

Déstabilisation de l'écoulement des rouleaux de Taylor par un gradient radial de température

Valérie Lepiller, Arnaud Prigent & Innocent Mutabazi

Jong-Yeon Huang & Kyung-Soo Yang

Université du Havre, LMPG
53 rue de Prony, BP 540, 76058 Le Havre cedex
valerie.lepiller@univ-lehavre.fr

Inha University
Department of Mechanical Engineering, République de Corée

Résumé :

Cette étude expérimentale et numérique traite de l'influence d'un gradient radial de température sur la stabilité des rouleaux de Taylor. Elle montre que l'ajout d'un gradient radial de température déstabilise les rouleaux et une spirale se forme dans la totalité du système. Avec l'augmentation du gradient de température, des dislocations se forment dans l'ensemble du motif.

Abstract :

Both experimental and numerical studies have shown that the Taylor vortices are destabilized by a weak radial temperature gradient and transit to spiral vortices with a small inclination. For a large radial temperature gradient, from Taylor vortices emerges a disordered pattern with some windows of spiral vortices. Spatio-temporal characteristics of resulting pattern are presented.

Mots-clefs :

Système de Couette-Taylor ; instabilité thermo-centrifuge ; rouleaux de Taylor

1 Introduction

L'étude des transferts thermiques dans des écoulements avec lignes de courant courbes constitue un problème crucial de Thermique à cause de son importance dans plusieurs installations industrielles. En effet, les écoulements avec des lignes de courant courbes sont sujets aux instabilités centrifuges qui donnent lieu aux vortex longitudinaux au-delà d'une vitesse critique. Ces vortex longitudinaux favorisent la dispersion et par là-même compliquent le transfert de masse et de chaleur. Plusieurs études théoriques, numériques et expérimentales se sont consacrées à la caractérisation de ces vortex afin de développer des outils de leur contrôle. Les prototypes des vortex longitudinaux issus des instabilités centrifuges sont les vortex de Taylor dans un anneau cylindrique dont le cylindre intérieur est en rotation, les vortex de Dean dans un canal courbe ou les vortex de Görtler dans un écoulement de couche limite sur une paroi concave (Drazin et al (1981)). De par sa simplicité, le système de Couette-Taylor formé par un écoulement confiné entre deux cylindres coaxiaux en rotation différentielle constitue un système modèle pour une étude fondamentale de la dynamique et le contrôle des vortex longitudinaux. Les effets d'un gradient radial de température sur la stabilité d'un écoulement visqueux entre deux cylindres de commun axe vertical ont fait l'objet de plusieurs études théoriques, expérimentales et numériques : Snyder et al (1964); Ball et al (1989); Lepiller et al (2006). Du

point de vue fondamental, le gradient radial de température induit une stratification radiale de masse volumique qui génère un écoulement axial ascendant près de la paroi chaude et descendant près de la paroi froide. Par ailleurs, il introduit une " poussée d'Archimède centrifuge " due à la modification de la force centrifuge. On réalise ainsi un écoulement de base avec deux composantes de vitesse (une composante azimutale due à la rotation et une composante verticale due au gradient radial de température) et une force centrifuge modifiée. La stabilité de cet écoulement dépend d'un grand nombre de paramètres de contrôle : la vitesse de rotation, l'écart de température, la nature du fluide, le rapport des rayons et le rapport d'aspect. Les études expérimentales et numériques les plus abouties ont montré que les modes critiques sont souvent des modes oscillatoires non axisymétriques (Lepiller et al (2006); McFadden et al (2005)). Du point de vue des applications, le système de Couette-Taylor soumis à un gradient radial de température intervient dans plusieurs systèmes, par exemple dans le refroidissement des moteurs de turbine ou des moteurs électriques, dans la technique de croissance cristalline par la méthode de Czorsalski. Nous nous intéressons aux effets induits par le gradient radial de température sur les vortex de Taylor. Nous montrerons que, le gradient radial de température imposé lorsque la vitesse de rotation est supérieure à la vitesse critique induit au bout d'un temps relativement court, des vortex inclinés dérivants le long de l'axe vertical (vortex hélicoïdaux ou spirales). Ce résultat retrouvé aussi dans la simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes sera interprété par le modèle d'interaction d'un vortex avec un écoulement de cisaillement. Dans la section suivante, nous présentons d'abord le système d'équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques et leur méthode de résolution, ensuite nous décrirons le système expérimental et les résultats obtenus. Nous terminerons par une discussion et une conclusion.

2 Formulation du problème

Les équations régissant l'écoulement de vortex de Taylor soumis à un gradient radial de température dans le champ de la pesanteur sont les équations de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, et de l'énergie. En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , elles s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u - \frac{v^2}{r} + \alpha T \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + g \alpha T \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T = \kappa \nabla^2 T \quad (4)$$

où $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}$. u , v et w représentent les composantes de vitesse radiale, azimutale et axiale avec le champ de pression p et de température T , ν , ρ et α sont la viscosité, la masse volumique et le coefficient de dilatation thermique du fluide respectivement. Nous avons négligé la dépendance des propriétés du fluide avec la température à l'exception de la masse volumique dans les termes de poussée d'Archimède verticale et centrifuge qui sont responsables de la déstabilisation de l'écoulement. Les conditions aux limites cinématiques sont l'adhérence aux parois latérales $r = a$, $r = b$ et aux bases inférieure $z = 0$ et supérieure $z = L$. On suppose que les parois latérales sont maintenues aux températures constantes $T_1 = T(r = a)$ et $T_2 = T(r = b)$ et les bases du dispositif sont adiabatiques. En introduisant les échelles de

longueur d , de temps d^2/ν , on obtient les paramètres de contrôles sans dimension : le rapport des rayons $\eta = a/b$, le rapport d'aspect $\Gamma = L/d$, le nombre de Taylor $Ta = (\Omega ad/\nu)(d/a)^{1/2}$, le nombre de Prandtl et le nombre de Grashof $Gr = \alpha\Delta Tgd^3/\nu$.

3 Résolution numérique

Le système d'équations est discrétisé par la méthode de volumes finis dans un système de coordonnées généralisées. Pour le champ de vitesse, la méthode précise de différence centrale est utilisée pour la dérivée spatiale. Pour la température, le schéma QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) est employé pour les termes convectifs. Un schéma hybride est utilisé pour les dérivées temporelles, les termes non linéaires sont explicitement calculés par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3, les autres termes sont implicitement calculés par le schéma de Crank-Nicholson. Une méthode de fractionnement par étapes est utilisée pour découpler l'équation de continuité des équations de conservation de la quantité de mouvement. L'équation résultante de Poisson est résolue par la méthode de grille multiple. L'algorithme numérique utilisé dans le code de calcul est décrit dans l'article de Rosenfeld et al (1991). La figure 1 montre le système de grille utilisé dans cette étude. Les figures 1-a et 1-b montrent les domaines de calcul dans des sections en $z = const$ et en $\theta = const$. La première étape a consisté à retrouver les vortex de Taylor dans le cas isotherme pour $Ta = 50$ juste au dessus du seuil $Ta_c = 47$. Avec un gradient radial de température, nous avons observé la formation d'un écoulement spiralé dont les champs de vitesse et de température sont illustrés sur la figure 2. Ces champs présentent une variation temporelle et spatiale caractéristique d'un écoulement hélicoïdal. Ce résultat est en accord avec les résultats expérimentaux, même si par commodité, nous avons choisi un rapport d'aspect plus petit que celui utilisé dans les expériences. Nous avons calculé le couple agissant sur le cylindre intérieur et la conductivité thermique équivalente (nombre de Nusselt), ils sont faiblement affectés par le gradient radial de température pour de faibles écarts de température.

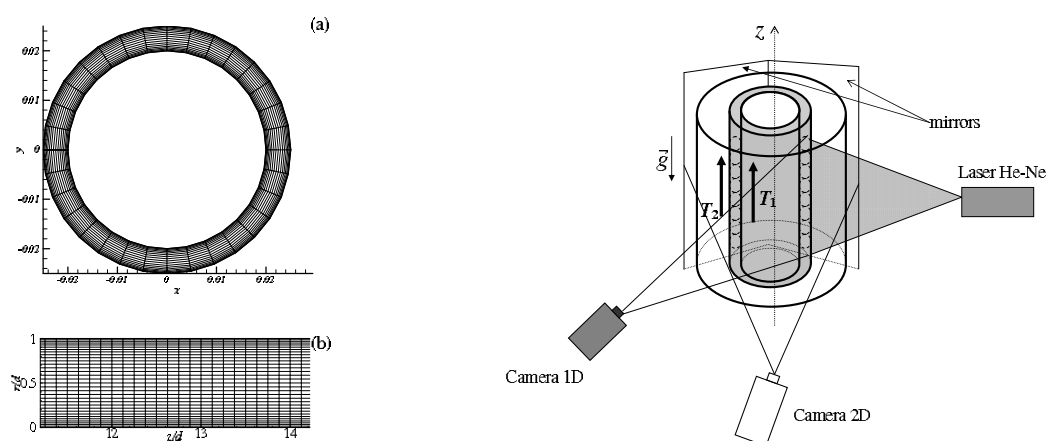


FIG. 1 – A gauche : domaine de calcul et système de multigrille (a) section droite du cylindre, (b) section méridionale. A droite : schéma du dispositif expérimental

4 Dispositif expérimental

L'écoulement est confiné dans l'entrefer entre deux cylindres de commun axe vertical dans le champ de la pesanteur. La largeur de l'entrefer est $d = 0,5$ cm et sa longueur $L = 57$ cm

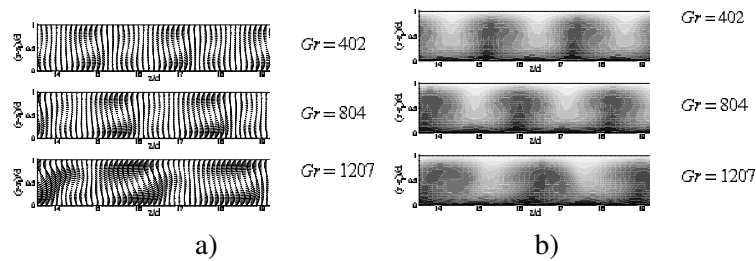


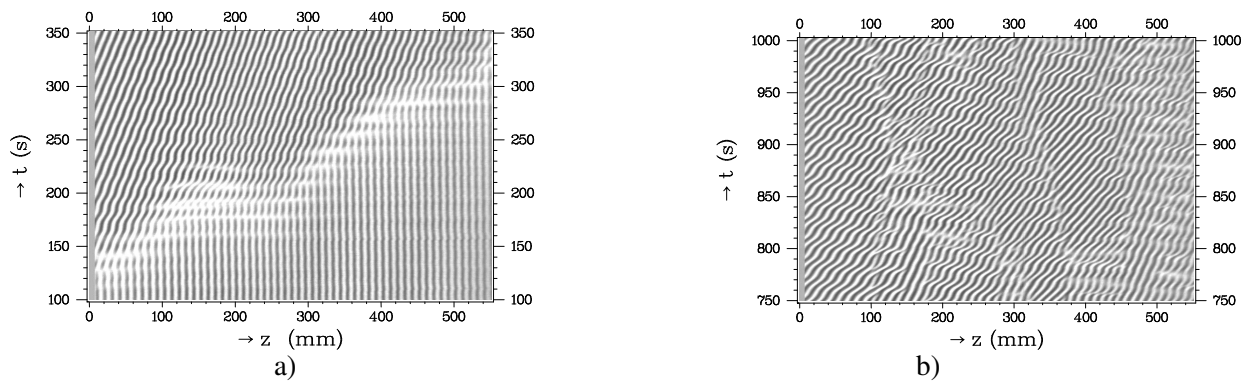
FIG. 2 – a) Champ instantané de vitesse radiale, b) Champ instantané de température pour $Ta = 50$, $Pr = 5, 5$.

(Fig.1). Le cylindre intérieur est un tube en Aluminium dont le rayon extérieur est $a = 2$ cm. Le cylindre extérieur est en verre avec un rayon intérieur $b = 2,5$ cm et une épaisseur $e = 0,5$ cm. Ainsi le rapport d'aspect est $\Gamma = 114$ et le rapport des rayons est $\eta = 0,8$. Nous avons utilisé de l'eau déminéralisée à laquelle nous avons ajouté 2% d'une solution aqueuse de Kalliroscope AQ1000 pour visualiser les vortex (Matisse et al (1984)). A travers le tube du cylindre intérieur, on fait circuler de l'eau à la température T_1 à partir d'un bain thermique. Le cylindre extérieur baigne dans un large bac rempli d'eau à la température T_2 . L'écart de température appliqué au fluide dans l'entrefer est donc $\delta T = 0,54(T_1 - T_2)$. Le cylindre intérieur tourne à la vitesse angulaire Ω_m grâce à un moteur électrique, le cylindre extérieur est immobile. Nous utiliserons le nombre d'onde et la fréquence sans dimension : $q = 2\pi d/\lambda$ et $f = fd^2/\nu$. La dynamique des vortex est étudiée à travers la section droite verticale obtenue par un faisceau monochromatique d'un laser He-Ne transformé par une lentille cylindrique en un plan de lumière perpendiculaire à l'axe des cylindres. Une caméra linéaire CCD enregistre à des intervalles de temps égaux l'intensité de lumière. Le signal est représenté sous forme de 256 niveaux de gris. Les lignes ainsi enregistrées sont disposées les unes à la suite des autres et forment un diagramme spatio-temporel (Fig.3).

5 Résultats

Les résultats présentés ont été obtenus pour une température fixe du cylindre extérieur correspondant à un nombre de Prandtl $Pr = 5, 5$. Pour les conditions isothermes avec les caractéristiques géométriques de notre système, la première instabilité a lieu pour $Ta_c = 47$ et donne lieu à des rouleaux axisymétriques, longitudinaux et stationnaires appelés rouleaux de Taylor. Leur nombre d'onde est de $q = 3,12$ ce qui correspond à $\lambda \approx 2d$. Une fois que les rouleaux de Taylor sont établis dans l'entrefer, nous imposons un gradient radial de température en augmentant ou en diminuant la température du cylindre intérieur. Nous constatons que les rouleaux de Taylor deviennent progressivement instables et une spirale apparaît dans la partie inférieure du système avant de se propager dans la totalité du dispositif (Fig.3a).

Les deux types de rouleaux coexistent pendant un temps de durée courte et sont séparés par un front qui présente de nombreuses irrégularités dans le temps et le long de la direction axiale. Le temps de coexistence des rouleaux stationnaires et de la spirale est plus grand que le temps de diffusion et diminue quand le nombre de Grashof augmente (Fig. 4a). Le front a une vitesse $v = dx/dt \approx 0,6$ cm/s > 0 qui est plus grande que la vitesse de diffusion visqueuse $\nu/d = 0,02$ cm/s et plus grande que le maximum de la vitesse induite par le gradient de température $Wa = 2.10^{-2}\Delta T$ cm/s. Lorsque $t \gg \tau$, le motif final est constitué d'une spirale se propageant seulement dans une direction. L'ajout d'un gradient de température augmente la taille des rouleaux (Fig.4b) et induit une fréquence des rouleaux (Fig.5a). Le nombre d'onde

FIG. 3 – Diagrammes spatio-temporels obtenus pour $Ta = 50$ et a) $Gr = -330$, b) $Gr = -1200$

azimutal (Fig.5b), correspondant à l'angle d'inclinaison des rouleaux, prend les valeurs $m = 1$ ($\theta \approx 2$) et $m = 2$ ($\theta \approx 4$).

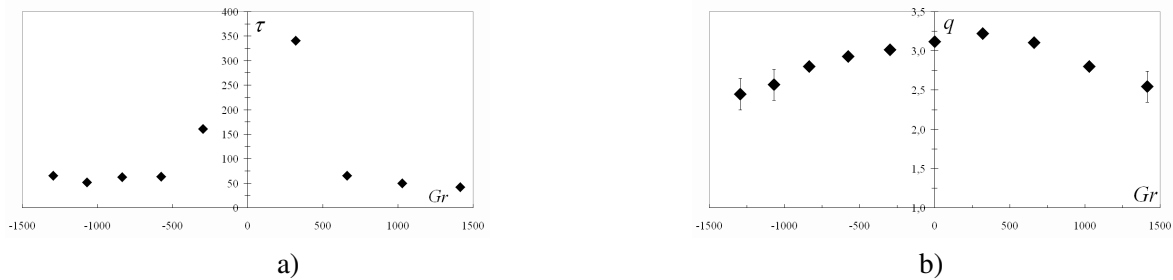


FIG. 4 – a) Temps de coexistence des rouleaux de Taylor et de la spirale, b) Variation du nombre d'onde axial en fonction du nombre de Grashof.

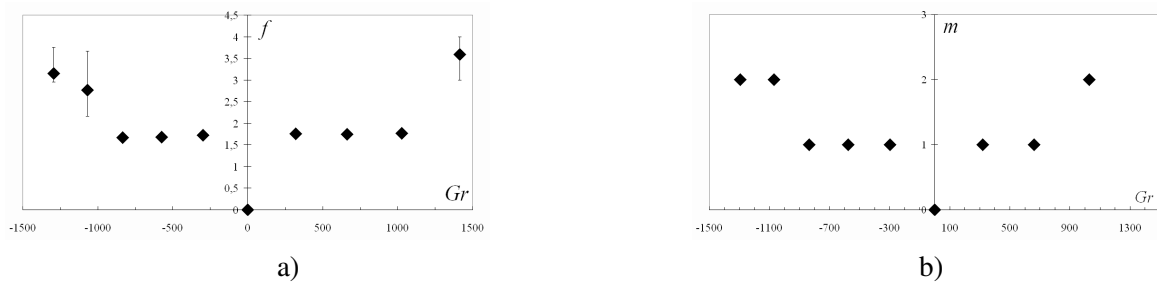


FIG. 5 – Variation de la fréquence (a) du nombre d'onde azimutale (b) en fonction du nombre de Grashof.

Lorsque l'écart de température augmente, le motif devient désordonné avec la présence de nombreuses dislocations ne disparaissant pas au bout de 24 heures (Fig.3b). Le motif a alors un nombre d'onde et une fréquence qui ont de grandes fluctuations dans le temps et l'espace. Ces fluctuations sont la signature de grandes interactions entre la force centrifuge et les effets thermiques, ces derniers peuvent être assimilés à un bruit généré par l'écoulement axial recirculant dans la cavité annulaire.

6 Discussion

L'effet du gradient radial de température sur les vortex de Taylor est triple : il transforme les vortex axisymétriques stationnaires en vortex hélicoïdaux (spirales de Taylor), il introduit une

dépendance temporelle et modifie la taille des vortex. En effet, un gradient radial de température induit une stratification radiale de la masse volumique. Cette stratification donne lieu à un couple de forces qui induit le mouvement axial dans le fluide, ascendant près de la paroi chaude et descendant près de la paroi froide. On a donc un écoulement de vortex de Taylor soumis à un écoulement axial de débit nul.

Nous pouvons donc appliquer localement les résultats de l'analyse de la stabilité linéaire d'un vortex stationnaire de circulation C dans un écoulement de cisaillement (Saffman (1995)). L'écoulement de cisaillement induit par un gradient radial de température a un taux de cisaillement $S = dW/dr$ et une vorticité $\Omega = -dW/dr$. Le mode marginal du vortex est un mode oscillant de nombre d'onde critique $Q = \sqrt{|\Omega C|/\tau}$ et de fréquence $\omega = \Omega\sqrt{3}$ où τ est la tension de ligne du vortex de Taylor par unité de masse. Les résultats expérimentaux donnent des nombres d'onde des spirales inférieurs à celui des vortex de Taylor. L'écart entre les deux nombres d'onde augmente avec le nombre de Grashof. En mesurant cet écart et la fréquence f , on peut déterminer de façon approximative les quantités Ω et l'intensité relative du vortex de Taylor C/τ . L'inclinaison des spirales de Taylor est déterminée par l'hélicité $h = \vec{v} \cdot \text{rot} \vec{v}$ ou plus simplement par le produit $Ta \cdot Gr$.

7 Conclusion

Nous avons montré par des observations directes et des simulations numériques des équations de l'écoulement, que l'écoulement de vortex de Taylor soumis à un gradient radial de température se déstabilise en un écoulement de spirales de Taylor. L'écart de température brise la symétrie axiale et de rotation des vortex de Taylor et introduit une variation temporelle. Cette déstabilisation peut s'interpréter en utilisant l'analyse de stabilité linéaire de l'interaction des vortex avec un écoulement de cisaillement.

Références

- Ali, M.E., McFadden, G.B. 2005 Linear stability of cylindrical Couette flow in the convection regime. *Phys. Fluids* **17** 054112.
- Ball, K.S, Farouk, B., Dixit, V.C. 1989 An experimental study of heat transfer in a vertical annulus with a rotating inner cylinder. *Int. J. Heat Mass Transfer* **32** 1517.
- Drazin, P.G., Reid, W.H. 1981 Hydrodynamic Instability. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lepiller, V., Yoon, D-H., Prigent, A., Yang, K-S., Mutabazi, I. 2006 Mixed convection in a differentially rotating annulus. *Proceedings of ASME* Miami, Florida
- Matisse, P., Gorman, M. 1984 Neutrally buoyant anisotropic particles for flow visualization particles. *Phys. Fluids* **27** 759
- Rosenfeld, M., Kwak, D., Vinokur, M. 1991 A Fractional-Step Solution Method for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations in Generalized Coordinate Systems. *J. Comput. Phys* **94** 102-137.
- Saffman, P.G. 1995 Vortex dynamics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Snyder, H.A., Karlsson, S.K.F. 1964 Experiments on the stability of Couette motion with a radial temperature gradient. *Phys. Fluids* **7** 1696.