tarefa diagnóstica que deve ser realizada (no caso de imagens médicas), tendo em consideração as características estatísticas das medidas. Nomeadamente, se em presença de dados ideais (sem ruído) um filtro aspero, como por exemplo o filtro de tipo Ram-Lak, permite obter reconstruções de óptima qualidade (boa resolução espacial e de contraste), no caso de dados ruidosos este tipo de filtro não será aconselhável visto acentuar

os efeitos do ruído. Neste caso será necessário recorrer a um filtro mais suave, como por exemplo o filtro de tipo Cosseno ou Hamming.

Independentemente da função de filtro escolhida, trata-se de um algoritmo de elevada complexidade computacional  $\mathcal{O}(N^3)$  mas, mesmo assim, bastante apelativo devido à grande flexibilidade oferecida pela abordagem orientada ao *pixel* (*pixel driven*) que o caracteriza. Este tipo de abordagem possibilita, por exemplo, a reconstrução em paralelo com a aquisição e a reconstrução de regiões de interesse com ou sem *zoom*.

## DFM

Como dissemos na secção 6.1.3, este algoritmo simples tem como passagem chave a interpolação no espaço de Fourier das projecções sobreamostrado (devido ao *zero-padding* das projecções), representada pelo bloco central no diagrama da figura 9.2. Os restantes blocos não apresentam pormenores de implementação dignos de nota.

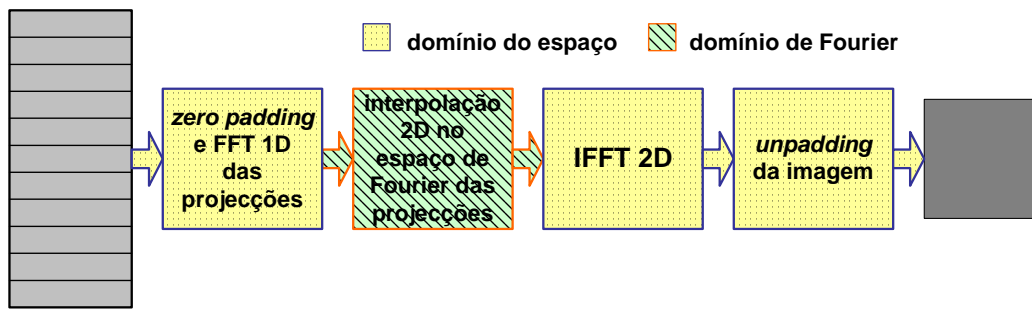


Figura 9.2: Diagrama de blocos do algoritmo DFM.

Utilizando um factor de *padding*  $\alpha$ , as  $numfocos \times (\alpha * numdetect)$  amostras no espaço de Fourier das projecções encontram-se uniformemente distribuídas no sistema de referência Cartesiano de coordenadas  $(\theta, \sigma)$ , enquanto, no mesmo espaço, os  $(\alpha * dim) \times (\alpha * dim)$  pontos de interpolação seguem o padrão representado na figura 6.5.

A fase mais interessante do algoritmo consiste na organização dos dados de forma a poder realizar a interpolação bidimensional no espaço de Fourier. Para isto, armazenámos as coordenadas Cartesianas das amostras dadas (FFT 1D das projecções após *zero-padding*) regularmente distribuídas no espaço Cartesiano  $(\sigma, \theta)$  e dos pontos de interpolação nas seguintes estruturas de dados:

- Matriz das coordenadas  $\sigma$  das amostras dadas, ordenadas segundo a sua distribuição no espaço de Fourier nas coordenadas Cartesianas  $(\sigma, \theta)$ . Os elementos de cada coluna desta matriz, que designaremos de *SIGMA*, são iguais.
- Matriz das coordenadas  $\theta$  das amostras dadas, ordenadas segundo a sua distribuição no espaço de Fourier nas coordenadas Cartesianas  $(\sigma, \theta)$ . Os elementos de cada linha desta matriz, que designaremos de *THETA*, são iguais.
- Matriz das coordenadas  $\sigma$  (*SIGMA1*) e matriz das coordenadas  $\theta$  (*THETA1*) dos pontos de interpolação regularmente distribuídos na grelha Cartesiana  $(u, v)$ . No espaço Cartesiano  $(\sigma, \theta)$  estes pontos correspondem ao padrão de amostragem da figura 6.5.



Dada a matriz  $H$ , na qual são armazenadas as amostras da FFT 1D das projecções (*zero-padded*), e as matrizes  $SIGMA$  e  $THETA$ , podemos calcular as amostras nos pontos de interpolação cujas coordenadas são dadas pelas matrizes  $SIGMA1$  e  $THETA1$ , utilizando a função Matlab `interp2`:

```
H=interp2(SIGMA,THETA,H,SIGMA1,THETA1,'cubic');
```

É essencial, para a qualidade da reconstrução, garantir a perfeita sobreposição, no sistema de referência, das amostras correspondentes ao valor "dc" das FFT 1D das projecções e da FFT 2D da imagem, sob pena de introduzirmos erros quer na fase quer na frequência espacial. Isto é, as  $(\frac{\alpha \times numdetect}{2} + 1)$ -ésimas amostras das transformadas 1D das projecções devem ter abcissa nula ( $\sigma = 0$ ) assim como a  $(dim + 1, dim + 1)$ -ésima amostra da transformada 2D da imagem deve corresponder ao ponto de coordenadas  $(0, 0)$  no sistema cartesiano  $(u, v)$ . No que se refere à escolha do método de interpolação, entre as várias possibilidades ('nearest neighbor', 'linear' e 'cubic'), escolhemos a interpolação bicúbica ('cubic') pela qual o valor da amostra calculada num determinado ponto de interpolação é uma combinação dos valores das 16 amostras mais próximas, segundo o método proposto em [67]. Apesar da maior complexidade, a utilização deste método de interpolação permite obter resultados de qualidade muito superior à obtida, por exemplo, pela interpolação linear.

### NFFT DFM, NFFT DFM FAST

O algoritmo NFFT DFM, centrado na utilização da NFFT 2D (apêndice A) para a inversão da transformada de Fourier da imagem a partir de amostras não equiespaçadas, como descrito na secção 6.1.5, segue os passos representados no diagrama de blocos da figura 9.3.

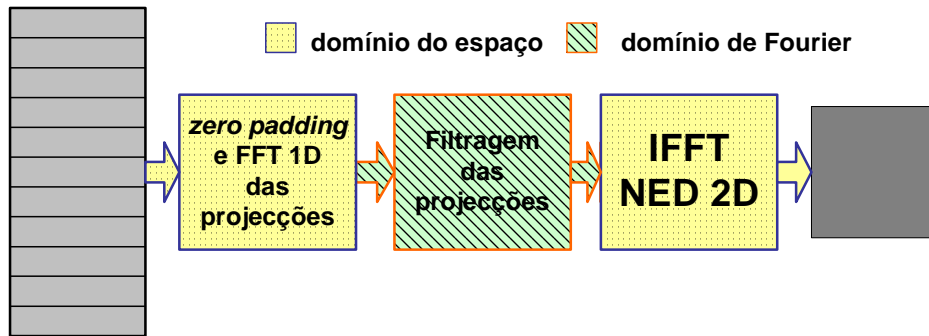


Figura 9.3: Diagrama de blocos do método NFFT DFM.

Após *zero-padding* das projecções com  $\alpha = 2$ , necessário para evitar os artefactos devidos a *aliasing*, obtemos um conjunto de amostras da transformada de Fourier 2D da imagem regularmente distribuídas sobre uma grelha polar de coordenadas  $(\theta, \sigma)$  radialmente (isto é, segundo a coordenada  $\sigma$ ) sobreamostrada. A estas amostras pode ser aplicada a IFFT NED 2D (algoritmo A.2.1 modificado de forma a calcular a transformada inversa) obtendo directamente a imagem reconstruída. A função que calcula a IFFT NED 2D encontra-se embutida numa *dll* (*dynamic-link library*) tal como se explica na apêndice A (secção A.4), sendo necessário fornecer como variáveis: o número  $M$ , a localização (matrizes  $U$  e  $V$  das coordenadas Cartesianas  $(u, v)$ ) e o valor das amostras dadas (matriz  $H$ ) e o número de amostras da imagem

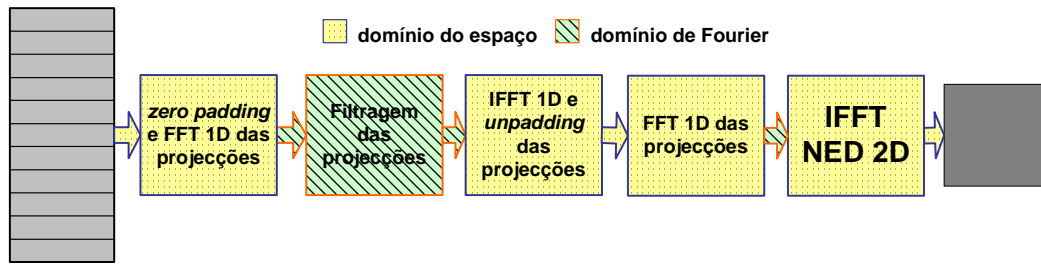


Figura 9.4: Diagrama de blocos do método NFFT DFM FAST.

por reconstruir (representado pela dimensão  $N$ ). Desta forma, após o cálculo dos argumentos, a operação de inversão por NFFT, representada pelo último bloco do diagrama da figura 9.3, consiste na chamada da função `IFFT_NED_2D`:

$$\mathbf{f} = \text{IFFT\_NED\_2D}(H, N, M, U, V);$$

Por último, a filtragem, necessária (como se disse na secção 6.1.5) devido à operação de *gridding* incluída no algoritmo FFT NED (apêndice A) e à densidade não uniforme das amostras, realiza-se utilizando os mesmos filtros disponíveis para o algoritmo de FBP, mantendo-se os mesmos critérios de escolha.

Foi também desenvolvida uma versão mais rápida deste algoritmo, que designámos por NFFT DFM FAST, na qual se recorre ao *zero-padding* apenas para a operação de filtragem (diagrama de blocos 9.4), depois disso, voltando ao domínio espacial, faz-se o *unpadding* das projecções filtradas, calcula-se a sua FFT 1D obtendo amostras da transformada de Fourier 2D da imagem regularmente distribuídas sobre uma grelha polar (desta vez, não sobreamostrada) a partir das quais por IFFT NED 2D pode ser reconstruída a imagem.

Apesar de implicar algumas operações adicionais relativamente ao algoritmo NFFT DFM, a diminuição do número de amostras às quais se aplica a IFFT NED 2D faz com que este algoritmo seja extremamente rápido. Infelizmente a imagem reconstruída mostra, como se pode observar no exemplo da figura 9.5-a, um evidente artefacto em forma de anel (devido ao fenómeno de *aliasing*), todavia a qualidade da reconstrução na região interna ao artefacto (neste caso, coincidente com o FOV –*Field of View*– circular, isto é o círculo inscrito na imagem) é excelente, sendo comparável com a qualidade obtida pelo algoritmo NFFT DFM (ver figura 9.5-b onde se visualiza a imagem obtida após aplicação de máscara coincidente com o FOV circular) tanto do ponto de vista qualitativo como quantitativo (como se verá no próximo parágrafo). Por outro lado, as dimensões e a aparência do artefacto dependem das dimensões do objecto analisado, da geometria de amostragem e do número de amostras adquiridas, podendo afectar a região de interesse da imagem o que condiciona a aplicabilidade deste algoritmo.

### Avaliação:

Para podermos avaliar o desempenho dos vários métodos propostos para a reconstrução a partir de projecções paralelas, começamos por adquirir alguns conjuntos de projecções paralelas do fantoma de Shepp-Logan modificado em condições ideais (isto é, sem ruído –  $N_{in} = \infty$ ), e com diferentes números de projecções e de amostras por projecção. Mais especificamente, os

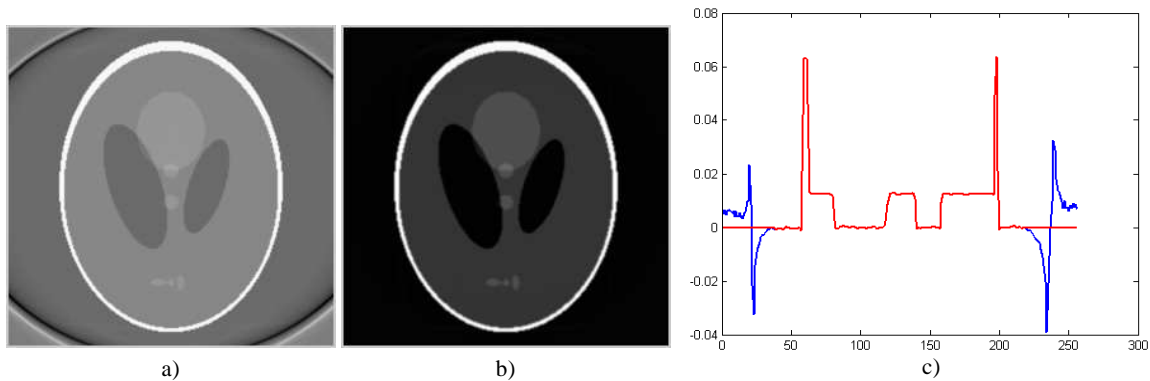


Figura 9.5: Uma imagem do fantoma de Shepp-Logan reconstruída pelo método NFFT DFM FAST é caracterizada por um artefacto em anel (a) que pode ser eliminado utilizando uma máscara coincidente com o FOV circular (b). No gráfico (c) comparam-se as diagonais da imagem (a) e da imagem (b). No FOV circular, a diferença entre a imagem (a) e a imagem (b) em termos de tons de cinzento é aparente (c) e deve-se apenas à janela de visualização utilizada.

resultados aqui apresentados referem-se aos sinogramas de dimensões  $256 \times 256$  e  $240 \times 352$  (sendo o número de linhas correspondente ao número de projecções em  $\pi$  radianos e o número de colunas correspondente ao número de amostras por projecção), adquiridos utilizando o método de projecção descrito na secção 8.2.4 do fantoma de  $256 \times 256$  pixels, e ao sinograma de dimensões  $512 \times 512$  adquirido com o mesmo método de projecção do fantoma de  $512 \times 512$  pixels.

Em primeiro lugar, na figura 9.6 mostram-se as imagens obtidas pelos métodos de reconstrução propostos (FBP, NFFT DFM e NFFT DFM FAST com filtro Hamming e com filtro Ram-Lak, e DFM) a partir do sinograma de dimensões  $240 \times 352$ . Em todos os casos a qualidade é satisfatória e podem ser observados os efeitos de maior ou menor suavização das fronteiras entre objectos de elevado contraste devido aos diferentes tipos de filtro utilizados.

Do ponto de vista quantitativo, o desempenho dos métodos de reconstrução implementados foi avaliado recorrendo às três medidas de erro  $-d$ ,  $r$ ,  $e$  propostas por Herman (apêndice B), que permitem quantificar a distância entre a imagem reconstruída e a imagem original, calculada apenas no FOV circular, e o tempo de cálculo. Na figura 9.7 representamos graficamente os índices de mérito associados pelas mencionadas métricas de erro aos vários métodos, e a sua evolução com o variar do conjunto de amostras consideradas. Ainda, são representados os tempos de cálculo observados, em percentagem relativamente ao tempo de reconstrução do método de FBP que é tomado como referência.

Como se pode observar, o método DFM e os métodos que utilizam filtro Ram-Lak apresentam melhores índices de qualidade  $d$  e  $e$  relativamente aos métodos que utilizam filtro de Hamming. No entanto, o método DFM e os métodos que utilizam filtro de Hamming têm melhor desempenho no que se refere ao índice  $r$ . Estas diferenças devem-se às características das operações de filtragem associadas a cada método de reconstrução. Os filtros mais suaves (Hamming), atenuando as transições abruptas entre diferentes valores de *pixel*, provocam erros elevados localizados ao longo das fronteiras entre objectos de elevado contraste (o que resulta num elevado valor das medidas  $d$  e  $e$ ). Por outro lado, os filtros mais "ásperos" permitem

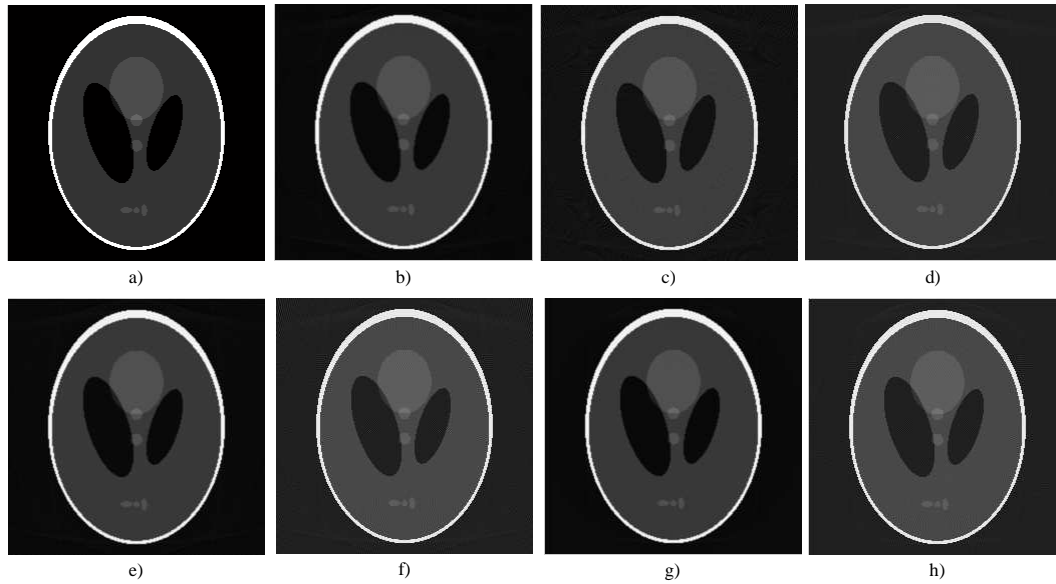


Figura 9.6: Imagens do fantoma de Shepp-Logan obtidas pelos diferentes métodos de reconstrução a partir do sinograma ideal  $240 \times 352$ . a) Imagem original b) FBP com filtro Hamming, c) FBP com filtro RamLak, d) DFM, e) NFFT DFM com filtro Hamming, f) NFFT DFM filtro RamLak, g) NFFT DFM FAST filtro Hamming (multiplicada pela máscara coincidente com o FOV circular), h) NFFT DFM FAST filtro RamLak (multiplicada pela máscara coincidente com o FOV circular).

acompanhar as transições abruptas entre diferentes valores de *pixel* mas são mais sensíveis aos artefactos devidos aos processos discretizados de projecção e reconstrução, dando origem a erros pequenos e generalizados (o que resulta num elevado valor da medida  $r$ ). Por fim, constata-se que o método DFM, que não implica filtragem explícita, permite obter imagens de qualidade globalmente superior (relativamente aos filtros considerados) em condições ideais, o que vem a suporte de quanto afirmado na secção 6.3, ou seja, que este algoritmo inclui uma operação de filtragem implícita correspondente à aplicação de um filtro de tipo Ram-Lak.

Quanto aos tempos de reconstrução, no geral observa-se (tal como era previsível dada a menor complexidade computacional destes algoritmos) uma excelente redução do tempo de calculo nos métodos de Fourier relativamente ao método FBP (entre o 3 e o 23%), todavia, no caso do algoritmo DFM aplicado ao sinograma de dimensões  $480 \times 352$  verifica-se um imprevisto aumento do tempo de reconstrução (600%) que se deve, como foi possível perceber pela análise dos tempos de reconstrução associados a cada passo do algoritmo, à ineficiência do algoritmo de interpolação bidimensional relativamente a este padrão de amostragem.

Para avaliarmos o desempenho dos algoritmos em condições não ideais, isto é, com dados projecção afectados por ruído, foram adquiridos dados projecção incluindo o modelo do ruído descrito na secção 8.3 com  $N_{in} = 10^8$  e  $N_{in} = 10^6$ . Na figura 9.8 mostram-se as imagens reconstruídas a partir do sinograma de dimensões  $480 \times 352$  com potência de feixe  $N_{in} = 10^6$ . Como se pode observar, contrariamente ao que acontece no caso ideal, em presença de ruído (neste caso bastante elevado) os algoritmos que integram um filtro mais suave permitem obter imagens qualitativamente superiores relativamente aos algoritmos que integram filtros mais "ásperos". Repare-se como, em particular, a maior sensibilidade ao ruído dos filtros mais "ásperos" torna mais difícil distinguir os objectos de baixo contraste.

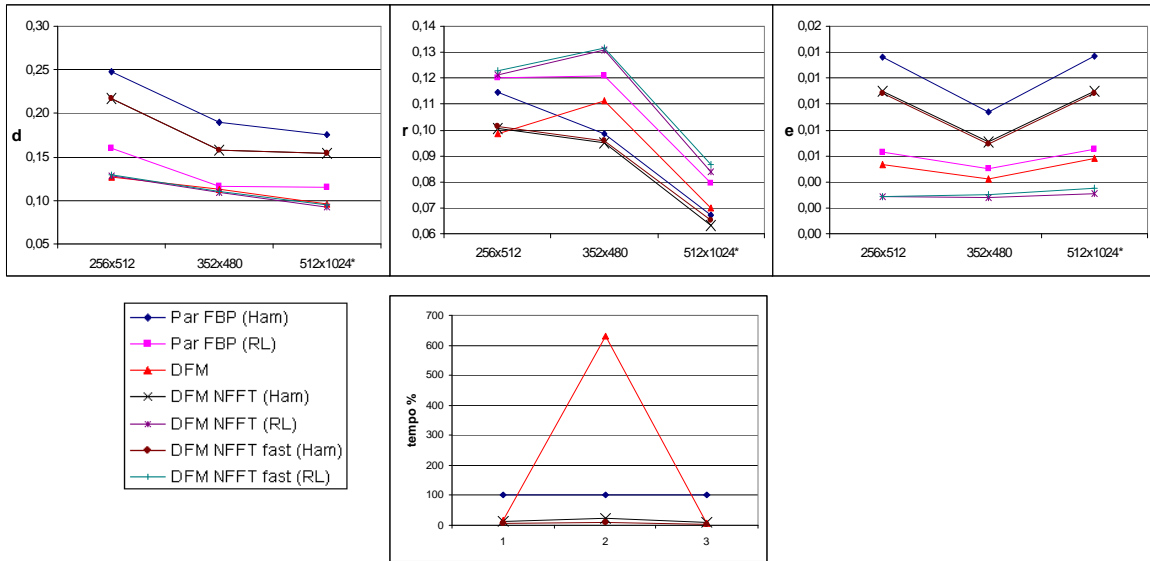


Figura 9.7: Avaliação quantitativa dos métodos propostos para a reconstrução a partir de projecções paralelas obtidas em condições ideais. Os gráficos representam as medidas de erro de Herman  $-d$ ,  $r$ ,  $e$  – calculadas no FOV circular e o tempo de reconstrução. (\*) O sinograma  $1024 \times 512$  foi obtido do fantoma  $512 \times 512$ .

A avaliação quantitativa, vem a confirmar a análise qualitativa. Os gráficos das medidas de erro  $-d$ ,  $r$ ,  $e$  da figura 9.9, mostram como todos os índices de mérito dos métodos de reconstrução que integram filtros mais "ásperos" (Ram-Lak) pioram com o aumentar do nível de ruído de forma mais acentuada relativamente aos outros métodos. O método DFM tem um desempenho compatível com a presença implícita de um filtro de tipo Ram-Lak.

O desempenho dos vários métodos em presença de ruído pode ser avaliado também através de análise estatística calculando o desvio padrão da diferença entre as imagens reconstruídas a partir de dados adquiridos em presença de ruído e em condições ideais. A tabela 9.1 na qual se apresentam os desvios padrão do ruído calculados nas imagens obtidas a partir de sinogramas de dimensões  $480 \times 352$ , evidencia-se como a quantidade de ruído presente na região central (o quadrado de  $25 \times 25$  pixels) das imagens reconstruídas dependa, essencialmente, do filtro implícita ou explicitamente utilizado na reconstrução. Em primeiro lugar, observa-se como a utilização de um filtro mais suave (Hamming) permita reduzir o desvio padrão do ruído, seja qual for o método de reconstrução. Além disso, pode-se observar como o desvio padrão nas imagens obtidas pelos dois métodos de Fourier baseados na utilização da NFFT (NFFT DFM e NFFT DFM FAST) seja exactamente o mesmo e apenas superior ao das imagens obtidas por FBP (sendo utilizado o mesmo filtro).

Do ponto de vista qualitativo, no que se refere à reconstrução a partir de projecções paralelas, podemos dizer que os métodos de Fourier que utilizam a NFFT têm um desempenho equivalente ao do método de FBP tanto em condições ideais como em presença de ruído permitindo, inclusivamente, escolher o filtro que melhor se adapta às condições de aquisição (nível de ruído). O mesmo não se pode dizer no caso do algoritmo DFM cujo filtro implícito não pode ser adaptado às condições de aquisição, oferecendo um bom desempenho apenas em condições ideais. Contudo, utilizado o mesmo filtro, observa-se (no que se refere aos índices

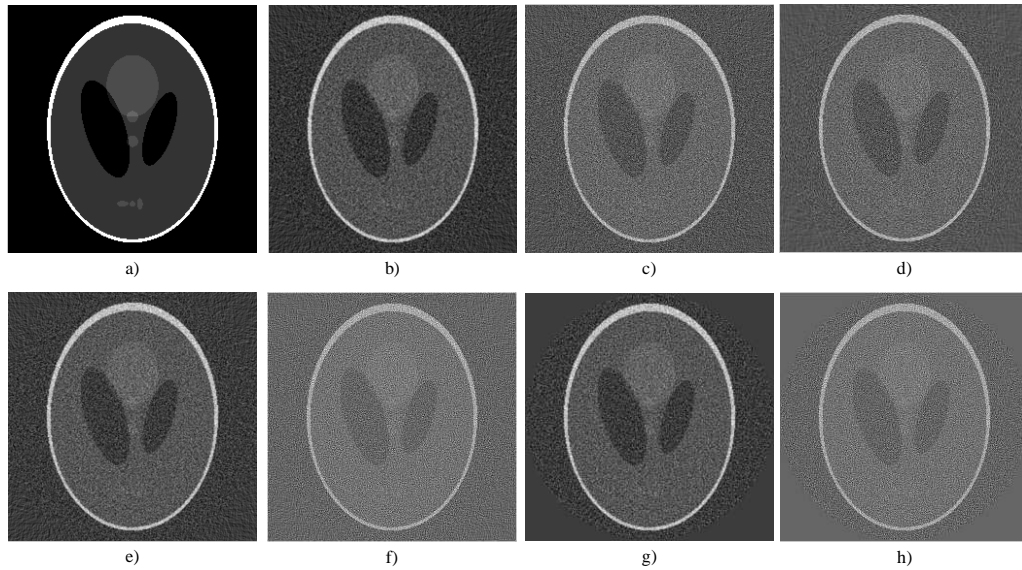


Figura 9.8: Imagens do fantoma de Shepp-Logan obtidas pelos diferentes métodos de reconstrução a partir de um sinograma ( $480 \times 352$ ) adquirido em presença de ruído  $N_{in} = 10^6$ . a) Imagem original, b) FBP com filtro Hamming, c) FBP com filtro Ram-Lak, d) DFM, e) NFFT DFM com filtro Hamming, f) NFFT DFM filtro Ram-Lak, g) NFFT DFM FAST filtro Hamming (multiplicada pela máscara coincidente com o FOV circular), h) NFFT DFM FAST filtro Ram-Lak (multiplicada pela máscara coincidente com o FOV circular).

de qualidade  $d$  e  $r$  e ao desvio padrão do ruído  $\sigma$ ) um ligeiro aumento da sensibilidade ao ruído por parte dos algoritmos de Fourier relativamente ao método de FBP. Este fenómeno não era inesperado e não deve ser considerado índice de mau desempenho, deve-se apenas ao facto que a escolha do filtro em rampa para compensar a densidade não uniforme das amostras no espaço de Fourier foi baseada em considerações práticas e de senso comum, mas pode não ser a mais adequada. De qualquer forma, utilizando nos métodos de Fourier que utilizam a NFFT um filtro ligeiramente mais suave relativamente ao utilizado no método de FBP, podemos obter um resultado perfeitamente equivalente.

Tanto em presença de ruído como em condições ideais (utilizando o mesmo tipo de filtro) observa-se a perfeita sobreposição entre os índices de qualidade dos métodos NFFT DFM e NFFT DFM FAST na região interior ao artefacto em anel que caracteriza as imagens reconstruídas por este último método (coincidente, no caso das imagens consideradas, com o FOV circular, fig. 9.5). Desta forma, a análise quantitativa permite comprovar o que se afirmou na secção 9.1.1, ou seja, que a sobreamostragem no domínio de Fourier 2D não melhora a qualidade da imagem na região central, mas permite eliminar os efeitos devidos ao fenómeno de *aliasing*, tornando o método NFFT DFM muito mais robusto relativamente ao método NFFT DFM FAST.

### 9.1.2 Projecções divergentes

No caso de projecções divergentes, pretendemos comparar o desempenho dos algoritmos descritos na secção anterior precedidos por *rebinning* das projecções (da geometria divergente para a paralela, descrito na secção 5.1.4), com o desempenho dos métodos de Fourier pre-

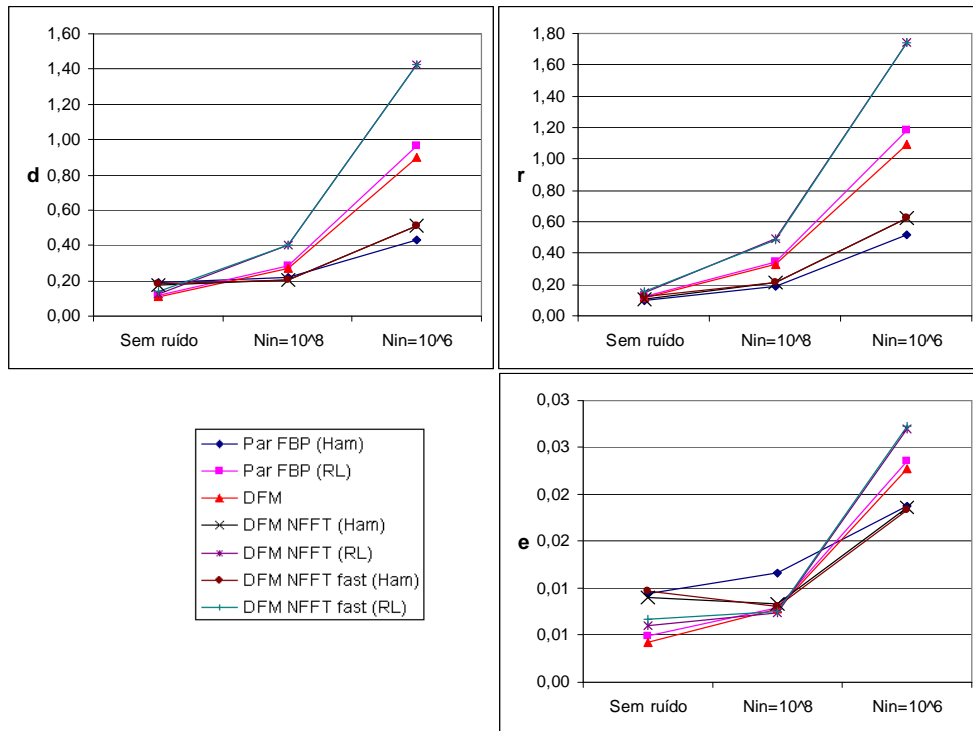


Figura 9.9: Avaliação quantitativa dos métodos de reconstrução para projecções paralelas (sinograma  $480 \times 352$ ) obtidas com diferentes níveis de ruído. Os gráficos representam as medidas de erro de Herman  $-d$ ,  $r$ ,  $e$ — calculadas no FOV circular.

cedidos por *rebinning* sem interpolação (técnica proposta na secção 6.2.1), e dos algoritmos de Retro projecção Filtrada para projecções divergentes (DB FBP —algoritmo 5.2.3—) que será tomado como referência. Tanto dos algoritmos de Fourier como de Retro projecção Filtrada foram consideradas também versões para varrimento breve.

### DB FBP, DB FBP *short*

O algoritmo FBP para projecções divergentes descrito na secção 5.2.2 (algoritmo 5.2.3), segue os passos representados no diagrama de blocos da figura 9.10. A sequência de operações é a mesma do correspondente algoritmo para projecções paralelas com a diferença que, antes que mais, cada amostra do sinograma divergente deve ser ponderada utilizando o factor  $\cos \gamma$ , onde  $\gamma$  é o desvio angular do correspondente raio projecção relativamente ao eixo central do feixe. A filtragem das projecções divergentes não apresenta diferenças em relação à filtragem de projecções paralelas, enquanto o processo de retro projecção pode ser implementado de forma análoga à descrita para o caso de projecções paralelas:

1. criação da matriz **imagem** com elementos todos nulos
2. para cada direcção de projecção **i**
  - (a) determinação da matriz **gama** cujos elementos são os valores da coordenada  $\gamma$  nos quais se projecta cada *pixel* da imagem

$\sigma$ proj paralelas	$N_{in} = 10^8$	$N_{in} = 10^6$
FBP (GHam)	0.0016	0.0056
FBP (Ram-Lak)	0.0039	0.0146
DFM	0.0042	0.0160
DFM_NFFT (GHam)	0.0020	0.0072
DFM_NFFT (Ram-Lak)	0.0056	0.0216
DFM_NFFT_fast (GHam)	0.0020	0.0072
DFM_NFFT_fast (Ram-Lak)	0.0056	0.0216

Tabela 9.1: Desvio padrão do ruído na região central das imagens obtidas pelos métodos de reconstrução considerados (para projecções paralelas) a partir de dados adquiridos em presença de ruído.

- (b) determinação das matrizes  $K$  e  $K1$  contendo os índices das amostras da projecção mais próximas (a anterior e a sucessiva) dos elementos de **gama**
- (c) determinação da matriz  $L$  das diferenças entre os elementos de **gama** e as coordenadas  $\gamma$  das amostras da projecção em  $K$
- (d) determinação da  $i$ -ésima retroprojecção por interpolação linear nos pontos **gama** das amostras de índices  $K$  e  $K1$  utilizando as distâncias  $L$
- (e) soma da  $i$ -ésima retroprojecção à matriz **imagem**

3. normalização (divisão da matriz **imagem** pelo número de projecções utilizadas)

O papel da coordenada  $\gamma$  no caso de projecções divergentes é perfeitamente análogo ao papel da coordenada  $s$  no correspondente algoritmo para projecções paralelas.

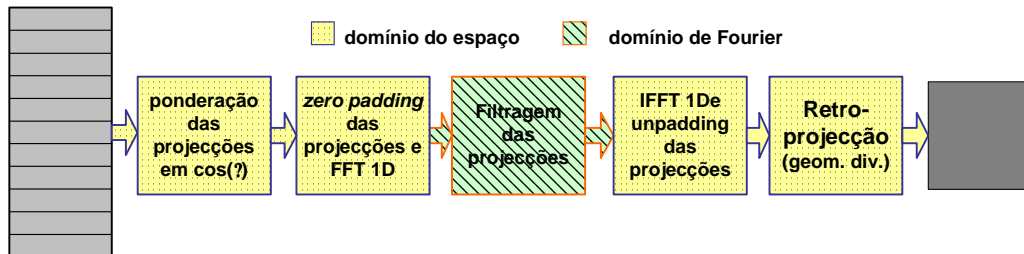


Figura 9.10: Diagrama de blocos do algoritmo DB FBP.

A complexidade deste algoritmo é  $\mathcal{O}(N^3)$  tal como no caso da geometria paralela, com um factor multiplicativo suplementar devido ao facto que devem ser retroprojectadas as projecções correspondentes a uma rotação completa do foco. Para reduzir o tempo de cálculo, este algoritmo pode ser adaptado de forma a serem utilizadas apenas as projecções correspondentes ao varrimento breve assim como descrito na secção 5.2.3 (algoritmo DB FBP *short*). O primeiro passo do algoritmo DB FBP *short* será a aplicação de uma máscara de ponderação suplementar (na nossa implementação foi utilizada a ponderação sugerida por Parker e descrita na secção 5.2.3) ao sinograma correspondente ao varrimento breve (rotação de  $\pi + \Gamma$  radianos, sendo  $\Gamma$  a abertura do feixe). As projecções ponderadas são filtradas e retroprojectadas tal como no algoritmo DB FBP.



## Rebinning

O processo de *rebinning* pode ser particularmente simples de implementar em Matlab, consistindo apenas numa interpolação 2D no espaço Cartesiano do sinograma divergente de forma a obter amostras de sinograma tal como descrito na secção 5.1.4.

Em primeiro lugar calculam-se as matrizes **BETA** e **GAMA**, de dimensões  $numfocos \times numdetect$  e contendo as coordenadas  $\beta$  e  $\gamma$  das amostras dadas (regularmente distribuídas sobre a grelha Cartesiana  $(\beta, \gamma)$ ) e as matrizes **BETA1** e **GAMA1**, de dimensões  $numfocos/2 \times numdetect$  e contendo as coordenadas  $\beta$  e  $\gamma$  das amostras do sinograma que se pretende obter (sendo que para o cálculo destas coordenadas utilizam-se as fórmulas 5.19). Por fim realiza-se a interpolação bidimensional através da função Matlab `interp2`

```
sinopar=interp2(GAMA,BETA,sinodiv,GAMA1,BETA1,'cubic');
```

Ao sinograma assim obtido pode ser aplicado qualquer um dos métodos de reconstrução para projecções paralelas anteriormente descritos. Em particular, iremos avaliar a qualidade das reconstruções obtidas pelas sequências: *rebinning* + FBP, *rebinning* + DFM e *rebinning* + NFFT DFM.

Observe-se como, os algoritmos de reconstrução que integram esta específica implementação do *rebinning* utilizam apenas amostras correspondentes a um varrimento breve.

## DB NFFT DFM, DB NFFT DFM *short*

Tal como se viu na secção 6.2.1, a técnica de *rebinning* sem interpolação consiste na reorganização das amostras de sinograma divergente num determinado número de classes (tendo-se afirmado que a escolha de  $numclasses = numfocos/2$  permite otimizar o desempenho) com base na inclinação do correspondente raio projecção, obtendo projecções paralelas generalizadas. A partir destas, utilizando a NFFT 1D, podemos reconstruir a imagem aplicando métodos de Fourier. Em particular, estamos interessados na avaliação do método DB NFFT DFM, que integra a técnica de *rebinning* sem interpolação, com o método NFFT DFM para projecções paralelas.

A implementação eficiente da técnica de *rebinning* sem interpolação passa pela pré-computação das máscaras que, aplicadas a qualquer sinograma divergente adquirido com o mesmo padrão de amostragem, permitem seleccionar os conjuntos de amostras que correspondem a cada uma das projecções paralelas generalizadas. Para obter as máscaras, calculam-se, em primeiro lugar, as matrizes **THETA** e **S** das coordenadas  $\theta$  e  $s$  (calculadas utilizando as fórmulas 6.6 e 6.7) do raio projecção associado a cada amostra do sinograma divergente (para já, completo) e normalizam-se os valores destas matrizes de forma a que as coordenadas  $\theta$  variem apenas no intervalo  $[0, \pi]$ . Em segundo lugar calcula-se a matriz **CLASSES** que associa a cada amostra do sinograma divergente o número de ordem da projecção paralela generalizada à qual pertence e finalmente, recorrendo às técnicas de manipulação de matrizes esparsas e às estruturas de dados em "células" disponibilizadas pelo Matlab (essenciais para a eficiência do algoritmo), obtém-se o vector **maskclasses** cujos elementos são as máscaras pretendidas em forma de matrizes booleanas esparsas.

O diagrama de blocos do algoritmo DB NFFT DFM, representado na figura 9.11, é análogo ao diagrama do método NFFT DFM para projecções paralelas. Após a filtragem das projecções divergentes com um dos filtros mencionados na secção 5.2.1, para cada projecção generalizada, utilizando o método de indexação lógica aplica-se a correspondente máscara

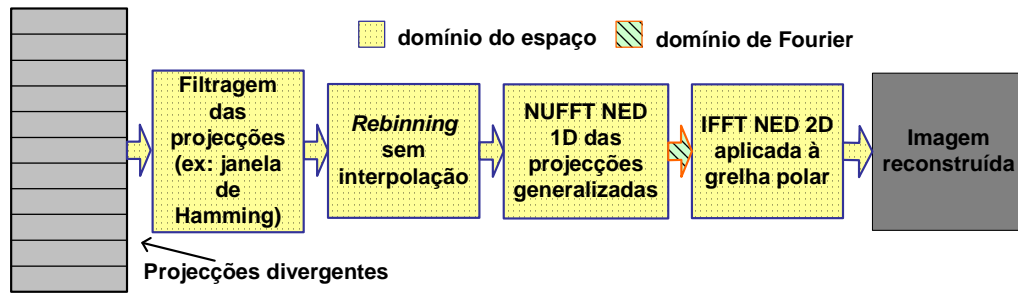


Figura 9.11: Diagrama de blocos do algoritmo DB NFFT DFM.

pré-calculada ao sinograma divergente filtrado e alargado (com *zero padding* das projecções) e à correspondente matriz  $\mathbf{S}$  cujos elementos são as coordenadas  $s$  das amostras do sinograma divergente alargado, obtendo o conjunto de amostras (e suas coordenadas  $s$ ) às quais aplicar a NFFT NED 1D. Cada iteração deste algoritmo permite o cálculo de uma linha da matriz  $\mathbf{H}$  que contém as amostras da transformada de Fourier 2D da imagem regularmente distribuídas sobre a grelha polar sobreamostrada. A partir deste ponto, o algoritmo prossegue exactamente como no algoritmo NFFT DFM.

Dada a importância que a reconstrução a partir de varrimento breve tem em aplicações dinâmicas (permitindo aumentar a resolução temporal), desenvolveu-se também uma versão deste algoritmo aplicável a sinogramas divergentes breves. A diferença reside essencialmente na forma como são classificadas as amostras no processo de *rebinning* sem interpolação. Em primeiro lugar, não havendo uma cobertura circular completa, deve ser tomado em consideração o facto que, dada a posição angular inicial do foco  $\beta_{ini}$  e o sentido de rotação *srot*, será possível obter apenas as *numclasses* projecções paralelas generalizadas correspondendo às direcções  $\theta_n = \beta_{ini} - \frac{\pi}{2} + (\frac{\Gamma}{2} + (n - 1)deltatheta) \times srot$ , com  $n = 1, ..numclasses$  e  $deltatheta = \pi/numclasses$ . Ainda, não sendo possível normalizar os valores das coordenadas  $\theta$  de forma a variarem apenas num arco de  $\pi$  radianos (dado que assim algumas projecções acabariam por ter um número de amostras maior que outras, dando lugar a artefactos na imagem reconstruída), optou-se por descartar as amostras redundantes. Uma vez obtidas as matrizes das coordenadas  $\theta$  e  $s$  dos raios projecção associados às amostras do sinograma breve, calcula-se a matriz **CLASSES** que, analogamente ao que acontece no caso de sinograma completo, permite associar a cada amostra do sinograma breve o número de ordem da projecção paralela generalizada a que pertence. Pode ser, então, gerado o vector das máscaras que, aplicadas ao sinograma divergente breve (após filtragem das projecções) e à correspondente matriz das coordenadas  $s$ , permitem extrair as projecções paralelas generalizadas. A partir deste ponto, o algoritmo DB NFFT DFM *short* prossegue da mesma forma que o algoritmo DB NFFT DFM.

Repare-se como a técnica de *rebinning* sem interpolação aplicada ao sinograma breve não utiliza de todo as amostras redundantes (representadas graficamente na figura 5.12) e como as projecções generalizadas sejam constituídas por apenas um dos dois subconjuntos de amostras esquematicamente representados na figura 6.7.

Tal como no caso da reconstrução a partir de projecções paralelas, desenvolveram-se versões mais rápidas dos algoritmos DB NFFT DFM e DB NFFT DFM *short*, designadas DB NFFT DFM FAST e DB NFFT DFM FAST *short*, nas quais, eliminando o *zero-padding*

das projecções paralelas generalizadas antes do cálculo da NFFT 1D, são obtidas amostras da transformada de Fourier da imagem no plano de Fourier não sobreamostrado. Analogamente ao que acontece no caso de projecções paralelas, os resultados obtidos por estes algoritmos têm qualidade equivalente à dos algoritmos originais na região central mas são caracterizados por artefactos em anel devidos a *aliasing*. A variabilidade do tamanho dos artefactos, que podem afectar a região de interesse, torna estes algoritmos pouco robustos e, por isso, pouco interessantes do ponto de vista prático não sendo aqui ulteriormente analisados.

Por fim, foi implementado também o método DB DFM que integra a técnica de *rebinning* sem interpolação com o método DFM para projecções paralelas descrito na secção 9.1.1. Neste caso, o *rebinning* sem interpolação aplica-se ao sinograma divergente completo após *zero padding* das projecções, sendo obtidas as projecções paralelas generalizadas (alargadas) que devem ser Fourier transformadas utilizando o algoritmo NFFT NED 1D. A partir deste ponto o algoritmo continua, tal como o algoritmo DFM, com a interpolação no espaço de Fourier sobreamostrado (figura 9.2).

### Avaliação:

Para avaliarmos o desempenho dos métodos de reconstrução propostos, começamos por adquirir alguns conjuntos de projecções divergentes do fantoma de Shepp-Logan modificado nas mesmas condições (ideais e com diferentes níveis de ruído) consideradas no caso de projecções paralelas. Foram adquiridos sinogramas de dimensões  $512 \times 256$  e  $480 \times 352$  (do fantoma de  $256 \times 256$  *pixels*), e de dimensões  $1024 \times 512$  (do fantoma de  $512 \times 512$  *pixels*), utilizando o método de projecção descrito na secção 8.2.4. Neste caso, o número de linhas do sinograma corresponde ao número de projecções divergentes adquiridas em  $2\pi$  radianos enquanto o número de colunas, como no caso da geometria paralela, corresponde ao número de amostras por projecção.

A título de exemplo, na figura 9.12 mostram-se os resultados obtidos por alguns dos métodos de reconstrução propostos (DB FBP, DB FBP *short*, *rebinning* + FBP, DB DFM, *rebinning* + DFM, DB NFFT DFM, DB NFFT DFM *short* e *rebinning* + NFFT DFM) a partir do sinograma divergente de dimensões  $480 \times 352$ , tendo sido utilizado o filtro Ram-Lak nos métodos que requerem filtragem das projecções. Como se pode observar, a qualidade é satisfatória em todos os casos, sendo apenas visíveis alguns artefactos no pano de fundo de algumas imagens, em particular da imagem obtida pelo método DB NFFT DFM *short*.

Nos gráficos da figura 9.13, representa-se o andamento dos índices de mérito (calculados utilizando as métricas de Herman sobre o FOV circular) dos diferentes métodos de reconstrução para projecções divergentes em condições ideais e do respectivo tempo de cálculo ao variar do padrão de amostragem. As imagens às quais se referem os índices de mérito no caso de reconstrução a partir do sinograma de dimensões  $480 \times 352$ , são as imagens da figura 9.12.

Apesar de haver alguma diferença no desempenho dos diferentes métodos no que se refere aos índices de mérito considerados, é preciso reparar que, na maior parte dos casos, trata-se de diferenças mínimas não sendo possível deduzir, apenas destes resultados, a superioridade de uns ou outros métodos sobre os restantes. Mesmo assim, é interessante observar como a qualidade dos métodos para varrimento breve seja sempre inferior à dos correspondentes métodos para varrimento completo, o que se deve, essencialmente, ao menor número de amostras utilizadas na reconstrução e aos métodos aproximados que se utilizam para compensar a redundância das amostras de varrimento breve. Em particular, no caso do método DB NFFT DFM *short* a qualidade é bastante pior do que a dos restantes métodos sendo evidente, como se

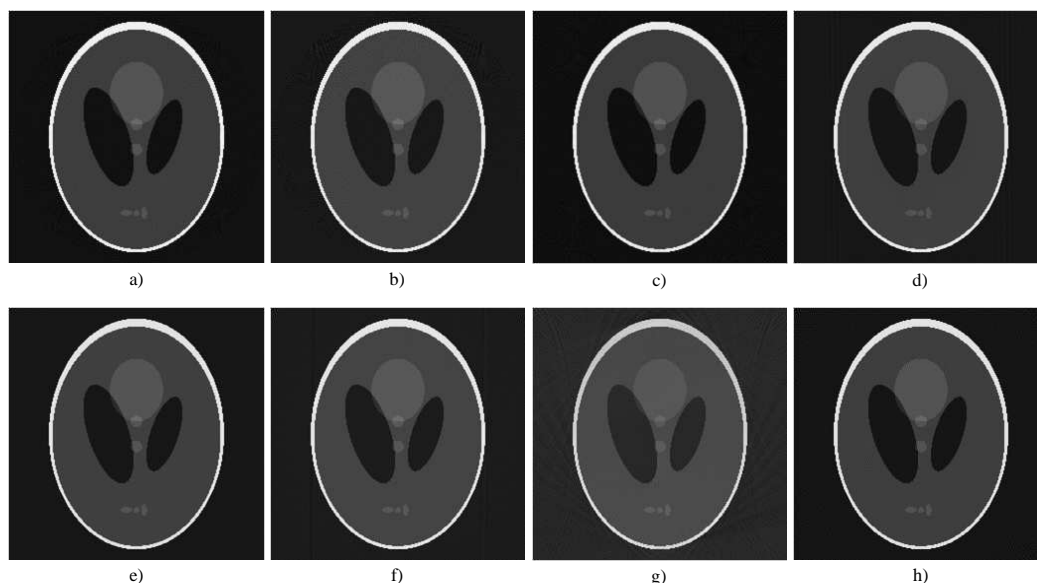


Figura 9.12: Imagens do fantoma de Shepp-Logan obtidas pelos diferentes métodos de reconstrução a partir do sinograma ideal divergente de dimensões  $480 \times 352$ . a) DB FBP, b) DB FBP *short*, c) *rebinning* + FBP, d) DB DFM, e) *rebinning* + DFM, f) DB NFFT DFM, g) DB NFFT DFM *short*, h) *rebinning* + NFFT DFM. Em todos os casos, nos métodos que implicam filtragem explícita, utilizou-se filtro Ram-Lak.

pode observar na figura 9.14, um certo grau de distorção nos valores da imagem reconstruída.

Ainda, observa-se que a qualidade dos métodos de reconstrução precedidos por *rebinning* das projecções é melhor no que se refere ao índice de mérito  $r$  e pior no que se refere aos outros índices, evidenciando como a interpolação das amostras contribua para a suavização do resultado.

No que se refere ao índice  $e$ , observa-se que a maior parte dos métodos produz resultados de qualidade melhor a partir do sinograma de dimensões  $480 \times 352$ . Este facto pode ser devido à mais elevada razão  $r$  entre número total de amostras e de incógnitas ( $r = 2.58$ ) que caracteriza este conjunto de amostras (nos outros conjuntos  $r = 2$ ), e também ao diferente padrão de amostragem no qual são adquiridas menos projecções mas com maior número de amostras por projecção.

No geral, pode ser também apreciada a relevância do padrão de amostragem na qualidade da reconstrução, dado que os índices de qualidade dos diferentes métodos dependem muito do número e distribuição das amostras.

Quanto aos tempos de reconstrução, mais uma vez verifica-se que, tal como esperado, os métodos de Fourier permitem uma notável redução do tempo de cálculo (tempos de cálculo até 10% do tempo de cálculo do método DB FBP) com a excepção dos métodos DB DFM e *rebinning* + DFM que, no caso do sinograma de dimensões  $480 \times 352$ , são caracterizados por um tempo de cálculo bastante elevado. Este fenómeno, como já se disse na avaliação dos métodos para projecções paralelas, deve-se à ineficiência do algoritmo de interpolação bidimensional para este padrão de amostragem específico.

Para avaliarmos o desempenho dos métodos propostos em presença de ruído foi simulada a aquisição de sinogramas divergentes (das mesmas dimensões dos anteriormente considerados)

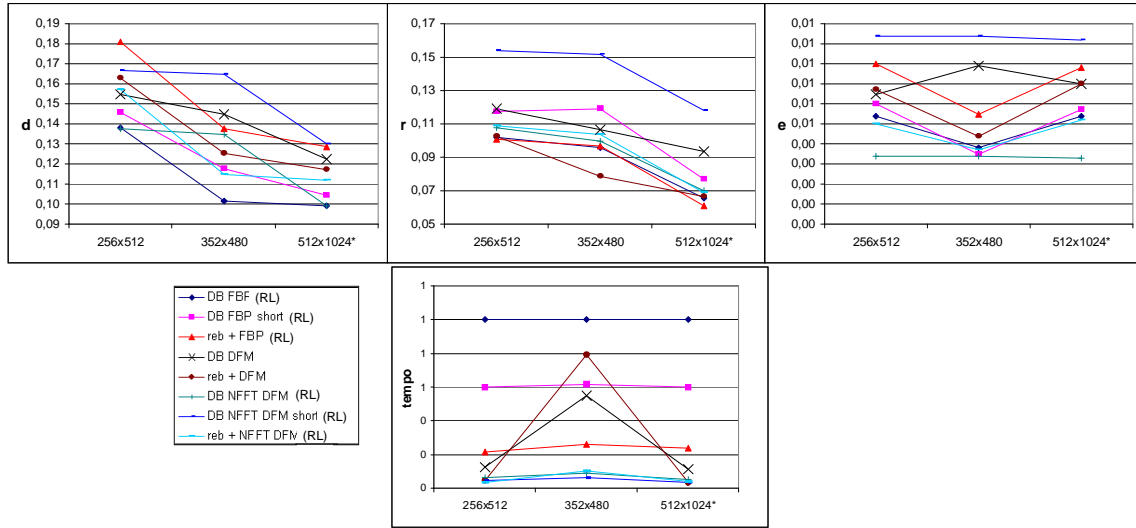


Figura 9.13: Avaliação quantitativa das imagens reconstruídas a partir de projecções divergentes obtidas em condições ideais. Os gráficos representam as medidas de erro de Herman  $-d$ ,  $r$ ,  $e$  - calculadas sobre o FOV circular e o tempo de reconstrução. (\*) O sinograma  $1024 \times 512$  foi obtido do fantoma  $512 \times 512$ .

com diferentes potências de feixe  $N_{in} = \infty$ ,  $N_{in} = 10^8$  e  $N_{in} = 10^6$  (utilizando o modelo do ruído descrito na secção 8.3). Na figura 9.15 mostram-se as imagens obtidas pelos diferentes métodos a partir do sinograma de dimensões  $480 \times 352$  adquirido com potência de feixe  $N_{in} = 10^6$  e na figura 9.16 representa-se em forma gráfica o andamento dos índices de mérito  $-d$ ,  $r$ ,  $e$  - (calculados no FOV circular) ao variar do nível de ruído. Em todos os casos, nos métodos que implicam filtragem explícita das projecções foi utilizada a janela de Hamming que, como se viu na secção dedicada à reconstrução a partir de projecções paralelas, adequa-se à reconstrução em presença de ruído.

Em primeiro lugar, tanto pela avaliação qualitativa como quantitativa, podemos constatar o fraco desempenho em presença de ruído dos métodos de Fourier que implicam interpolação no domínio de Fourier (DB DFM e *rebinning* + DFM). Tal como no caso da geometria paralela, o fraco desempenho destes métodos em presença de ruído justifica-se pela presença de um filtro implícito "áspero" (tipo Ram-Lak como se afirma na secção 6.3), que acentua o efeito do ruído.

Em segundo lugar, observa-se o bom desempenho do método DB NFFT DFM, sobreponível ao do método DB FBP tanto do ponto de vista qualitativo como quantitativo, e dos métodos DB NFFT DFM *short* e *rebinning* + NFFT DFM, sobreponíveis ao do método DB FBP *short* (no que se refere aos índices  $d$  e  $r$ ). Em particular, é de salientar que o melhor desempenho do método DB NFFT DFM *short*, comparado com o que se registou na experiência da figura 9.13 (mesmo em ausência de ruído), deve-se à utilização de um filtro mais suave, o que leva a concluir que o filtro Ram-Lak é demasiado "áspero" para ser associado a este método de reconstrução.

De qualquer forma, o desempenho dos métodos para varrimento breve é ligeiramente pior que o dos correspondentes métodos para varrimento completo (mais uma vez devido ao menor número de amostras utilizadas na reconstrução) e pode-se também notar, observando as

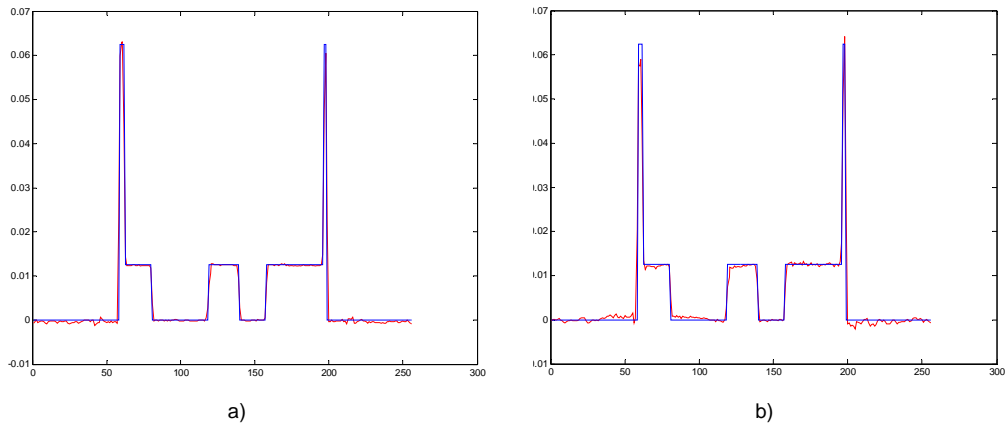


Figura 9.14: Comparação da imagem original com a imagem reconstruída ao longo da diagonal (fantoma de Shepp-Logan). a) diagonais da imagem obtida pelo método DB DFM NFFT (vermelho) e da imagem original (azul). b) diagonais da imagem obtida pelo método DB DFM NFFT *short* (vermelho) e da imagem original (azul).

imagens, como nas imagens reconstruídas a partir de varrimento breve a qualidade não é uniforme nas diferentes regiões da imagem. Este fenómeno, visível sob a forma de grânulos mais finos nalgumas regiões e mais grossos noutras, é facilmente apreciável no caso do algoritmo DB FBP *short* (figura 9.15).

A análise estatística do ruído presente nas imagens reconstruídas realizou-se, como no caso das projecções paralelas, calculando o desvio padrão da diferença entre as imagens reconstruídas a partir de dados adquiridos, em presença de ruído e em condições ideais, na região central (quadrado de  $25 \times 25$  *pixels*) da imagem. Tal como se verifica nas imagens reconstruídas a partir de projecções paralelas, também no caso de projecções divergentes a quantidade de ruído depende essencialmente do filtro utilizado, diminuindo com a escolha de filtros mais suaves. O desempenho dos diferentes algoritmos em presença de ruído pode ser avaliado observando a tabela 9.2, que se refere a imagens reconstruídas a partir de sinogramas de dimensões  $480 \times 352$  utilizando os vários métodos de reconstrução mas, sempre que seja possível escolher, utilizando o mesmo filtro (Hamming). O desempenho melhor resulta ser o dos algoritmos DB FBP e DB NFFT DFM, seguidos pelas correspondentes versões para varrimento breve destes algoritmos e pelos algoritmos FBP e NFFT DFM precedidos por *rebinning*. Dado que nas nossas implementações os algoritmos precedidos por *rebinning* e os algoritmos para varrimento breve consideram o mesmo número de amostras, podia-se esperar o mesmo desempenho, o que não se verifica. Este fenómeno deve-se ao facto que a operação de *rebinning* introduz um filtro adicional, de forma que, para atingir o mesmo desempenho, deve ser associado um filtro mais suave aos algoritmos para varrimento breve. Mais uma vez, o mau desempenho dos algoritmos DB DFM e *rebinning* + DFM deve-se à presença do filtro implícito (de tipo Ram-Lak).

A avaliação qualitativa e quantitativa dos resultados obtidos, tanto no caso dos algoritmos de reconstrução para projecções paralelas como divergentes, mostra como os métodos de Fourier baseados na NFFT (NFFT DFM, NFFT DFM FAST, DB NFFT DFM, DB NFFT DFM *short*) têm um desempenho comparável com o dos algoritmos que derivam da aplicação

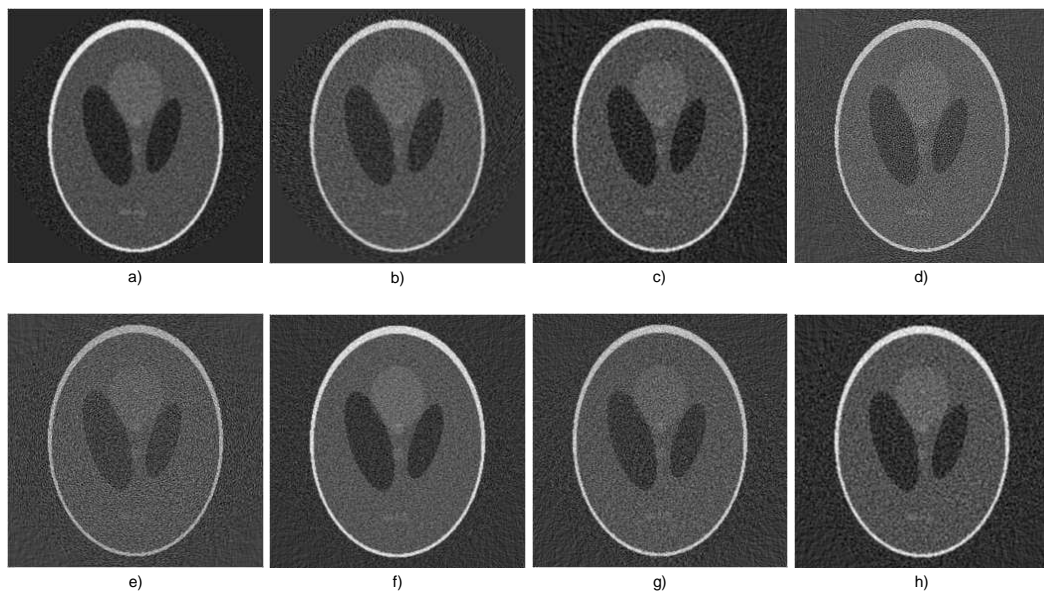


Figura 9.15: Imagens do fantoma de Shepp-Logan obtidas pelos diferentes métodos de reconstrução a partir do sinograma divergente de dimensões  $480 \times 352$  em presença de ruído  $N_{in} = 10^6$ . a) DB FBP, b) DB FBP *short*, c) *rebinning* + FBP, d) DB DFM, e) *rebinning* + DFM, f) DB NFFT DFM, g) DB NFFT DFM *short*, h) *rebinning* + NFFT DFM. Em todos os casos, nos métodos que implicam filtragem explícita, utilizou-se filtro de *Hamming*.

da técnica de retro projecção filtrada, com uma notável redução do tempo de cálculo. Seja qual for o algoritmo de reconstrução é essencial a escolha de um filtro apropriado para que seja atingido o desempenho esperado em função do nível de ruído.

## 9.2 Reconstrução de regiões de interesse

Como já se referiu, um dos argumentos que suportam a tese de maior flexibilidade dos algoritmos baseados na retro projecção filtrada tem a ver com a estratégia de reconstrução *pixel a pixel* que permite facilmente reduzir a região de reconstrução apenas a uma arbitrária região de interesse, ou ROI, obtendo uma imagem ampliada dessa região e com maior nível de detalhe.

Contudo, na secção 6.4 demonstrou-se ser viável a reconstrução de regiões de interesse (ROI) através de métodos de Fourier e propôs-se, a título de exemplo, uma adaptação do algoritmo DB NFFT DFM à reconstrução de uma ROI arbitrária. O algoritmo proposto, designado por DB NFFT DFM ROI (algoritmo 6.4.1), é esquematizado na figura 9.17 e diferencia-se do algoritmo DB NFFT DFM essencialmente pela presença de uma operação de mudança de escala realizada no domínio da frequência utilizando um parâmetro  $k$  (determinado nos moldes indicados na secção 6.4) que depende do grau de ampliação pretendido (isto é, do tamanho da ROI relativamente ao campo de visão) e do número de *pixels* que se pretende constituam a imagem. Outra característica do algoritmo, como se viu, é que este não permite calcular directamente a imagem da ROI mas sim a de uma região de reconstrução (definida como a mais pequena região quadrada e isocéntrica com o campo de visão que contenha a

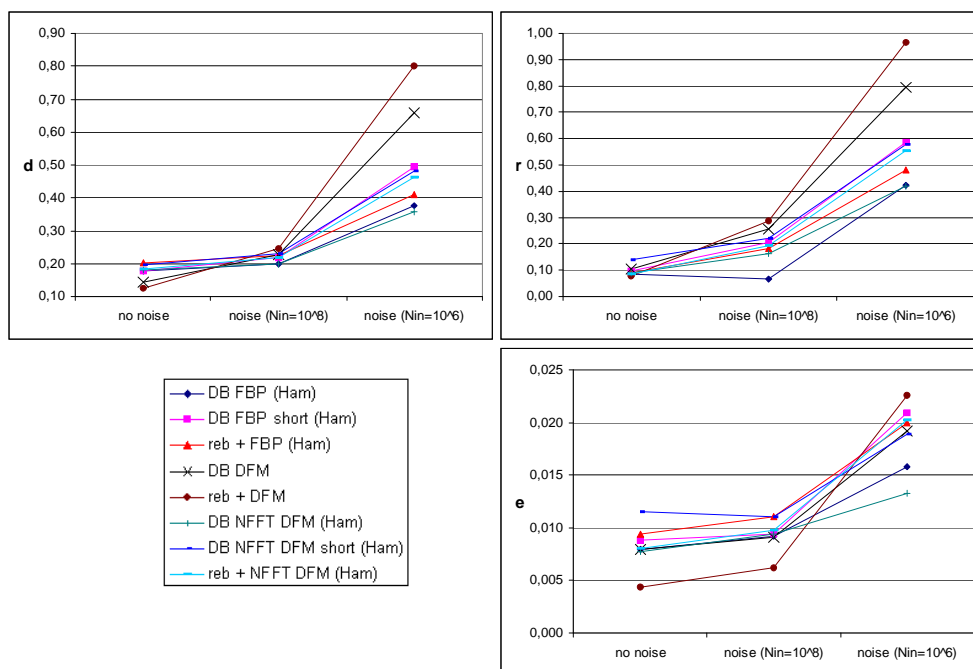


Figura 9.16: Avaliação quantitativa dos métodos de reconstrução para projecções divergentes (sinograma  $480 \times 352$ ) obtidas com diferentes níveis de ruído. Os gráficos representam as medidas de erro de Herman  $-d$ ,  $r$ ,  $e$  calculadas apenas sobre o FOV circular.

ROI), pelo que o último passo do algoritmo consiste em extrair a imagem da ROI da imagem da região de reconstrução.

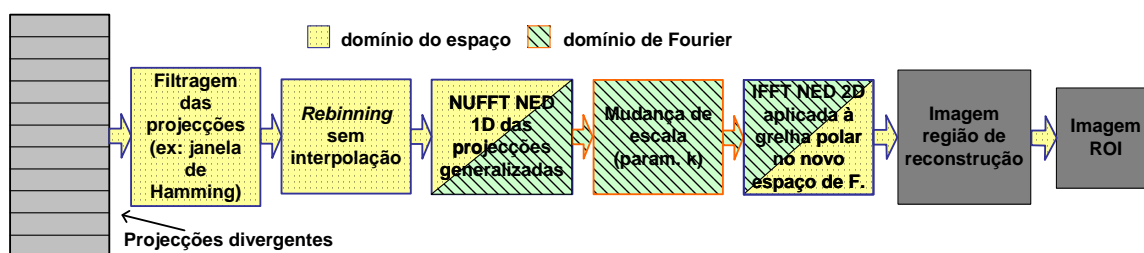


Figura 9.17: Diagrama de blocos do algoritmo DB NFFT DFM ROI.

Nesta secção iremos avaliar o desempenho do algoritmo DB NFFT DFM ROI comparando os resultados obtidos por este com os obtidos pelo algoritmo DB FBP ROI, convencionalmente utilizado na reconstrução de regiões de interesse. O algoritmo DB FBP ROI é formalmente equivalente ao algoritmo DB FBP dado que a estratégia de reconstrução *pixel a pixel* permite a reconstrução de qualquer subregião do campo de visão num número arbitrário de pontos.

Uma vez simulada a aquisição de sinogramas divergentes (512 projecções 256 amostras por projecção, quer em condições ideais quer em presença de ruído,  $N_{in} = 10^8$ ) do fantoma de Shepp-Logan ( $256 \times 256$  pixels), pretende-se reconstruir uma região de interesse tendo sido consideradas várias ROIs de diferentes tamanhos e localizações. A título de exemplo, iremos



$\sigma$ proj divergentes	$N_{in} = 10^8$	$N_{in} = 10^6$
DB FBP (Ham)	0.0011	0.0043
DB FBP short (Ham)	0.0015	0.0061
reb.+ FBP (Ham)	0.0014	0.0054
DB DFM	0.0030	0.0111
reb.+ DFM	0.0038	0.0139
DB NFFT DFM (Ham)	0.0012	0.0045
DB NFFT DFM short (Ham)	0.0018	0.0073
reb. + NFFT DFM (Ham)	0.0017	0.0065

Tabela 9.2: Desvio padrão do ruído na região central das imagens obtidas pelos métodos de reconstrução (para projecções divergentes) considerados, a partir de dados adquiridos em presença de ruído.

considerar a região quadrada e não isocêntrica representada na figura 9.18.

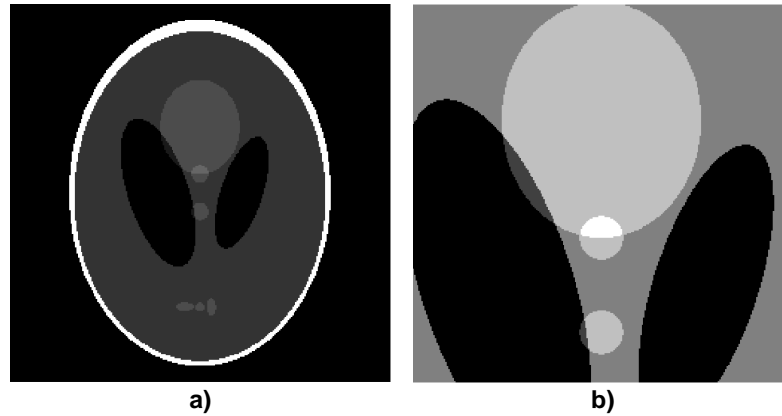


Figura 9.18: O fantoma de Shepp-Logan (a) e a ROI não isocêntrica (b) seleccionada para avaliar o desempenho do algoritmo DB NFFT DFM ROI.

Na figura 9.19 mostram-se os resultados obtidos pelos algoritmos DB FBP ROI (9.19-a) e DB NFFT DFM ROI (9.19-b) a partir dos dados projecção adquiridos em condições ideais, e na figura 9.20 os resultados obtidos pelos mesmos algoritmos no caso de dados afectos por ruído ( $N_{in} = 10^8$ ). Como se pode verificar, do ponto de vista qualitativo os dois métodos são equivalentes, observando-se apenas uma ligeira acentuação dos pormenores de frequência espacial mais elevada (artefactos de reconstrução e ruído) no caso do algoritmo DB NFFT DFM ROI.

Para avaliarmos o desempenho dos algoritmos do ponto de vista quantitativo foi necessário, em primeiro lugar, gerar o objecto "original", isto é, a imagem da ROI considerada no mesmo número de *pixels* das imagens reconstruídas ( $256 \times 256$ ), e avaliar, através das habituais medidas de erro de Herman, a distância entre a ROI original e as ROIs reconstruídas. Os resultados obtidos, apresentados na tabela 9.3, confirmam o desempenho equivalente dos dois algoritmos com a excepção de um pequeno aumento do erro (nas três medidas  $-d$ ,  $r$ ,  $e^-$ ) para o algoritmo DB NFFT DFM ROI em presença de ruído.

A maior sensibilidade ao ruído do método DB NFFT DFM ROI, detectada quer na avaliação qualitativa quer quantitativa, deve-se ao facto que o filtro em rampa, escolhido de

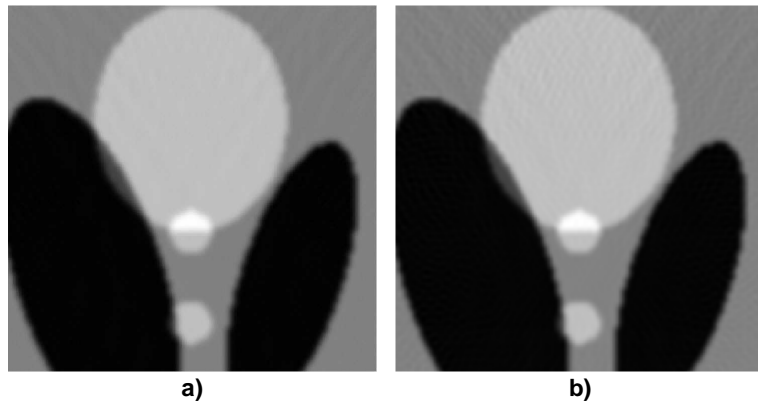


Figura 9.19: Reconstrução da ROI seleccionada, pelo algoritmo DB FBP ROI (a) e pelo algoritmo DB NFFT DFM ROI (b), a partir de dados adquiridos em condições ideais.

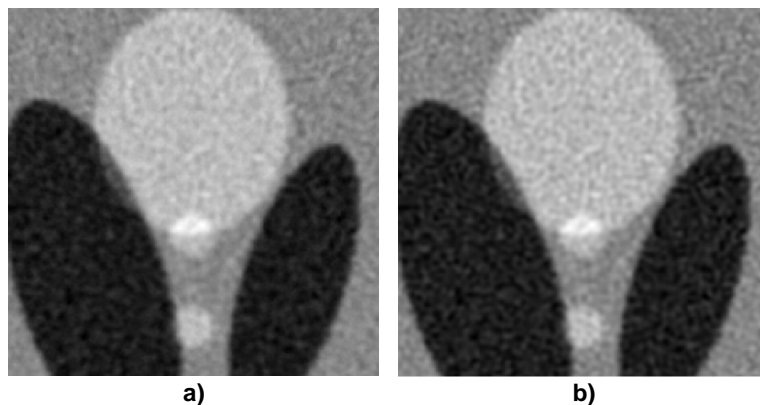


Figura 9.20: Reconstrução da ROI seleccionada pelo algoritmo DB FBP ROI (a) e pelo algoritmo DB NFFT DFM ROI (b), a partir de dados adquiridos em presença de ruído ( $N_{in} = 10^8$ ).

forma empírica, compensa de forma excessiva a distribuição não uniforme das amostras no espaço de Fourier, o que implica que este método necessita de um filtro ligeiramente mais suave que o método DB FBP ROI para que se obtenha um resultado perfeitamente equivalente. A vantagem do método DB NFFT DFM ROI reside, como para todos os métodos de Fourier, na redução do custo computacional sendo que a reconstrução por este método das ROIs seleccionadas (fig. 9.19-b e 9.20-b) demorou apenas 34.8% do tempo necessário para a reconstrução com o método DB FBP ROI (fig. 9.19-a e 9.20-a). Lembra-se a este propósito que, tal como se falou na secção 6.4, o custo computacional do algoritmo DB NFFT DFM ROI depende também da localização da ROI no campo de visão, contudo, mesmo nas condições mais desfavoráveis (ROI fortemente descentralizada), pudemos comprovar que este algoritmo permite sempre uma redução do tempo de cálculo face ao algoritmo DB FBP.

Proj. ideais	d	r	e
DB FBP ROI	0.1368	0.0444	0.0086
DB NFFT DFM ROI	0.1336	0.0449	0.0086
Ruído ( $N_{in} = 10^8$ )	d	r	e
DB FBP ROI	0.1794	0.1066	0.0088
DB NFFT DFM ROI	0.1882	0.1156	0.0091

Tabela 9.3: Medidas de erro de Herman aplicadas às ROIs reconstruídas pelos métodos DB FBP ROI e DB NFFT DFM ROI em condições ideais e em presença de ruído.

### 9.3 Tomografia sequencial multicorte

Como vimos na secção 5.3, a amostragem sequencial multicorte não fornece um conjunto de dados suficiente para a reconstrução exacta, sendo apenas disponíveis algoritmos de reconstrução (2 ou 3D) aproximados. Alguns destes algoritmos, aplicáveis no caso de projecções com ângulo cónico pequeno (até aos 4 cortes), desprezam o ângulo cónico dos raios de projecção, aumentando o erro de aproximação. Na experiência que iremos agora descrever, pretendemos avaliar o erro associado à reconstrução de múltiplos cortes utilizando algoritmos de reconstrução 2D a partir de projecções cónicas obtidas com varrimento circular. Não sendo tomado em consideração o ângulo cónico dos feixes, espera-se que o erro de aproximação aumente nos cortes periféricos e que seja possível indicar o número máximo de cortes que podem ser reconstruídos para um determinado erro de aproximação limite.

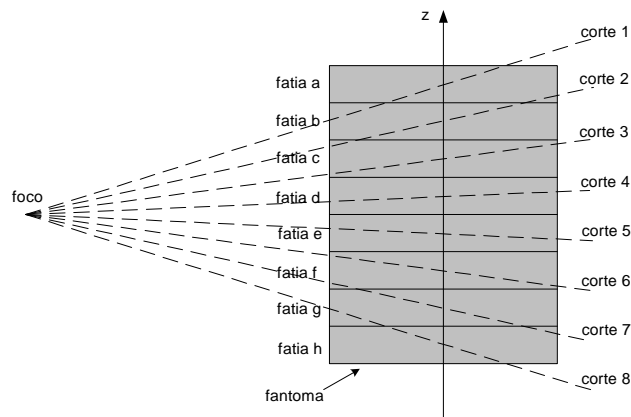


Figura 9.21: Geometria de aquisição (no plano longitudinal passando pelo eixo  $z$  e pela posição do foco) para avaliação da qualidade da imagem em tomografia sequencial multi-corte.

Em primeiro lugar, simulamos a aquisição de um conjunto de dados de projecção do fantoma 4D MCAT estático com varrimento convencional multicorte ( $M = 8$ ) utilizando o método de projecção C (secção 8.2.3) e a geometria descrita na secção 5.1.3. Escolhemos o fantoma no qual se simula a presença de produto de contraste no sangue e estabelecemos como plano de varrimento ( $z = z_0$ ) um plano de separação entre duas fatias transversais contíguas do fantoma e como distância de colimação  $S$  a dimensão longitudinal  $dz$  ( $= dx = dy = 0.16\text{cm}$ ) dos

*voxels* (figura 9.21), de modo que, reconstruindo os oito cortes nas coordenadas longitudinais  $z_0 + \zeta_i, i = 1, \dots, M$ , as coordenadas longitudinais dos planos de reconstrução coincidam com as coordenadas longitudinais centrais de  $M$  fatias contíguas do fantoma (indicadas pelas letras  $a, \dots, h$ ). Estas escolhas, devem-se às limitações relacionadas com a discretização do fantoma e não invalidam, por si, os resultados obtidos.

Na figura 9.22, onde se representam quatro dos oito cortes reconstruídos (utilizando o algoritmo DB NFFT DFM com filtro Ram-Lak) e as correspondentes fatias do fantoma, pode-se observar o aparecimento de artefactos, especialmente evidentes nos cortes periféricos (1 e 2), devidos ao facto de não termos considerado o ângulo cónico dos feixes na reconstrução.

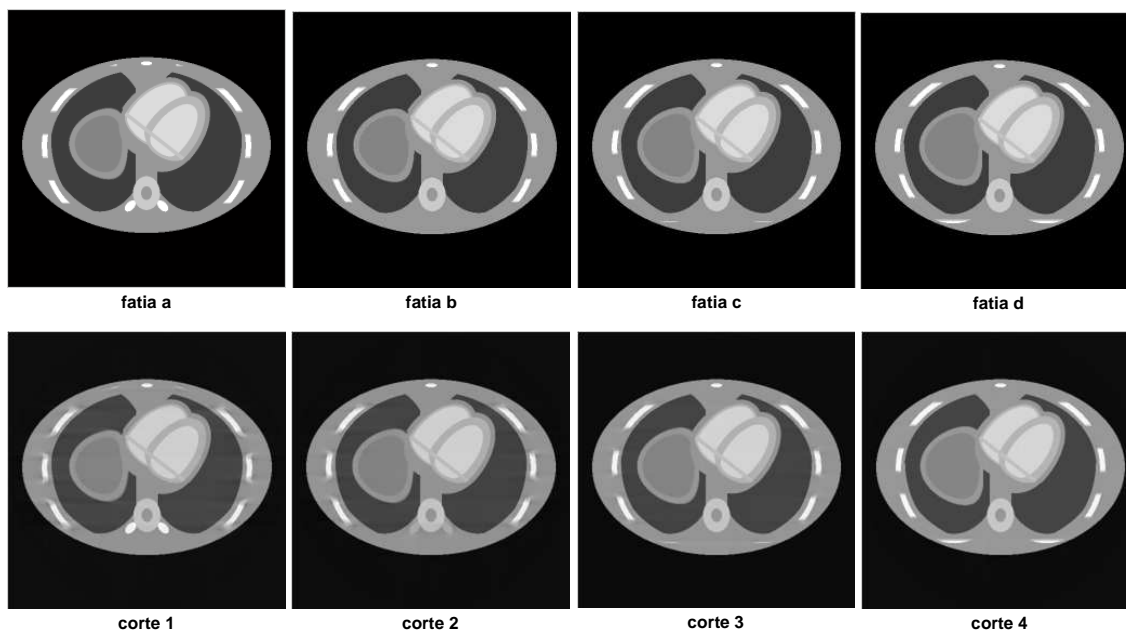


Figura 9.22: Tomografia sequencial multi-corte ( $M=8$ ): reconstruções bidimensionais (DB NFFT DFM com filtro RamLak) comparados com as correspondentes secções do fantoma.

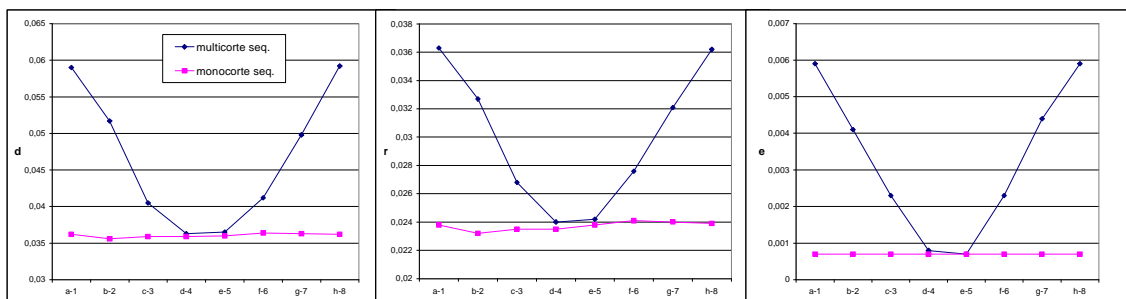


Figura 9.23: Tomografia sequencial multi-corte ( $M = 8$ ): distâncias (pelas métricas  $-d, r, e-$ ) entre os cortes reconstruídos sem ter em consideração o ângulo cónico dos feixes e as correspondentes fatias do fantoma.

A qualidade das reconstruções efectuadas a partir de projecções multicorte foi avaliada

quantitativamente medindo a sua distância (pelas habituais métricas  $-d, r, e-$  calculadas no FOV circular) das imagens das correspondentes fatias do fantoma. Os resultados obtidos são representados nos gráficos da figura 9.23, onde se representam também, como referência, os índices de qualidade das imagens que seriam obtidas a partir de sinogramas sequenciais monocorte correspondendo a cada uma das fatias consideradas ( $a, \dots, h$ ). A comparação entre os índices de qualidade das imagens obtidas a partir de varrimento monocorte e multicorte permite avaliar o incremento do erro devido à utilização de feixes inclinados.

Tal como se esperava, e como se pode constatar na figura 9.23, o erro de reconstrução aumenta nos cortes periféricos comparativamente com os cortes centrais, em correspondência dos quais os diferentes índices de mérito são sobreponíveis aos obtidos no caso monocorte. O incremento dos índices de erro relativamente aos calculados no caso monocorte, depende de forma aproximadamente linear, da inclinação do corte.

As limitações impostas pela discretização do fantoma, não permitem a generalização destes resultados. Todavia, pela análise qualitativa e quantitativa, podemos concluir que, no caso do fantoma por nós utilizado e do enquadramento geométrico descrito, com a espessura de corte escolhida ( $0.16\text{cm}$ ) o ângulo cónico dos feixes pode ser desprezado na reconstrução até  $M = 4$  sem que isto afecte de forma significativa a qualidade da imagem reconstruída.

## 9.4 Tomografia helicoidal - interpolação longitudinal

Uma forma para reconstruir uma secção transversal de um objecto a partir de dados adquiridos com varrimento helicoidal (mono- ou multi-corte) consiste, como vimos no capítulo 7, na síntese de um sinograma correspondendo à coordenada longitudinal daquela secção. Ao sinograma assim obtido, poderá ser aplicado qualquer um dos métodos de reconstrução 2D anteriormente descritos.

Nesta secção iremos avaliar alguns métodos de interpolação longitudinal (para varrimento mono- e multi-corte) no que se refere ao seu impacto na qualidade da imagem reconstruída em condições ideais e ao seu desempenho em presença de ruído. Dado que os métodos que iremos tomar em consideração (360 LI, 180 LI, 360 MLI, 180 MLI) já foram descritos de um ponto de vista teórico no capítulo 7, nesta secção serão apenas explorados alguns detalhes de implementação para depois passarmos à descrição de algumas experiências que nos permitiram avaliar os efeitos que o varrimento em espiral induz na qualidade das imagens reconstruídas.

Relembra-se que, tal como se descreveu na secção 8.4.1, no caso de aquisição em espiral (mono- ou multi-corte), o simulador fornece como resultados o conjunto de amostras organizadas no *array* `sino3D` de dimensões ( $numcortes, numfocos, numdetect, numrotações$ ), e a matriz `focos` de dimensões ( $numfocos \times numrotações, 4$ ) que contém, para cada posição de amostragem assumida pelo foco ao longo da trajectória helicoidal, as coordenadas dessa posição no espaço Cartesiano de referência e o ângulo de visão  $\beta$ .

### 9.4.1 Interpolação longitudinal 360 LI e 360 MLI

A abordagem que escolhemos para a implementação do algoritmo de interpolação longitudinal 360 MLI (descrito na secção 7.2.1) adapta-se a qualquer número de cortes (incluindo  $M = 1$ ) pelo que o algoritmo 360 LI passa a ser apenas um caso particular do 360 MLI.

No enquadramento geométrico descrito na secção 8.4.1 e dado o *array* 4D `sino3D` e a matriz `focos`, a síntese do sinograma correspondente a uma determinada coordenada longitudinal `zr` pelo algoritmo 360 MLI processa-se da seguinte forma.

Em primeiro lugar, gera-se um *array* **zproj**, de dimensões ( $M$ ,  $numfocos$ ,  $numrotações$ ) que contém a coordenada longitudinal correspondente a cada projecção divergente no conjunto de dados projecção, isto é, a coordenada longitudinal da posição do foco à qual se soma o desvio longitudinal devido à inclinação do respectivo corte, calculado no eixo de rotação. Para um determinado varrimento helicoidal, o *array* **zproj** pode ser calculado uma única vez (em pré-processamento) servindo, depois, para a interpolação longitudinal em qualquer **zr**.

Para cada uma das  $numfocos$  direcções de projecção do sinograma que se pretende sintetizar, determinam-se as duas projecções divergentes adquiridas segundo aquela direcção, e cuja coordenada longitudinal é mais próxima de **zr**. Esta tarefa pode ser realizada extraindo da estrutura de dados **zproj** o *array* (de dimensões  $(M, 1, 3)$ ) contendo apenas as coordenadas longitudinais das projecções adquiridas segundo aquela direcção na rotação **rot** (na qual a trajectória da fonte intersecta a coordenada **zr**) e nas duas rotações contíguas. Transformando o *array* de dimensões  $(M, 1, 3)$  num vector **ztemp** de dimensões  $M \times 3$  e ordenando os elementos do vector **ztemp** (mantendo o registo da posição inicial de cada elemento), podem ser encontrados os dois elementos (tendo índices **i-1** e **i**) do vector correspondentes às projecções mais próximas de **zr** a montante e a jusante. O valor destes elementos permite calcular a ponderação a ser aplicada na interpolação linear através da fórmula

$$w = (zr - ztemp(i - 1)) / (ztemp(i) - ztemp(i - 1)); \quad (9.1)$$

enquanto a posição destes elementos no vector antes da ordenação permite extrair do *array* **sino3D** as projecções divergentes **proj1** e **proj2** que devem ser interpoladas.

Por fim, a interpolação linear das duas projecções

$$sinozr(n, :) = (1 - w) * proj1 + w * proj2; \quad (9.2)$$

permite obter a  $n$ -ésima projecção do sinograma correspondente à coordenada longitudinal **zr**.

O mesmo tipo de abordagem pode ser utilizado para o algoritmo 360 MFI, aplicando o filtro (de largura variável) às amostras correspondentes às coordenadas **ztemp**.

## 9.4.2 Interpolação longitudinal 180 LI e 180 MLI

Como vimos na secção 7.2.1, o algoritmo 180 LI (assim como 180 MLI) é caracterizado, em primeiro lugar, pelo cálculo de um conjunto de dados projecção correspondente a uma trajectória virtual "complementar" à trajectória efectivamente percorrida pelo foco, sendo depois realizada a interpolação longitudinal utilizando tanto as amostras medidas como as calculadas, ou complementares.

Dadas as matrizes **focos** e **feixes** e o *array* **sino3D** (gerados pelo processo de aquisição em espiral como descrito na secção 8.4.1) e considerado o enquadramento geométrico habitual, o cálculo do conjunto de dados complementar começa pela determinação da matriz **focoscalc** que contém as coordenadas Cartesianas da trajectória complementar (tendo estrutura equivalente à da matriz **focos**). Pela simetria das duas trajectórias relativamente ao eixo de rotação do sistema, o cálculo dos elementos da matriz **focoscalc** é trivial. Por fim, utilizando a fórmula 7.8, calculam-se as amostras do sinograma complementar e guardam-se no *array* **sino3Dcalc**, de estrutura análoga à do *array* **sino3D**.

Para um determinado varrimento helicoidal, o cálculo do sinograma complementar pode ser realizado uma única vez em pré-processamento, podendo ser utilizado para a interpolação longitudinal em qualquer **zr** dentro do segmento longitudinal varrido.

Uma vez calculado o *array* `sino3Dcalc`, o algoritmo desenrola-se tal como o algoritmo 360 MLI, com a diferença que todo o processo que conduz à determinação, para cada direcção de projecção, das duas projecções mais próximas de  $\mathbf{zr}$  entre as quais efectuar a interpolação, deve ser aplicado tanto ao sinograma medido como ao calculado, sendo obtidos dois pares de projecções. Entre as duas projecções a montante de  $\mathbf{zr}$  escolhe-se a mais próxima de  $\mathbf{zr}$  e faz-se o mesmo para as duas projecções a jusante obtendo, por fim, as duas projecções que devem ser utilizadas na interpolação.

No caso do algoritmo 180 MFI, o filtro será aplicado a todas as projecções (medidas e calculadas) cuja distância de  $\mathbf{zr}$  seja inferior à largura do filtro.

### Avaliação da projecção complementar

Uma questão que se coloca, relativamente a este algoritmo, é a da determinação do erro associado ao cálculo das projecções complementares, isto é, a diferença entre uma projecção complementar e a projecção que seria medida colocando o foco na mesma posição. Dado que as amostras de uma projecção complementar correspondem a amostras medidas em diferentes posições longitudinais e com ângulo  $\varphi$  oposto, podemos logo dizer que o erro irá afectar de forma mais marcada as amostras periféricas de cada projecção e também que deverá aumentar com o *pitch*.

Para avaliar quantitativamente este erro, realizou-se a seguinte experiência. Foram adquiridos alguns conjuntos de dados projecção multi-corte ( $M = 4$ ) com diferentes valores de *pitch* ( $= 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$ ) longitudinalmente centrados numa determinada coordenada  $\mathbf{zc}$ , de forma a que nos respectivos sinogramas complementares a projecção calculada naquela coordenada longitudinal tivesse sempre a mesma direcção. Adquirimos, então, uma projecção multicorte correspondendo àquela coordenada longitudinal e àquela direcção e avaliamos a diferença entre a projecção medida e a calculada.

Na figura 9.24 visualizam-se, sobrepostos, os perfis de um dos cortes mais periféricos (corte 1) da projecção medida e da projecção calculada para *pitch* = 2, isto é, o caso mais desfavorável (entre os por nós considerados) do ponto de vista do erro associado à projecção calculada. Como se pode observar, tal como se esperava, existe alguma ligeira discrepância entre os dois perfis, todavia, não se consegue visualizar o aumento do erro associado às amostras mais periféricas, até porque estas são maioritariamente nulas, correspondendo a raios projecção que não intersectam o objecto.

Para podermos avaliar quantitativamente o erro associado à projecção complementar e a sua variação em função do *pitch* e da inclinação do corte, calculamos o erro quadrático médio normalizado (NMSE) relativamente às amostras do corte 1 (mais periférico), do corte 2 (mais central) e de toda a projecção multi-corte e representámos graficamente os resultados na figura 9.25. Como se pode observar o erro aumenta linearmente com o *pitch*, sendo maior no caso do corte 1, tal como se esperava. De qualquer forma, o NMSE associado à projecção complementar mantém-se inferior a 1% em todos os cortes para  $M = 4$ , pelo que podemos dizer que até este número de cortes a aproximação introduzida é aceitável.

### 9.4.3 Qualidade das imagens

Com as experiências que iremos descrever nesta secção, pretendemos avaliar o desempenho dos diferentes algoritmos de interpolação longitudinal, através da qualidade das imagens obtidas (utilizando sempre o mesmo algoritmo de reconstrução) a partir de dados adquiridos com

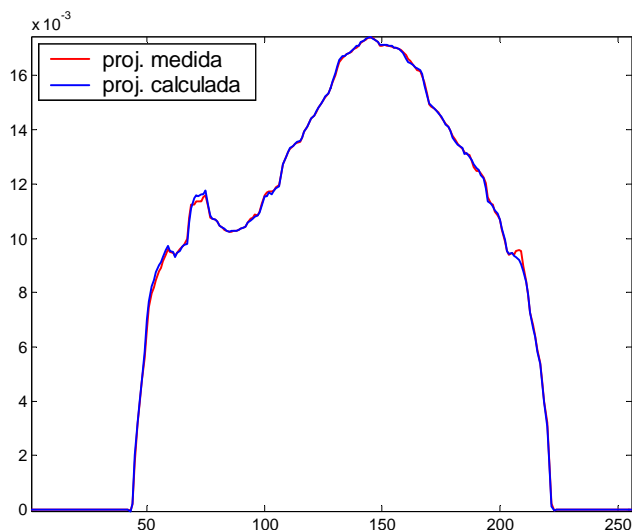


Figura 9.24: Perfil do corte mais periférico de uma projecção complementar multi-corte ( $M = 4$ ) sobreposto ao correspondente perfil da projecção multi-corte medida na mesma posição longitudinal e com a mesma direcção ( $pitch = 2$ ).

varrimento helicoidal e diferentes valores de  $pitch$ . O desempenho dos algoritmos será avaliado tanto em condições ideais como em presença de ruído.

Em primeiro lugar, foi simulada a aquisição de vários conjuntos de dados mono- e multi-corte ( $M = 4$ ) do mesmo segmento longitudinal do fantoma 4D MCAT estático com varrimento helicoidal e diferentes valores de  $pitch$  (1, 1.25, 1.5, 1.75, 2) em condições ideais. Apesar de utilizarmos o termo de forma imprópria (como se explicou na secção 8.4.1) julgamos conveniente, neste âmbito, falarmos em  $pitch$  dado que este parâmetro fornece informação adicional (comparativamente ao passo da hélice  $d$ ) acerca da dose de radiação que um determinado varrimento implica. Lembra-se que, na aquisição em espiral, define-se  $pitch = \frac{d}{MS}$ , sendo  $M$  o número de cortes e  $S$  a abertura da colimação correspondente a um corte (ou a distância entre cortes no caso multicorte). Em todos os casos, reconstruiu-se uma imagem correspondendo sempre à mesma cordenada  $zr$  recorrendo aos algoritmos de interpolação longitudinal 360 e 180 LI/MLI e ao algoritmo de reconstrução DB NFFT DFM com filtro Ram-Lak.

Como se pode constatar nas imagens da figura 9.26, para os valores de  $pitch$  considerados a qualidade das imagens reconstruídas a partir de varrimento helicoidal monocorte é satisfatória independentemente do algoritmo de interpolação longitudinal utilizado. O mesmo não se pode dizer no caso de varrimento multicorte dado que, como se observa na figura 9.27, é evidente o aparecimento de artefactos nas imagens reconstruídas utilizando o algoritmo de interpolação 360 MLI. Neste caso, como sabemos, junta-se ao afastamento dos dados utilizados na interpolação longitudinal o efeito causado pelo facto de não ser tomada em consideração a inclinação dos feixes relativamente ao plano transaxial. Mesmo continuando a não considerar a inclinação dos feixes, o algoritmo 180 MLI (no qual a interpolação realiza-se entre dados longitudinalmente mais próximos) permite obter imagens de qualidade bastante superior, sendo apenas visíveis alguns pequenos artefactos em correspondência de valores de  $pitch$  mais



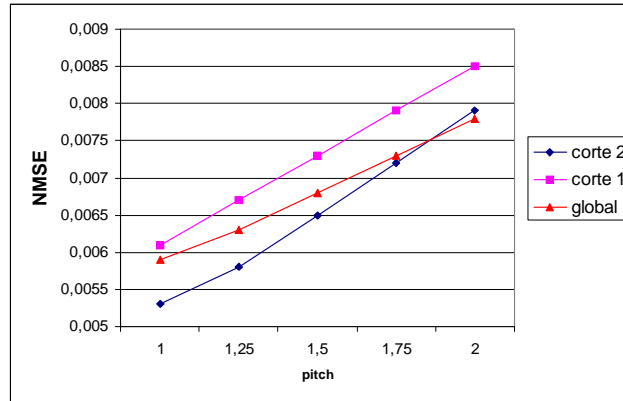


Figura 9.25: Variação do erro (erro quadrático médio normalizado) associado a uma projecção complementar em função do *pitch*.

elevados e de objectos cuja fronteira é apenas ligeiramente inclinada relativamente ao plano transaxial (por exemplo, as costelas).

Para avaliarmos quantitativamente o desempenho dos diferentes algoritmos de interpolação longitudinal considerados, comparamos a distância entre as imagens reconstruídas e a imagem da fatia do fantoma correspondente à mesma coordenada longitudinal, distância calculada utilizando as habituais métricas de erro de Herman aplicadas ao FOV circular. Os gráficos da figura 9.28 ilustram o valor dos índices de mérito  $-d, r, e-$  relativos às imagens reconstruídas após interpolação longitudinal 360 e 180 LI/MLI para diferentes valores de *pitch* e à imagem reconstruída a partir de dados adquiridos com varrimento circular na mesma coordenada longitudinal. A observação dos gráficos permite-nos confirmar de forma inequívoca a avaliação qualitativa. Em particular, é evidente a baixa qualidade das imagens obtidas após interpolação 360 MLI, testemunhada pelos elevados valores dos índices  $-d, r, e-$  e o bom desempenho do algoritmo 180 MLI cuja distância da imagem original é pouco superior à da imagem obtida por varrimento sequencial. Relativamente aos algoritmos 360 e 180 LI, as diferenças na qualidade são muito mais reduzidas, contudo, constata-se o melhor desempenho do algoritmo 180 LI, especialmente para valores de *pitch* mais elevados. Mais em detalhe, verifica-se que para valores de *pitch* reduzidos o desempenho do algoritmo 180 LI é ligeiramente inferior ao do algoritmo 360 LI todavia, com o aumentar do *pitch* o desempenho do algoritmo 360 LI degrada-se rapidamente enquanto o do algoritmo 180 LI mantém-se quase constante. O facto que para valores de *pitch* reduzidos os índices de mérito relativos ao algoritmo 180 LI sejam piores dos do algoritmo 360 LI justifica-se considerando que, neste caso, a distância entre as amostras consideradas na interpolação é pequena e não compensa a introdução dos dados complementares com o erro a estes associado.

O desempenho dos algoritmos de interpolação longitudinal em presença de ruído, foi avaliado considerando alguns conjuntos de dados virtualmente adquiridos com diferentes potências de feixe ( $N_{in} = \infty$ ,  $N_{in} = 10^8$  e  $N_{in} = 10^6$ ) por varrimento helicoidal monocorte e multicorte ( $M = 4$ ) sempre com o mesmo valor de *pitch* ( $= 1.5$ ), tendo-se assumido que a forma como o ruído afecta os diferentes algoritmos não depende do *pitch*. Após interpolação longitudinal (pelos algoritmos 360 LI/MLI e 180 LI/MLI) as imagens foram reconstruídas utilizando o algoritmo DB NFFT DFM com filtro de Hamming e comparadas com as imagens obtidas da

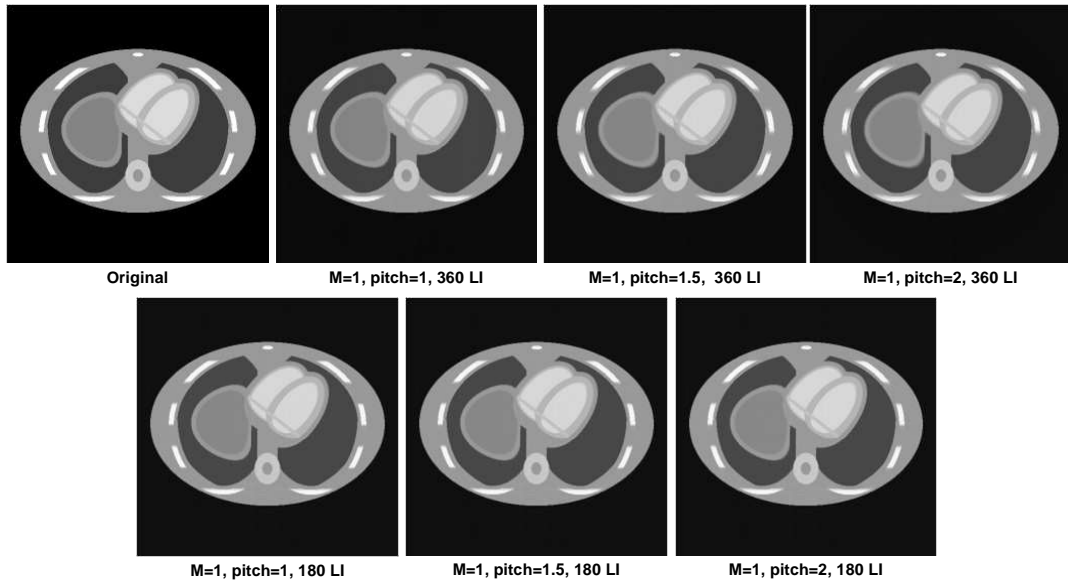


Figura 9.26: Imagens transaxiais reconstruídas utilizando os algoritmos de interpolação longitudinal 360 e 180 LI, a partir de dados adquiridos com varrimento monocorte helicoidal com diferentes valores de *pitch*. Em todos os casos utilizou-se o algoritmo de reconstrução DB NFFT DFM com filtro Ram-Lak.

mesma forma a partir de dados adquiridos com trajectória circular e as mesmas potências de feixe. Nas imagens da figura 9.29, reconstruídas após aplicação dos algoritmos 360 e 180 LI/MLI a dados afectados por um elevado nível de ruído ( $N_{in} = 10^6$ ), pode-se notar como os efeitos do ruído se tornam mais evidentes nas imagens reconstruídas após interpolação 180 LI/MLI, confirmando o melhor desempenho dos algoritmos 360 LI/MLI em presença de ruído tal como a análise teórica permite prever (ver secção 7.2.1).

Na figura 9.30, apresentam-se graficamente as medidas de erro  $-d, r, e-$  que permitem avaliar a distância entre as imagens reconstruídas após interpolação longitudinal (360 e 180 LI/MLI) e a correspondente imagem original, calculadas no FOV circular.

Nos gráficos da figura 9.30 é evidente, tal como se esperava, o melhor desempenho em presença de ruído dos algoritmos de interpolação longitudinal 360 LI/MLI comparativamente com os algoritmos 180 LI/MLI (com a excepção do índice  $e$  para o algoritmo 360 MLI). Em particular, com elevados níveis de ruído, os valores dos índices  $d$  e  $r$  das imagens reconstruídas após interpolação longitudinal 360 LI são inferiores até aos da imagem reconstruída a partir de dados obtidos com varrimento circular. O desempenho do algoritmo 360 MLI no que se refere ao índice  $e$  não é tão mau quanto parece, dado que a distância entre as imagens obtidas por este algoritmo de interpolação longitudinal e pelos outros reduz-se progressivamente com o aumento do nível de ruído.

Na tabela 9.4 encontram-se os valores do desvio padrão do ruído calculado num quadrado de  $24 \times 24$  *pixels* centrado no centro das imagens reconstruídas. Estes resultados permitem confirmar o melhor desempenho dos algoritmos de interpolação 360 LI/MLI em presença de ruído e verificar de forma aproximada quanto foi possível afirmar de um ponto de vista teórico na secção 7.2.1, ou seja que, comparativamente com o caso de imagens obtidas após varrimento sequencial e utilizando o mesmo algoritmo de reconstrução, os algoritmos 360

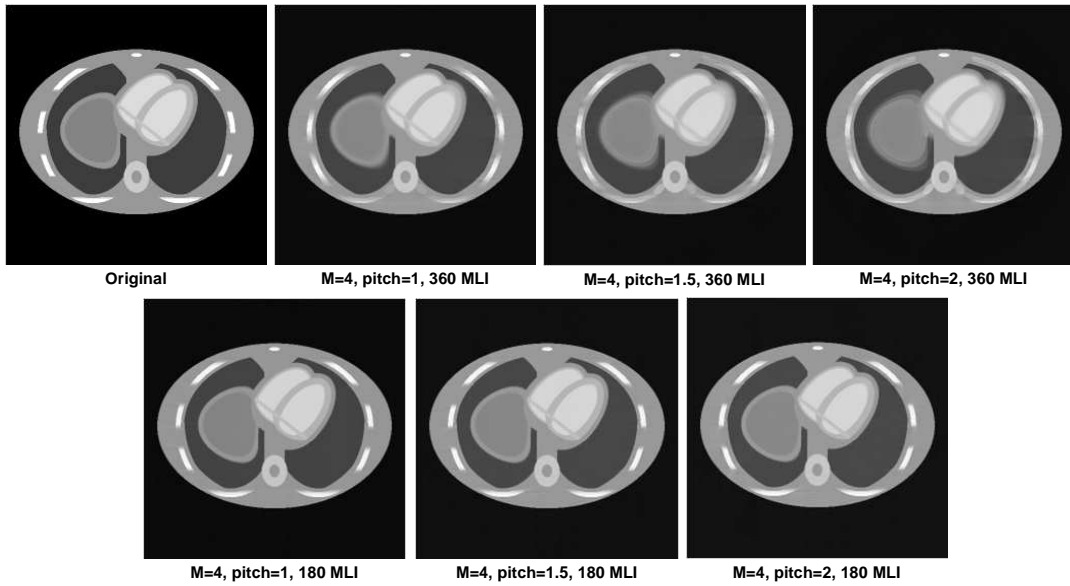


Figura 9.27: Imagens transaxiais reconstruídas utilizando os algoritmos de interpolação longitudinal 360 e 180 MLI, a partir de dados adquiridos com varrimento multicorte ( $M = 4$ ) helicoidal com diferentes valores de  $pitch$ . Em todos os casos utilizou-se o algoritmo de reconstrução DB NFFT DFM com filtro Ram-Lak.

$\sigma$ tomog. helicoidal	$N_{in} = 10^8$	$N_{in} = 10^6$
360 LI + DB NFFT DFM	0.0008	0.0030
180 LI + DB NFFT DFM	0.0012	0.0041
360 MLI + DB NFFT DFM	0.0008	0.0032
180 MLI + DB NFFT DFM	0.0010	0.0039
Sequencial DB NFFT DFM	0.0010	0.0039

Tabela 9.4: Desvio padrão do ruído na região central das imagens reconstruídas pelo algoritmo DB NFFT DFM (filtro *Hamming*) após interpolação longitudinal 360/180 LI/MLI, a partir de dados adquiridos em presença de diferentes níveis de ruído.

LI/MLI permitem uma redução do desvio padrão do ruído de  $\sqrt{2/3}$ , enquanto os 180 LI/MLI implicam um aumento de  $\sqrt{4/3}$  [61].

Por fim, podemos afirmar que, nas condições descritas e utilizando algoritmos de interpolação longitudinal 180 LI/MLI, a introdução do varrimento multicorte até aos 4 cortes não implica uma evidente degradação da imagem tanto do ponto de vista qualitativo como quantitativo, sendo aconselhada a sua utilização dado que permite reduzir a dose de radiação à qual é submetido o doente.

#### 9.4.4 Reconstrução a partir de sinograma breve

Nas experiências descritas na secção anterior, tendo como objectivo a avaliação de métodos computacionais para a reconstrução a partir de dados obtidos com varrimento em espiral, consideramos apenas como método de reconstrução 2D o algoritmo DB NFFT DFM com

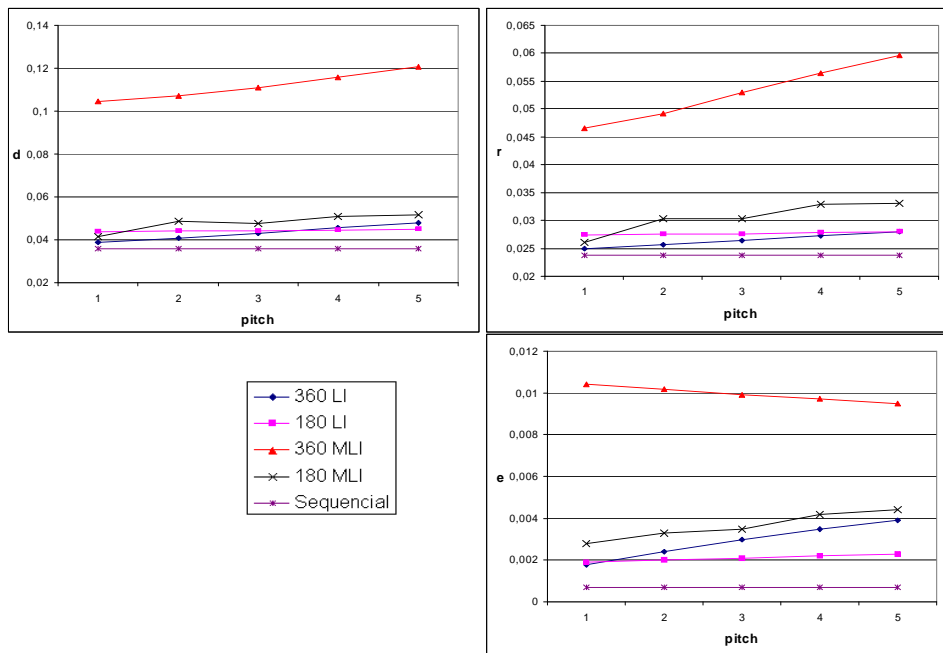


Figura 9.28: Avaliação quantitativa da qualidade das imagens reconstruídas (utilizando algoritmos de interpolação longitudinal 360 e 180 MLI e como algoritmo de reconstrução DB NFFT DFM com filtro Ram-Lak) a partir de dados adquiridos com varrimento helicoidal monocorte (*ss – single slice*) e multicorte (*ms – multi slice*) com diferentes valores de *pitch*.

diferentes filtros. A utilização de qualquer um dos outros algoritmos descritos na secção 9.1.2, dedicada à reconstrução a partir de projecções divergentes, teria fornecido imagens de qualidade superior ou inferior conforme os resultados da avaliação naquela secção.

Há uma questão, todavia, que merece ser considerada e tem a ver com a utilização de algoritmos de reconstrução para varrimento breve no caso de aquisição em espiral mono-corte. Trata-se de perceber se a escolha de um algoritmo de reconstrução para varrimento breve iria influenciar a qualidade das imagens reconstruídas (no sentido de reduzir os artefactos associados à aquisição em espiral), supondo que seja possível utilizar apenas os dados adquiridos ao longo do segmento de trajectória helicoidal mais próximo do plano de reconstrução.

Para responder a esta questão, alteramos os algoritmos de reconstrução para varrimento breve de forma que, a partir de um sinograma completo, pudesse ser seleccionado como sinograma breve o conjunto de projecções correspondente a um qualquer arco de círculo breve, e que a imagem pudesse ser reconstruída a partir deste sinograma breve, dada a direcção angular central do arco de círculo considerado. Assim, para cada imagem transaxial que se pretenda reconstruir, calcula-se, em primeiro lugar, o sinograma completo obtido por interpolação longitudinal (360 ou 180 LI) ou sem interpolação longitudinal (isto é, simplesmente considerando as amostras adquiridas numa rotação completa do foco longitudinalmente centrada na coordenada do plano de reconstrução). Deste sinograma completo extrai-se o sinograma breve correspondente ao arco de trajectória circular pretendido e a este aplica-se um algoritmo de reconstrução para varrimento breve (por exemplo, o algoritmo DB NFFT DFM *short*).

A hipótese formulada é que exista um determinado sinograma breve que permita otimizar

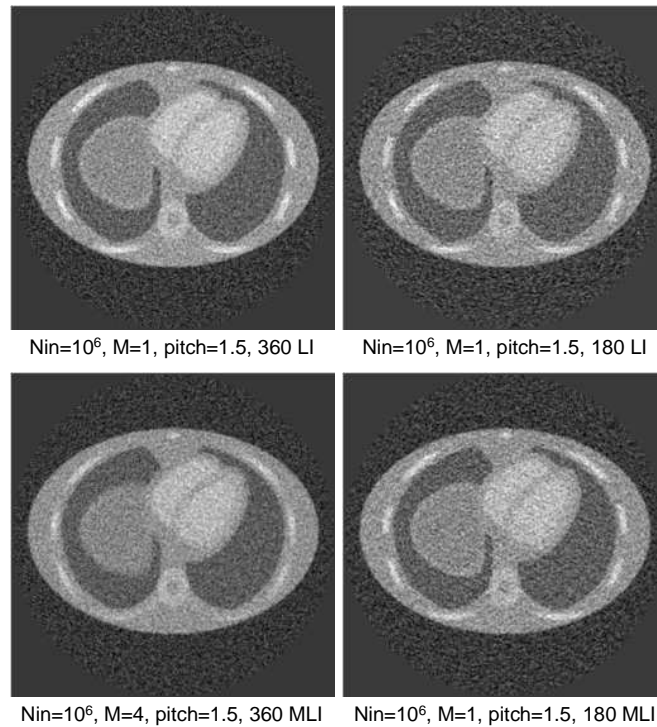


Figura 9.29: Imagens reconstruídas após aplicação de diferentes algoritmos de interpolação longitudinal (360 e 180 LI/MLI) com um elevado nível de ruído.

a qualidade da imagem reconstruída e que este sinograma breve corresponda ao arco de círculo angularmente centrado na direcção de projecção na qual a trajectória em espiral intersecta o plano de reconstrução.

Para confirmar esta hipótese, realizámos a seguinte experiência que consiste na avaliação do desempenho do algoritmo DB NFFT DFM *short* em função do arco de trajectória considerado. Considerou-se um conjunto de dados adquiridos com varrimento em espiral mono-corte com um valor de *pitch* bastante elevado ( $pitch = 2$ ) e, para uma determinada coordenada longitudinal  $zr$ , determinaram-se três sinogramas completos: por interpolação longitudinal 360 e 180 LI e sem interpolação longitudinal. Utilizando como referência a qualidade das imagens reconstruídas pelo algoritmo DB NFFT DFM com filtro Ram-Lak partir destes sinogramas completos, avaliaram-se as imagens obtidas pelo algoritmo DB NFFT DFM *short* com filtro Ram-Lak a partir dos sinogramas breves correspondentes a diferentes arcos de trajectória circular ( $\pi + \Gamma$  radianos centrados em  $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$ ). No caso específico, a trajectória helicoidal intersecta o plano de coordenada longitudinal  $zr$  na posição angular  $\beta = \pi$ , pelo que, segundo a nossa hipótese, a utilização do sinograma breve centrado em  $\beta = \pi$  deveria permitir otimizar a qualidade da imagem reconstruída.

A título de exemplo, na figura 9.31 encontram-se algumas das imagens avaliadas: na primeira linha as reconstruídas a partir dos sinogramas completos obtidos sem interpolação longitudinal e com interpolação 360 LI e 180 LI, na segunda linha as reconstruídas a partir dos respectivos sinogramas breves correspondentes ao arco centrado em  $\beta = \pi$  (o arco óptimo, segundo a nossa hipótese), e na terceira as reconstruídas a partir dos sinogramas breves

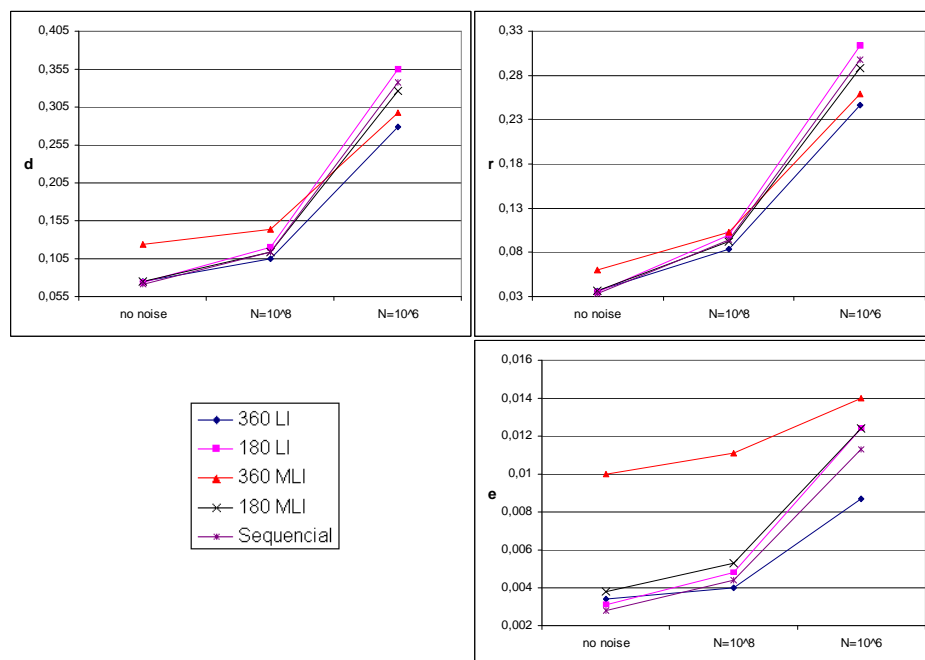


Figura 9.30: Avaliação quantitativa da qualidade das imagens reconstruídas (interpolação longitudinal 360 e 180 LI/MLI e algoritmo de reconstrução DB NFFT DFM com filtro Hamming) a partir de dados adquiridos com varrimento helicoidal monocorte (ss – *single slice*) e multicorte (ms – *multi slice*) com diferentes níveis de ruído e  $pitch = 1.5$ .

correspondentes ao arco oposto ( $\beta = 0$ ). No caso dos sinogramas obtidos sem interpolação longitudinal, tal como se esperava, é muito evidente a melhoria na qualidade das imagens associada à escolha do arco de trajectória centrado em  $\beta = \pi$ . Pelo contrário, no caso dos sinogramas obtidos com interpolação 360 e 180 LI, não é muita a diferença entre as imagens obtidas a partir do sinograma completo e do sinograma breve centrado em  $\beta = \pi$ , mas é notável a presença de artefactos nas imagens obtidas a partir do sinograma breve centrado em  $\beta = 0$ .

A análise quantitativa da qualidade das imagens realizou-se utilizando as habituais medidas de erro  $-d, r, e-$ , sendo os resultados graficamente representados na figura 9.32. Em primeiro lugar, nota-se como independentemente do arco utilizado, a qualidade das imagens obtidas a partir do sinograma breve é quase sempre inferior à das imagens obtidas a partir do sinograma completo. Faz excepção o índice  $e$  cujos valores, no caso dos arcos mais próximos do arco por nós indicado como óptimo, são inferiores aos das imagens reconstruídas a partir de sinogramas completos obtidos sem interpolação e com interpolação 360 LI.

Apesar de uma certa irregularidade na evolução dos indicadores de qualidade com a variação dos arcos breves considerados (devida à discretização do nosso modelo), globalmente constata-se que aos arcos mais próximos do arco centrado em  $\beta = \pi$  corresponde uma melhor qualidade. A observação mais interessante será, talvez, o facto que até a reconstrução a partir de sinograma breve obtido sem interpolação (cuja qualidade é, no geral, muito pior que a das imagens reconstruídas a partir de dados longitudinalmente interpolados) consegue igualar a qualidade das imagens reconstruídas a partir de dados longitudinalmente interpolados (360 e

180 LI) desde que se utilize um arco de varrimento breve próximo do arco centrado em  $\beta = \pi$ .

No que se refere ao desempenho em presença de ruído, este não depende do arco de varrimento breve considerado, pelo que não apresenta diferenças relativamente aos resultados apresentados na secção 9.1.2, que mostram como o desempenho dos métodos de reconstrução a partir de varrimento breve seja pior em presença de ruído.

Em suma, a experiência descrita permitiu confirmar que, apesar de não conseguir colmatar completamente a diferença de qualidade que a reconstrução a partir de varrimento breve implica (tanto em condições ideais como em presença de ruído), a escolha do arco de varrimento breve angularmente centrado na direcção de projecção na qual a trajectória em espiral intersecta o plano de reconstrução permite uma notável melhoria na qualidade das imagens reconstruídas, permitindo eliminar os artefactos associados ao varrimento em espiral.

Este resultado aplica-se apenas ao caso de aquisição mono-corte. Na aquisição multi-corte, dado que a distância entre as amostras utilizadas na interpolação e o plano de reconstrução é mais imprevisível, dependendo fortemente do *pitch*, é impossível estabelecer *a priori* se existe um arco de trajectória ao qual corresponda um sinograma breve óptimo a partir do qual reconstruir a imagem. Neste caso a escolha do método de reconstrução a partir de varrimento completo ou breve (independentemente do arco de trajectória breve considerado) far-se-á tendo apenas em consideração os índices de qualidade e os tempos de cálculo que caracterizam os diferentes métodos de reconstrução (sec. 9.1.2). Os efeitos da utilização de métodos de reconstrução a partir de varrimento breve no caso dinâmico serão avaliados no próximo capítulo, dedicado à tomografia dinâmica.

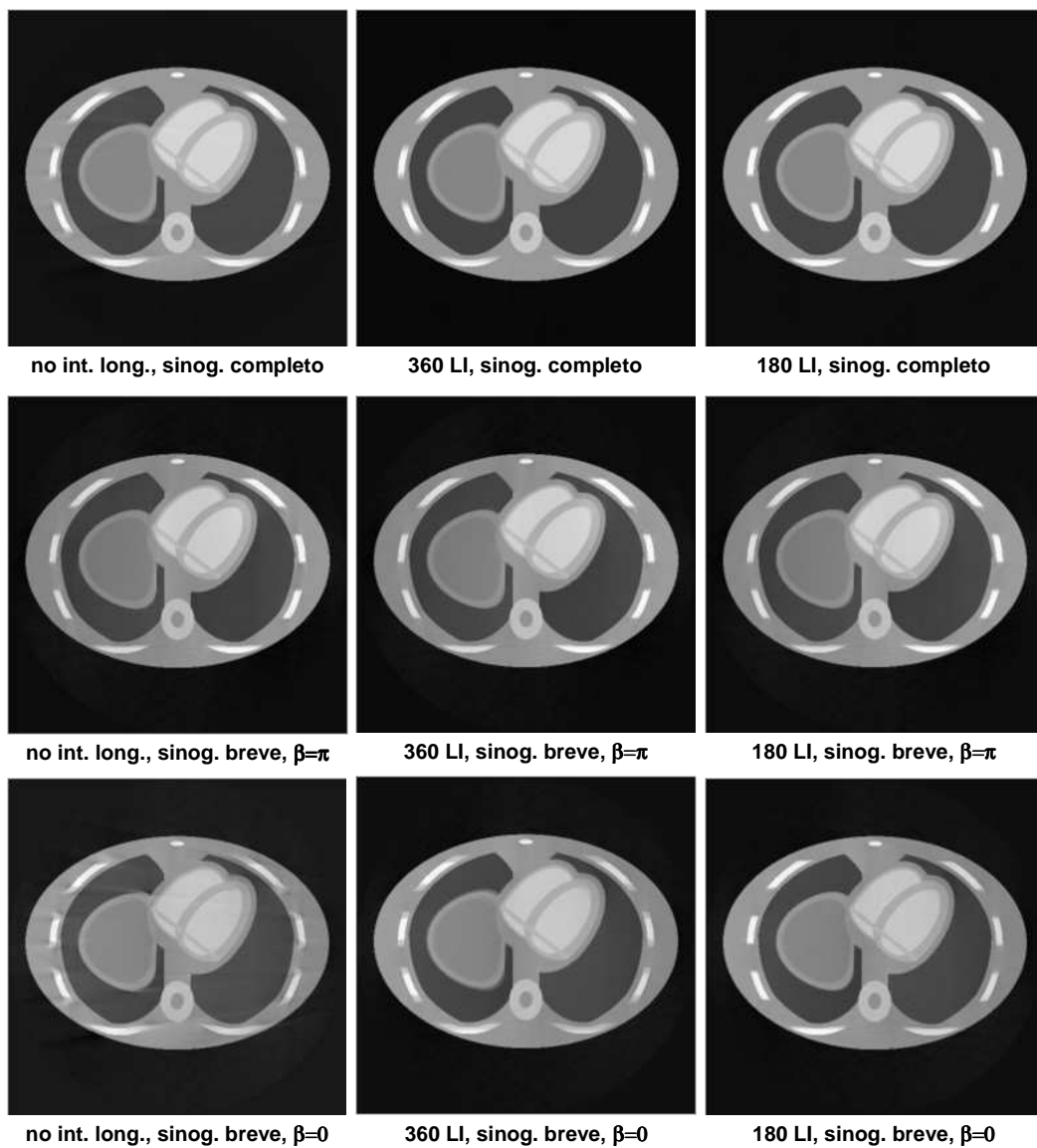


Figura 9.31: Comparação entre imagens reconstruídas a partir de dados obtidos com varrimento em espiral em correspondência da coordenada longitudinal  $zr$ . Na primeira coluna, sem interpolação longitudinal, na segunda e na terceira com interpolação longitudinal 360 e 180 LI. Na primeira linha considerando o sinograma completo e na segunda e na terceira considerando os sinogramas breves centrados em  $\beta = \pi$  e  $\beta = 0$ .



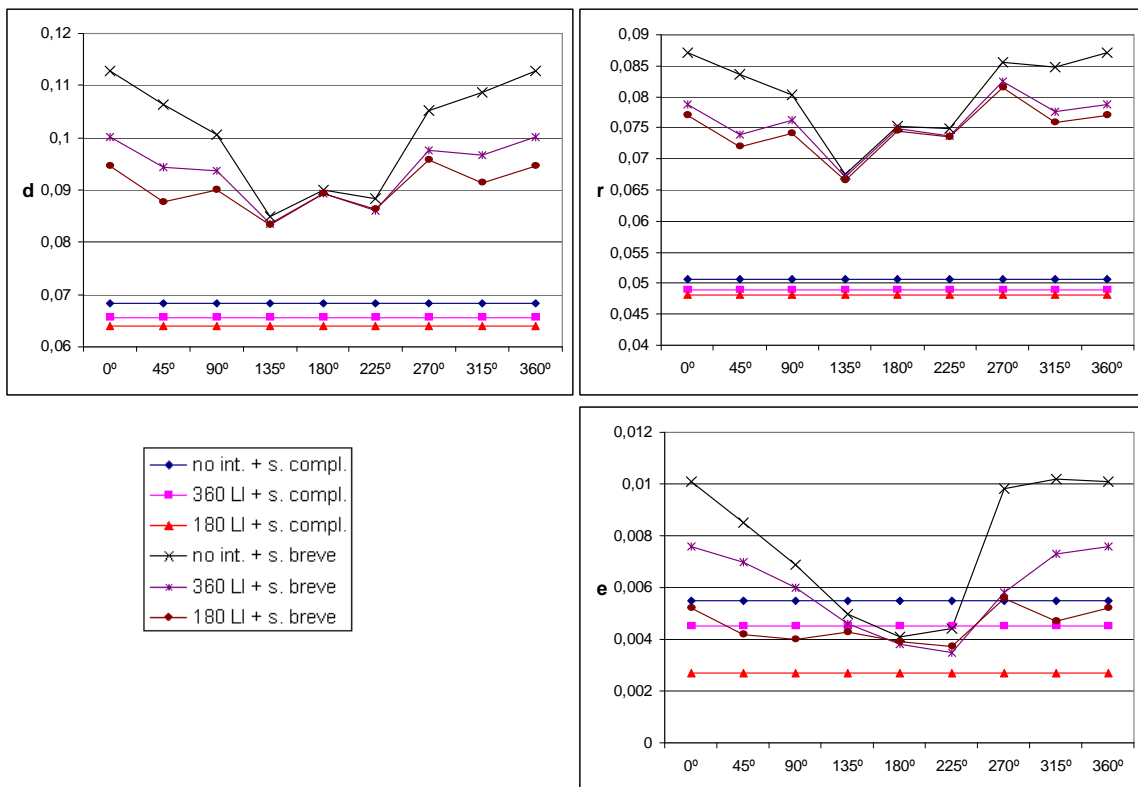


Figura 9.32: Avaliação quantitativa da qualidade das imagens reconstruídas a partir de dados adquiridos com varrimento helicoidal e diferentes técnicas de interpolação longitudinal (sem interpolação, 360 e 180 LI) considerando o sinograma completo e o sinograma breve correspondente a diferentes arcos de trajetória circular (centrados em diferentes posições angulares  $\beta$ ).

## Capítulo 10

# Análise experimental: tomografia dinâmica

A tomografia dinâmica consiste na reconstrução de imagens ou volumes para avaliação das características morfológicas de um determinado órgão ou processo quando a própria natureza dinâmica do órgão ou processo seja alvo de interesse, neste caso são obtidas sequências de imagens, ou quando esta condicione a técnica de aquisição dos dados e/ou de reconstrução das imagens.

As principais áreas de aplicação da tomografia dinâmica são os procedimentos de intervenção controlados por TAC de baixo contraste (ou CTF – *CT Fluoroscopy*), os estudos funcionais e de perfusão (nos quais se avalia a cinética de um meio de contraste num determinado órgão ou sistema) e a imagiologia cardio-torácica. Do ponto de vista da tecnologia e dos algoritmos de reconstrução, as diferentes áreas de aplicação apresentam-se como desafios distintos. Nos procedimentos de intervenção o que se pretende é a produção de imagens a ritmos elevados em tempo real sendo que a resolução temporal de cada imagem deve ser razoável mas não constitui um factor crítico. No caso dos estudos funcionais, que não necessitam de avaliação em tempo real, as exigências no que se refere à frequência e à resolução temporal das imagens são sensivelmente as mesmas dos procedimentos de intervenção mas as imagens podem ser reconstruídas à posteriori. Por fim, no caso da imagiologia cardio-torácica, o grande desafio consiste no aumento da resolução temporal que deve ser suficientemente elevada para que seja possível minimizar os artefactos devidos aos movimentos extremamente rápidos que se verificam nesta região anatómica, nomeadamente, o movimento das paredes ventriculares que se propaga de forma elástica através de vasos sanguíneos e tecidos envolventes a cada ciclo cardíaco.

O nosso interesse neste âmbito centrou-se no estudo das técnicas de aquisição e reconstrução especificamente desenvolvidas para a obtenção de imagens cardio-torácicas. Algumas destas técnicas, que visam aumentar a resolução temporal explorando a (quase) periodicidade do movimento em causa, foram implementadas no nosso simulador e avaliadas utilizando o modelo dinâmico do tórax 4D MCAT, descrito no capítulo 8.

Após uma breve descrição das diferentes técnicas disponíveis para a reconstrução de imagens na região cardio-torácica, neste capítulo iremos considerar um conjunto de experiências realizadas com o nosso simulador com o objectivo de avaliar a priori a qualidade da imagem que se pode esperar em estudos cardio-torácicos realizados utilizando diferentes protocolos de aquisição (mono- e multi-corte, helicoidal, "ECG *gated*", etc.) e diferentes métodos de

reconstrução.

## 10.1 Tomografia cardio-torácica

Os avanços tecnológicos que têm pontuado a evolução dos sistemas de TAC no sentido de tornar cada vez mais rápida e eficiente a aquisição dos dados (aumento da velocidade de rotação, aumento do número de cortes, etc.), tornam possível, hoje em dia, a aquisição de grandes volumes de dados em intervalos de tempo geralmente compatíveis com as características dinâmicas do corpo humano em condições de repouso. Contudo, algumas aplicações na região cardio-torácica requerem resolução espacial e temporal particularmente elevadas e, devido à extrema rapidez dos movimentos envolvidos, continuam a constituir um desafio. As aplicações mais exigentes neste aspecto são os estudos angiográficos dos vasos periféricos pulmonares e das artérias coronárias (CAI - *Coronary Artery Imaging*), os estudos para a avaliação da quantidade de cálcio presente nas artérias coronárias (*calcium scoring*), os estudos de perfusão, nos quais se pretende avaliar a cinética de um meio de contraste no miocárdio através de uma sequência de imagens correspondentes sempre à mesma fase do ciclo cardíaco ao longo de vários ciclos, e os estudos nos quais se pretende avaliar o movimento cardíaco através de uma sequência de imagens (volumes) que representam as várias fases do ciclo cardíaco. Estes tipos de estudos podem requerer resolução espacial isotrópica (ou quase) até os 0.4 mm e resolução temporal até os 50 ms.

O ciclo cardíaco é caracterizado por várias fases, algumas mais lentas e outras mais rápidas, às quais correspondem as diferentes curvas características do sinal electrocardiográfico ou ECG (fig. 10.1). Basicamente, podemos distinguir a fase diastólica (a mais lenta) durante a qual se verifica o enchimento passivo das aurículas e dos ventrículos e corresponde ao segmento plano do sinal ECG, e a fase sistólica (a mais rápida) durante qual se verificam a contracção ventricular, correspondente à curva QRS do sinal ECG, e a ejeção sanguínea (e relativa relaxação ventricular), correspondente à curva T do sinal ECG. A contracção (sístole) das aurículas verifica-se no fim da fase diastólica e corresponde à curva P do sinal ECG. O movimento mais rápido que se regista ao longo do ciclo cardíaco é o das paredes do ventrículo esquerdo que, na fase de ejeção sistólica, pode atingir os 100 mm/s. Para frequências cardíacas até aos 70 ciclos por minuto, na fase diastólica uma resolução de 0.25 s pode ser suficiente para a visualização sem artefactos, enquanto na fase sistólica é necessária uma resolução temporal de 0.05 s [23].

De facto, nos sistemas de TAC helicoidal actuais, conjugando tempos de rotação da ordem dos 0.5 s com técnicas de reconstrução para varrimento breve e algoritmos de interpolação longitudinal de tipo 180 LI/MLI (que permitem reduzir, no tempo como no espaço, a distância entre as amostras consideradas na interpolação) é possível obter imagens transaxiais com resolução temporal de 0.25 s, suficiente para a fase diastólica mas não para a sistólica. De qualquer forma, nas imagens correspondentes a planos longitudinais obtidas por reformatação multiplanar (cuja "resolução temporal" é equivalente ao tempo total de varrimento) continuam a aparecer artefactos devidos tanto ao movimento cardíaco como à respiração.

Um aumento significativo da resolução temporal consegue-se pelo recurso a arquitecturas especiais, como o EBCT (pag. 15) que permite obter um conjunto de dados completo em menos de 50 ms, ou a sistemas dedicados caracterizados por tempos de rotação inferiores aos 0.5 s, elevado número de cortes, aquisição sincronizada com o sinal electrocardiográfico e soluções tecnológicas inovadoras como, por exemplo, a introdução de um sistema fonte-detectores se-

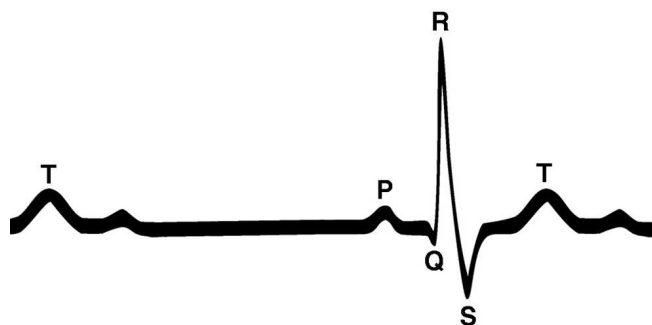


Figura 10.1: Representação simplificada do traçado de um sinal ECG ao longo de um ciclo cardíaco. A curva P corresponde à contracção das aurículas, a curva QRS corresponde à contracção ventricular e a curva T à relaxação ventricular.

cundário que permite reduzir para metade o tempo de aquisição (*dual source CT*, pag. 22). Por outro lado, quando a frequência cardíaca do paciente ultrapassa um determinado limite (cujo valor depende do equipamento), podem ser administrados fármacos  $\beta$ -bloqueantes antes da realização do exame de forma a reduzir e regularizar a frequência cardíaca melhorando a qualidade das imagens. Por exemplo, num sistema de quatro cortes com tempo de rotação de 0.5s, é habitual a administração de  $\beta$ -bloqueantes quando a frequência cardíaca ultrapassa os 65bpm.

De qualquer forma, desde os sistemas de TAC convencionais até aos sistemas especiais e dedicados, é imprescindível a utilização de protocolos de aquisição e técnicas de reconstrução especialmente desenvolvidos para permitir, através da sincronização com o sinal electrocardiográfico, a obtenção de imagens e volumes de dados de elevada resolução temporal e, ao mesmo tempo, referentes a fases específicas do ciclo cardíaco. A necessidade de sincronização com o ECG verifica-se também nos estudos pulmonares dado que o movimento cardíaco propaga-se de forma elástica provocando um movimento pulsátil nos vasos e tecidos mais próximos, afectando em particular a visualização da árvore vascular pulmonar periférica, onde o calibre dos vasos é mais pequeno e requer, ao mesmo tempo, maior resolução espacial.

Em alternativa ao sinal ECG, demonstrou-se [55] ser igualmente eficaz a sincronização com a função de kymograma (do termo grego *κίμα* que significa onda) proposta por Kachelriess [56]. Esta função descreve o movimento do centro de massa no objecto devido à pulsação cardíaca e tem mostrado uma grande correlação com o sinal ECG (ver a correspondência entre os picos R do ECG e os picos K do kymograma na figura 10.2). Para determinar a função de kymograma, calculam-se os centros de massa das projecções (sendo estes as projecções em cada instante do centro de massa da secção projectada, figura 10.3-A) e para cada par de projecções adjacentes, calcula-se o ponto de intersecção dos raios projecção correspondentes aos centros de massa das projecções (fig. 10.3-B). O ponto de intersecção, assim determinado, define a posição do centro de massa da secção do objecto considerada no intervalo de tempo em que é adquirido um par de projecções adjacentes, e varia ao longo do tempo devido ao movimento cardíaco mas também em função da posição angular e longitudinal do foco. Uma vez subtraída a componente do movimento que se deve à posição angular e longitudinal do foco, e determinado o eixo principal do movimento, o movimento do centro de massa do objecto pode ser representado utilizando uma função unidimensional resultando na função de

kymograma.

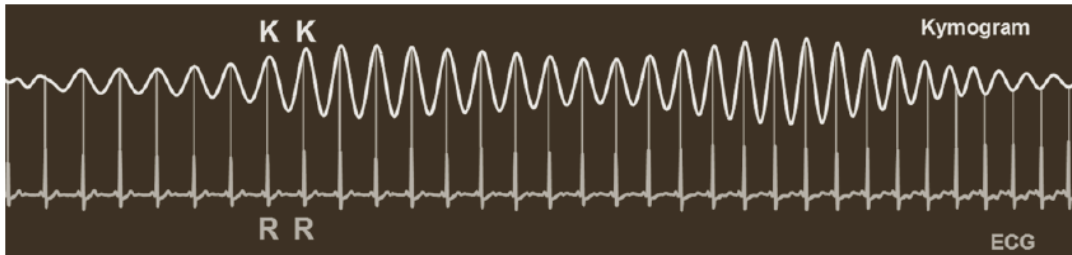


Figura 10.2: Correlação entre a função de kymograma calculada a partir das projecções e o sinal ECG [55].

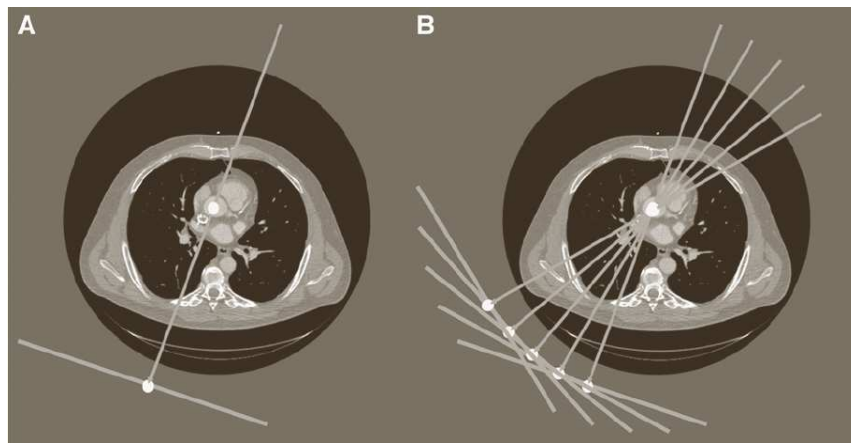


Figura 10.3: Relação entre o centro de massa de uma projecção e o centro de massa do objecto [55]. O centro de massa do objecto projecta-se no centro de massa da projecção (A). Intersectando as linhas de projecção correspondentes aos centros de massa de duas projecções adjacentes obtém-se o centro de massa do objecto (B).

O movimento respiratório, que influencia todos os órgãos da região torácica e abdominal, representa um ulterior grau de variabilidade dado que a aquisição pode ser realizada em apneia apenas quando a sua duração e as condições do paciente o permitam. Relativamente à imagiologia cardíaca, o movimento respiratório pode levar ao aparecimento de discontinuidades nas imagens cardíacas correspondentes a planos longitudinais (em cada ciclo respiratório a região cardíaca sofre uma compressão que resulta num movimento cardíaco de translação e rotação) e estas discontinuidades podem ser acentuadas pelo recurso aos métodos de aquisição sincronizada com o ciclo cardíaco. Na prática clínica, caso a duração da apneia não seja comportável para o paciente, terá que se optar por protocolos mais rápidos (em detrimento da resolução espacial) ou pela sincronização da aquisição com o movimento respiratório. A este propósito, têm sido desenvolvidas técnicas de sincronização da aquisição com o movimento respiratório recorrendo a sistemas mecânicos de detecção do movimento, constituídos por uma cinta com sensores de pressão (que permitem adquirir um sinal em função da tensão da cinta e da pressão no/nos sensores), ou a informação anatómica interna extraída das projecções com

técnicas inspiradas à utilizada para extrair o kymograma [98, 68]. De qualquer forma, devido aos avanços tecnológicos (velocidade de rotação e número de cortes), o recurso à aquisição sincronizada com o movimento respiratório é cada vez menos frequente.

Justifica-se então, no âmbito das aplicações anteriormente mencionadas, a necessidade de explorar a periodicidade dos movimentos envolvidos sincronizando com estes a aquisição dos dados e/ou a reconstrução das imagens. Basicamente, as técnicas de sincronização com o movimento cardíaco dividem-se em técnicas de aquisição prospectivamente activada por ECG (*prospectively ECG triggered technique*) e técnicas de reconstrução retrospectivamente controladas por ECG (*retrospectively ECG gated technique*). Quanto às técnicas de sincronização com o movimento respiratório, que também podem ser activadas prospectivamente ou controladas retrospectivamente [98], devido à impossibilidade de implementação no fantoma por nós utilizado, não serão ulteriormente analisadas nesta dissertação sendo que nos limitaremos a considerar exemplos de aquisição em apneia e sem apneia.

### 10.1.1 Aquisição prospectivamente activada por ECG

A técnica de aquisição prospectivamente activada por ECG aplica-se ao varrimento sequencial (sendo, por isso, a única técnica utilizável em EBCT). Como o nome da técnica sugere e se ilustra na figura 10.4-a, é o próprio sinal ECG que permite determinar o instante no qual, num em cada dois ciclos cardíacos, deve iniciar o disparo para a aquisição convencional de um conjunto de dados completo a partir do qual reconstruir uma imagem (ou  $M$  imagens, no caso de  $M$  cortes). Uma vez adquiridos os dados necessários para a reconstrução numa determinada posição longitudinal, a mesa avança sendo a deslocação igual à colimação do feixe e, no ciclo útil sucessivo (por isso a aquisição faz-se num em cada dois ciclos cardíacos), realiza-se outra aquisição que permitirá reconstruir cortes adjacentes aos anteriores até obter o volume cardíaco completo (fig. 10.4-b). Para aumentar a resolução temporal e diminuir a dose, os conjuntos de dados adquiridos correspondem a varrimentos breves (sendo o ângulo de rotação  $\pi + \delta$ , com  $\delta \leq \Gamma$  dado que, habitualmente limita-se a reconstrução apenas à região cardíaca). A resolução temporal resultará igual ao tempo necessário para um varrimento breve, isto é  $\frac{\pi + \delta}{2\pi} t_{rot} \sim \frac{1}{2} t_{rot}$ .

Na hipótese que o ritmo cardíaco seja suficientemente regular, este método permite a reconstrução de todo o volume cardíaco a partir de dados referentes apenas a uma fase do ciclo. Na prática, dadas as inevitáveis alterações da frequência cardíaca ao longo da aquisição, para garantir a correspondência entre a janela de aquisição (cuja duração é fixa e depende da velocidade de rotação) e a fase do ciclo escolhida, a localização das janelas de aquisição nos vários ciclos cardíacos não é fixa mas é determinada prospectivamente utilizando a informação fornecida pelo ECG. Antes que inicie o exame, o operador avalia o sinal ECG adquirido até ao momento e selecciona a janela de aquisição pretendida introduzindo um parâmetro que define a sua localização relativa no ciclo cardíaco (que inicia e acaba em dois picos R sucessivos). Por exemplo, o parâmetro poderá indicar a razão entre o intervalo de tempo (atraso) que vai desde o início do ciclo até ao início da janela de aquisição (fig. 10.5-a) e a duração do ciclo cardíaco em percentagem. Noutros sistemas o parâmetro poderá indicar a razão entre o intervalo que vai desde o início da janela até ao pico R seguinte (fig. 10.5-b) e a duração do ciclo cardíaco em percentagem. De qualquer forma, ao longo da aquisição estima-se a duração do ciclo cardíaco seguinte e, utilizando o parâmetro definido pelo operador, determina-se o instante no qual deve iniciar a aquisição.

Realça-se que este método permite obter apenas um único volume de dados correspon-

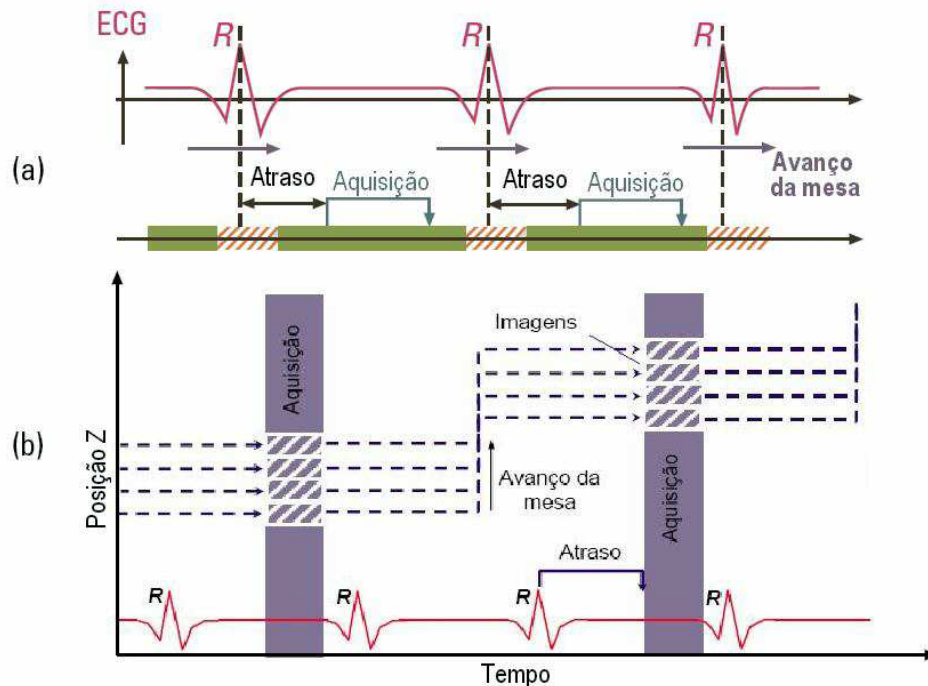


Figura 10.4: Varrimento sequencial prospectivamente activado por ECG (adaptado de [95]). a) Escolha da janela de aquisição. b) Sequência de aquisição no caso de um sistema de quatro cortes.

dente a uma determinada fase do ciclo cardíaco, não podendo ser utilizado em aplicações cujo objectivo seja a avaliação dinâmica. Como se verá na próxima secção, a obtenção de um volume cardíaco com método de aquisição prospectivamente activada por ECG implica maior tempo de apneia (ou menor resolução espacial) e menor dose face aos métodos de reconstrução retrospectivamente controlada por ECG. Por estas razões, esta técnica é habitualmente utilizada para a avaliação dos depósitos de cálcio nas artérias coronárias, um tipo de exame que não necessita de elevada resolução espacial e, sendo considerado de rastreio, requer baixa dose ( $1-3mSv$ ).

Ainda, é de salientar que as imagens obtidas por esta técnica resultam ser bastante degradadas em presença de arritmias ou de frequência cardíaca superior aos  $90bpm$  (sendo o tempo de rotação  $400ms$ ) [23].

### 10.1.2 Aquisição/reconstrução retrospectivamente controlada por ECG

Trata-se de uma classe de técnicas aplicáveis quer ao varrimento circular contínuo quer em espiral e que permitem, uma vez realizada a aquisição, a selecção retrospectiva dos dados a ser utilizados na reconstrução das imagens, podendo ser reconstruídos vários volumes correspondentes às diferentes fases do ciclo cardíaco.

Na técnica mais simples, a reconstrução de ciclo único (*single-cycle*) [51] ou monosectorial, também denominada  $180^\circ CD - Cardio Delta-$  ( $180^\circ MCD$  no caso multicorte) [61, 58], o conjunto completo de dados a partir do qual será reconstruída cada imagem é obtido seleccionando os dados correspondentes a um único intervalo de tempo contido num ciclo cardíaco

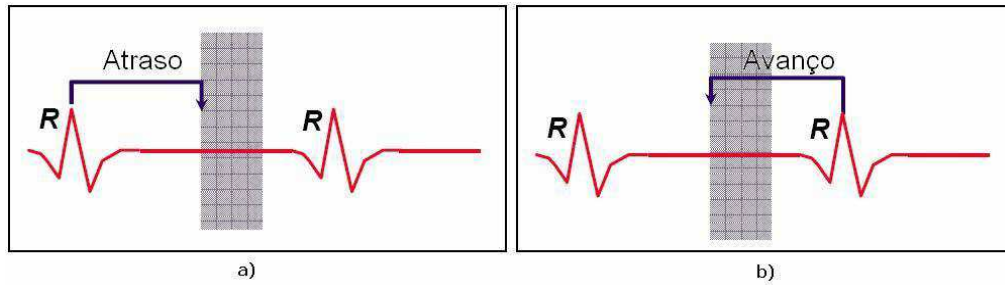


Figura 10.5: Diferentes formas de definir a localização relativa da janela de aquisição num ciclo cardíaco.

e centrado na fase pretendida (fig. 10.6). Também neste caso, para reduzir o mais possível a duração da janela temporal (e espacial) à qual os dados se referem, se consideram apenas dados correspondentes a um varrimento breve (ângulo de rotação  $\pi + \delta$ , donde a denominação *cardio delta*) e não se efectua nenhuma interpolação longitudinal, sendo a resolução temporal  $\sim \frac{1}{2}t_{rot}$ .

O valor do *pitch* assume uma grande importância nesta técnica sendo que, por um lado, é desejável um *pitch* elevado para adquirir todo o volume de interesse no menor tempo possível (limitando o tempo de apneia) e, por outro lado, o avanço da mesa por ciclo cardíaco não pode ultrapassar a largura total de colimação para que seja possível reconstruir todo o volume sem falhas (fig. 10.7). Para uma dada frequência cardíaca  $f_h$ , num sistema de  $M$  cortes de espessura  $S$  a velocidade máxima da mesa será

$$v = \frac{MS}{1/f_h}$$

pelo que, se  $t_{rot}$  for o tempo de rotação, o avanço da mesa por rotação  $d$  deverá ser

$$d \leq MSf_h t_{rot}$$

e o *pitch* deverá ser inferior a  $f_h t_{rot}$ , podendo ser automaticamente ajustado ao longo da aquisição caso se verifiquem alterações na frequência cardíaca. Exemplificando, com um tempo de rotação de  $0.5s$  e frequência cardíaca de  $60bpm$  o máximo valor de *pitch* utilizável será  $0.5$ , o que significa que neste tipo de aquisições o grau de sobreposição é bastante elevado (assim como a dose de raios X transmitida ao paciente).

Se por um lado uma elevada frequência cardíaca permite um valor de *pitch* maior, logo uma mais rápida cobertura do volume cardíaco e, conseqüentemente, um menor tempo de apneia, por outro lado pode fazer com que os segmentos de dados utilizados na reconstrução das imagens não correspondam apenas à fase diastólica dando lugar a artefactos de movimento. Assim, para além de se poder recorrer a medicação com fármacos  $\beta$ -bloqueantes para reduzir a frequência cardíaca, quando esta ultrapassa um determinado limite (cerca de  $70-75bpm$  num equipamento com  $t_{rot} 400ms$  [23]) ou quando o objectivo do exame implica a reconstrução em diferentes fases do ciclo cardíaco (estudos dinâmicos) deve-se recorrer a técnicas que permitam aumentar a resolução temporal.

O objectivo de aumentar a resolução temporal é atingido pelas técnicas de ciclo múltiplo (*multi-cycle*)[51] ou multisectoriais, também denominadas  $180^\circ CI - Cardio Interpolation-$



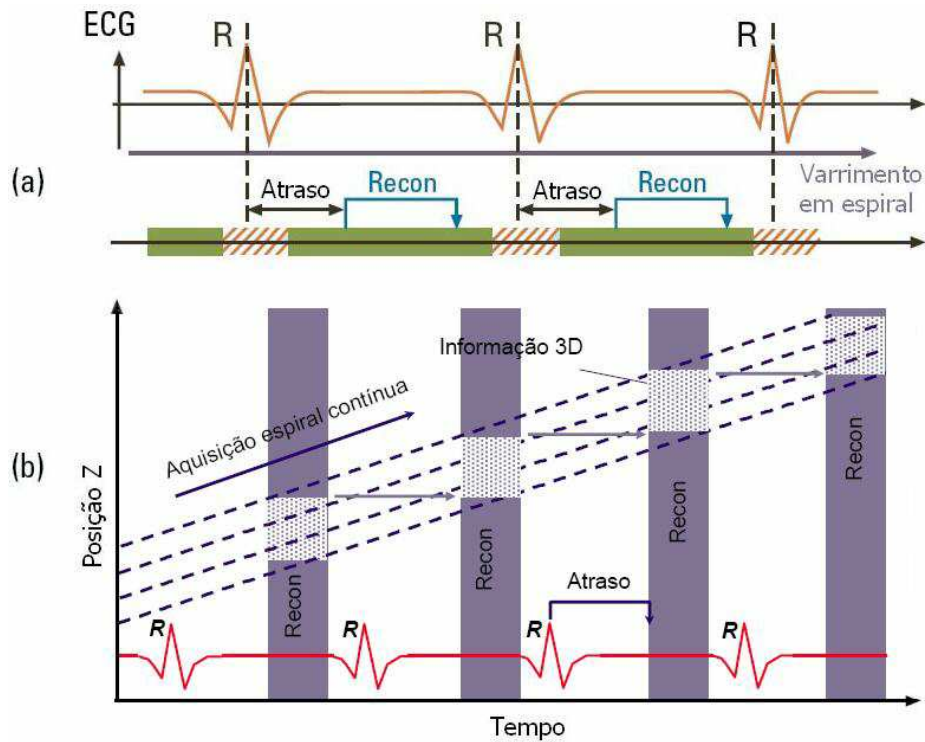


Figura 10.6: Varrimento helicoidal com reconstrução de ciclo único retrospectivamente controlada por ECG (adaptado de [95]). a) Selecção das janelas de reconstrução. b) Esquema para a reconstrução de um volume no caso de um sistema de quatro cortes.

( $180^\circ$ MCI no caso multicorte) [61, 58]. Nestas técnicas os dados a partir dos quais se reconstroem as imagens são seleccionados ao longo de mais de um ciclo cardíaco (3 ciclos no exemplo representado na figura 10.8) e correspondem a intervalos de aquisição cuja duração é reduzida face aos das técnicas de ciclo único. Basicamente, as técnicas multisectoriais consistem na aplicação de um método de interpolação longitudinal (no caso específico o  $180^\circ$ LI descrito no capítulo 7) seguido pela reconstrução da imagem, com a diferença que são considerados na interpolação apenas os dados que pertencem aos segmentos seleccionados.

No caso das técnicas multisectoriais, para garantir que o volume cardíaco seja reconstruído sem falhas (ou com a necessária resolução longitudinal) é necessário que o avanço da mesa seja inferior à colimação total do feixe  $MS$  no tempo necessário à aquisição dos  $N$  segmentos, isto é, aproximadamente  $N$  ciclos cardíacos (fig. 10.9). Esta condição traduz-se num valor limite para o  $pitch$ , que deverá ser inferior a  $f_h t_{rot}/N$ . Isto significa que um aumento do número de sectores considerados na reconstrução implica a equivalente redução do  $pitch$  com conseqüente aumento do tempo total de aquisição e da dose. Por este motivo, e também pelo facto que, quanto maior for o número de segmentos, maior é a probabilidade que se verifiquem artefactos devidos às diferenças existentes entre ciclos, o número de segmentos que podem ser utilizados é limitado. Nos sistemas comerciais recentes é possível escolher até cinco segmentos.

Especialmente nos métodos multisectoriais, nos quais o comprimento dos segmentos de dados corresponde a uma pequena fracção do ciclo cardíaco, surge o problema de escolher a fase óptima para a reconstrução. Alguns estudos [70, 47] indicam que a fase óptima depende

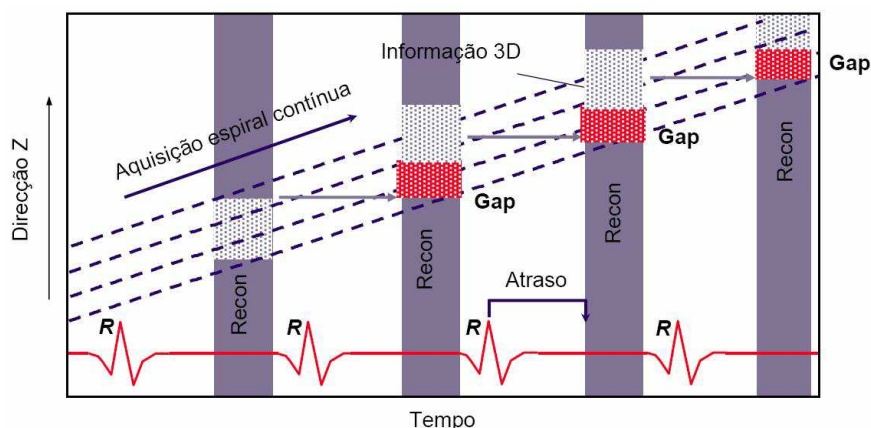


Figura 10.7: Um valor de *pitch* demasiado elevado não permite a reconstrução de todo o volume.

da artéria que interessa visualizar, pelo que, por exemplo segundo [69], a fase óptima para a artéria coronária direita seria centrada em 40% do intervalo R-R, enquanto para a coronária esquerda seria centrada em 70% do intervalo R-R.

Como veremos na secção 10.2.2, o conjunto de dados obtido pelas técnicas multisectoriais poderá resultar incompleto, tornando-se necessário aumentar a duração dos segmentos (ou apenas de alguns) ou recorrer a um processamento complementar chamado regularização. Estas operações podem comprometer parcialmente a resolução temporal cujo valor nominal ( $\sim \frac{t_{rot}}{2N}$ , sendo N o número de ciclos considerados), em condições ideais, chega a atingir o máximo de  $40ms$  num sistema topo de gama (comercializado pela marca Toshiba) com  $t_{rot}$   $400ms$ .

As técnicas de reconstrução retrospectivamente controladas por ECG permitem obter volumes cardíacos de excelente qualidade, com elevada resolução espacial e temporal. Hoje em dia, um sistema comercial dedicado (topo da gama) de 64 cortes, utilizando técnicas de reconstrução multisectorial, permite obter volumes cardíacos com resolução espacial isotrópica sub-milimétrica (0.7-0.3 mm) e resolução temporal inferior aos 50 ms, requerendo um tempo de apneia inferior aos 10 segundos. Comparativamente com a técnica de aquisição prospectivamente activada por ECG, estas técnicas resultam ser mais robustas em caso de arritmias dado que existe a possibilidade de alterar manualmente os segmentos seleccionados caso se verifiquem eventos perturbadores da qualidade da reconstrução (por exemplo, extrassístole). A grande desvantagem consiste na dose que é das mais elevadas para um exame de TAC (10-20 mSv) [84] devido aos baixos valores de *pitch* e ao facto que apenas uma fracção dos dados adquiridos é efectivamente utilizada na reconstrução (contrariamente ao que acontece no método de aquisição prospectivamente activada por ECG). Quando o objectivo do exame é a obtenção de apenas um volume associado a uma determinada fase cardíaca, pode-se obter uma redução da dose até 50% recorrendo à modulação da corrente no tubo em sincronia com o sinal ECG, de forma a reduzir a dose associada às fases que não têm interesse na formação da imagem.

A escolha da técnica de reconstrução e do número de sectores, assim como dos outros numerosos parâmetros que definem um protocolo de aquisição cardíaca, é bastante complexa e depende da frequência e regularidade do ciclo cardíaco assim como das características

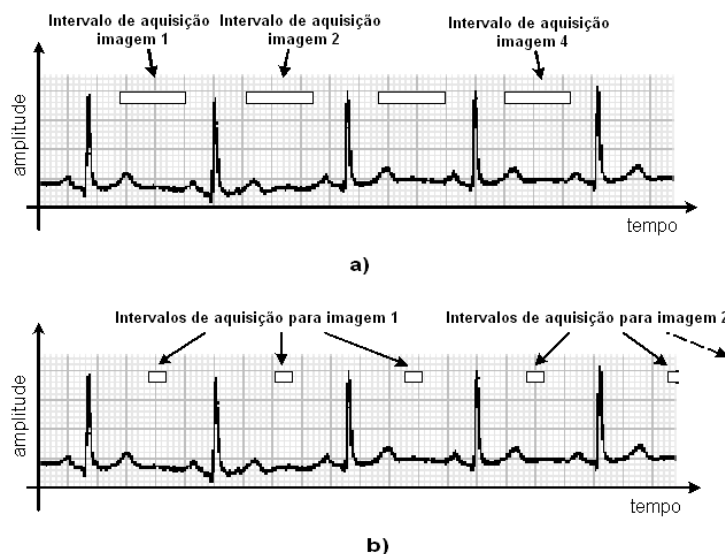


Figura 10.8: O ECG permite seleccionar retrospectivamente os segmentos de dados a ser utilizados na reconstrução. a) nas técnicas monosectoriais os dados seleccionados correspondem a um único intervalo de aquisição. b) nas técnicas multisectoriais os dados seleccionados correspondem a um determinado número (três, no exemplo) de intervalos de aquisição pertencentes a ciclos cardíacos consecutivos.

técnicas do equipamento (em primeiro lugar, do tempo de rotação). Um claro exemplo da complexidade das relações entre os vários parâmetros, analisada em [20], é dado pelo gráfico da figura 10.10, onde se mostra a variação da resolução temporal em função da frequência cardíaca para um determinada técnica de reconstrução multisectorial e um determinado valor de pitch (0.2) com diferentes tempos de rotação. Devido à complexa interdependência entre os vários factores (que será analisada na secção 10.2.2), os sistemas comerciais dispõem de aplicações interactivas que, tendo em conta o sinal ECG adquirido antes que inicie a aquisição tomográfica e as relações entre os vários parâmetros, assistem o operador na escolha do protocolo de aquisição permitindo obter um volume de dados com as características de resolução espacial e temporal pretendidas optimizando, ao mesmo tempo, a dose e o tempo de aquisição.

## 10.2 Exemplos de simulação

Como se adiantou na secção 8.1.2, o fantoma dinâmico do tórax por nós utilizado, o 4D MCAT, é caracterizado por resolução temporal virtualmente ilimitada, podendo ser gerado num número arbitrário de instâncias, ou *frames*, por segundo. Mais concretamente, o fantoma dinâmico correspondente a um dado intervalo de tempo consistirá num número arbitrário  $n$  de *arrays* tridimensionais de dados (*frames*), associados a  $n$  instantes temporalmente equiespaçados no intervalo considerado, guardados em ficheiros separados.

No contexto da tomografia dinâmica (nomeadamente, na imagiologia cardíaca), para podermos realizar simulações minimamente realísticas, o fantoma deverá ser gerado com um número elevado de frames por segundo, suficiente para representar os movimentos mais rápidos de forma "suave". Para a realização das experiências que iremos descrever nesta secção

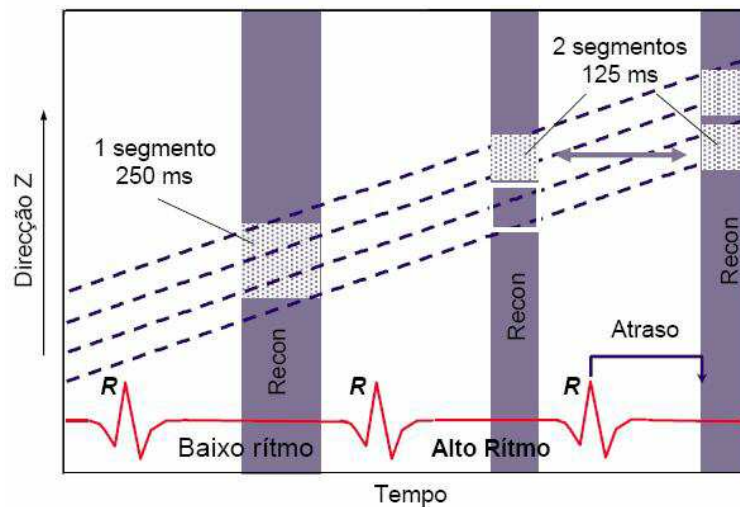


Figura 10.9: Nas técnicas multisectoriais, os dados necessários para a reconstrução de  $M$  cortes são adquiridos em  $N$  intervalos temporais pertencentes a ciclos cardíacos consecutivos. O avanço da mesa no tempo necessário para a aquisição dos  $N$  sectores deve ser inferior à colimação total do feixe  $MS$ .

utilizámos um fantoma dinâmico de elevada resolução temporal constituído por 400 *frames* ao longo de 8 segundos de observação, correspondendo a um período de amostragem de 0.02 s. Foram geradas algumas versões do fantoma: com e sem movimento respiratório e com diferente descrição estatística da duração do ciclo cardíaco (distribuição gaussiana com média de 1s, 0.9s e 0.8s, desvio padrão de 5%, 10% e 20%), de forma a podermos avaliar o desempenho das várias técnicas de aquisição/reconstrução nas diferentes condições experimentais.

A informação acerca da duração dos ciclos cardíacos observados, disponível num ficheiro de texto (gerado juntamente com o fantoma) que reúne todos os dados e parâmetros que definem o fantoma gerado, será utilizada em lugar do sinal ECG na simulação das técnicas de aquisição/reconstrução sincronizadas com o ciclo cardíaco.

Por outro lado, gerou-se um segundo fantoma dinâmico, constituído por 20 *frames* correspondentes a 20 instantes equiespaçados ao longo de um ciclo cardíaco de duração pré-definida (em condições de apneia), que irá constituir o fantoma de referência para o cálculo do erro de reconstrução nas diferentes fases do ciclo. Na tabela 10.1 encontram-se descritas as 20 fases consideradas em termos do grau de contracção do ventrículo esquerdo.

Apesar da sua versatilidade, o fantoma 4D MCAT tem limitações importantes no que diz respeito a sua utilização em simulações de imagiologia cardíaca. Nomeadamente, a ausência das artérias coronárias (cuja visualização constitui o principal desafio nesta área imagiológica), impede uma análise rigorosa do desempenho das diferentes técnicas de aquisição e reconstrução. O detalhe anatómico mais pequeno e de movimento rápido presente no modelo cardíaco é constituído pelas válvulas, pelo que a sua representação livre de artefactos de movimento passará a ser o objectivo dos métodos de reconstrução por nós avaliados. De qualquer forma, devido às limitações do modelo dinâmico, as experiências por nós realizadas neste âmbito e apresentadas nas secções que seguem, querem ser apenas uma demonstração de como o simulador de TAC desenvolvido possa ser utilizado também na avaliação das mais avançadas técnicas de aquisição e reconstrução aplicáveis à tomografia cardíaca.

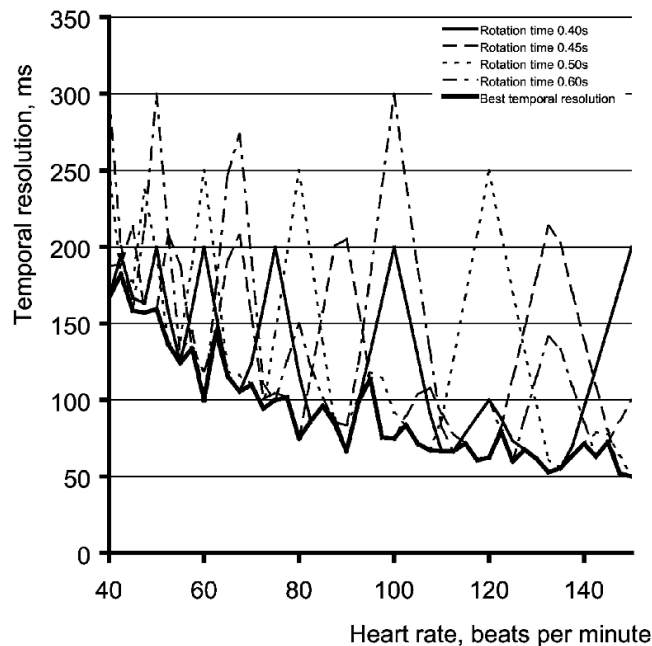


Figura 10.10: Variação da resolução temporal em angiografia coronária por TAC em função da frequência cardíaca e para diferentes tempos de rotação dada uma determinada técnica de reconstrução multisectorial e um determinado pitch (0.2) [20].

### 10.2.1 Aquisição/reconstrução monosectorial

Como vimos, tanto nos métodos de aquisição prospectivamente activada por ECG (aquisição e reconstrução monosectoriais) como nos métodos de aquisição/reconstrução retrospectivamente controlada por ECG (aquisição contínua, reconstrução monosectorial), devido ao facto de algumas fases do ciclo cardíaco serem mais lentas e outras mais rápidas, a escolha do intervalo de aquisição/reconstrução é de fundamental importância para a obtenção de imagens o mais possível livres de artefactos de movimento. A experiência que passamos a descrever visa confirmar esta afirmação, verificando que no fantoma 4D MCAT são respeitadas as características da dinâmica cardíaca com as suas fases de movimento mais lento e mais rápido.

Realizou-se uma aquisição convencional contínua mono-corte (tempo de rotação 0.5 s, 480 vistas por rotação, 352 amostras por vista) do fantoma dinâmico (apneia, 400 frames em 8 segundos, ciclo cardíaco de duração média 0.9 s e desvio padrão 5%) e, uma vez que as durações dos ciclos cardíacos observados são conhecidas, reconstruíram-se 20 imagens a partir de segmentos de dados centrados temporalmente nas 20 fases, descritas na tabela 10.1, de um determinado ciclo cardíaco (nomeadamente, o 5º ciclo observado, cuja duração é de 0.93 s). Como métodos de reconstrução foram considerados o DB FBP, o DB NFFT DFM e as correspondentes versões para varrimento breve, utilizando sempre o filtro de Hamming.

Dado que o intervalo de tempo correspondente a um varrimento longo é igual ao tempo de rotação, enquanto o intervalo de tempo correspondente a um varrimento breve é de pouco mais de metade do tempo de rotação, a resolução temporal dos métodos DB FBP e DB NFFT DFM é de 0.5 s (isto é, mais que metade do ciclo cardíaco) e a das correspondentes versões destes métodos para varrimento breve é de cerca de 0.3 s.

# fase	heart_phase index	Ventrículo esquerdo	%R-R
1	0.000	relaxação completa (fim da diástole)	65
2	0.050	contração 14%	70
3	0.100	contração 28%	75
4	0.150	contração 43%	80
5	0.200	contração 57%	85
6	0.250	contração 71%	90
7	0.300	contração 85%	95
8	0.350	contração 100% (fim da sístole)	0
9	0.400	relaxação 7%	5
10	0.450	relaxação 15%	10
11	0.500	relaxação 23%	15
12	0.550	relaxação 31%	20
13	0.600	relaxação 38%	25
14	0.650	relaxação 46%	30
15	0.700	relaxação 54%	35
16	0.750	relaxação 61%	40
17	0.800	relaxação 69%	45
18	0.850	relaxação 77%	50
19	0.900	relaxação 85%	55
20	0.950	relaxação 92%	60
heart_phase_index = 0.3516 => fim da sístole do ventrículo esquerdo			

Tabela 10.1: Descrição das 20 fases do ciclo cardíaco, caracterizadas pelo valor do parâmetro *heart\_phase\_index*, em termos da contração/relaxação do ventrículo esquerdo

As imagens obtidas foram comparadas com as correspondentes imagens das fases do fantoma de referência tanto do ponto de vista qualitativo como quantitativo, através das habituais medidas de distância  $-d$ ,  $r$ ,  $e$ .

Analizando os gráficos da figura 10.11, que reúnem os valores dos índices  $-d$ ,  $r$ ,  $e$  obtidos pelos diferentes métodos de reconstrução considerados em correspondência de 20 fases cardíacas, podemos dizer que, no que se refere aos métodos de reconstrução para varrimento longo e ao método DB FBP para varrimento breve, os índices  $d$  e  $r$  indicam que o erro de reconstrução aumenta na fase sistólica e diminui gradualmente à medida que o intervalo de tempo ao qual correspondem os dados utilizados na reconstrução fica incluído na fase diastólica. Por outro lado, o andamento do índice  $e$  resulta ser mais irregular. No que se refere ao método DB NFFT DFM *short*, o andamento de todos os índices de mérito resulta ser bastante irregular e revelador de um desempenho bastante pior (pelo menos, do ponto de vista quantitativo) que o dos outros métodos. O pior desempenho deste método deve-se, como se viu na secção 9.1.2, à distorção que afecta os valores das imagens reconstruídas.

No geral, contrariamente a quanto seria de esperar, do ponto de vista quantitativo os métodos para varrimento breve têm um desempenho pior que os métodos para varrimento longo.

A análise qualitativa das imagens obtidas pelos métodos para varrimento longo mostra como as imagens correspondentes à fase diastólica são menos sujeitas a artefactos de movi-

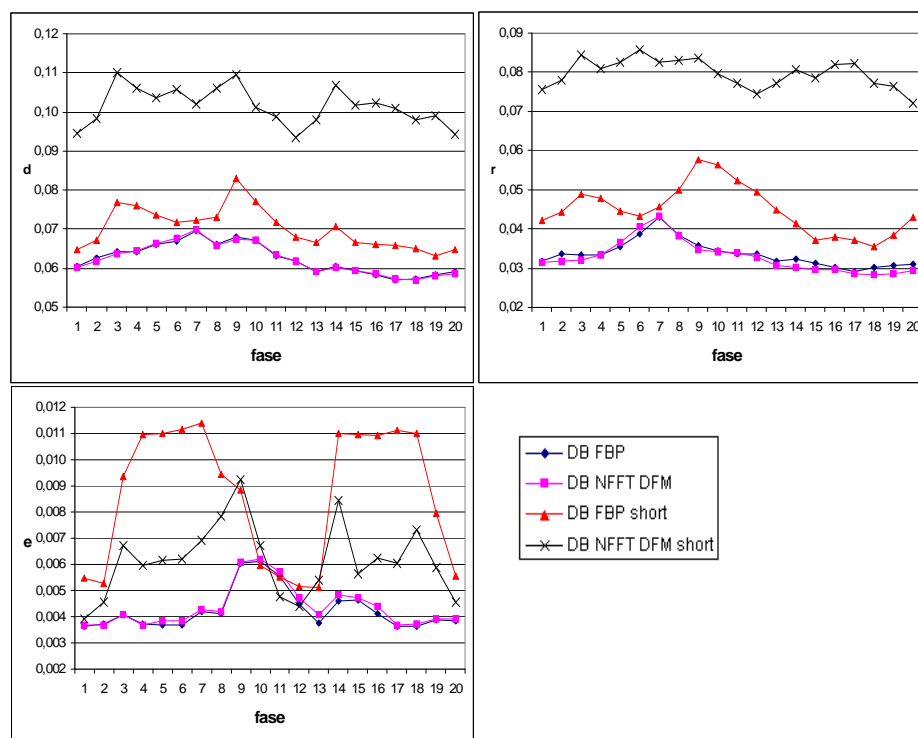


Figura 10.11: Andamento dos índices de mérito dos diferentes métodos de reconstrução após aquisição monosectorial (varrimento longo ou breve) ao longo do ciclo cardíaco (20 fases).

mento, pelo que no caso destes métodos os resultados da avaliação quantitativa e qualitativa são concordantes. A redução dos artefactos de movimento na fase diastólica pode ser observada nas imagens (b) e (d) da figura 10.12 obtidas pelo método DB FBP, respectivamente, nas fases 7 (sistólica) e 17 (diastólica) comparadas com as imagens do fantoma de referência nas mesmas fases (imagens (a) e (c)).

Ainda, comparando qualitativamente as imagens obtidas pelos diferentes métodos foi possível observar que os métodos de reconstrução a partir de varrimento breve permitem uma efectiva redução dos artefactos de movimento. A título de exemplo, na figura 10.13 mostram-se as imagens obtidas pelo método DB NFFT DFM e pelos métodos DB FBP *short* e DB NFFT DFM *short*, respectivamente nas fases 7 (imagens (a), (b) e (c)) e 17 (imagens (d), (e) e (f)). As imagens de referência e as reconstruídas com DB FBP para as mesmas fases encontram-se na figura 10.12.

Dada a natureza do fantoma e a forma como foi simulada a sincronização com o ECG, a realização desta experiência com diferentes valores de média e desvio padrão da duração do ciclo cardíaco não se justifica.

Concluindo, podemos afirmar que, nas condições experimentais descritas, o melhor desempenho em termos qualitativos (redução de artefactos de movimento) obtém-se pela utilização de métodos de reconstrução para varrimento breve escolhendo o intervalo de dados centrado na fase diastólica. Todavia, ao melhor desempenho qualitativo não corresponde, no caso da utilização de algoritmos para varrimento breve, uma efectiva melhoria em termos de índices quantitativos de qualidade. Se considerarmos que as imagens cardíacas não se destinam

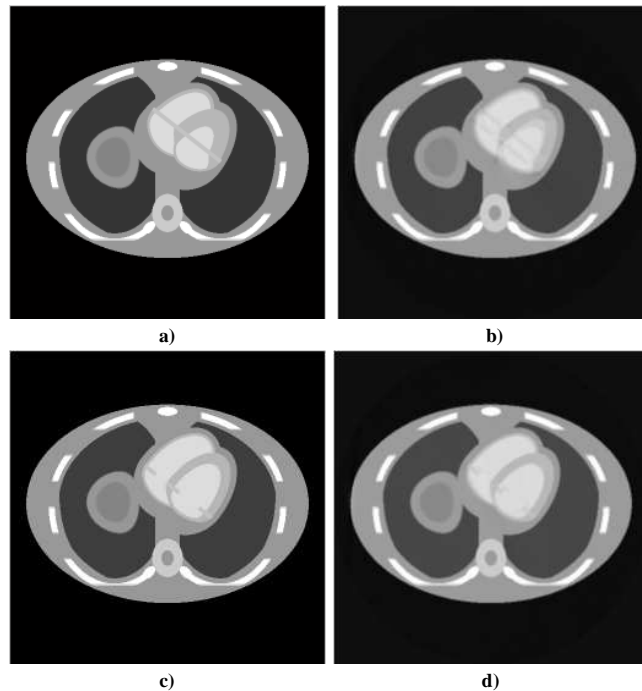


Figura 10.12: Imagens obtidas com método DB FBP a partir de aquisição monosectorial e varrimento longo. a) imagem fantoma de referência, fase 7. b) imagem reconstruída pelo DB FBP. c) imagem fantoma de referência, fase 17. d) imagem reconstruída pelo DB FBP.

a análise quantitativa mas essencialmente a estudos morfológicos e dinâmicos, justifica-se a escolha de métodos que permitam a redução dos artefactos de movimento mesmo que isto implique alguma ligeira imprecisão em termos de valores de *pixel*.

### 10.2.2 Reconstrução multisectorial

Após aquisição contínua (circular ou em espiral) de projecções em paralelo com o sinal ECG, sucessiva selecção retrospectiva das projecções correspondentes a uma determinada fase cardíaca (segundo o método descrito na secção 10.1.2) e eventual interpolação longitudinal, é obtido um sinograma de projecções divergentes (varrimento longo) incompleto como, por exemplo, o representado na figura 10.14-a. A qualidade de uma imagem reconstruída a partir de um conjunto de projecções divergentes incompleto revela-se claramente inaceitável (fig. 10.14-b), pelo que se torna necessário o recurso a técnicas de reconstrução regularizada (secção 4.6). Mais adiante, na secção 10.2.2, iremos concretizar uma possível estratégia de regularização.

Convém dizermos que, ao longo desta secção, quando se fala em reconstrução entende-se reconstrução a partir de varrimento longo por se considerar que num sinograma incompleto obtido por *gating* retrospectivo (como o representado na figura 10.14-a) não existe um arco de varrimento breve "preferencial", que permita, por exemplo, aumentar a resolução temporal ou espacial. Por outro lado, a escolha de um determinado arco de varrimento breve poderia excluir informação útil para a reconstrução.

Reconstruindo, para já, as imagens a partir do sinograma incompleto (sem recurso a



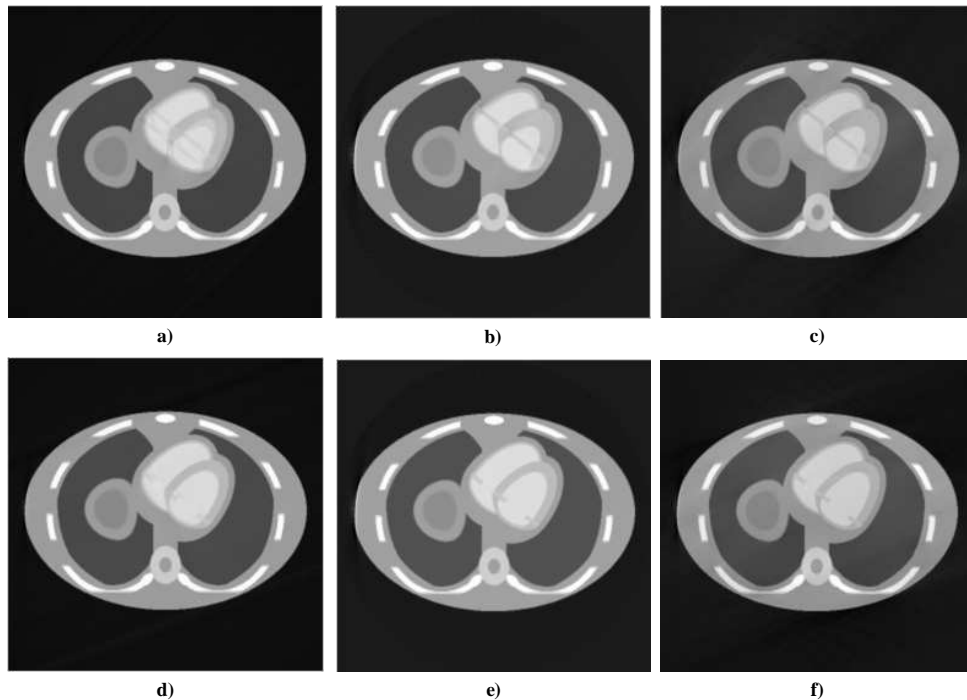


Figura 10.13: Imagens obtidas pelos diferentes métodos após aquisição monosectorial nas fases 7 (sístole) e 17 (diástole). a) DB NFFT DFM, fase 7. b) DB FBP *short*, fase 7. c) DB NFFT DFM *short*, fase 7. d) DB NFFT DFM, fase 17. e) DB FBP *short*, fase 17. f) DB NFFT DFM *short*, fase 17.

técnicas de regularização), podemos constatar que o êxito da reconstrução depende em larga medida da percentagem e distribuição de projecções conhecidas no sinograma incompleto (cobertura angular), por sua vez influenciadas por factores como o tempo de rotação, o número de rotações, a frequência cardíaca e a resolução temporal (isto é a duração da fase cardíaca que se pretende reconstruir). A este propósito, realizámos algumas experiências para avaliar como e em que medida a combinação destes factores influencia a cobertura angular.

Dadas algumas sequências de ciclos cardíacos, cada qual tendo duração do ciclo cardíaco estatisticamente descrita como uma variável aleatória gaussiana com um dado valor médio (0.8s, 0.9s, 1s) e desvio padrão (5%, 10%, 20%), simulamos a aquisição contínua ao longo de 10 rotações do foco e a selecção das projecções relacionadas com uma determinada fase com resolução temporal de 50ms. Avaliou-se, então, a cobertura angular correspondente à fase escolhida em função do tempo de rotação (que varia de 0.3s até 0.6s).

Em primeiro lugar, realizou-se uma avaliação qualitativa da cobertura angular representada graficamente como nos exemplos da figura 10.15, onde, entre todas as possíveis posições do foco ao longo dos  $360^\circ$  de rotação, se assinalam com pontos azuis e linhas radiais verdes as posições do foco e as respectivas direcções de projecção (eixo central do feixe divergente) das projecções conhecidas. Foi possível constatar uma grande variabilidade na cobertura angular com o variar do tempo de rotação do foco. A figura 10.15 constitui um exemplo paradigmático e ilustra a diferente cobertura angular obtida para uma determinada sequência de ciclos cardíacos (duração média 0.9s, desvio padrão 5%) com dois diferentes tempos de rotação (0.35s e 0.3s, respectivamente). A escassa cobertura angular obtida com tempo de rotação de

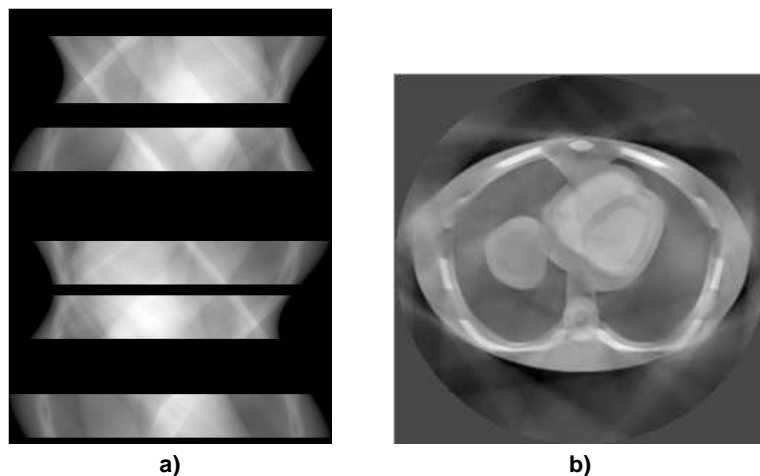


Figura 10.14: Exemplo de sinograma incompleto e correspondente imagem reconstruída (DBFBP) para uma determinada fase do ciclo cardíaco com resolução temporal de 50ms. Neste caso o valor médio do período do ciclo cardíaco era de 0.8s com desvio padrão de 5% e foram adquiridas amostras ao longo de 10 rotações do foco com tempo de rotação de 0.5s.

0.3s, deve-se ao facto de que o período do ciclo é múltiplo do tempo de rotação, resultando na sincronização do ciclo cardíaco com a rotação do foco e conseqüente repetida aquisição do mesmo sector angular.

Do ponto de vista quantitativo, uma medida da cobertura angular pode ser dada pela percentagem de projecções conhecidas nos  $360^\circ$  de rotação do foco, todavia, é preciso também considerar o facto que, dada a simetria que caracteriza o espaço  $(\beta, \gamma)$ , as projecções conhecidas correspondentes a sectores circulares diametralmente opostos implicam a replicação de amostras segundo as mesmas direcções de projecção, sendo em certa medida redundantes. De facto, a um dado valor de cobertura angular podem corresponder diferentes quantidades de amostras úteis dependendo da localização dos sectores circulares conhecidos. Assim, considerámos que uma medida mais significativa da quantidade de informação contida num determinado conjunto de projecções divergentes incompleto seria dada pela quantidade de amostras conhecidas no sinograma divergente (ou, em alternativa, no sinograma obtido por *rebinning* das projecções) nos quais aparecem também as amostras correspondentes a raios soma replicados por simetria. Um exemplo de sinogramas divergente e paralelo obtidos desta forma é dado na figura 10.16.

Os gráficos da figura 10.17 representam os valores da percentagem de amostras não nulas nos sinogramas com replicação de raios soma (sejam eles divergentes ou paralelos, os valores não mudam) em função do tempo de rotação, para algumas das sequências de ciclos cardíacos consideradas neste estudo. Os valores obtidos evidenciam uma grande variabilidade em função do tempo de rotação do foco. Em todos os casos, verifica-se uma marcada diminuição da percentagem de amostras conhecidas no caso de tempos de rotação submúltiplos da duração média do ciclo cardíaco e a atenuação deste fenómeno no caso de ciclos cardíacos mais irregulares (figura 10.17-b) nos quais a própria irregularidade do ciclo permite quebrar a sua sincronização com a rotação do foco. Ainda, verificam-se algumas quebras na percentagem de amostras não nulas correspondendo a situações nas quais a localização dos sectores an-

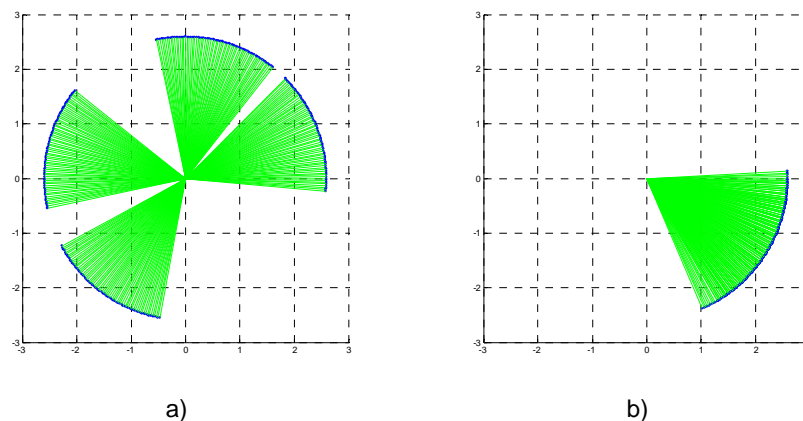


Figura 10.15: Exemplos de cobertura angular para uma determinada fase cardíaca com resolução temporal de 50ms (10 rotações, duração média do ciclo cardíaco 0.9s, desvio padrão 5%). a) tempo de rotação 0.35s, , cobertura angular 56.87%. b) tempo de rotação 0.3s, cobertura angular 19.58%.

gulares conhecidos é mais desfavorável, o que pode ser visto também como uma forma de sincronização entre o ciclo cardíaco e a rotação do foco.

Em suma, foi possível constatar que a quantidade de informação útil nos sinogramas incompletos obtidos por selecção retrospectiva das projecções correspondentes a uma determinada fase cardíaca é muito variável e a sua variabilidade depende tanto da descrição estatística do ciclo cardíaco como do tempo de rotação do foco. Consequentemente, até porque à diminuição da quantidade de informação útil corresponde o aumento das amostras replicadas e portanto um menor aproveitamento da dose, antes de iniciar a aquisição tomográfica torna-se indispensável a aquisição e avaliação do sinal ECG e a utilização de modelos que, analogamente ao modelo utilizado neste estudo, permitam escolher o tempo de rotação óptimo, dado que nos sistemas reais para aquisição cardíaca existe a possibilidade de escolher o valor deste parâmetro entre alguns valores possíveis.

### Reconstrução regularizada

Entre as possíveis estratégias de reconstrução regularizada, descritas em [125], julgamos que uma técnica de restauro do sinograma será a mais adequada ao tipo de problema que nos propomos resolver. Basicamente, estas técnicas consistem numa primeira fase na qual se procede ao restauro (preenchimento) do sinograma através da imposição de condições de consistência e da utilização de informação conhecida a priori, seguindo-se a reconstrução convencional da imagem.

Concretamente, a técnica de restauro por nós implementada consiste na determinação de um sinograma de referência (sinograma médio calculado ao longo de um determinado número de rotações) e no preenchimento das amostras ausentes no sinograma incompleto com as correspondentes amostras do sinograma de referência.

O sinograma de referência deverá conter informação o mais possível relacionada com todo o ciclo cardíaco (não com uma ou outra fase do ciclo) pelo que o número de rotações que devem ser consideradas deve corresponder a um tempo de aquisição pelo menos igual ao período do ciclo cardíaco. Por exemplo, no caso de ciclo cardíaco de período médio 0.9s e tempo de

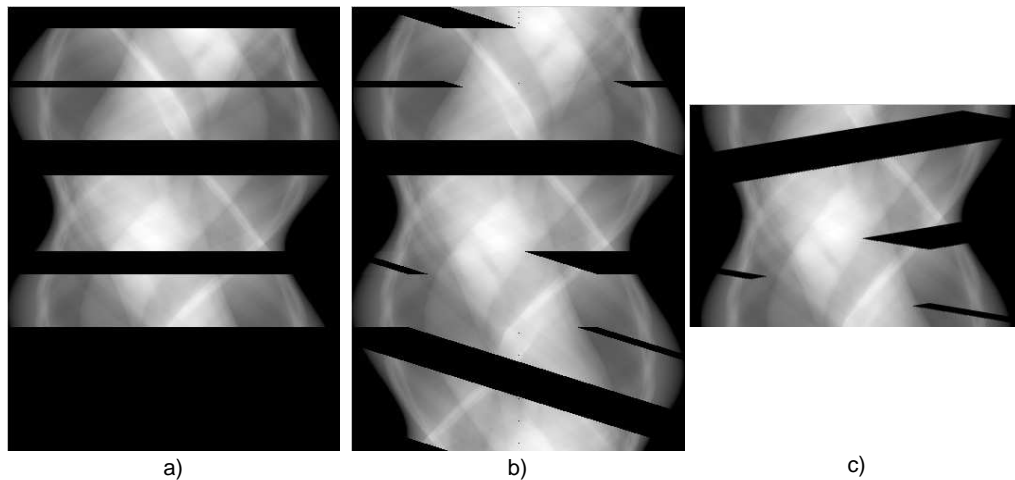


Figura 10.16: Exemplos de sinogramas parciais para reconstrução multisectorial (4 segmentos, duração média do ciclo 0.9s, desvio padrão 5%, tempo de rotação 0.575s). a) Sinograma com apenas as amostras efectivamente adquiridas em correspondência de uma determinada fase. b) Sinograma obtido a partir do sinograma (a) com amostras replicadas por simetria. c) Sinograma obtido a partir do sinograma (b) por *rebinning* das projecções.

rotação do foco 0.5s, o sinograma de referência deverá ser obtido calculando o valor médio dos sinogramas correspondentes a pelo menos duas rotações, enquanto no caso de ciclo cardíaco de período médio 1.2s, deverão ser consideradas pelo menos três rotações. O aumento do número de rotações consideradas (quando possível) tem como efeito a diminuição da eventual correlação entre fases cardíacas e direcções de amostragem no sinograma de referência, mas, ao mesmo tempo, implica maior dose, aumento dos artefactos devidos à respiração (caso o doente não consiga manter a apneia) e diminuição da resolução espacial longitudinal, no caso de aquisição em espiral.

No caso de aquisição convencional mono ou multicorte, o sinograma de referência (mono ou multicorte) pode ser obtido a partir de qualquer umas das rotações adquiridas, ao passo que no caso de aquisição em espiral, para cada uma das coordenadas longitudinais nas quais se pretendem reconstruir as imagens, deve ser calculado um sinograma de referência (monocorte) seleccionando rotações espacialmente centradas naquela coordenada longitudinal.

Nos sinogramas incompletos deverão ser aproveitadas todas as amostras disponíveis, pelo que, antes do restauro, procede-se à replicação por simetria das amostras adquiridas obtendo sinogramas do género dos apresentados na figura 10.16.

Como refere Silva [125], analisando em animação a sequência de imagens reconstruídas a partir dos sinogramas regularizados, podem observar-se artefactos de natureza periódica tangenciais às zonas de transição angular entre subconjuntos de projecções conhecidas e subconjuntos de projecções do sinograma de referência. Estes artefactos, relacionados com os processos de aquisição e regularização do sinograma e não com fenómenos de natureza fisiológica, têm frequência temporal superior à do próprio ciclo cardíaco. Tal como Silva sugere, optámos por incluir um filtro temporal aplicado ao sinal que descreve o valor de *pixel* nas diferentes fases do ciclo para cada *pixel* da imagem. Trata-se de um filtro que se adapta às características locais das imagens, sendo que, nos *pixels* que se encontram em regiões caracterizadas pela dinâmica fisiológica, onde a transformada discreta de Fourier mostra a presença

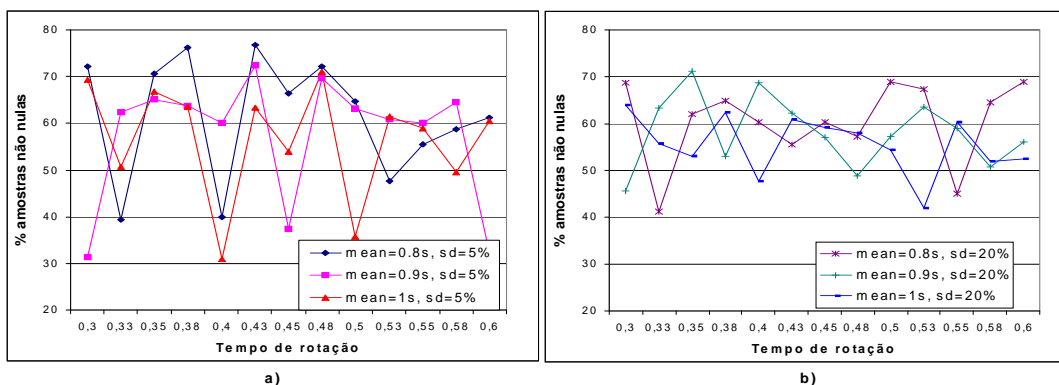


Figura 10.17: Percentagem de amostras não nulas nos sinogramas obtidos por *rebinning* das projecções divergentes com replicação de raios soma em função do tempo de rotação para diferentes sequências de ciclos cardíacos.

de um harmónico predominante, são anulados os harmónicos a partir do terceiro, enquanto nas regiões estáticas, onde não existe um harmónico predominante, assume-se que os harmónicos de baixa amplitude presentes sejam relacionados com os artefactos sendo todos anulados.

Para avaliação do desempenho da técnica de regularização descrita (com e sem filtragem temporal), consideramos dois dos fantasmas dinâmicos utilizados nas experiências anteriores (apneia, 400 frames em 8 segundos, duração do ciclo cardíaco de valor médio 0.8 e 0.9s e desvio padrão 20 e 5%, respectivamente) e ainda um fantoma com movimento respiratório (400 frames em 8 segundos, duração do ciclo cardíaco de valor médio 0.9s e desvio padrão 5%). Por conveniência, designaremos o fantoma em apneia com ciclo cardíaco de duração média 0.9s e desvio padrão 5% como fantoma cardíaco regular, o fantoma em apneia com ciclo cardíaco de duração média 0.8s e desvio padrão 20% como fantoma cardíaco com arritmia, e o fantoma com movimento respiratório como fantoma sem apneia.

Em todos os casos, realizou-se uma aquisição convencional contínua monocorte (480 vistas por rotação, 352 amostras por vista) escolhendo o tempo de rotação óptimo com base nos resultados obtidos na secção anterior (fig. 10.17), nomeadamente, nos casos do fantoma cardíaco regular e do fantoma sem apneia o tempo de rotação escolhido é de 0.425s, enquanto no caso do fantoma cardíaco com arritmia o tempo de rotação é de 0.5s. O número de rotações foi escolhido de forma a permitir a reconstrução multisectorial até ao número máximo de 5 segmentos, isto é:

$$\text{número rotações} = \left\lceil \frac{5 \times \text{período médio}}{\text{tempo de rotação}} \right\rceil$$

o que dá 11 rotações no caso do fantoma cardíaco regular e do fantoma sem apneia e 8 rotações no caso do fantoma com arritmia.

Para cada fantoma, aos conjuntos de projecções adquiridos em rotação contínua aplicou-se a técnica de selecção retrospectiva controlada pelo ECG das projecções referentes às habituais 20 fases cardíacas (tabela 10.1) variando a duração temporal e o número dos segmentos a ser utilizados na reconstrução. Os 20 sinogramas incompletos obtidos desta forma, foram submetidos à replicação das amostras por simetria e procedeu-se ao seu restauro utilizando amostras do sinograma de referência, calculado a partir de quatro rotações do foco.

Para a reconstrução das sequências de imagens a partir dos sinogramas regularizados, escolhemos o algoritmo DB NFFT DFM (com filtro de Hamming) cujo desempenho é, como vimos no capítulo 9, perfeitamente sobreponível ao do algoritmo DB FBP com um peso computacional muito inferior. Por fim, aplicando às sequências obtidas desta forma a técnica de filtragem temporal anteriormente descrita, obtivemos sequências nas quais esperamos ver minorados os artefactos devidos a fenómenos de frequência não fisiológica.

Começando pelo fantoma cardíaco regular, na figura 10.18 mostra-se a imagem original relativa à fase 18 (uma fase diastólica) e, a título de exemplo, as imagens da mesma fase obtidas com técnica multisectorial (com regularização e com regularização e filtragem temporal) utilizando 3 e 5 segmentos com duração temporal de 50ms. Na figura 10.19 encontram-se as imagens obtidas da mesma forma correspondendo à fase cardíaca 8 (sistólica).

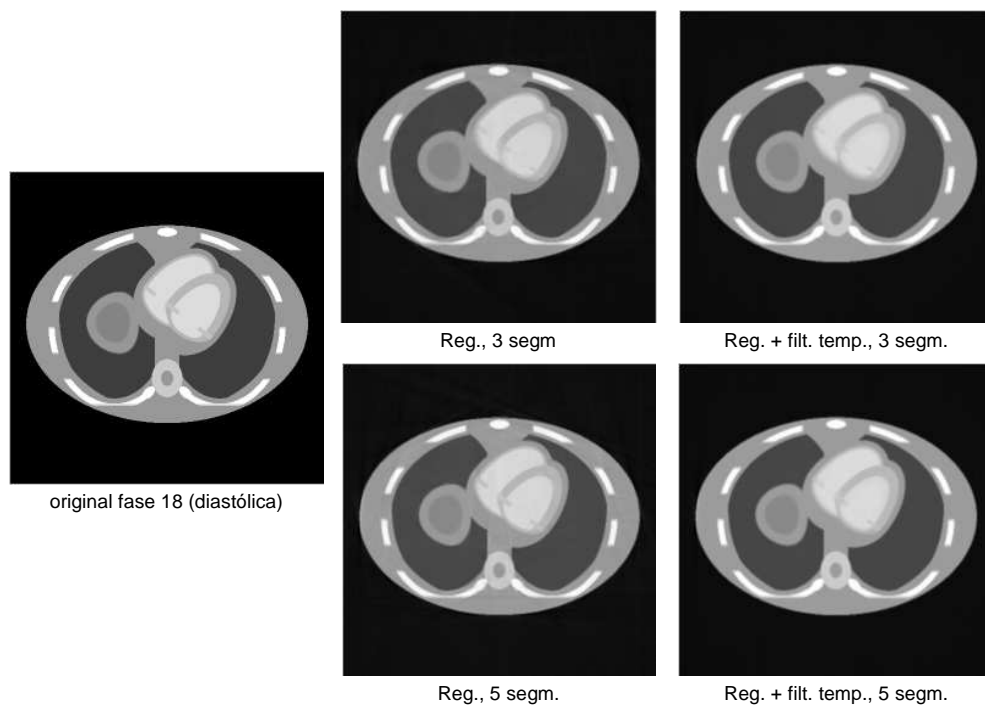


Figura 10.18: Fantoma cardíaco regular, fase diastólica. Imagens obtidas com técnica multisectorial (3 ou 5 segmentos), regularização do sinograma e reconstrução DB NFFT DFM sem e com filtragem temporal.

Nas imagens apresentadas, pode-se observar a presença de artefactos originados pelo movimento cardíaco e pelo processo de aquisição e regularização dos sinogramas. Tal como se esperava, estes artefactos resultam especialmente visíveis nas imagens da fase sistólica e, em todas as fases, nas reconstruções sem filtragem temporal e com menor número de segmentos de dados seleccionados para a reconstrução. Aumentando o número de segmentos, os artefactos tendem a diminuir mas continuam presentes, enquanto podemos dizer que a introdução do filtro temporal retira completamente os artefactos mas produz uma imagem excessivamente desfocada. Em particular, observando a sequência animada é notória a falta de pormenores dinâmicos.

Do ponto de vista quantitativo, observando os gráficos da figura 10.20, que representam

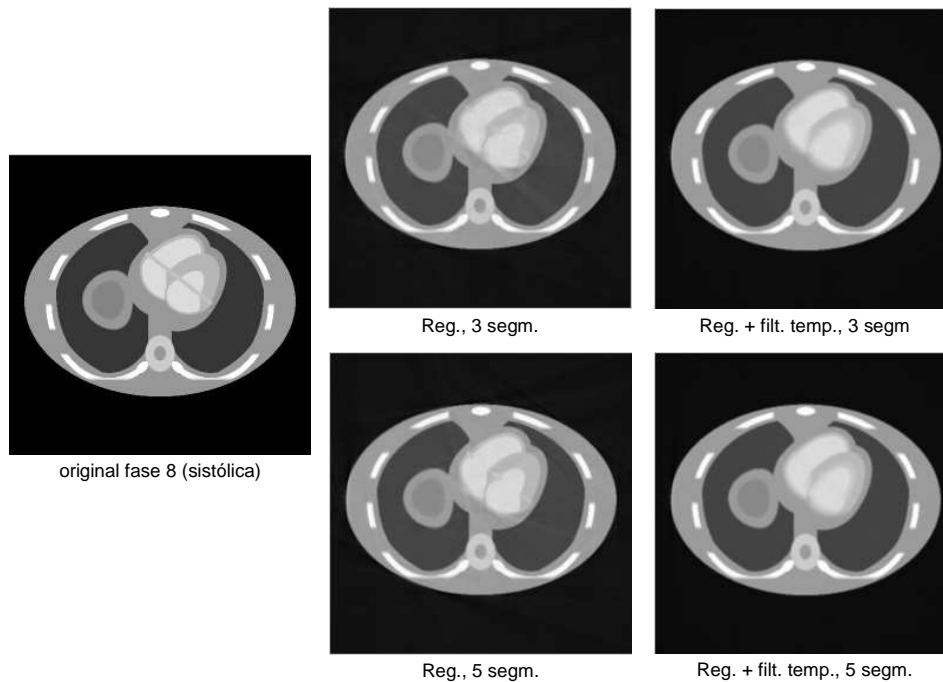


Figura 10.19: Fantoma cardíaco regular, fase sistólica. Imagens obtidas com técnica multisectorial (3 ou 5 segmentos), regularização do sinograma e reconstrução DB NFFT DFM sem e com filtragem temporal.

as medidas de distância  $-d$ ,  $r$ ,  $e$ — entre as imagens reconstruídas e as imagens originais ao longo de todo o ciclo cardíaco para reconstruções realizadas com diferentes números de segmentos com e sem filtragem temporal, podemos verificar que efectivamente a filtragem temporal melhora bastante estes índices de qualidade, todavia, a melhoria deve-se ao facto que estes índices são calculados sobre toda a imagem (círculo inscrito no quadrado da imagem), enquanto restringindo o cálculo à região cardíaca o desempenho não seria tão bom. É ainda possível observar o pior desempenho de todas as técnicas de reconstrução em correspondência das fases sistólicas e a melhoria que se regista com o aumento do número de segmentos.

Em termos de tempos de reconstrução, é preciso ter em consideração que ao peso computacional do algoritmo de reconstrução propriamente dito deve-se somar o peso computacional do processo de regularização (para cada imagem) e ainda, da filtragem temporal sobre toda a sequência.

Uma vez avaliada a qualidade da reconstrução no caso mais "favorável" do fantoma cardíaco regular, será interessante verificar se o bom desempenho observado se mantém no caso mais desafiador do fantoma com arritmia (caracterizado, também, por frequência cardíaca mais elevada). A título de exemplo, na figura 10.21 encontram-se as imagens reconstruídas com técnica multisectorial (3 segmentos de duração 0.05s) com regularização (primeira coluna) e com regularização e filtragem temporal (segunda coluna) para as fases 8 e 18. Comparando estas imagens com as imagens da primeira coluna das figuras 10.18 e 10.19 e ainda observando os gráficos da figura 10.22 podemos verificar que, tanto do ponto de vista qualitativo como quantitativo, em caso de arritmia não se registam alterações dignas de nota no desempenho das técnicas utilizadas.

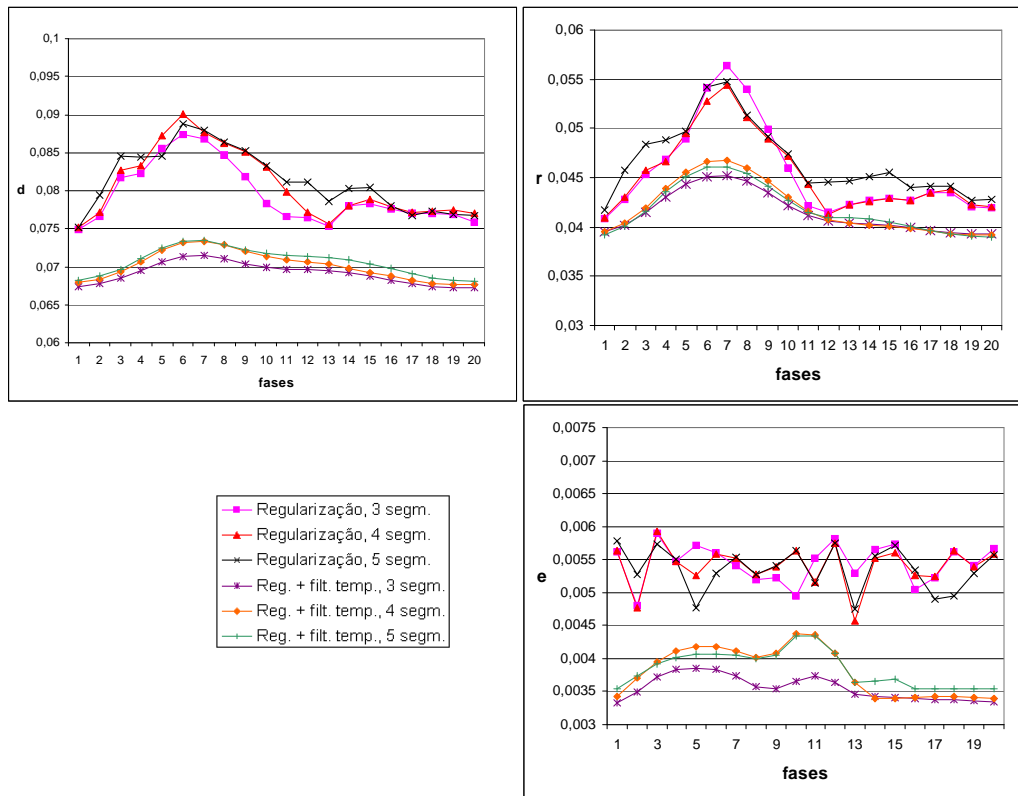


Figura 10.20: Fantoma cardíaco regular. Medidas de distância  $-d$ ,  $r$ ,  $e$ — entre as imagens reconstruídas e as imagens originais ao longo de todo o ciclo cardíaco para reconstruções realizadas com diferentes números de segmentos (3, 4 e 5), com e sem filtragem temporal, sempre com a mesma resolução temporal.

Voltando aos dados obtidos em aquisição contínua monocorte do fantoma cardíaco regular e obtendo, para cada uma das 20 fases cardíacas, um sinograma através da selecção retrospectiva de quatro segmentos de dados correspondentes a intervalos temporais de duração variável entre 0.02s e 0.06s e sucessiva regularização, pretendemos avaliar a qualidade das imagens reconstruídas em função da duração temporal dos segmentos de dados seleccionados. A este propósito, é preciso ter em consideração que a técnica de regularização escolhida implica o recurso a dados não pertencentes aos segmentos seleccionados pelo que a resolução temporal não depende exclusivamente da duração temporal dos segmentos mas também, em certa medida, da janela temporal de observação correspondente ao sinograma de referência. Considere-se também que, mantendo inalterado o número de segmentos seleccionados e diminuindo a sua duração, no sinograma restaurado diminui a percentagem de amostras efectivamente correspondentes à fase de interesse face às pertencentes ao sinograma de referência, o que implica perda de informação dinâmica que só pode ser evitada aumentando o número de segmentos seleccionados. As imagens da figura 10.23 ilustram claramente este facto, sendo visível a perda de pormenores dinâmicos (assim como de artefactos devidos ao movimento) nas imagens obtidas a partir de segmentos de dados de menor duração (0.02s).

Do ponto de vista quantitativo, os habituais indicadores de qualidade avaliados em função



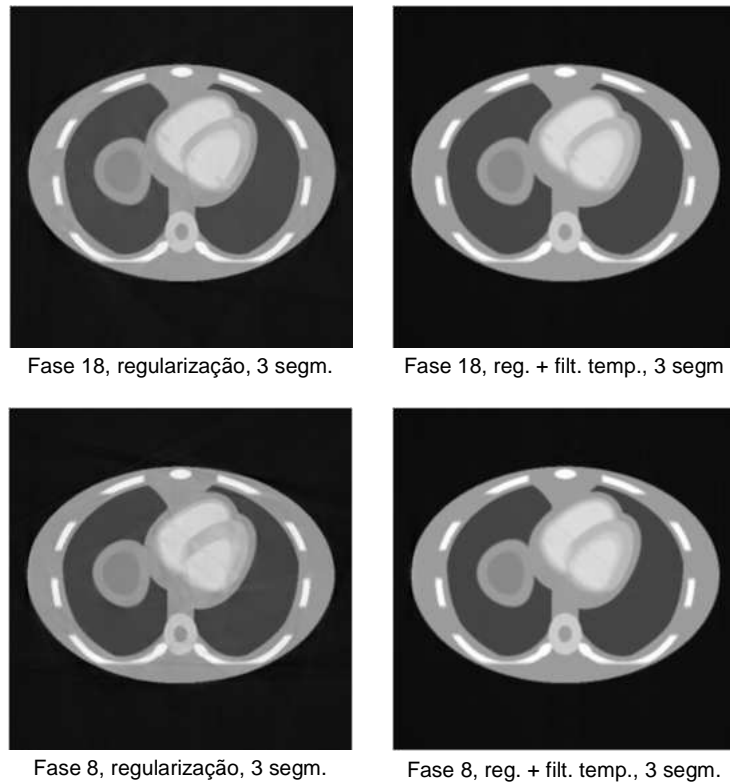


Figura 10.21: Fantoma cardíaco com arritmia. Imagens reconstruídas com técnica multisectorial (três segmentos de duração 0.05s, regularização, reconstrução DB NFFT DFM) para duas diferentes fases cardíacas sem e com filtragem temporal.

das fases cardíacas (figura 10.24) revelam outro aspecto interessante. Se os índices de qualidade  $d$  e  $e$  melhoram com o diminuir da duração temporal dos intervalos de dados seleccionados, o mesmo não se pode dizer no caso do índice  $r$  que, sendo mais sensível a pequenas diferenças distribuídas sobre toda a imagem, avalia como mais elevado o erro nas imagens com menor conteúdo dinâmico.

Tal como já referimos, no caso de aquisição sem apneia (fantoma cardíaco sem apneia), dada a actual rapidez de aquisição face ao movimento respiratório, é possível, com algum cuidado adicional na escolha da técnica de reconstrução, obter imagens quase livres de artefactos de movimento no plano transaxial (mas não nos outros planos). De facto, caso se utilize a técnica de reconstrução multisectorial regularizada, o número de segmentos seleccionados determina a duração da janela temporal de aquisição efectiva, o que se reflecte na resolução temporal dado que, neste caso, os segmentos adquiridos pertencem a diferentes fases do ciclo respiratório. Da mesma forma, o número de rotações do foco utilizadas no cálculo do sinograma de referência afecta a resolução temporal das imagens reconstruídas. Por outro lado, limitando o número de segmentos torna-se necessário aumentar a sua duração temporal para evitar que no sinograma restaurado sejam predominantes as amostras do sinograma de referência.

Para avaliar os artefactos que o movimento respiratório introduz nas imagens reconstruídas, considerámos os dados obtidos em aquisição contínua monocorte do fantoma cardíaco sem

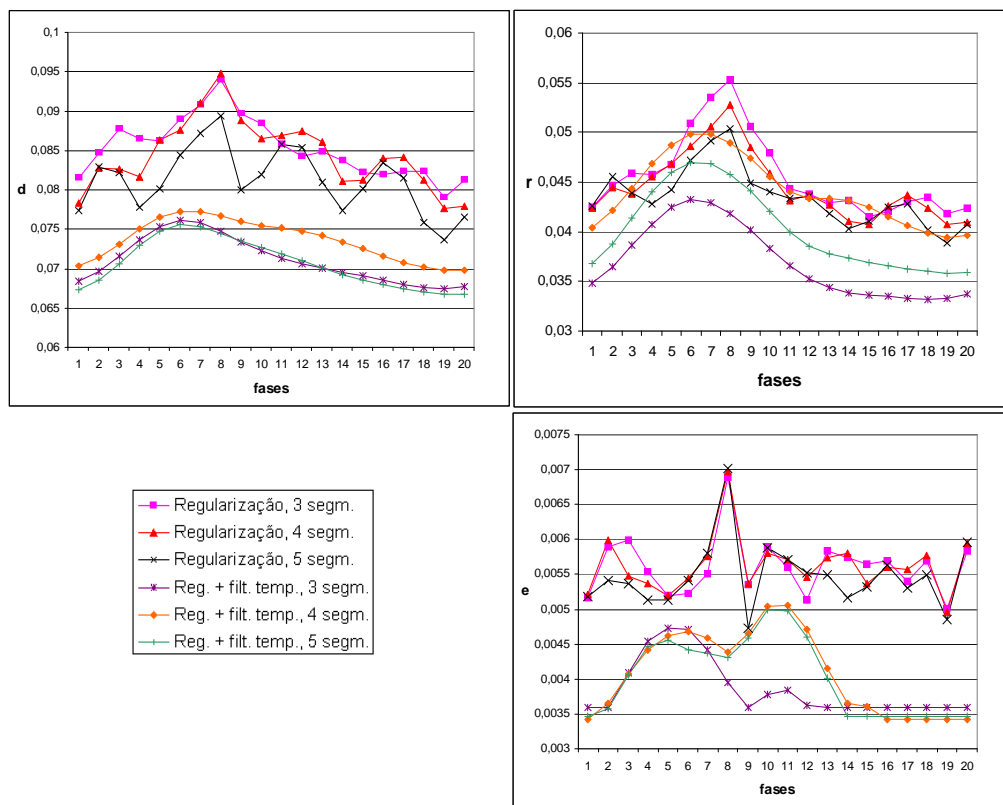


Figura 10.22: Fantoma cardíaco com arritmia. Índices de qualidade das imagens obtidas com técnica multisectorial (reconstrução DB NFFT DFM) em função da fase cardíaca para diferentes números de segmentos seleccionados (3, 4, 5), sem e com filtragem temporal.

apneia aos quais aplicámos a técnica de reconstrução multisectorial com diferentes números de segmentos de dados seleccionados e duração dos correspondentes intervalos temporais. As imagens da figura 10.25 mostram o tipo de degradação que se verifica nas imagens reconstruídas com técnica multisectorial regularizada sem ter em consideração o movimento respiratório (isto é, com a mesma parametrização utilizada para o fantoma em apneia). Repare-se como o facto de considerar dois segmentos implica a observação de dois ciclos cardíacos com extensão da janela temporal de aquisição efectiva até cerca de 2s (um intervalo de tempo significativo no ciclo respiratório).

A qualidade das imagens da figura 10.25 é claramente inaceitável e obriga à diminuição do número de sectores seleccionados, ao aumento da sua duração e à diminuição do número de rotações utilizadas no cálculo do sinograma de referência. Nas imagens da primeira coluna da figura 10.26 mostram-se os resultados que podem ser obtidos com apenas um sector da duração de 0.1s, e sinograma de referência calculado sobre duas rotações do foco (janela de aquisição efectiva 1s) enquanto na segunda coluna mostram-se os efeitos da filtragem temporal. Apesar de não ser ainda livres de artefactos, estas imagens mostram uma qualidade muito superior às da figura 10.25. No limite, aumentando a duração do segmento de dados seleccionado e recorrendo à reconstrução para varrimento breve (janela de aquisição efectiva  $\sim 0.25s$ ), podemos obter imagens como as da terceira coluna da figura 10.26 nas quais se evidencia uma

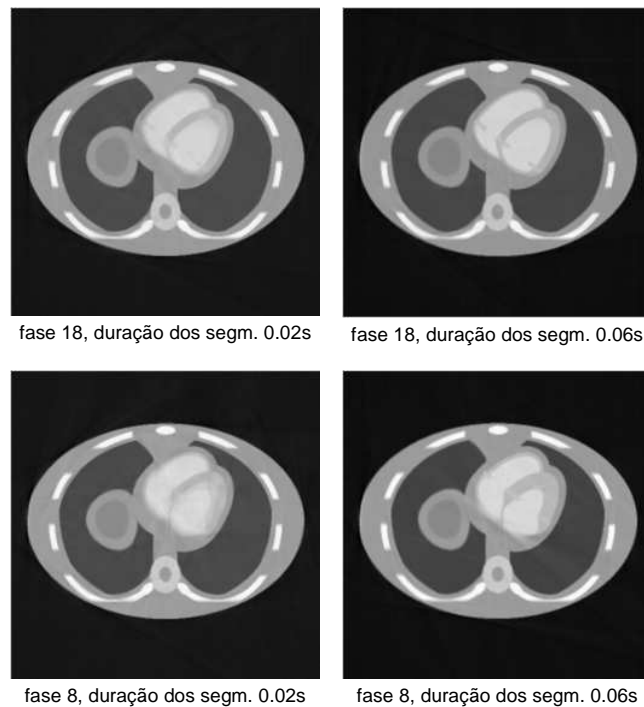


Figura 10.23: Fantoma cardíaco regular. Imagens reconstruídas com técnica multisectorial (quatro segmentos, regularização, reconstrução DB NFFT DFM) para duas diferentes fases cardíacas e duração temporal dos segmentos seleccionados.

notável diminuição dos artefactos.

Podemos concluir que em presença de movimento respiratório, a melhor opção será a reconstrução convencional para varrimento breve sendo que a selecção do segmento de dados de varrimento breve a ser utilizado deve ser orientada pelo sinal ECG (reconstrução monosectorial). Neste caso a qualidade das imagens pode ser melhorada diminuindo o tempo de rotação do sistema ou abrandando o ritmo cardíaco através da administração de fármacos beta-bloqueantes, ou ainda, através de *gating* respiratório, escolhendo uma fase do ciclo respiratório na qual a dinâmica seja mais lenta. De qualquer forma, quer pela menor resolução temporal, quer pelo facto que o movimento respiratório não permite a observação dinâmica do mesmo corte cardíaco, as imagens obtidas em presença de movimento respiratório dificilmente podem ser utilizadas em estudos dinâmicos

Dado que em presença de movimento respiratório se torna impossível ter uma imagem original para cada fase cardíaca, optou-se por não avaliar quantitativamente a distância entre as imagens reconstruídas e as originais.

As experiências realizadas permitem-nos concluir que, tanto em apneia como em presença de movimento respiratório, a escolha do número e duração dos segmentos de dados seleccionados é fundamental para garantir a qualidade das imagens reconstruídas, que a filtragem temporal permite suprimir os artefactos devidos ao movimento mas não ajuda a visualização dinâmica e que, para obtermos uma boa qualidade das imagens correspondentes às diversas fases cardíacas é necessário realizar a aquisição durante a apneia.

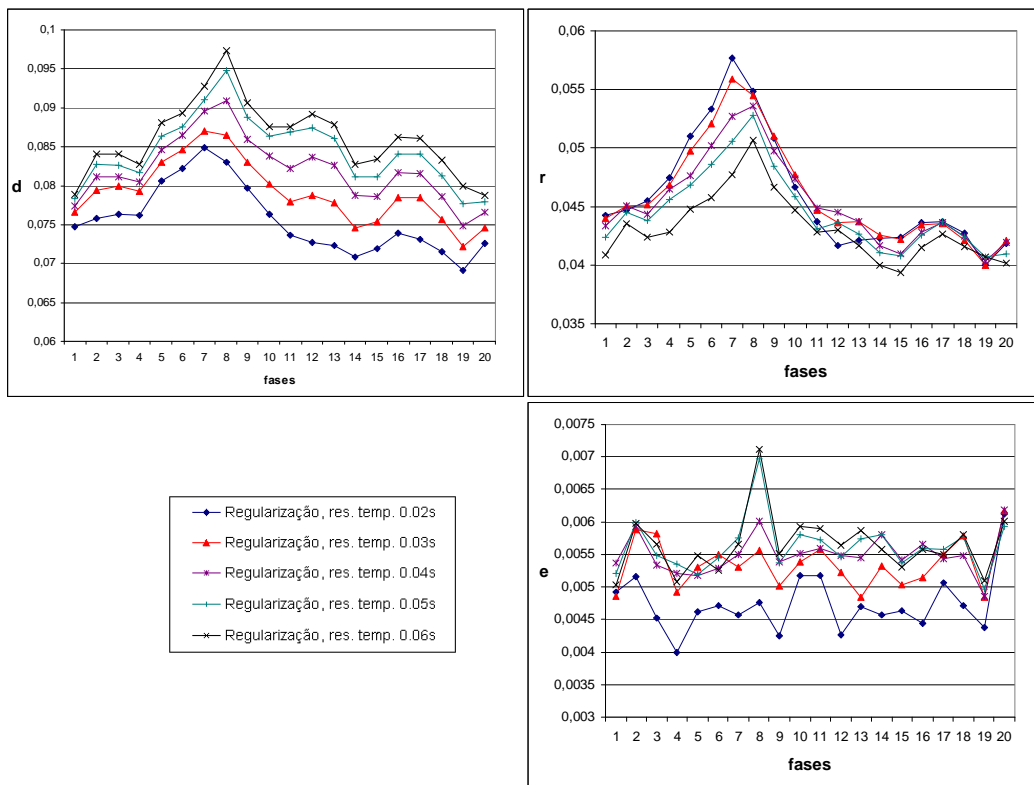


Figura 10.24: Fantoma cardíaco regular. Índices de qualidade das imagens obtidas com técnica multisectorial (quatro segmentos, regularização do sinograma e reconstrução DB NFFT DFM) em função da fase cardíaca para diferentes valores de duração temporal dos segmentos seleccionados.

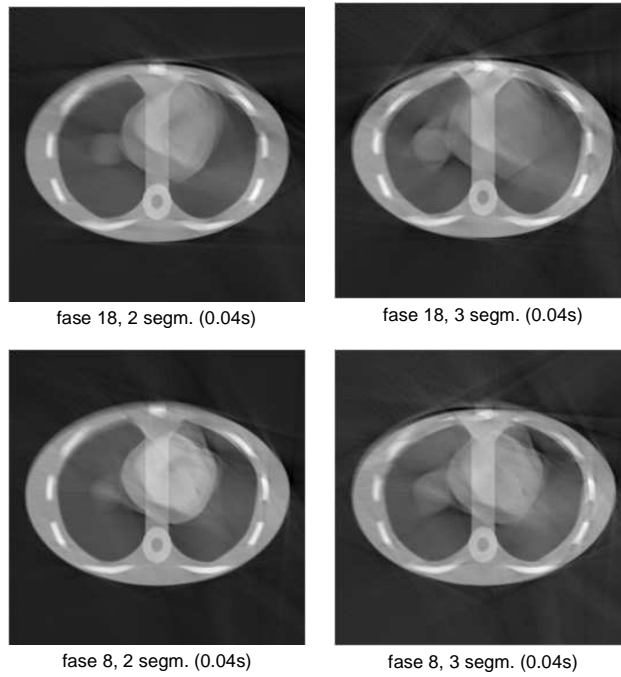


Figura 10.25: Fantoma com movimento respiratório. Resultados da reconstrução multisectorial regularizada para as fases diastólica (18) e sistólica (8) com diferentes números de segmentos de dados seleccionados.

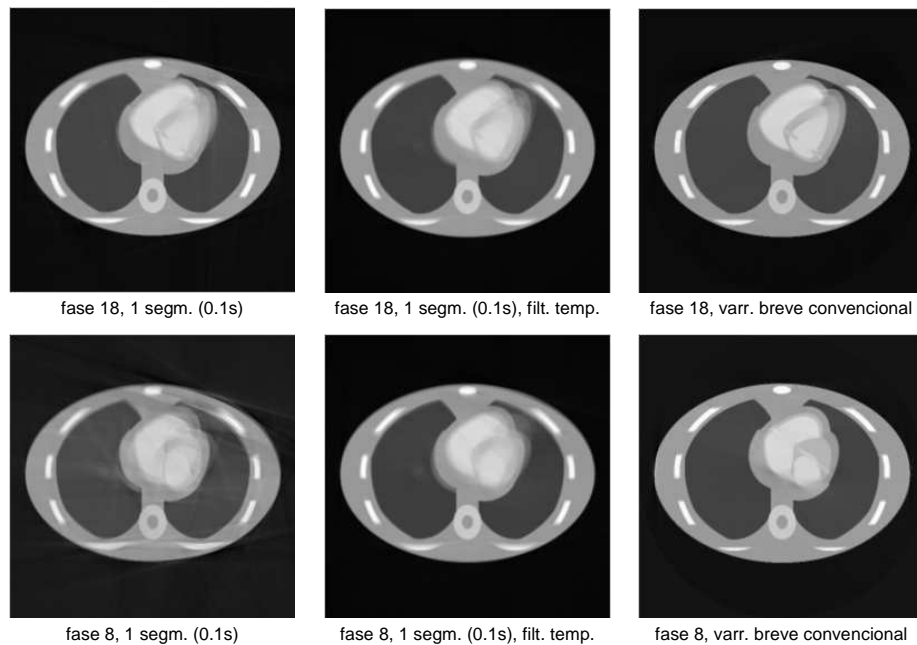


Figura 10.26: Fantoma com movimento respiratório. Imagens obtidas com reconstrução multisectorial regularizada com baixo número de segmentos sem (1ª coluna) e com (2ª coluna) filtragem temporal e com reconstrução para varrimento breve orientada pelo ECG (3ª coluna)

## Capítulo 11

# Conclusões e desenvolvimentos futuros

No estado da arte, a tecnologia da TAC permite a aquisição de volumes de dados tridimensionais com elevada resolução espacial isotrópica sub-milimétrica e elevada resolução temporal. Mesmo assim, o nível de desempenho necessário para aplicações no âmbito cardio-torácico apenas se consegue com recurso a técnicas de aquisição e reconstrução específicas que permitem aumentar ainda mais a resolução temporal fazendo face à elevada rapidez dos movimentos que se registam nesta região anatómica.

Sendo o objectivo principal desta dissertação o estudo das técnicas de aquisição e reconstrução para tomografia de transmissão cardio-torácica, o trabalho decorreu em três fases com objectivos distintos:

- Numa primeira fase desenvolveu-se um simulador de TAC que permite a aquisição segundo todas as geometrias em uso nos tomógrafos actuais, utilizando fantomas virtuais em duas, três e quatro dimensões (fantoma dinâmico).
- Numa segunda fase foram implementados e integrados no simulador vários métodos de reconstrução, tendo surgido como principal frente de investigação o estudo das novas potencialidades dos métodos directos de Fourier, potencialidades que derivam da disponibilidade de novas ferramentas computacionais para o cálculo da transformada de Fourier de amostras não equiespaçadas.
- Numa terceira fase, foram integrados no simulador vários métodos de aquisição e reconstrução para tomografia cardio-torácica, sendo inclusivamente considerada e avaliada a utilização de métodos directos de Fourier neste âmbito.

### 11.1 Conclusões

Iremos estruturar as nossas conclusões em três secções, uma para cada fase do trabalho desenvolvido.

#### 11.1.1 Simulador e fantoma

No que se refere ao simulador e ao fantoma, os objectivos propostos foram atingidos com sucesso, tendo-se desenvolvido um ambiente de simulação versátil, que permite a aquisição

segundo as geometrias de feixe paralelo, divergente e cónico e as diferentes trajectórias da fonte (nomeadamente, circular e em espiral mas qualquer outra trajectória poderá ser facilmente implementada). A abordagem numérica adoptada para o cálculo dos dados projecção mostrou ser fiável do ponto de vista matemático quando comparada com o cálculo analítico das projecções, todavia, pode ser considerada limitada do ponto de vista físico, dado que utiliza um modelo simplificado dos raios X que não considera aspectos como, por exemplo, a dimensão finita do feixe ou o seu espectro energético (e o conseqüente efeito de endurecimento).

O fantoma dinâmico do tórax escolhido (4D MCAT—*Mathematical Cardiac Torso*), apesar do aspecto pouco realista, constitui um modelo bastante fiável dos movimentos relacionados com os ciclos cardíaco e respiratório pelo que, após a introdução da necessária aleatoriedade na duração do ciclo cardíaco, revelou-se adequado para o teste de diferentes métodos de aquisição e reconstrução em âmbito cardio-torácico. Neste aspecto salienta-se que, apesar de existir um fantoma mais recente e realista (o 4D NCAT—*Non-Uniform Rational B-Splines-based Cardiac-Torso*), este não permite a introdução da aleatoriedade na duração do ciclo cardíaco sendo, por isso, inadequado para o teste de métodos de aquisição e reconstrução dinâmicos que se pretendem robustos face a irregularidades no ritmo cardíaco (arritmia).

### 11.1.2 Métodos de reconstrução

No panorama dos métodos de reconstrução 2D, tendo como referência o método de Retro-projecção Filtrada, os métodos directos de Fourier são conhecidos pela menor complexidade computacional mas também pela baixa qualidade das imagens reconstruídas e a pouca flexibilidade. Nesta dissertação demonstra-se que o fraco desempenho dos métodos de Fourier, devido à necessidade de efectuar uma interpolação no espaço de Fourier da grelha de amostragem polar para a grelha Cartesiana (antes de calcular a transformada inversa de Fourier bidimensional pelo algoritmo FFT—*Fast Fourier Transform*), pode ser notavelmente melhorado pela introdução do algoritmo NFFT (*Fast Fourier Transform for Nonequispaced samples*), que permite calcular a transformada de Fourier directamente a partir das amostras regularmente distribuídas sobre uma grelha polar, sem prejuízo da complexidade computacional. A eliminação da interpolação no espaço de Fourier e a distribuição específica das amostras (cuja densidade diminui com a distância do centro da grelha polar) têm como consequência a necessidade de introduzir um filtro em rampa explícito. Longe de ser uma complicação, a introdução do filtro em rampa, que pode ser substituído por filtros mais suaves (tal como acontece no caso do algoritmo de Retroprojecção Filtrada), permite aumentar a flexibilidade do algoritmo no sentido que torna possível a manipulação da qualidade da imagem reconstruída pela escolha de diferentes filtros.

De facto, apesar de termos desenvolvido um algoritmo de Fourier baseado na escolha do sistema de referência no espaço das frequências no qual as amostras resultam ser equiespaçadas (algoritmo DFM), tivemos de constatar que este permite obter imagens de boa qualidade (correspondente ao método de Retroprojecção Filtrada com filtro de Ram-Lak) mas sem nenhuma flexibilidade em relação à escolha do filtro, pois este encontra-se implícito no próprio método de interpolação.

Por outro lado, a introdução da NFFT, com as vantagens que acarreta, torna mais apelativo o recurso aos métodos de Fourier obrigando a reconsiderá-los como uma alternativa válida ao método de Retroprojecção Filtrada. Neste sentido, foi possível comprovar que algumas das alegadas limitações ou desvantagens dos métodos de Fourier deixam de subsistir com a introdução da NFFT. Nomeadamente, para além de aumentar a flexibilidade pela introdução

de filtros de tipo rampa (de que já se falou), foi possível demonstrar que a introdução da NFFT no método de Fourier permite:

- melhorar a qualidade das imagens reconstruídas (que se provou ser equivalente à das imagens obtidas pelo algoritmo de Retro projecção Filtrada)
- adaptar o método a outras geometrias de feixe sem ser a geometria paralela, tendo-se desenvolvido o algoritmo DB NFFT DFM (para geometria de feixe divergente) cujo desempenho em termos de qualidade das imagens reconstruídas é equivalente ao do correspondente algoritmo de Retro projecção Filtrada para projecções divergentes. O algoritmo DB NFFT DFM foi desenvolvido tanto para varrimento completo como para varrimento breve.
- reconstruir regiões de interesse, isto é realizar tomografia regional que era considerada exclusiva do método de Retro projecção Filtrada. Neste âmbito foi desenvolvido o algoritmo NFFT DFM ROI (tanto para projecções paralelas como divergentes) cujo desempenho é perfeitamente equivalente ao dos correspondentes algoritmos baseados no método de Retro projecção Filtrada.

Em suma, relativamente à reconstrução 2D, demonstrou-se que (tanto qualitativa como quantitativamente, em condições ideais ou em presença de diferentes níveis de ruído) o desempenho dos algoritmos de Fourier desenvolvidos (baseados na introdução da NFFT) é equivalente ao dos correspondentes algoritmos de Retro projecção Filtrada, com uma notável redução no custo computacional. Apenas se verificou que, para obter um desempenho perfeitamente equivalente, os algoritmos de Fourier necessitam da escolha de um filtro ligeiramente mais "suave" que os correspondentes algoritmos de Retro projecção Filtrada, o que se deve ao facto que a densidade das amostras na grelha polar no espaço das frequências é apenas aproximadamente inversamente proporcional à distância do centro da grelha, pelo que a escolha do filtro em rampa, ditada pela necessidade de comparar os diferentes métodos em condições de paridade, pode não compensar rigorosamente esta distribuição das amostras.

Também no caso de reconstrução a partir de dados adquiridos com varrimento em espiral e/ou multicorte, assim como no caso de aquisição cardio-torácica, o desempenho dos algoritmos desenvolvidos revelou-se equivalente ao dos correspondentes algoritmos de Retro projecção Filtrada, sendo que a articulação dos algoritmos de interpolação longitudinal ou de sincronismo (selecção prospectiva ou retrospectiva sincronizada com o movimento cardíaco) com os algoritmos de reconstrução propriamente ditos, não depende do algoritmo de reconstrução escolhido.

Em termos genéricos, seja qual for a geometria do feixe ou o esquema de varrimento, o único ponto fraco dos métodos de Fourier é, actualmente, a reconstrução 3D. De facto, vários autores já apresentaram formas de resolver este problema incluindo técnicas de Fourier, contudo, o principal obstáculo, que é a necessidade de garantir o suficiente preenchimento do espaço de Fourier 3D, não está completamente ultrapassado quando se consideram as geometrias de feixe e as trajetórias de varrimento actualmente utilizadas nos modernos equipamentos.

Neste aspecto, podemos estabelecer um interessante paralelo entre a reconstrução de imagens em TAC e em Ressonância Magnética, pois nos dois casos o problema subjacente à reconstrução passa a ser o preenchimento do "espaço k", isto é, da transformada de Fourier bi- ou tri-dimensional da função objecto.



### 11.1.3 Tomografia dinâmica (cardio-torácica)

As experiências realizadas no âmbito da tomografia cardio-torácica permitiram, em primeiro lugar, validar a eficácia do simulador e do modelo anatómico escolhido no teste de técnicas de aquisição e reconstrução dedicadas a esta região anatómica. Para cada uma das técnicas de aquisição (ou selecção de amostras) sincronizada com o movimento cardíaco por nós implementadas, foi possível avaliar, em termos quantitativos e gráficos, de que forma os diferentes ritmos cardíacos (mais lentos ou mais rápidos, mais regulares ou mais irregulares), afectam a cobertura do sinograma. Foram avaliadas técnicas que permitem melhorar a cobertura do sinograma através de replicação das amostras por simetria e constatou-se a extrema variabilidade da cobertura do sinograma em função da técnica de aquisição (ou selecção de amostras) escolhida, da descrição estatística do movimento cardíaco (média e desvio padrão da duração do ciclo) e do tempo de rotação do foco. Foi possível, desta forma, reafirmar a importância que a avaliação prévia do ciclo cardíaco e a simulação da técnica de aquisição (ou selecção de amostras) a ser utilizada têm na escolha do tempo de rotação do foco mais favorável no sentido de garantir a melhor qualidade de imagem possível e, ao mesmo tempo, controlar a dose de radiação à qual o doente é submetido.

Foi implementada uma técnica de restauro do sinograma, isto é, de preenchimento das lacunas que afectam o sinograma, com informação obtida *a priori* ao longo de um certo número de rotações do foco e não relacionada com nenhuma fase específica do ciclo cardíaco e avaliou-se o desempenho desta técnica em função dos parâmetros de aquisição no caso de fantoma em apneia e sem apneia e em presença de ciclos cardíacos cuja duração é caracterizada estatisticamente por diferentes valores de média e desvio padrão. Dado que o restauro do sinograma implica o aparecimento de artefactos, observáveis na sequência temporal do ciclo cardíaco como tangenciais às direcções de transição entre amostras efectivamente relacionadas com uma determinada fase do ciclo e amostras do sinograma de referência e que estes artefactos têm uma frequência temporal diferente das frequências dos fenómenos fisiológicos observados, foi também introduzida uma técnica de filtragem temporal que permite a eliminação destes artefactos.

Independentemente dos métodos de aquisição, selecção de amostras e reconstrução regularizada implementados, demonstrou-se que tanto o fantoma dinâmico como o simulador são suficientemente versáteis e adequados para o teste destes métodos, permitindo a sua avaliação nas mais diversas condições tanto em termos de parâmetros de aquisição como de características dinâmicas do fantoma.

## 11.2 Desenvolvimentos futuros

As limitações que afectam o fantoma dinâmico 4D MCAT, foram ultrapassadas no mais recente fantoma 4D NCAT, muito mais realista do ponto de vista anatómico e dotado de pormenores dinâmicos de pequenas dimensões (como, por exemplo, objectos que pretendem simular a presença de calcificações nas artérias coronárias). Estes detalhes teriam certamente um grande valor na avaliação de métodos de aquisição e reconstrução em tomografia cardio-torácica, todavia, no novo fantoma (disponibilizado apenas sob a forma de um programa executável), não é possível introduzir a aleatoriedade na duração do ciclo cardíaco e alterar a sua descrição estatística, um aspecto que considerámos essencial para o teste das técnicas de aquisição e reconstrução sincronizada com o ciclo cardíaco. Em contactos recentes, a equipa que realizou o fantoma mostrou-se disponível para, em conjunto, introduzirmos as necessárias

alterações, pelo que será possível realizar testes ainda mais realistas e interessantes.

O simulador de TAC desenvolvido pode ser um instrumento precioso para a investigação, permitindo a simulação do processo de aquisição com novas geometrias de amostragem e a avaliação de novos métodos de reconstrução. Neste âmbito, é possível a sua extensão à geometria cónica (detector planar) para o teste de métodos de reconstrução completamente 3D e ainda, tal como se mostrou nas experiências apresentadas, para a avaliação de novas técnicas de reconstrução nas mais variadas condições experimentais (tanto em termos de geometria e protocolo de aquisição como de propriedades do fantoma).

No que se refere aos métodos de reconstrução 2D, um possível foco de interesse é dado pela investigação no âmbito de métodos de reconstrução a partir de dados adquiridos ao longo de um arco de rotação "super-breve", que podem ser utilizados para aumentar ulteriormente a resolução temporal em estudos dinâmicos e/ou a resolução longitudinal no caso de aquisição em espiral.

Tendo em conta que entre os desenvolvimentos tecnológicos mais prováveis no futuro próximo se encontra a aquisição com detectores planares [43], que irá permitir a análise de regiões anatómicas inteiras numa única aquisição convencional, torna-se cada vez mais urgente o desenvolvimento de métodos de reconstrução completamente 3D (para varrimento convencional ou em espiral), de desempenho elevado quer do ponto de vista qualitativo quer quantitativo e ao mesmo tempo de complexidade computacional reduzida. Neste âmbito surge, mais uma vez o interesse para os métodos de Fourier que mostraram ter um desempenho equivalente ao correspondente método de Retro projecção Filtrada em 2D. Tal como foi possível concluir ao longo desta dissertação, poucos são os exemplos de métodos de Fourier (ou inspirados em técnicas de Fourier) desenvolvidos para a reconstrução 3D, sendo que esta tarefa, do ponto de vista teórico, se encontra dificultada pelo insuficiente preenchimento do espaço de Fourier 3D que as actuais geometrias de varrimento proporcionam.

Por fim, para estudos dinâmicos em âmbito cardio-torácico, mesmo recorrendo à aquisição convencional com detectores planares, para aumentar a resolução temporal poderá ser necessário recorrer a varrimento contínuo ao longo de vários ciclos cardíacos de forma a permitir a reconstrução multi-sectorial. Por consequência, consideramos que os métodos de reconstrução 3D deverão continuar a conjugar-se com as técnicas de aquisição ou selecção de amostras sincronizadas com o ciclo cardíaco.



# Apêndice A

## NFFT

Desde a sua introdução em 1960 [13], o algoritmo para o cálculo rápido da Transformada de Fourier designado por FFT (*Fast Fourier Transform*) tem sido extensivamente utilizado em análise numérica e em todas as áreas da matemática aplicada. Infelizmente, este algoritmo requer que as amostras sejam equi-espaçadas, o que em muitos casos não se verifica.

Nestes casos, em termos formais (e gerais) teremos o seguinte problema:

Seja:  $\Pi^d := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$  e  $I_N := \{k \in \mathbb{Z}^d : -\frac{N}{2} \leq k < \frac{N}{2}\}$ , sendo as desigualdades verificadas componente a componente.

Dados:  $x_k \in \Pi^d$ ,  $v_j \in N\Pi^d$  e  $f_k \in \mathbb{C}$

Calcular de forma rápida e robusta a *Transformada de Fourier Discreta de amostras não equi-espaçadas (NDFT)*

$$f(v_j) = \sum_{k \in I_N} f_k e^{-2\pi i x_k v_j} \quad (j \in I_M). \quad (\text{A.1})$$

A avaliação directa de A.1 implica  $\mathcal{O}(N^d M^d)$  operações o que, comparado com as  $\mathcal{O}(N^d \log N)$  operações da FFT, é uma complexidade excessiva.

Vários investigadores têm trabalhado no desenvolvimento de algoritmos para o cálculo da FFT com grelhas de amostragem não equi-espaçadas e muitas são as publicações neste sentido (entre outras: [25][3][27][141][100][36][101][34]). Entre os algoritmos propostos, estamos particularmente interessados nos algoritmos desenvolvidos por Potts e Steidl e implementados por Potts e Kunis, do *Mathematical Institute of the University of Lübeck* –<http://www.math.mu-luebeck.de/potts/nfft>–, na biblioteca NFFT C à qual recorreremos em todos os casos nos quais, ao longo do nosso trabalho, foi necessário calcular a FFT a partir de amostras não equi-espaçadas.

Sem entrarmos em detalhes (que podem ser encontrados em [101]), descrevemos aqui alguns aspectos essenciais da abordagem seguida por Potts e Steidl.

No âmbito do nosso trabalho, assim como na maior parte dos casos, as amostras são não-equiespaçadas em apenas um dos domínios, pelo que o problema A.1 pode ser convenientemente reduzido ao cálculo de

$$f(v_j) = \sum_{k \in I_N} f_k e^{-2\pi i k v_j / N} \quad (j \in I_M), \quad (\text{A.2})$$

no caso de amostras equi-espçadas no domínio do tempo (obtendo o algoritmo NFFT NER –*non-equispaced results* – ver algoritmo A.1.1), e de

$$h(k) := \sum_{j \in I_N} f_j e^{-2\pi i k v_j} \quad (k \in I_M) \quad (\text{A.3})$$

no caso de amostras equi-espçadas no domínio da frequência (obtendo o algoritmo NFFT NED –*non-equispaced data* – ver algoritmo A.2.1). Limitaremos a nossa breve exposição a estes dois casos (a análise do problema no caso de amostras não equi-espçadas em ambos os domínios pode ser encontrada em [101]).

Os algoritmos propostos são, na realidade, algoritmos de *gridding*, portanto, não uma novidade já que este tipo de algoritmos é conhecido desde meados da década de 70 [9]. Todavia, no contexto do cálculo da NFFT a técnica de *gridding* tem sido adaptada e otimizada através da análise dos efeitos que uma oportuna escolha de alguns parâmetros e da função de *gridding* têm no desempenho (em termos de rapidez e erro de aproximação) do algoritmo.

A ideia é a de utilizar a FFT standard e uma função janela  $\varphi$  bem localizada nos domínios do tempo e da frequência (existindo várias possibilidades para a escolha desta função), e cuja versão 1-periodica

$$\tilde{\varphi}(v) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^d} \varphi(v + r)$$

tem série de Fourier uniformemente convergente.

## A.1 NFFT NER

No caso da equação A.2 e considerando, por simplicidade de notação,  $N = M$ , o que se pretende é calcular

$$f(v) := \sum_{k \in I_N} f_k e^{-2\pi i k v} \quad (\text{A.4})$$

nos pontos  $w_j := v_j/N \in \Pi^d$  ( $j \in I_N$ ). Introduzindo um factor de sobreamostragem  $\lambda > 1$ , e pondo  $n := \lambda N$ ,  $f(v)$  pode ser aproximado por

$$s_1(v) := \sum_{l \in I_n} g_l \varphi\left(v - \frac{l}{n}\right)$$

e, desenvolvendo em série de Fourier, obtém-se:

$$s_1(v) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{g}_k c_k(\varphi) e^{-2\pi i k v} \quad (\text{A.5})$$

com

$$\begin{aligned} \hat{g}_k & : = \sum_{l \in I_n} g_l e^{2\pi i k l / n}, \\ c_k(\varphi) & : = \int_{\Pi^d} \varphi(v) e^{2\pi i k v} dv \quad (k \in \mathbb{Z}^d). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Se os coeficientes  $c_k(\varphi)$  são suficientemente pequenos para  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus I_n$  e  $c_k(\varphi) \neq 0$  para  $k \in I_N$ , a comparação de A.4 com A.5 sugere que se estabeleça

$$\widehat{g}_k := \begin{cases} f_k/c_k(\varphi) & k \in I_N \\ 0 & k \in I_n \setminus I_N \end{cases}$$

donde, pela equação A.6, os valores  $g_l$  podem ser obtidos por IFFT  $d$ -dimensional. Se  $\varphi$  é bem localizada no domínio do tempo de forma a poder ser aproximada por uma função 1-periodica  $\psi$  com  $\text{supp}(\psi) \cap \Pi^d \subseteq \frac{2m}{n}\Pi^d$  ( $2m \ll n$ ), então

$$f(w_j) \approx s_1(w_j) \approx s(w_j) = \sum_{l \in I_{n,m}(w_j)} g_l \psi \left( w_j - \frac{l}{n} \right) \quad (\text{A.7})$$

com  $I_{n,m}(w_j) := \{l \in I_N : nw_j - m \leq l \leq nw_j + m\}$ . Para um determinado ponto  $w_j \in \Pi^d$  a soma A.7 contém, no máximo  $(2m+2)^d$  elementos não nulos.

Concluindo, obtém-se o seguinte algoritmo para o cálculo de A.4:

#### Algoritmo A.1.1 (NFFT NER)

*Input:*  $N \in \mathbb{N}, \lambda > 1, n := \lambda N, w_j \in \Pi^d, f_k \in \mathbb{C} (j, k \in I_N)$

1. Pré-calcular  $c_k(\varphi)$  ( $k \in I_N$ ),  $\psi(w_j - \frac{l}{n})$  ( $j \in I_N, l \in I_{n,m}(w_j)$ )
2. Determinar  $\widehat{g}_k := f_k/c_k(\varphi)$  ( $k \in I_N$ )
3. Calcular a FFT  $d$ -dimensional

$$g_l := n^{-d} \sum_{k \in I_N} \widehat{g}_k e^{-2\pi i k l / n} \quad (l \in I_n)$$

4. Calcular

$$s(w_j) := \sum_{l \in I_{n,m}(w_j)} g_l \psi \left( w_j - \frac{l}{n} \right) \quad (j \in I_N) \quad (\text{A.8})$$

*Output:*  $s(w_j)$  aproximação de  $f(w_j)$  ( $j \in I_N$ ).

Como se pode constatar, o ponto 4 deste algoritmo consiste na aplicação da técnica de *gridding*.

## A.2 NFFT NED

No caso da equação A.3, utilizando a mesma notação da secção anterior (com  $N = M, \lambda > 1, n := \lambda N$ ), efectua-se a operação de *gridding* sobre as amostras da função  $f$  nos pontos não equi-espaciaos  $w_j$

$$g(x) := \sum_{j \in I_N} f_j \varphi(x + w_j)$$

e calculando os coeficientes de Fourier obtém-se:

$$c_k(g) = \sum_{j \in I_N} f_j e^{-2\pi i k w_j} c_k(\varphi) = h(k) c_k(\varphi) \quad (k \in \mathbb{Z}^d)$$

de tal forma que, se  $c_k(g)$  for conhecido, podemos calcular  $h(k)$ , resolvendo o problema A.3. Para determinar

$$c_k(g) = \int_{\Pi^d} \sum_{j \in I_N} f_j \varphi(x + w_j) e^{2\pi i k x} dx$$

de forma aproximada pode ser utilizada a regra dos trapezios, isto é:

$$c_k(g) \approx \frac{1}{n^d} \sum_{l \in I_n} \sum_{j \in I_N} f_j \varphi \left( w_j - \frac{l}{n} \right) e^{-2\pi i k l / n}$$

Por fim, substitui-se  $\varphi$  pela sua versão truncada  $\psi$ .

Para  $l \in I_n$ , uma vez introduzido o conjunto de índices  $J_{n,m}(l) := \{j \in I_N : l - m \leq n w_j \leq l + m\}$  obtém-se o seguinte algoritmo para o cálculo da NFFT NED:

#### Algoritmo A.2.1 (NFFT NED)

*Input:*  $N \in \mathbb{N}, \lambda > 1, n := \lambda N, w_j \in \Pi^d, f_k \in \mathbb{C} (j, k \in I_N)$

1. Pré-calcular  $c_k(\varphi) (k \in I_N), \psi \left( w_j - \frac{l}{n} \right) (l \in I_n, j \in J_{n,m}(l))$
2. Calcular

$$\tilde{g}_l := \sum_{j \in J_{n,m}(l)} f_j \psi \left( w_j - \frac{l}{n} \right) \quad (l \in I_n) \quad (\text{A.9})$$

3. Calcular a FFT  $d$ -dimensional

$$\tilde{c}_k(g) := n^{-d} \sum_{l \in I_n} \tilde{g}_l e^{-2\pi i k l / n} \quad (k \in I_N).$$

4. Pôr  $\tilde{h}(k) := \tilde{c}_k(g) / c_k(\varphi) (k \in I_N)$ .

*Output:*  $\tilde{h}(k)$  valor aproximado de  $h(k) (k \in I_N)$

### A.3 Escolha dos parâmetros e da função janela

Os algoritmos descritos são algoritmos aproximados cuja complexidade computacional é da ordem das  $\mathcal{O}((\lambda N)^d \log(\lambda N) + \log^d(1/\varepsilon)M)$  operações (dependendo da função janela escolhida), onde  $\varepsilon$  representa a aproximação pretendida.

O factor de sobreamostragem  $\lambda$ , a função janela  $\varphi$  e o número  $m$  de sumandos nas equações A.8 e A.9, determinam o nível de aproximação e o custo computacional do algoritmo, pelo que a sua escolha deve ser efectuada de maneira a assegurar um bom compromisso entre estas duas vertentes. Os vários algoritmos propostos para o cálculo da NFFT distinguem-se, entre outros aspectos, pela utilização de diferentes funções janela, tendo sido amplamente avaliado, quer de forma empírica quer de forma analítica, o nível de aproximação associado a cada particular escolha desta função.

Sem entrar em detalhes (que podem ser encontrados em [101] e [77]), diremos apenas que na biblioteca NFFT C, é prevista a opção entre as seguintes funções janela:

pulsos Gaussianos dilatados

*B-splines* cardinais centradas e dilatadas

funções *sinc* dilatadas

funções de Kaiser-Bessel dilatadas (obtendo, neste caso, um método perfeitamente equivalente ao método de *gridding* descrito no parágrafo 6.1.4).

No guia do utilizador da biblioteca NFFT C [77] encontra-se descrito e quantificado o desempenho do algoritmo ao variar dos parâmetros  $\lambda$  e  $m$  e da função  $\varphi$ , o que permite adaptar facilmente o algoritmo às exigências da aplicação específica. Nas nossas implementações optamos pela utilização de funções de Kaiser-Bessel como funções janela, com  $\lambda = 2$  e  $m = 3$ . Pela análise documentada em [77], esta combinação de parâmetros deverá garantir um erro quadrático médio normalizado (ver fórmula 8.5) inferior a  $10^{-5}$  tanto em *single* como em *double precision*.

## A.4 Geração da função \*.mex

Dado que para o cálculo da NFFT recorreremos a uma biblioteca de funções escritas em linguagem C e que o ambiente de trabalho por nós utilizado é o MATLAB, falta dizer algumas palavras sobre a forma como as funções \*.c podem ser chamadas a partir do MATLAB.

O ambiente MATLAB permite a chamada de programas escritos em linguagem C através da sua compilação com o comando `mex` que produz um ficheiro \*.mex (no caso do sistema operativo Windows uma `dll` –*Dinamical linked library*–).

Tal como se mostra no esquema da figura A.1 o programa em linguagem C (ficheiro \*.c) deve conter uma rotina que funciona de *gateway* para a transmissão dos parâmetros da forma como são fornecidos em MATLAB para a forma como devem ser passados para a rotina computacional (em entrada), e da forma como são produzidos pela rotina computacional para a forma como devem ser devolvidos pela função \*.mex (à saída).

Uma vez compilado o programa, o ficheiro \*.mex (a `dll`) utiliza-se como se se tratasse de um ficheiro \*.m, sendo completamente transparente a forma como as variáveis são transmitidas entre a rotina de *gateway* e a rotina de de computação



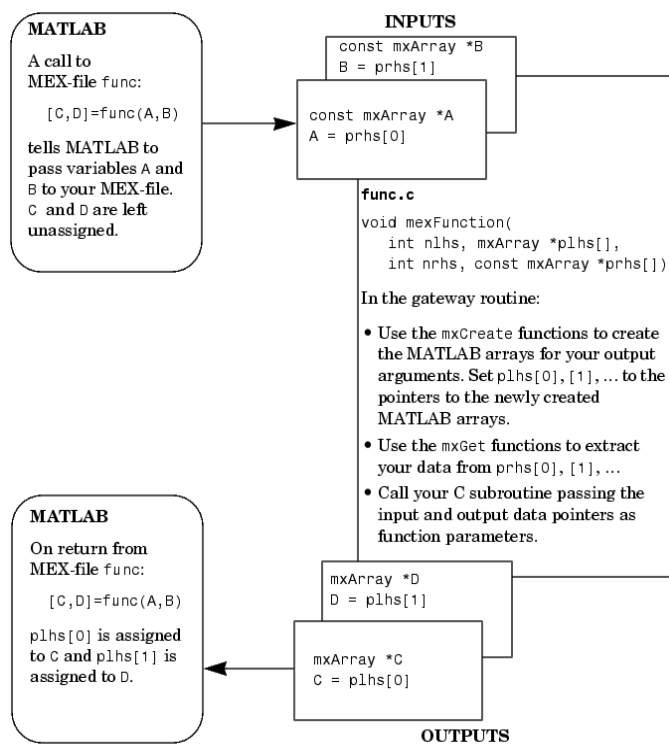


Figura A.1: Chamada da função `func.c` embebida num ficheiro `func.mex` (figura da documentação MATLAB).

## Apêndice B

# Métricas de erro (Herman)

Para podermos avaliar o mérito dos algoritmos de reconstrução desenvolvidos, escolhemos utilizar as métricas propostas por Herman [45] com o objectivo de quantificar a distância entre uma imagem reconstruída  $f$  e a correspondente imagem de referência (ou original)  $h$ . No caso de imagens discretizadas de dimensões  $N \times N$  as três métricas de Herman são definidas pelas seguintes fórmulas

$$\begin{aligned} d &= \left( \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (f_{ij} - h_{ij})^2 \right) / \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (h_{ij} - \bar{h})^2 \right) \right)^{1/2} \\ r &= \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |f_{ij} - h_{ij}| \right) / \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |h_{ij} - \bar{h}| \right) \\ e &= \max |F_{ij} - H_{ij}| \quad (1 \leq i \leq N/2, 1 \leq j \leq N/2) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{1}{4}(f_{2i,2j} + f_{2i+1,2j} + f_{2i,2j+1} + f_{2i+1,2j+1}) \\ H_{ij} &= \frac{1}{4}(h_{2i,2j} + h_{2i+1,2j} + h_{2i,2j+1} + h_{2i+1,2j+1}). \end{aligned}$$

Estas medidas de erro permitem realçar diferentes aspectos da qualidade da imagem reconstruída. Por exemplo, para que o erro  $d$  (*normalized root mean squared distance measure* – distância média quadrática normalizada) resulte elevado, é suficiente que exista uma diferença elevada em poucos elementos da imagem. Em contrapartida, a medida de erro  $r$  (*normalized mean absolute distance measure* – distância média absoluta normalizada) resulta ser mais sensível a diferenças pequenas em muitos elementos da imagem. Por fim, a distância  $e$  (*worst case distance measure* – valor máximo da distância) representa a maior diferença de densidade entre a imagem reconstruída e a imagem de referência, ambas reamostradas numa grelha  $N/2 \times N/2$  cujos elementos são as médias  $F_{i,j}$  e  $H_{i,j}$ . Esta reamostragem menos densa deve-se ao facto que, normalmente, os detalhes de interesse mais pequenos ocupam vários *pixels* e que, na prática, utiliza-se a densidade média nestes *pixels* para estimar a atenuação linear relativa de um tecido de interesse. Assim, a medida  $e$  nos fornece uma indicação sobre o erro associado a este tipo de estima.



# Bibliografia

- [1] Axelsson, C. and P.-E. Danielsson. “Three-dimensional reconstruction from cone-beam data in  $\mathcal{O}(N^3 \log N)$  time,” *Physics in Medicine and Biology*, 39:477–491 (1994).
- [2] Barrett, J. F. and N. Keat. “Artifacts in CT: recognition and avoidance,” *RadioGraphics*, 24:1679–1691 (2004).
- [3] Beylkin, G. “On the fast Fourier transform of functions with singularities,” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2:363–381 (1995).
- [4] Bingham, K. *Mathematics of Local X-Ray Tomography*. Master’s thesis, Helsinki University of Technology, 1998.
- [5] Botelho, M. F. R. R. *Novos métodos de avaliação da função pulmonar com radionúclidos*. Ph.D. thesis, Universidade de Coimbra, 1992.
- [6] Boyd, D. P. et al. “A proposed dynamic cardiac 3-D densitometer for early detection and evaluation of heart disease,” *IEEE Trans. on NSci.*, 26:2724–2727 (1979).
- [7] Bracewell, R. N. “Strip integration in radio astronomy,” *Australian J. Phys.*, 9:198–217 (1956).
- [8] Bracewell, R. N. “Inversion of fan-beam scans in radio-astronomy,” *Astrophysics Journal*, 150:427–434 (1967).
- [9] Brouw, W. N. “Aperture Synthesis,” *Methods in Computational Physics*, 14:131–175 (1975).
- [10] Bruder, H. et al. “Single-slice rebinning reconstruction in spiral cone-beam computed tomography,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 19(9):873–887 (2000).
- [11] Chen, G.-H., Leng S. and C. A. Mistretta. “A novel extension of the parallel-beam projection-slice theorem to divergent fan-beam and cone-beam projections,” *Med. Phys.*, 32(3):654–665 (2005).
- [12] Commission, International Electrotechnical, editor. *Medical Electrical Equipment. Part 2-44: Particular Requirements for the Safety of X-ray Equipment for Computed Tomography, 60601-2-44*. Geneve, Switzerland: IEC.
- [13] Cooley, J. W. and J. W. Tukey. “An algorithm for the machine computation of the complex Fourier series,” *Mathematics of Computation*, 19:297–301 (1965).

- [14] Cormack, A. M., “Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it,” 8 December 1979. Nobel Lecture.
- [15] Cormack, A. M. “Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications,” *Journal of Applied Physics*, 34(9):2722–2727 (1963).
- [16] Cormack, A. M. “Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. II,” *Journal of Applied Physics*, 35(10):2908–2913 (1964).
- [17] Cormack, A. M. “Computer tomography: some history and recent developments.” *Computed Tomography*, 27. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, edited by L. A. Shepp, 35–42, AMS, 1982.
- [18] Danielsson, P.-E. “From cone-beam projections to 3D Radon data in  $\mathcal{O}(N^3 \log N)$  time.” *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference*, 2. 1135–1137. IEEE, 1992.
- [19] Danielsson, P.-E. et al, “Helical cone-beam scanning and reconstruction of long objects using 180 degrees exposure,” Filed Jan. 13, 1998.
- [20] de Roos, A. et al. “Cardiac applications of multislice computed tomography,” *Br. J. Rad.*, 76(937):9–16 (2006).
- [21] Defrise, M. and R. Clack. “A cone-beam reconstruction algorithm using shift-variant filtering and cone-beam backprojection,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 13(1):186–195 (1994).
- [22] Desbat, L. et al. “Sampling conditions of 3D parallel and fan-beam x-ray CT with applications to helical tomography,” *Physics in Medicine and Biology*, 49(11):2377–2390 (2004).
- [23] Desjardins, B. and E. Kazerooni. “ECG-Gated Cardiac CT,” *Am. J. Roentgenol.*, 182(4):993–1010 (2004).
- [24] Division of Medical Imaging Physics, John Hopkins Medical Institutions, “Medical Imaging Simulation Techniques and Computer Phantoms,” <http://dmip1.rad.jhmi.edu/xcat/>, 2008.
- [25] Dutt, A. and V. Rokhlin. “Fast Fourier transforms for nonequispaced data,” *SIAM J. Sci. Comput.*, 14(6):1368–1393 (1993).
- [26] Edholm, P. R. and G. T. Herman. “Linograms in image reconstruction from projections,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, MI-6:301–307 (1987).
- [27] Elbel, B. and G. Steidl. “Fast Fourier transforms for nonequispaced data.” *Approximation theory IX* edited by C. K. Chui and L. L. Schumaker, 1–8, Nashville, TN: Vanderbilt University Press, 1998.
- [28] Faridani, A. “Sampling theory and parallel-beam tomography.” *Sampling, wavelets and tomography* edited by J. J. Benedetto and A. I. Zayed, 225–254, Boston: Birkhauser, 2004.

- [29] Faridani, A. et al. "Introduction to local tomography." *Radon Transforms and Tomography*, 278. Contemporary Mathematics, edited by E. T. et al. Quinto, 29–47, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2001.
- [30] Faridani, A., Ritman E. L. and K. T. Smith. "Local tomography," *SIAM J. Appl. Math.*, 52:459–484 (1992).
- [31] Feldkamp, L. A., Davis L. C. and J. W. Kress. "Practical cone-beam algorithm," *J. Opt. Soc. Am. A*, 1(6):612–619 (1984).
- [32] Fessler, J. A. *Iterative tomographic image reconstruction using Nonuniform Fast Fourier Transforms*. Technical report, Comm. and Sign. Proc. Lab., Dept. of EECS, Univ. of Michigan, December 2001.
- [33] Fessler, J. A. "Statistical image reconstruction methods for transmission tomography." *Handbook of Medical Imaging, Vol. 2, Medical Image Processing and Analysis* edited by M. Sonka and J. M. Fitzpatrick, 1–70, Bellingham: SPIE Press, 2000.
- [34] Fessler, J. A. and B. P. Sutton. "Nonuniform Fast Fourier Transforms using min-max interpolation," *IEEE Trans. on Signal Processing*, 51(2):560–574 (2003).
- [35] Fornberg, B. and B. Herbst. *Modeling in Applied Mathematics*. Lectures notes for the "Image Processing" course, University of Stellenbosch, Department of Applied Mathematics, May 2000.
- [36] Fourmont, K. "Non-equispaced Fast Fourier transforms with applications to tomography," *pre-print* (2000).
- [37] Fuchs, T. et al. "Spiral interpolation algorithms for multislice spiral CT -Part II: measurement and evaluation of slice sensitivity profiles and noise at a clinical multislice system," *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 19(9):835–847 (2000).
- [38] Garcia, M., Hoffmann M. and J. Lessick. "CATSCAN (coronary assessment by CT scanning and catheter angiography): Protocol of a multi-center trial," *Medica Mundi*, 48(3):30–35 (2004).
- [39] Gordon, R., Bender R. and G. T. Herman. "Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography," *J. Theoretical Biology*, 29:471–481 (1970).
- [40] Gottlieb, D., Gustafsson B. and P. Forssén. "On the Direct Fourier Method for Computed Tomography," *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 19(3):223–232 (2000).
- [41] Grangeat, P. "Mathematical framework of cone-beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform." *Mathematical Methods in Tomography*, 1497. Lecture Notes in Mathematics, edited by G. T. Herman, et al., 66–97, Springer-Verlag, 1990.
- [42] Grass, M., Kohler Th. and R. Proksa. "3D cone-beam CT reconstruction for circular trajectories," *Physics in Medicine and Biology*, 45(2):329–347 (2000).

- [43] Gupta, R. et al. “Flat-Panel volume CT: fundamental principles, technology, and applications,” *Radiographics*, 28:2009–2022 (2008).
- [44] Harrington, S. *Computer Graphics: a programming approach* (2nd Edition). McGraw-Hill, 1988.
- [45] Herman, Gabor T. *Image Reconstruction from Projections*. Academic Press, 1980.
- [46] Herman, G. T., Roberts R. and L Axel. “Fully three-dimensional reconstruction from data collected on concentric cubes in Fourier space: implementation and sample applications to MRI,” *Physics in Medicine and Biology*, 37:673–687 (1992).
- [47] Hong, C. et al. “ECG-gated reconstructed multi-detector row CT coronary angiography: effect of varying trigger delay on image quality,” *Radiology*, (220):712–717 (2001).
- [48] Hounsfield, G. N., “Computed Medical Imaging,” 8 December 1979. Nobel Lecture.
- [49] Hsieh, J., Grekowitz B. and P. Simoni. “Convolution reconstruction algorithm for multislice helical CT.” *SPIE: Medical Imaging 2003 - Image Processing, 5032*, edited by M. Sonka and J. M. Fitzpatrick. 716–723. SPIE, 2003.
- [50] Hsieh, J. “A nonlinear helical reconstruction algorithm for multislice CT,” *IEEE Trans. on NSci.*, 49(3):740–744 (2002).
- [51] Hsieh, J. *Computed Tomography: principles, design, artifacts and recent advances*. SPIE – The International Society for Optical Engineering, 2003.
- [52] Hsieh, J. et al. “A multi-slice Helical CT reconstruction with generalized weighting.” *Nuclear Science Symposium, 3*. 1732–1736. IEEE, 2001.
- [53] Hu, H. and Y. Shen. “Helical CT reconstruction with longitudinal filtration,” *Med. Phys.*, 25(11):2130–2138 (1998).
- [54] Jacobson, C. *Fourier methods in 3D-reconstruction from cone-beam data*. PhD, Linköping University, 1996.
- [55] Kachelrieß, M. and W. A. Kalender. “Phase-correlated image reconstruction without ECG.” *CT of the heart*, Contemporary Cardiology, edited by C. Cannon, Humana Press, 2005.
- [56] Kachelrieß, M. et al. “Kymogram detection and kymogram-correlated image reconstruction from subsecond spiral computed tomography scans of the heart,” *Med. Phys.*, 29(7):1489–1503 (2002).
- [57] Kachelrieß, M., Schaller S. and W. A. Kalender. “Advanced single-slice rebinning in cone-beam spiral CT,” *Med. Phys.*, 27(4):754–772 (2000).
- [58] Kachelrieß, M., Ulzheimer S. and W. A. Kalender. “ECG-correlated imaging of the heart with subsecond multislice spiral CT,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 19(9):888–901 (2000).
- [59] Kak, A. C. and M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 1988.

- [60] Kalender, W. A., Engelke K. and S. Schaller. “Spiral CT: Medical use and potential industrial applications.” *SPIE International Symposium on Optical Science, Engineering and Instrumentation: Developments in X-Ray tomography*,3149. Proceedings of SPIE, edited by U. Bonse. 188–202. San Diego (CA): SPIE, 1997.
- [61] Kalender, W. A. *Computed Tomography: fundamentals, system technology, image quality and applications*. publicis MCD Verlag, 2000.
- [62] Kalender, W. A. et al. “Spiral volumetric CT with single-breath-hold technique, continuous transport, and continuous scanner rotation,” *Radiology*, 176(1):181–183 (1990).
- [63] Katsevich, A. I. “Cone beam local tomography,” *SIAM J. Appl. Math.*, 59(6):2224–2246 (1999).
- [64] Katsevich, A. I. “Theoretically exact filtered backprojection-type inversion algorithm for spiral CT,” *SIAM J. Appl. Math.*, 62(6):2012–2026 (2002).
- [65] Katsevich, A. I. “A general scheme for constructing inversion algorithms for cone beam CT,” *Int. Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 21:1305–1321 (2003).
- [66] Keat, N. *Helical and Multi-slice principles*. Technical Report, ImPACT Course, October 2005.
- [67] Keys, Robert G. “Cubic convolution interpolation for digital image processing,” *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 29(6):1153–1160 (1981).
- [68] Kleshneva, T., Muzik J. and M. Alber. “An algorithm for automatic determination of the respiratory phases in four-dimensional computed tomography,” *Physics in Medicine and Biology*, 51:269–276 (2006).
- [69] Kopp, A. F. et al. “Coronary arteries: retrospectively ECG-gated multidetector row CT angiography with selective optimization of the image reconstruction window,” *Radiology*, 221:683–688 (2001).
- [70] Kopp, A. F. et al. “Noninvasive coronary angiography with high resolution multidetector-row computed tomography: results in 102 patients,” *Eur. Heart J.*, 23:1714–1725 (2002).
- [71] Kudo, H. and T. Saito. “Helical-scan computed tomography using cone-beam projections.” *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference*,3. 1958–1962. IEEE, 1992.
- [72] Kudo, H. and T. Saito. “Derivation and implementation of a cone-beam reconstruction algorithm for nonplanar orbits,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 13(1):196–211 (1994).
- [73] Kudo, H. et al. “New super-short-scan algorithms for fan-beam and cone-beam reconstruction.” *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*,2. 902–906. Norfolk, VA, USA: IEEE, 2002.
- [74] Kudo, H. et al. “Exact and approximate algorithms for helical cone-beam CT,” *Physics in Medicine and Biology*, 49(13):2913–2931 (2004).



- [75] Kudo, H., Noo F. and M. Defrise. “Cone-beam filtered-backprojection algorithm for truncated helical data,” *Physics in Medicine and Biology*, 43:2885–2909 (1998).
- [76] Kudo, H., Noo F. and M. Defrise. “Quasi-exact filtered backprojection algorithm for long-object problem in helical cone-beam tomography,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 19(9):902–921 (2000).
- [77] Kunis, S., Potts D. and G. Steidl. *Fast Fourier Transform at nonequispaced knots: a user’s guide to a C-library*. Technical Report, Mathematical Institute of the University of Luebeck.
- [78] Kunis, S. and D. Potts, “NFFT C-library,” disponível em <http://www-user.tu-chemnitz.de/potts/nfft/>, 2008.
- [79] LaCroix, K. J. *Evaluation of an Attenuation Compensation Method with respect to Defect Detection in Tc-99m-MIBI Myocardial SPECT Images*. PhD Thesis, North Carolina, 1997.
- [80] Lange, K. and R. Carson. “EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomographic reconstruction,” *J. Comp. Assisted Tomo.*, 8:306–316 (1984).
- [81] Lewitt, R. M. “Reconstruction algorithms: transform methods,” *Proceedings of the IEEE*, 71(3):390–408 (1983).
- [82] Magnusson, M. *Linogram and other direct Fourier methods for tomographic reconstruction*. PhD, University of Linköping, 1993.
- [83] Magnusson Seger, M. “Three-dimensional reconstruction from cone-beam data using an efficient Fourier technique combined with a special interpolation filter,” *Physics in Medicine and Biology*, 43(4):951–959 (1998).
- [84] Mahesh, M. “Cardiac Imaging -Technical advances in MDCT compared with conventional X-ray angiography,” *US Cardiology 2006* (2006).
- [85] Marr, R. B., Chen C. and P. C. Lauterbur. “On two approaches to 3D reconstruction in NMR zeugmatography.” *Mathematical Aspect of Computerized Tomography*, edited by G. T. Herman and F. Natterer. Oberwolfach (FRG): Springer-Verlag, 1980.
- [86] Matej, S., Fessler J. A. and I. G. Kazantsev. “Iterative tomographic image reconstruction using Fourier -based forward and back-projectors,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 23(4):401–412 (2004).
- [87] McNitt-Gray, M. F. “AAPM/RSNA physics tutorial for residents: topics in CT,” *RadioGraphics*, 22:1541–1553 (2002).
- [88] Morin, R. L., Gerber T. C. and C. H. McCollough. “Radiation dose in Computed Tomography of the heart,” *Circulation*, 107:917–922 (2003).
- [89] Mueller, K. *Fast and accurate three-dimensional reconstruction from cone-beam projection data using algebraic methods*. PhD, Ohio State University, 1998.
- [90] Natterer, F. “Fourier reconstruction in tomography,” *Numer. Math.*, 47:343–353 (1985).

- [91] Natterer, F. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, J., 1986.
- [92] Natterer, F. and F. Wubbeling. *Mathematical Methods in image reconstruction*. SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, Philadelphia: SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [93] Noo, F. et al. “Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short scan,” *Physics in Medicine and Biology*, 47:2525–2546 (2002).
- [94] OECD, “OECD Health Data 2006 - a comparative analysis of 30 countries.”
- [95] Ohnesorge, B. and T. Flohr. “Non-invasive cardiac imaging with fast multi-slice cardio CT,” *Electromedica* (2000).
- [96] Orlov, S. S. “Theory of three dimensional reconstruction. 1. Conditions for a complete set of projections,” *Sov. Phys.-Crystallogr.*, 20(3):312–314 (1975).
- [97] O’Sullivan, J. D. “A fast sinc function gridding algorithm for Fourier inversion in Computer Tomography,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, MI-4(4):200–207 (1985).
- [98] Pan, T. et al. “4D CT imaging of a volume influenced by respiratory motion on multi-slice CT,” *Med. Phys.*, 31(2):333–340 (2004).
- [99] Parker, D. “Optimal short-scan convolution reconstruction for fanbeam CT,” *Med. Phys.*, 9(2):254–257 (1982).
- [100] Potts, D. and G. Steidl. “New Fourier reconstruction algorithms for computerized tomography.” *SPIE’s International Symposium on Optical Science and Technology: Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, 4119*, edited by A. Aldroubi, et al. 13–23. S. Diego (CA): SPIE, 2000.
- [101] Potts, D., Steidl G. and M. Tasche. “Fast Fourier transforms for nonequispaced data: a tutorial.” *Modern sampling theory: mathematics and applications* Applied and Numerical Harmonic Analysis Series, edited by J. J. Benedetto and P. J. S. G. Ferreira, 249–274, Boston: Birkhauser, 2001.
- [102] Press, W. et al. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, UK, 1988.
- [103] Pretorius, P. H. et al. “A mathematical model of motion of the heart for use in generating source and attenuation maps for simulating emission imaging,” *Med. Phys.*, 26(11):2323–2332 (1999).
- [104] Proksa, R. et al. “The  $n$ -PI-Method for helical cone-beam CT.,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 19(9):848–863 (2000).
- [105] Putinar, M. “A renormalized Riesz potential and applications.” *Advances in constructive approximation* Brentwood, TN: Nashboro Press, 2004.
- [106] Radon, J. “Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten.” *Symposia in applied mathematics 27*, edited by L. A. Shepp, 71–86, Cincinnati, Ohio: American Mathematical Society, 1982. reprint of the original 1917 paper.

- [107] Ramachandran, G. N. and A. V. Lakshminarayanan. “Three dimensional reconstructions from radiographs and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 68:2236–2240 (1971).
- [108] Ramm, A. G. and A. I. Katsevich. *The Radon transform and local tomography*. Boca Raton: CRC Press, 1996.
- [109] Rashid-Farrokhi, F. et al. “Wavelet-based multiresolution local tomography,” *IEEE Trans. on Image Processing*, 6(10):1412–1430 (1997).
- [110] Robb, R. A. et al. “High-speed three-dimensional x-ray computed tomography: the Dynamic Spatial Reconstructor.,” *Proceedings of the IEEE*, 71(3):308–319 (1983).
- [111] Schaller, S., Flohr T. and P. Steffen. “A new approximate algorithm for image reconstruction in cone-beam spiral CT at small cone-angles.” *IEEE Medical Imaging Conference*. 1996.
- [112] Schaller, S., Flohr T. and P. Steffen. “New, efficient Fourier-reconstruction method for approximate image reconstruction in spiral cone-beam CT at small cone angles.” *SPIE Medical Imaging Conference: Physics of Medical Imaging, 3032*, edited by R. L. Van Metter and J. Beutel. Newport Beach (CA): SPIE, 1997.
- [113] Schaller, S., Flohr T. and P. Steffen. “An efficient Fourier method for 3-D Radon inversion in exact cone-beam CT reconstruction,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 17(2):244–250 (1998).
- [114] Schaller, S. et al. “Exact Radon rebinning algorithm for the long object problem in helical cone-beam CT,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 19(5):361–375 (2000).
- [115] Schaller, S. et al. “Spiral interpolation algorithm for multislice spiral CT- part I: Theory,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 19(9):822–834 (2000).
- [116] Schaller, S. et al. “Novel approximate approach for high-quality image reconstruction in helical cone beam CT at arbitrary pitch.” *Medical Imaging 2001: Image Processing, 4322*, edited by M. Sonka and K. M. Hanson. 113–127. S. Diego (CA): SPIE, 2001.
- [117] Schomberg, H. “A Fourier-filtered backprojection algorithm for cone-beam CT.” *International Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*. 184–188. 2005.
- [118] Schomberg, H. and J. Timmer. “The gridding method for image reconstruction by Fourier transformation,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 14(3):596–607 (1995).
- [119] Sedarat, H. and D. G. Nishimura. “On the optimality of the Gridding Reconstruction Algorithm,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 19(4):306–317 (2000).
- [120] Segars, P., Lalush D. S. and B. M. W. Tsui. “Development of an interactive software application to model patient populations in the 4D NURBS-based cardiac torso phantom.” *Nuclear Science Symposium*, 3. 20–51/20–55. IEEE, 2000.

- [121] Segars, W. P., Lalush D. S. and B. M. W. Tsui. “A Realistic Spline-Based Dynamic Heart Phantom.” *IEEE Medical Imaging Conference*, 2. 1175–1178. Toronto: IEEE, 1998.
- [122] Segars, W. P., Lalush D. S. and B. M. W. Tsui. “Modeling respiratory mechanics in the MCAT and spline-based MCAT phantoms,” *IEEE Trans. on NSci.*, 48(1):89–97 (2001).
- [123] Segars, P. *Development of a new dynamic NURBS-based cardiac-torso(NCAT) phantom*. PhD dissertation, The University of North Carolina, 2001.
- [124] Shepp, L. A. and B. F. Logan. “The Fourier reconstruction of a head section,” *IEEE Trans. on NSci.*, NS-21(3):21–43 (1974).
- [125] Silva, Augusto M. F. *Problemas de reconstrução de imagem em tomografia dinâmica com raios X*. PhD Thesis, Universidade de Aveiro, 1999.
- [126] Smith, B. D. “Image reconstruction from cone-beam projections: necessary and sufficient conditions and reconstruction methods,” *IEEE Trans. on Med. Imaging*, MI-4(1):14–25 (1985).
- [127] Stierstorfer, K., Flohr T. and H. Bruder. “Segmented multiple plane reconstruction: a novel approximate reconstruction scheme for multi-slice spiral CT,” *Physics in Medicine and Biology*, 47(15):2571–2581 (2002).
- [128] Stierstorfer, K. et al. “Weighted FBP - a simple approximate 3D FBP algorithm for multislice spiral CT with good dose usage for arbitrary pitch,” *Physics in Medicine and Biology*, 49:2209–2218 (2004).
- [129] Taguchi, K. and H. Aradate. “Algorithm for image reconstruction in multi-slice helical CT,” *Med. Phys.*, 25(4):550–561 (1998).
- [130] Tam, K. C., “Three dimensional computerized tomography scanning method and system for large objects with small area detectors.”
- [131] Tam, K. C., Samarasekera S. and F. Sauer. “Exact cone beam CT with a spiral scan,” *Physics in Medicine and Biology*, 43:1015–1024 (1998).
- [132] Terry, J. A. *A comparison of three collimator designs for cardiac SPECT imaging*. PhD thesis, North Carolina, 1992.
- [133] Turbell, H. *Three-dimensional image reconstruction in circular and helical computed tomography*. Licentiate, Linköping, 1999.
- [134] Turbell, H. *Cone-beam reconstruction using filtered backprojection*. PhD Thesis, University of Linköping, 2001.
- [135] Turbell, H. and P.-E. Danielsson. “An improved PI-method for reconstruction from helical cone-beam projections.” *IEEE Nuclear Science Symposium*, 2. 865–868. Seattle, WA, USA: IEEE, 1999.
- [136] Tuy, H. K. “An inversion formula for cone-beam reconstruction,” *SIAM J. Appl. Math.*, 43(3):546–552 (1983).

- [137] Wang, G., Cheng P. and M. W. Vannier. "Spiral CT: Current status and future directions." *Developments in X-Ray tomography*,3149. Proceedings of SPIE, edited by U. Bonse. 203–212. San Diego, California: SPIE - The International Society for Optical Engineering, 1997.
- [138] Wang, G. and M. W. Vannier. "Helical CT image noise - analytical results," *Med. Phys.*, 20(6):1635–1640 (1993).
- [139] Wang, G. and M. W. Vannier. "Optimal Pitch in Spiral CT," *Med. Phys.*, 24:1635–1639 (1997).
- [140] Wang, G. et al. "A general cone-beam reconstruction algorithm," *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 12(3):486–496 (1993).
- [141] Ware, A. F. "Fast approximate Fourier transforms for irregularly spaced data," *SIAM Rev.*, 40(4):838–856 (1998).
- [142] Webb, S. "Historical experiments predating commercially available computed tomography," *Br. J. Rad.*, 65:835–837 (1992).
- [143] Whiting, B. R. "Signal statistics in X-ray computed tomography." *Medical Imaging 2002: Physics of Medical Imaging*,4682. Proceedings of SPIE, edited by L. E. Antonuk and M. J. Yaffe. 53–60. S. Diego CA: SPIE, 2002.
- [144] Wilting, J. E. "Technical aspects of spiral CT," *Medica Mundi*, 43(1):34–43 (1999).
- [145] Xiao, S., Bresler Y. and D. Munson. "Fast Feldkamp algorithm for cone-beam computer tomography." *International Conference on Image Processing, ICIP-2003*2. 819–822. 2003.
- [146] Yan, X.-H. and R. Leahy. "Cone beam tomography with circular, elliptical and spiral orbits," *Physics in Medicine and Biology*, 37(3):493–506 (1992).
- [147] Yu, H. and G. Wang. "Feldkamp-type VOI reconstruction from super-short-scan cone beam data," *Med. Phys.*, 31(6):1357–1362 (2004).
- [148] Yu, H., Ye Y. and G. Wang. "Practical cone-beam lambda tomography," *Med. Phys.*, 33(10):3640–3646 (2006).
- [149] Yu, H., Zhao S. and G. Wang. "A differentiable Shepp-Logan phantom and its applications in exact cone-beam CT," *Physics in Medicine and Biology*, 50:5583–5595 (2005).
- [150] Zhao, S. and G. Wang. "Feldkamp-type cone-beam tomography in the wavelet framework," *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 19(9):922–929 (2000).