

## Interaction hydrodynamique de deux capsules en écoulement dans un pore cylindrique

Yannick Lefebvre, Dominique Barthès-Biesel

UMR CNRS 6600, Biomécanique et Génie Biomédical  
Université de Technologie de Compiègne, BP 20529  
60205 Compiègne, France  
yannick.lefebvre@utc.fr

### Résumé :

*La présence de plusieurs capsules en écoulement dans un pore cylindrique peut conduire à des interactions hydrodynamiques importantes qui altèrent la déformation de chaque capsule. On considère le cas de deux capsules s'écoulant dans un tube et on étudie l'influence de la distance les séparant sur leur niveau d'interaction.*

### Abstract :

*The flow of several capsules into a narrow cylindrical pore may lead to strong hydrodynamic interactions that modify their deformation. We study the flow of two capsules in a tube and determine the effect of capsules separation length on interaction level.*

### Mots-clefs :

**Capsules ; Interactions hydrodynamiques ; Distance de séparation**

### 1 Introduction

L'écoulement d'une seule capsule à l'intérieur d'un pore cylindrique est désormais bien connu et les paramètres qui le gouvernent sont le rapport entre le rayon  $a$  de la capsule à l'état de référence et celui du tube  $R$ , le nombre capillaire  $\varepsilon$  traduisant la force de l'écoulement, le pré-gonflement ainsi que la loi de comportement attribuée à la membrane (Quéguiner & Barthès-Biesel 1997, Diaz & Barthès-Biesel 2002, Lefebvre & Barthès-Biesel 2006). A l'heure actuelle, la plupart des études numériques traitant des microcapsules ne considèrent que l'écoulement d'une seule capsule. L'interaction de plusieurs capsules a été très peu étudiée, notamment en espace confiné. Cela est à la fois dû à la complexité des interactions, et aussi pendant longtemps à un manque de ressources informatiques. Pourtant, il existe de nombreuses situations dans lesquelles plusieurs capsules sont en écoulement dans le même pore. C'est par exemple le cas dans le système microcirculatoire de l'homme, où les globules rouges circulent dans des vaisseaux, sont convectés par le sang et servent à l'oxygénation de l'organisme. C'est aussi le cas pour les suspensions de particules, où là encore le nombre d'entités mises en jeu est important.

Le modèle numérique élaboré par Lac *et al.* (2007), qui ne considèrent que l'écoulement de deux capsules de même taille en cisaillement simple, ne prend pas en compte un effet de parois. Les formes prises par les capsules soumises à un champ de cisaillement simple sont totalement différentes des formes en « parachute » lorsque les capsules s'écoulent dans des tubes. Les interactions hydrodynamiques n'ont donc pas lieu de la même façon. A l'heure

actuelle, il existe très peu d'études traitant de l'écoulement de plusieurs capsules en espace confiné. Récemment, Pozrikidis (2005) a étudié le mouvement axisymétrique d'un train périodique de globules rouges de même taille en écoulement dans des capillaires. Il montre le rôle crucial du rayon du capillaire, donc de la taille des globules rouges, et de l'espacement entre les globules sur la forme que ces derniers sont susceptibles de prendre.

Ces conclusions incitent à étudier l'écoulement de plusieurs capsules dans un pore cylindrique. Les résultats présents dans la littérature mettent en évidence le rôle important du nombre capillaire, de la distance séparant les capsules traduisant leur degré d'interaction, et de la taille des capsules. Lac *et al.* (2007) et Pozrikidis (2005) n'ont pas traité le cas de particules de taille différente. Ici, on considère le cas de capsules de taille identique ou différente, en se focalisant sur l'interaction de deux capsules, ce qui correspond au cas d'une suspension diluée. Dans le cas de capsules de même taille, on recherche la distance minimale qui doit les séparer pour qu'il n'y ait pas d'interaction hydrodynamique. Pour des capsules de taille différente qui ont tendance à former un train, on recherche la perte de charge additionnelle du train.

## 2 Présentation du problème

L'écoulement se fait dans un long pore  $W$  comprenant une entrée hyperbolique suivie d'un tube cylindrique de rayon  $R$  (Fig.1). La surface fluide au bout du tube est notée  $S$ . Le débit volumique  $Q$  est imposé.  $M_1$  est la capsule de tête et  $M_2$  la capsule suiveuse. Les capsules sont sphériques à l'état de référence et on note  $a_1$  et  $a_2$  leur rayon respectif à cet état. On note  $x_{max1}$  et  $x_{max2}$  les abscisses maximales de  $M_1$  et  $M_2$  respectivement. De même, on note  $x_{min1}$  et  $x_{min2}$  leur abscisse minimale. La distance  $e = x_{min1} - x_{max2}$  désigne l'espace entre les deux capsules. Les déformations sont caractérisées par les longueurs axiales  $L_{x1} = x_{max1} - x_{min1}$  et  $L_{x2} = x_{max2} - x_{min2}$ . Les longueurs radiales  $L_{y1}$  et  $L_{y2}$  sont calculées de manière analogue. Les membranes sont infiniment minces, caractérisées par un module de cisaillement de surface  $G_s$  et un module de dilatation de surface  $K_s$ . Elles satisfont la loi de comportement de Skalak *et al.* (1973) dont l'expression des tensions principales  $\mathbf{T}$  est :

$$T_1^{Sk} = \frac{G_s}{\lambda_1 \lambda_2} \left[ \lambda_1^2 (\lambda_1^2 - 1) + C (\lambda_1 \lambda_2)^2 [(\lambda_1 \lambda_2)^2 - 1] \right],$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les rapports principaux d'extension et où l'expression de  $T_2^{Sk}$  est obtenue par interversion des indices 1 et 2. On se place dans le cas  $C = 1$ , pour lequel  $K_s = 3 G_s$ . Une rigidité de flexion, caractérisée par un module surfacique  $B G_s R^2$ , est également prise en compte. L'analyse dimensionnelle du problème montre que le nombre capillaire  $\varepsilon = \mu Q / \pi R^2 G_s$  est un paramètre essentiel, où  $\mu$  désigne la viscosité du fluide externe aux capsules.

Au temps  $t = 0$ , les capsules sont placées dans le tube et espacées d'une distance  $e_0$ . Elles sont centrées sur l'axe de la conduite. La géométrie du problème est donc axisymétrique. Les profils initiaux ont été calculés au préalable quand les capsules sont isolées, à l'état stationnaire. Les fluides interne et externe aux capsules sont newtoniens, incompressibles de même viscosité  $\mu$  et densité. Les écoulements à l'intérieur et à l'extérieur des capsules se font à très petit nombre de Reynolds et sont régis par les équations de Stokes. Les conditions aux limites sur la membrane des capsules sont la continuité des vitesses des fluides intérieur et extérieur et l'équilibre entre les tractions visqueuses  $\mathbf{q}$  et les tensions élastiques  $\mathbf{T}$  dues à la déformation des membranes :

$$\nabla_s \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \nabla_s \text{ étant le gradient surfacique.}$$

A l'entrée et à la sortie du tube, l'écoulement de Poiseuille est établi. Une formulation par intégrales de frontières, permettant de calculer le champ de vitesse  $\mathbf{v}$ , est adoptée pour les écoulements fluides à l'intérieur et à l'extérieur des deux capsules :

$$\beta \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu} \int_{M_1 \cup M_2} \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{q}(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y})$$

$$+ \frac{1}{8\pi\mu} \int_{W \cup S} \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{f}_b(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{v}^\infty(\mathbf{y}) \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dA(\mathbf{y})$$

$$\text{avec } \beta = 1 \text{ si } \mathbf{x} \in M_1 \cup M_2, \beta = 0 \text{ si } \mathbf{x} \in W \text{ et } \beta = \frac{1}{2} \text{ si } \mathbf{x} \in S.$$

Le principe de la modélisation numérique, décrit en détail et validé par Diaz & Barthès-Biesel (2002), repose sur une technique d'interpolation par fonctions B-splines des différentes frontières du domaine, et consiste à suivre les capsules dans leur déplacement dans le pore. On effectue donc un suivi Lagrangien de la position des membranes à chaque instant, ce qui permet d'en calculer les déformations puis d'en déduire les tensions élastiques à chaque pas de temps. Le calcul est effectué dans un référentiel lié à  $M_1$ , et se poursuit jusqu'à ce que les capsules atteignent un état stationnaire dans le tube. Cet état est indépendant de la valeur de la viscosité interne des capsules.

A l'état de référence, les méridiens des capsules sont discrétisées en 60 éléments identiques. L'entrée hyperbolique du tube est discrétisée en 66 éléments dont la densité augmente à l'approche de l'entrée du pore. Le tube et la section  $S$  sont discrétisés en 189 et 34 éléments, respectivement. On utilise un pas de temps  $\Delta t = 3.2 \cdot 10^{-4} t_0$ , où  $t_0$  est le temps caractérisant l'écoulement et vaut  $t_0 = \pi R^3 / Q$ . On contrôle la précision du modèle numérique en vérifiant que la variation du volume des capsules est très petite. On a une variation de volume inférieure à 1% même après 240 000 itérations.

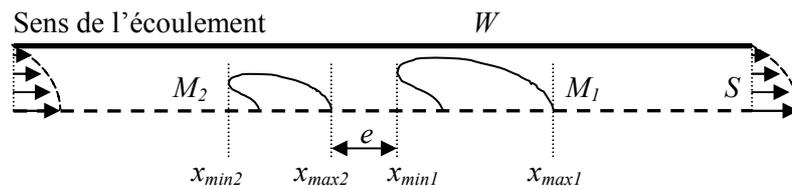


Figure 1 - Interactions hydrodynamiques de deux capsules en écoulement dans un tube cylindrique.

### 3 Résultats

On considère dans un premier temps deux capsules de taille identique  $a_1/R = a_2/R = 0.8$ , puis on étudie le cas de deux capsules de taille différente  $a_1/R = 1$  et  $a_2/R = 0.8$ . Pour tous les cas étudiés, on prend  $\varepsilon = 0.09$  qui correspond à une force d'écoulement modérée.

### 3.1 Capsules de même taille

On considère deux capsules de même taille  $a_1/R = a_2/R = 0.8$ . A  $t = 0$ , on sépare les capsules de trois écarts  $e_0$  différents ( $e_0/R = 0.06$  ;  $0.16$  et  $2$ ) et on étudie l'évolution de  $e$  au cours du temps (Fig.2).

Pour  $e_0/R = 2$  (Fig.2), l'écart séparant les capsules reste constant au cours de l'écoulement. Les capsules n'ont aucune interaction hydrodynamique et se comportent comme si elles étaient seules dans le pore. Pour  $e_0/R = 0.06$  et  $0.16$ , l'écart entre les capsules augmente avec le temps et les capsules s'éloignent donc l'une de l'autre. Pour  $e_0/R = 0.06$ , l'écart  $e$  tend à rejoindre celui correspondant au cas  $e_0/R = 0.16$  et le calcul est arrêté quand les courbes d'évolution se superposent. Pour  $e_0/R = 0.16$ , la pente de la courbe diminue à mesure que  $t$  augmente donc l'écart entre les capsules tend à se stabiliser à une valeur stationnaire  $e_{stat}$ . Afin de déterminer  $e_{stat}$ , on calcule l'exponentielle approchant au mieux la courbe correspondant au cas  $e_0/R = 0.16$ . On détermine un temps caractéristique  $t_c = 44.64 t_0$  et  $e_{stat} = 0.91R$ . La valeur de  $e_{stat}$  correspond donc à l'écart minimum qui doit séparer deux capsules pour qu'elles n'interagissent pas. Quand on augmente le nombre capillaire, c'est-à-dire la force de l'écoulement, ou la taille des capsules ( $a/R = 0.9$  et  $1$ ), on trouve que  $e_{stat}$  reste sensiblement constant et égal à environ un rayon de pore. Ceci est dû au fait qu'à petit nombre de Reynolds, les perturbations créées par une capsule s'évanouissent rapidement, et que l'écoulement de Poiseuille est retrouvé à une distance de la capsule environ égale à un rayon de pore. Ce résultat avait été établi par Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) pour des capsules à membrane neo-hookéenne à partir d'une modélisation moins précise que celle utilisée ici.

On en conclut alors qu'un train de  $N$  capsules séparées par environ un rayon de tube est additif et crée une perte de charge additionnelle égale à  $N$  fois la perte de charge individuelle de chaque capsule, telle qu'elle a été calculée dans différentes configurations par Quéguiner & Barthès-Biesel (1997) et Diaz & Barthès-Biesel (2002).

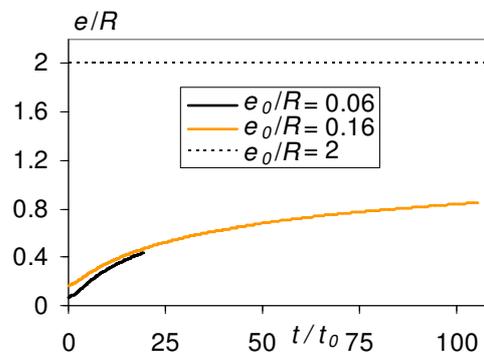


Figure 2 - Evolution temporelle de l'écart  $e$  entre les deux capsules.  $a_1/R = a_2/R = 0.8$  et  $e_0/R = 0.06$  ;  $0.16$  et  $2$ .

### 3.2 Capsules de taille différente

On considère à présent le cas de capsules de taille différente. Dans cette configuration, une petite capsule a une vitesse supérieure à celle d'une grosse. Si elle se trouve en amont de la grosse, elle s'éloignera et aucune interaction hydrodynamique ne se produira. Par contre si elle est en aval, elle rattrapera la grosse capsule et un train se formera. Pour étudier ce phénomène, on considère l'écoulement de deux capsules de taille  $a_1/R = 1$  et  $a_2/R = 0.8$ . Les capsules sont

espacées initialement par  $e_0/R = 2$  et n'ont pas d'interaction. Elles ont donc chacune la forme qu'elles auraient si elles étaient seules dans le pore. Dans le référentiel lié à  $M_1$ , la vitesse de  $M_2$  est positive donc les deux capsules se rapprochent au cours de l'écoulement. La méthode numérique ne pouvant gérer le contact, on arrête le calcul quand la distance minimale entre les deux capsules devient inférieure à un critère de proximité prédéfini (de l'ordre de  $0,01R$ ).

On se focalise sur la phase d'approche des deux capsules. Au cours de cette phase, il apparaît que la plus grande capsule,  $M_1$ , se déforme peu car les longueurs axiale  $L_{x1}$  et radiale  $L_{y1}$  n'évoluent quasiment pas (Fig.3.a,b et Fig.4).  $M_1$  n'est donc pas perturbée par la présence de  $M_2$ . Par contre, en s'approchant de  $M_1$ , la capsule  $M_2$  subit une compression axiale car  $L_{x2}$  subit une diminution significative de l'ordre de 20% (Fig.3.a) et  $L_{y2}$  augmente corrélativement (Fig.3.b). L'interaction se produit quand les capsules sont suffisamment proches, c'est-à-dire pour  $e/R \approx 0.9$ , ce qui correspond à la valeur trouvée précédemment pour des capsules de taille identique.

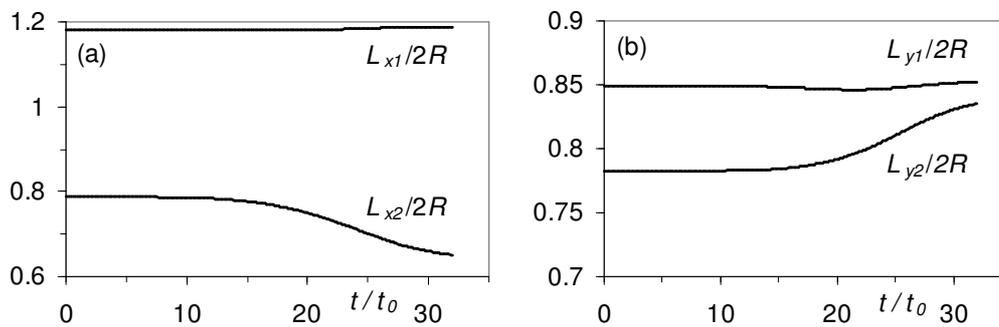


Figure 3 - Evolution temporelle des longueurs caractérisant la déformation des deux capsules.  
 $a_1/R = 1$  et  $a_2/R = 0.8$ .

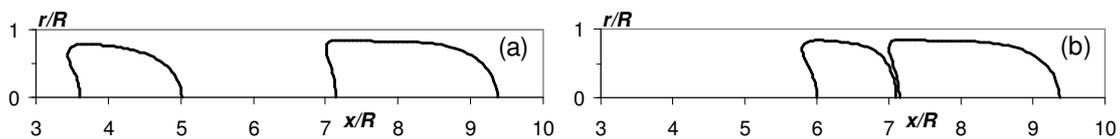


Figure 4 - Profils des capsules. (a) : à l'instant initial. (b) : à l'instant final.

La déformation des capsules s'accompagne d'une modification de la perte de charge additionnelle totale  $\Delta p$ . On compare sur la Fig.5  $\Delta p$  aux pertes de charge  $\Delta p_1$  et  $\Delta p_2$  créée par chacune des capsules isolées. Pour  $t \leq 10 t_0$ , les capsules sont trop éloignées pour interagir et  $\Delta p$  est alors égale à la somme de  $\Delta p_1$  et  $\Delta p_2$ . Pour  $t > 10 t_0$ , la compression de  $M_2$  commence. La longueur axiale  $L_{x2}$  décroît, ce qui provoque une diminution de  $\Delta p$ . En  $t = 23 t_0$ , la longueur radiale de la capsule  $M_2$  augmente, ce qui modifie l'épaisseur du film de lubrification et provoque une augmentation de  $\Delta p$ . A l'instant final, au moment où les deux capsules sont quasiment en contact,  $\Delta p$  est environ supérieure de 2% à la somme de  $\Delta p_1$  et  $\Delta p_2$ . On en conclut que lorsqu'un train de deux capsules se forme, la perte de charge dans la conduite n'est que légèrement supérieure à celle créée par chacune des capsules isolément.

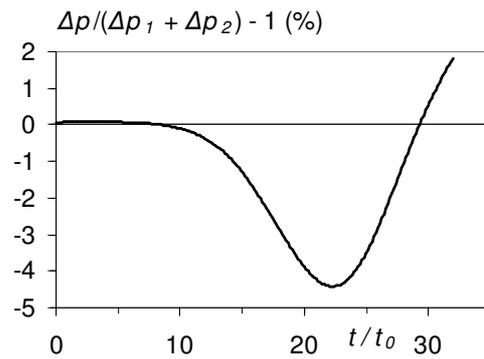


Figure 5 - Variation relative de la perte de charge créée par deux capsules en interaction par rapport à celles créées par chacune des capsules isolées.  $a_1/R = 1$  et  $a_2/R = 0.8$ .

#### 4 Conclusion

Des capsules de taille identique en écoulement dans un pore cylindrique n'interagissent pas lorsqu'elles sont au minimum séparées par environ un rayon du pore. Les pertes de charges créées par le train de capsules sont alors additives. Quand les capsules ont des tailles différentes, une petite capsule rattrape toujours une grosse qui a une vitesse inférieure. Un train de capsules se forme, ce qui cause une perte de charge additionnelle très proche de la somme des celles créées par chacune des capsules isolées. Ce résultat est intéressant car il permet d'évaluer l'écoulement dans un pore d'une suspension non diluée de capsules à partir des résultats obtenus pour une capsule isolée.

#### Références

- DIAZ, A., BARTHÈS-BIESEL, D. 2002 Entrance of a bioartificial capsule in a pore. *CMES* **3** (3), 321-337.
- LAC, E., MOREL, A., BARTHÈS-BIESEL, D. 2007 Hydrodynamic interaction between two identical capsules in shear flow. *J. Fluid Mech.* **573**, 149-169.
- LEFEBVRE, Y., BARTHÈS-BIESEL, D. 2006 Motion of a capsule in a cylindrical tube: effect of membrane pre-stress. Under consideration for publication in *J. Fluid Mech.*
- POZRIKIDIS, C. 2005 Axisymmetric motion of a file of red blood cells through capillaries. *Phys. Fluids* **17**, 031503.
- QUÉGUINER, C. & BARTHÈS-BIESEL, D. 1997 Axisymmetric motion of capsules through cylindrical channels. *J. Fluid Mech.* **348**, 349-376.
- SKALAK, R., TOZEREN, A., ZARDA, R.P. & CHIEN, S. 1973 Strain energy function of red blood cell membranes. *Biophys. J.* **13**, 245-264.