

Stabilité de l'écoulement d'un film mince de fluide visqueux sur une paroi chauffée

Nawel Amatousse, Nadia Mehidi & Mustapha Amaouche

Université A. Mira de Béjaia
Laboratoire de Physique théorique
Route de Targua Ouzemmour Béjaia Algérie
email : amatousse@yahoo.fr

Résumé :

On propose un modèle mathématique permettant une description des instabilités de l'écoulement d'un film mince de fluide visqueux sur une paroi chauffée et inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale. La méthode de calcul combine la technique des résidus pondérés dans la direction normale au film à un développement en gradient des champs de vitesse et de température. Le modèle est un système d'équations différentielle décrivant l'évolution spatio-temporelle de l'épaisseur h du film, du débit local q et de la température à l'interface t .

Abstract :

We propose a model enabling a description of instabilities of a thin viscous liquid film falling down a heated plate. The method combines a gradient expansion of the velocity and temperature fields to a weighted residual method in the direction normal to the plane. The model is a system of coupled evolution equations for the local film thickness h , the local flow rate q and the surface temperature t .

Mots-clefs :

paroi chauffée ; stabilité ; résidus pondérés

1 Introduction

Les écoulements par gravité de films liquides apparaissent dans de nombreux phénomènes naturels (ruissellement des eaux superficielles, écoulement de la lave volcanique ...) mais aussi dans les procédés industriels (réacteurs chimiques, évaporateurs, condenseurs...) et de revêtement (fibres optiques). Les instabilités qui s'y développent sont de deux types : une instabilité d'origine visqueuse (mode de cisaillement) insensible aux effets de la tension superficielle apparaissant à de faibles inclinaisons du plan et à des nombres de Reynolds élevés et une instabilité d'origine gravitaire (mode interfacial) dominée par la capillarité et se produisant à des nombres de Reynolds modérés. Les ondes qui en résultent ont une échelle de longueur beaucoup plus grande que l'épaisseur h du film.

L'étude que nous allons présenter ici se situe dans la continuité des travaux de Ruyer-Quil *et al.* (2005) relatifs à la modélisation de l'écoulement d'un film mince sur une paroi chauffée. Les effets thermogravitaires seront dans notre cas pris en compte. Nous avons élaboré un modèle simple où les seules inconnues sont l'épaisseur du film h , le débit local q et la température à l'interface t .

2 Problème étudié

On s'intéresse au comportement d'un film mince de fluide newtonien, visqueux et incompressible en écoulement sur une paroi chauffée et inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale. On suppose le problème plan, le repère de travail sera alors noté (Oxy) , y étant porté par la normale (ascendante) au plan et x dans la direction de l'écoulement. Cette situation est représentée sur la figure (1).

Le système d'équations décrivant l'évolution de la vitesse $\mathbf{v}(u, v)$, de la température $T(x, y, t)$ et de la pression $p(x, y, t)$ du fluide est constitué par les équations de Navier-Stokes, de conservation de la masse et de l'énergie prises dans l'approximation de Boussinesq.

Pour tenir compte de l'hypothèse de grande longueur d'onde, on introduit le paramètre $\varepsilon = h_N / L \ll 1$ où L est la longueur caractéristique suivant la direction x et h_N l'épaisseur du film non perturbé. Cela nous permettra de négliger les termes d'ordre supérieur à ε^2 dans les équations du mouvement qui sous forme adimensionnelle s'écrivent :

$$\varepsilon u_x + v_y = 0 \quad (1)$$

$$Re \varepsilon (u_t + uu_x + vv_y) = -p_x + 3(1 - GrT) + \varepsilon^2 u_{xx} + u_{yy} \quad (2)$$

$$0 = -p_y + \varepsilon^2 v_{yy} - 3\varepsilon \cot(\theta)(1 - GrT) \quad (3)$$

$$Pr Re \varepsilon (T_t + uT_x + vT_y) = \varepsilon^2 T_{xx} + T_{yy} \quad (4)$$

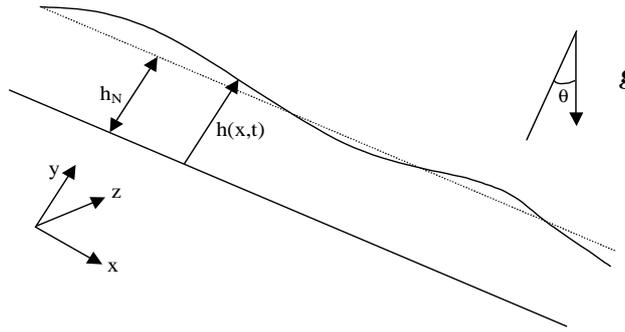


FIG. 1 – Le problème géométriquement

Conditions aux limites cinématiques :

$$\text{Condition de non glissement à la paroi : } u|_0 = v|_0 = 0 \quad (5)$$

$$\text{L'équation qui caractérise l'instabilité s'écrit comme suit : } v|_h = h_t + u|_h h_x \quad (6)$$

Conditions aux limites dynamiques :

$$p|_h = -2\varepsilon^2 h_x (u_y|_h + \varepsilon^2 v_x|_h) + 2\varepsilon^2 v_y|_h - \varepsilon^3 W Rh_{xx} \quad (7)$$

$$u_y|_h = \varepsilon^2 (4h_x u_x|_h - v_x|_h) - Ma Re \varepsilon T_x|_h \quad (8)$$

Conditions aux limites thermiques :

$$\text{La température à la paroi : } T|_0 = 1 \quad (9)$$

$$\text{La loi de Newton s'écrit : } T_y|_h = -BiT|_h - \varepsilon^2 \left(\frac{Bi}{2} T|_h h_x^2 - h_x T_x|_h \right) \quad (10)$$

Les nombres sans dimension R, W, Bi, Ma, Pr sont respectivement les nombres de Reynolds, de Weber, de Biot, de Marangoni, et de Prandtl. Le nombre de Weber est relié à celui de Kapitza Ka par la relation $W = \sqrt[3]{3Ka / R^{5/3}}$. Le nombre adimensionnel Gr rend compte de l'intensité des forces de thermogravité.

Bien que d'ordre ε^3 , la tension superficielle ne pourrait être négligée puisqu'elle détermine la bande de nombres d'ondes instables et assure la validité de l'hypothèse de faible évolution en temps et en espace.

Les équations de Navier-Stokes et de conservation de l'énergie associées aux conditions aux limites admettent une solution stationnaire qui décrit un écoulement parallèle de film d'épaisseur constante où la viscosité compense exactement la gravité :

$$\begin{aligned} U(y) &= 3(1 - Gr) \left[y - \frac{1}{2} y^2 \right] + Gr \left(-3 + \frac{3}{2} \frac{Bi}{1 + Bi} \right) y + \frac{3Gr}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3, \quad V(y) = 0 \\ T(y) &= \frac{1 + Bi(1 - y)}{1 + Bi} \\ h(x, t) &= 1 \end{aligned} \quad (11)$$

3 Le modèle intégral aux résidus pondérés

L'équation (8) montre que $u_y|_h$ est au minimum d'ordre ε , on peut alors réécrire (7) comme suit :

$$p|_h = 2\varepsilon^2 v_y|_h - \varepsilon^3 W R h_{xx} \quad (12)$$

En intégrant (3) entre y et h avec l'aide de (12) et (1), on obtient :

$$p(x, y) = 3\varepsilon B(h - y) - WR\varepsilon^3 h_{xx} - \varepsilon^2 (u_x + u_x|_h) - 3\varepsilon \cot(\theta) Gr \int_y^h T dy \quad (13)$$

En substituant (13) dans (2), on est conduit à :

$$u_{yy} + 3(1 - GrT - \varepsilon \cot \theta h_x) - R\varepsilon \frac{Du}{Dt} + \varepsilon^2 (2u_{xx} + (u_x|_h)_x) + R\varepsilon^3 W h_{xxx} + 3\varepsilon \cot \theta Gr \int_y^h T dy = 0 \quad (14)$$

En utilisant (6), on peut réécrire la condition d'incompressibilité sous la forme intégrale :

$$q_x + h_t = 0 \quad (15)$$

où $q = \int_0^h u dy$ est le débit local.

L'idée de départ d'une méthode de résidus pondérés est de développer la ou les fonctions recherchées, il s'agit ici en l'occurrence des champs de vitesse longitudinale et de température, sur une base tronquée à $N + 1$ fonctions polynomiales qu'on appelle fonctions tests, directement inspirées de celles décrivant l'écoulement de base. $f_i(y)$ désignera celles du champ de vitesse et $ft_i(y)$ celles du champs de température.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{i=0}^{N+1} a_i(x, t) f_i(y/h) \\ T(x, y, t) &= \sum_{i=0}^{N+1} b_i(x, t) ft_i(y/h) \end{aligned}$$

Les composantes scalaires a_i et b_i deviennent les inconnues du problème. Ruyer-Quil et al (2000) ont démontré que pour $i \geq 1$, ces champs sont lentement variables en temps et en espace et n'apparaissent qu'avec la déformation de la surface libre.

Les fonctions de base f_i et ft_i sont choisies a priori en fonction de la connaissance qu'on pourrait avoir de la forme de la solution recherchée, dans le cas présent les conditions aux limites auxquelles elles sont assujetties.

Les profils les plus simples vérifiant toutes les conditions aux limites s'écrivent :

$$u(x, y, t) = a_0(x, t) \left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h^2} \right) + \varepsilon \left[a_1(x, t) \frac{y}{h} + a_2(x, t) \left(\frac{y}{h} - \frac{61}{26} \frac{y^2}{h^2} + \frac{16}{13} \frac{y^3}{h^3} \right) \right]$$

$$T(x, y, t) = b_0(x, t) \left(1 - \frac{Bih}{Bih + 1} \frac{y}{h} \right)$$

où $a_j(x, t) = -MaRT_x|_h$

Les choix possibles pour les fonctions de pondération sont nombreux. Pour la méthode aux résidus pondérés (celle de Galerkin) qu'on a choisi d'utiliser puisque ayant déjà fait ses preuves dans des études similaires (Amaouche *et al* (2005), Ruyer-Quil *et al* (2005)), les fonctions de pondération et les fonctions tests sont identiques.

La projection de (14) et (4) sur les fonctions poids $g_0 = \frac{y}{h} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h^2}$ et $g_{t0} = 1 - \frac{Bih}{1 + Bih}$ respectivement s'écrivent :

$$\int_0^h \left(u_{yy} - R\varepsilon \frac{Du}{Dt} + 2\varepsilon^2 u_{xx} \right) g_0 dy + \left[\varepsilon^2 (u_x|_h)_x + 3(1 - GrT - \varepsilon Bh_x) \varepsilon^2 (u_x|_h)_x + R\varepsilon^3 (W - MaT|_h) h_{xxx} \right. \\ \left. + 3\varepsilon \int_y^h T dy \right] \int_0^h g_0 dy = 0 \quad (16)$$

$$\int_0^h [\text{Pr} R\varepsilon (T_t + uT_x + vT_y) - \varepsilon^2 T_{xx} - T_{yy}] g_{t0} dy = 0 \quad (17)$$

Les résidus (16) et (17) associés à la condition cinématique sous sa forme intégrale (15) formeront un système de trois équations couplées décrivant l'évolution spatio-temporelle de l'épaisseur h du film, du débit local q et de la température à l'interface t .

4 Analyse de stabilité temporelle

Le but de cette analyse est d'étudier la croissance temporelle de petites perturbations spatialement périodiques. Pratiquement, cela revient à introduire dans l'écoulement de base des perturbations de la forme $\delta e^{ik(x-ct)}$ où $\delta \ll 1$, le nombre d'onde k réel et la célérité c complexe. On ne gardera alors dans les équations d'évolution (16) et (17) que les termes du premier ordre en δ . La relation de dispersion $F(k, c, Ma, Gr, Bi, B, \text{Pr}) = 0$ déterminée à partir du système algébrique ainsi obtenu nous permettra après séparation des parties réelle et imaginaire de représenter les courbes de stabilité marginale lieu des points où $\text{Im}(c) = 0$. Les résultats obtenus dans le cas d'un écoulement sur un plan vertical ($\cot \theta = 0$) d'un fluide pour lequel $\text{Pr} = 5$, $Bi = 1$, $Gr = 0.1$, $Ma = 0$, $Ka = 10$ et 100 ont été représentés sur la figure (2).

Nous remarquons que contrairement aux prédictions de l'équation de Benney (voir Scheid *et al* (2005)) et du modèle intégral aux résidus pondérés (MIRP) exposé dans la section 3, le modèle de Shkadov (Shkadov (1967)) - qu'on a bien évidemment adapté à notre cas en introduisant les effets thermocapillaires et thermogravitaires - s'écarte dès le seuil de l'instabilité des résultats de la résolution numérique du problème aux valeurs propres d'Orr-Sommerfeld (OS). Par ailleurs, au-delà du seuil d'instabilité, la courbe de Benney diverge dangereusement alors que le modèle

(MIRP) suit toujours aussi fidèlement la courbe de OS et ce jusqu'à des nombre de Reynolds de l'ordre de la vingtaine pour $Ka = 10$ et de l'ordre de la centaine pour un Kapitza $Ka = 100$.

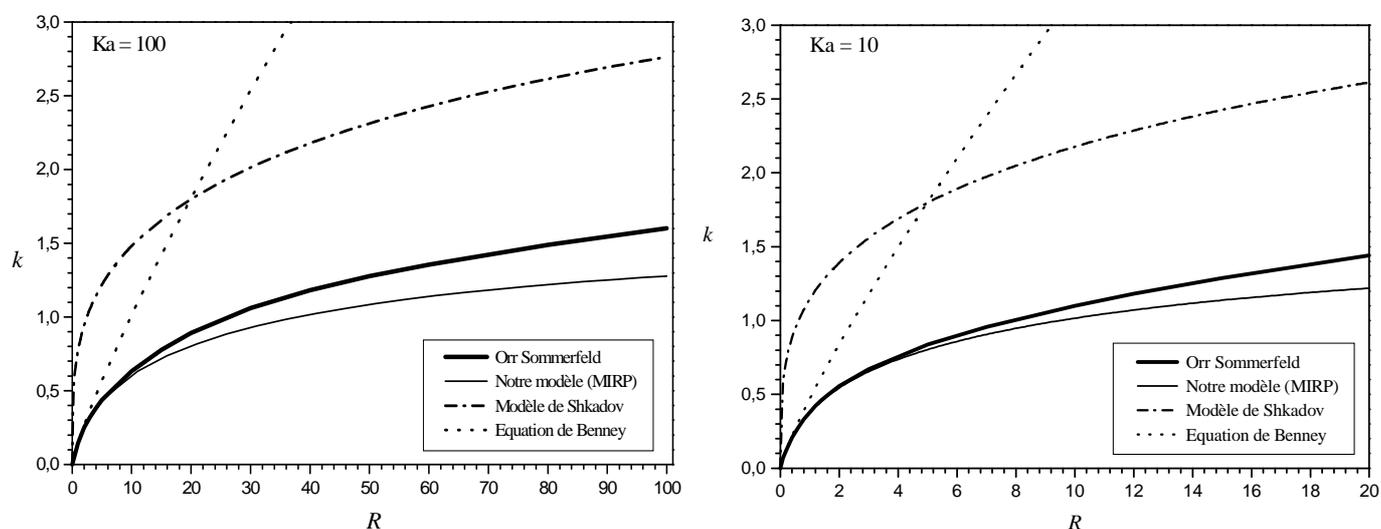


FIG. 2 – Courbes de stabilité marginale : Comparaison entre les prédictions de différents modèles et des résultats de la résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld.

5 Conclusions

La stabilité de l'écoulement d'un film mince sur une paroi chauffée vis-à-vis de perturbations infinitésimales et périodiques en espace a été étudiée. Le modèle intégral aux résidus pondérés élaboré dans le cadre de la théorie des grandes ondes permet d'atteindre avec une bonne précision, les résultats obtenus par ailleurs par une résolution numérique directe de l'équation d'Orr Sommerfeld et ce jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de la centaine pour un Kapitza $Ka = 100$.

Références

- Amaouche, M., Mehidi, N. & Amatousse, N. 2005 An accurate modeling of thin film flows down an incline for inertia dominated regimes. *Eur.J.Mech. B* **24**, 49-70.
- Ruyer-Quil, C. & Manneville, P. 2000 Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B* **15**, 357-369.
- Ruyer-Quil, C. Scheid, B., Kalliadasis, S., Velarde, M.G. & Zeytounian, R.Kh. 2005 Thermocapillary long waves in a liquid film flow. *J. Fluid Mech.* **538**, 199-222.
- Scheid, B., Ruyer-Quil, C., Thiele, U., Kabov, O., Legros, J. & Colinet, P. 2005b Validity domain of the Benney equation including Marangoni effect for closed and open flows. *J. Fluid Mech.* **527**, 303-335.
- Shkadov, V. 1967 Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. *Izv. Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi. Gaz* **2**, **43**, 29-34.