

Stabilité des pré-stries générées par une allée de micro-rugosité au sein d'une couche limite laminaire de plaque plane : approches locales et biglobales confrontées à une simulation numérique directe

Estelle Piot & Grégoire Casalis

ONERA DMAE
2 av. Edouard Belin, BP 4025, 31055 Toulouse Cedex FRANCE
estelle.piot@onera.fr

Résumé :

On étudie la stabilité d'une couche limite laminaire de plaque plane en présence d'une allée périodique de micro-rugosités. L'écoulement moyen, stationnaire, est obtenu par une première simulation numérique directe. On y observe des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs, que l'on peut considérer comme des structures de "pré-stries". On étudie la stabilité linéaire de cet écoulement à l'aide de l'approche biglobale. Nous montrons ainsi que les ondes de Tollmien-Schlichting bidimensionnelles classiquement observées dans un écoulement de plaque plane sont modifiées par la présence des pré-stries. Elles se transforment en des ondes fortement tridimensionnelles, qui se propagent avec quasiment la même vitesse de phase que les ondes bidimensionnelles, mais sont moins amplifiées. Dans une seconde simulation numérique directe, des perturbations spatiales de l'écoulement moyen sont forcées par l'interaction d'une onde de Tollmien-Schlichting avec la rugosité. L'approche de stabilité montre que ces perturbations représentent une combinaison des modes propres biglobaux.

Abstract :

The stability of the laminar boundary layer developing on a flat plate in the presence of a periodic row of roughness elements is investigated. The steady flow downstream the roughness elements has been computed by a Direct Numerical Simulation. It consists in two counter-rotating streamwise vortices per element, which can be considered as a "pre-streaky" structure. The linear stability of this base flow is analyzed by means of the biglobal stability approach. Three-dimensional eigenmodes are found, which are shown to be the continuation of the Tollmien-Schlichting waves present in the case of the boundary layer without roughness. Moreover, a stabilizing effect of the roughness-induced vortices is found. A Direct Numerical Simulation of the interaction between a two-dimensional Tollmien-Schlichting wave and the roughness array is also investigated. The computed perturbation travelling downstream the roughness elements is shown to be a linear combination of the biglobal eigenmodes.

Mots-clefs :

Micro-rugosités ; couche limite laminaire ; stabilité linéaire biglobale

1 Introduction

En ces temps de contraintes environnementales et énergétiques croissantes, la diminution de la traînée des avions est une problématique essentielle. Or l'un des points clés de cet enjeu scientifique, le phénomène de transition d'une couche limite laminaire vers la turbulence, bien qu'étudié depuis de nombreuses années, n'est pas encore suffisamment compris pour permettre de le prédire avec précision ou de le contrôler.

Un des sujets sur lequel un important effort scientifique est en cours est l'impact de la qualité de surface de l'aile sur la naissance et le développement des instabilités responsables de la transition de la couche limite. Les travaux de Fransson *et al.* (2006) ont montré que la présence au sein de la couche limite de stries longitudinales engendrées par une allée périodique

de micro-rugosités permet de retarder significativement la transition vers la turbulence, ouvrant ainsi la voie vers une méthode de contrôle passif de ce phénomène.

Nous allons nous intéresser dans ce travail à l'impact sur la stabilité de la couche limite des structures générées dans l'aval proche d'une allée de micro-rugosités. Plus en aval, ces structures vont engendrer les stries longitudinales, c'est pourquoi nous avons décidé de les dénommer "pré-stries". Nous allons étudier un écoulement calculé par simulation numérique directe, sur lequel nous mettrons en oeuvre une approche de stabilité linéaire biglobale. Cela nous permettra non seulement de déterminer les propriétés de stabilité de cet écoulement de pré-stries, mais aussi de montrer que l'analyse de stabilité peut servir à expliquer la physique des phénomènes observés au sein de la simulation numérique directe.

2 Écoulement stationnaire de plaque plane en présence des micro-rugosités

Nous considérons une plaque plane de direction longitudinale x , transverse z , et dont la normale à la paroi est notée y . Cette plaque plane est baignée par un écoulement longitudinal U_∞ , le nombre de Reynolds associé basé sur l'échelle caractéristique de la plaque étant $Re = U_\infty L_x / \nu = 10^5$. On dispose sur la plaque une allée de micro-rugosités à l'abscisse $x_R = 2.471 L_x$, ce qui correspond à un nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement $Re_{\delta_1} = U_\infty \delta_1 / \nu = 855$. Les rugosités sont axisymétriques, leur hauteur étant donnée par $h(x, z) = h_0 \cdot \cos^3(\pi r/d)$ où $h_0 = 0.5 \delta_1$, $d = 16.84 \delta_1$ et r est la coordonnée radiale associée à chaque rugosité.

Etant donné que les rugosités forment une allée périodique dans la direction de l'envergure, nous allons restreindre l'étude au voisinage d'une seule rugosité en utilisant des conditions de périodicité dans la direction z .

Une simulation numérique directe de la configuration présentée a été effectuée par Ulrich Rist et Anke Wörner de l'IAG Stuttgart (voir Wörner (2003); Wörner *et al.* (2003)). Une coupe à mi-hauteur de rugosité de l'écoulement stationnaire obtenu est représentée sur la figure 1. On

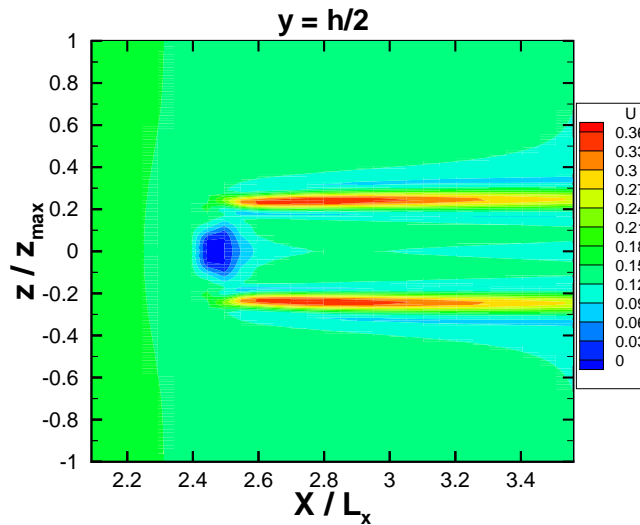


FIG. 1 – Vitesse longitudinale à $y = h/2$. L'axe z est étiré par un facteur 2.38 comparé à l'axe x

peut voir en aval de la rugosité une paire de tourbillons contra-rotatifs. Landahl (1980) a montré que par un effet dit "lift-up", ces tourbillons vont créer plus en aval des stries au sein de la couche limite, c'est-à-dire des structures longitudinales et sinusoïdales dans la direction de l'envergure. C'est pourquoi nous avons décidé de qualifier par la suite l'écoulement qui nous intéresse par

le terme "pré-stries". Nous allons maintenant mettre en oeuvre une étude de stabilité linéaire biglobale sur cet écoulement de base.

3 Formulation de l'analyse de stabilité linéaire biglobale

L'écoulement de pré-stries est fortement inhomogène dans les directions y et z , il n'est donc pas possible d'appliquer l'approche classique de stabilité linéaire, qui suppose que l'écoulement de base ne possède qu'une seule direction d'inhomogénéité. Etant donnée la variation lente de l'écoulement de base dans la direction x , nous pouvons néanmoins toujours utiliser l'approximation dite "parallèle" dans cette direction, et considérer qu'à chaque station en x l'écoulement de base est "gelé", ses dérivées en x étant négligées. On ajoute à l'écoulement de base des petites perturbations de vitesse $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ et de pression \hat{p} , les équations de Navier-Stokes étant alors linéarisées autour de l'écoulement de base. Ce dernier, stationnaire et supposé invariant en x , admet des perturbations \hat{q} sous la forme de modes normaux biglobaux :

$$\hat{q}(x, y, z, t) = q(y, z) \exp i(\alpha x - \omega t) \quad (1)$$

où α représente le nombre d'onde longitudinal et ω la pulsation. La terminologie "biglobale" vient du fait que la fonction d'amplitude q dépend des deux variables y et z . L'utilisation de la forme (1) dans les équations de Navier-Stokes linéarisées conduit à un système d'équation aux dérivées partielles, dont les coefficients dépendent de l'écoulement moyen, des nombres α et ω et du nombre de Reynolds Re :

$$\mathcal{L}\{\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \alpha, \omega, Re\}(u, v, w, p) = 0 \quad (2)$$

La symétrie de l'écoulement moyen par rapport à l'axe $z = 0$ implique que les perturbations solutions du système (2) présentent elles-aussi une parité : u, v et p sont symétriques par rapport à z et w est antisymétrique, ou vice-versa. En utilisant ces propriétés de parité ainsi que la périodicité en z , il est donc possible de ne résoudre le système (2) que pour $z \in [0, z_{max}]$. Sur la plaque et suffisamment loin à l'extérieur de la couche limite, on impose des conditions aux limites homogènes de Dirichlet (sauf pour \hat{p} à la paroi). Il est alors possible de calculer à chaque abscisse x les fonctions propres $q(y, z)$ associées au couple (α, ω) . Pour cela, on discrétise le système (2) sur les points de collocation de Gauss-Lobatto associés aux polynômes de Chebychev. Ensuite, lorsqu'on s'intéressera à un problème de type temporel, avec α réel connu et ω nombre complexe à déterminer, on utilisera une méthode d'Arnoldi pour résoudre le problème matriciel obtenu, et obtenir en une fois le spectre et les fonctions propres associées. Si au contraire on veut étudier la stabilité spatiale, avec donc ω pulsation réelle fixée et α nombre complexe inconnu, on utilisera un algorithme de Newton pour converger sur un mode propre voulu, la méthode d'Arnoldi étant d'utilisation trop coûteuse en taille mémoire.

4 Exploitation des résultats de stabilité biglobaux

4.1 De l'analyse de stabilité biglobale à l'analyse de stabilité locale

Pour comprendre ce que représentent les fonctions propres obtenues par l'analyse de stabilité biglobale, nous avons mis en oeuvre une méthode perturbative sur l'écoulement de base. Nous avons artificiellement créé des écoulements de base pour lesquels l'influence de la rugosité varie :

$$\bar{Q}(y, z) = \bar{Q}_0(y) + \varepsilon \bar{Q}_1(y, z) \quad (3)$$

où $\bar{Q}_0 = \{\bar{U}_0(y) = \bar{U}(y, z_{max}); \bar{V}_0 = 0; \bar{W}_0 = 0\}$ représente l'approximation parallèle de l'écoulement de plaque plane non perturbé par la rugosité (appelé "écoulement parallèle" par la suite),

et $\bar{Q}_1(y, z) = \bar{Q}_{DNS}(y, z) - \bar{Q}_0(y)$ l'écart entre l'écoulement de pré-stries et l'écoulement parallèle. Le paramètre ε quantifie donc l'influence de la rugosité sur l'écoulement de base. Pour chaque valeur de $\varepsilon \in [0, 1]$, on résout le problème de type temporel (voir Piot (2006)).

Les fonctions propres obtenues dans le cas de l'écoulement de base parallèle ($\varepsilon = 0$) évoluent en $q(y) \exp(in\beta z)$ avec $\beta = \pi/z_{max}$, n étant un entier naturel ; la configuration du problème impose en effet une périodicité en envergure égale à $2z_{max}$. On choisit d'appeler par " β_n " les modes associés, qui ne sont rien d'autre que les célèbres ondes de Tollmien-Schlichting (TS), obliques pour $n \geq 1$. Lorsqu'on augmente l'influence de la rugosité, on peut suivre l'évolution de ces modes, que l'on continuera à appeler de la même façon. Comme représenté sur la figure 2 pour le mode β_1 , on observe une modification de la forme de la fonction propre localisée essentiellement dans la région des pré-stries.

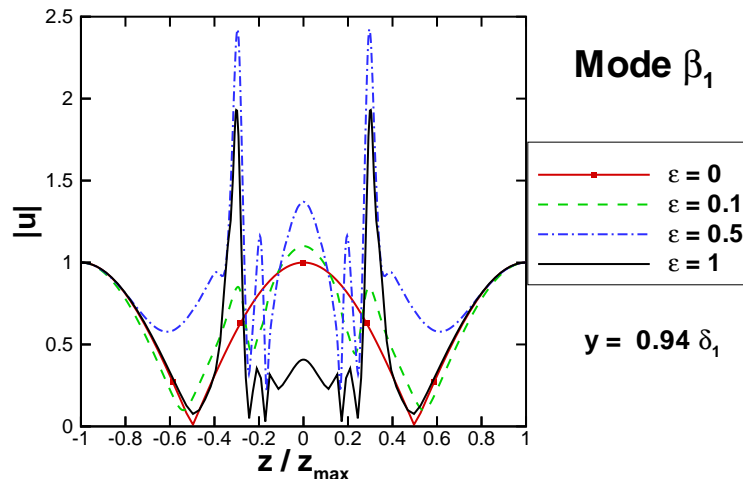


FIG. 2 – Valeur absolue de la perturbation de vitesse longitudinale obtenue par la méthode de stabilité biglobale pour différentes valeurs de ε . L'abscisse vaut $x = 3$. Les différentes fonctions propres ont toutes été normalisées de manière à être unitaires en $z = z_{max}$.

Cette approche nous permet donc de comprendre que les modes propres fortement tri-dimensionnels obtenus par l'approche de stabilité linéaire biglobale sont un prolongement des ondes TS obliques bidimensionnelles, et ce sous l'effet des pré-stries engendrées par la rugosité.

5 Comparaison avec des résultats de simulation numérique directe

Une seconde simulation numérique directe a été effectuée par l'équipe d'U. Rist, au cours de laquelle une onde TS bidimensionnelle était forcée en amont de la rugosité. La fréquence ω de cette onde a été choisie de manière à ce que les rugosités soient localisées au niveau de la branche I du diagramme de stabilité de Blasius. On observe alors en aval de la rugosité un train de perturbations de même fréquence ω se propageant dans la direction x . Nous allons donc calculer les modes propres biglobaux associés à cette fréquence.

5.1 Etude de stabilité biglobale spatiale

L'analyse de stabilité du problème spatial (c'est-à-dire avec ω réel et α complexe) est réalisée à chaque abscisse x , ce qui nous permet de déterminer l'évolution longitudinale des modes propres biglobaux. Lorsqu'on compare cette évolution à celle des modes propres de l'écou-

lement sans rugosité, c'est-à-dire à celle des ondes TS bidimensionnelles obliques, on se rend compte que la longueur d'onde des ondes tri-dimensionnelles est sensiblement la même que celle des ondes TS bidimensionnelles. Par contre, les taux de croissance des modes biglobaux sont inférieurs à ceux des modes dans le cas sans rugosité. Ainsi, la présence des pré-stries engendrées par les rugosités tend à stabiliser les modes d'instabilité de la couche limite. On peut rapprocher cette observation de celle effectuée par Cossu & Brandt (2004) lorsque des stries sont présentes dans la couche limite.

5.2 Combinaison linéaire des modes propres biglobaux

Lorsqu'on compare la fonction propre du mode biglobal le plus amplifié avec celle obtenue par le calcul de simulation directe, on observe des évolutions sensiblement différentes. Cela nous conduit à penser que la perturbation prédite par la simulation numérique directe n'est pas modale mais est plutôt une combinaison linéaire des modes propres de l'écoulement de base. Nous avons alors cherché par la méthode des moindres carrés la combinaison linéaire des modes propres précédemment calculés (de β_0 à β_4) qui permet à $x_0 = 3$ fixé de reproduire au mieux l'évolution spatiale prédite par la simulation numérique directe. Pour étendre ce résultat à d'autres valeurs de x , nous avons ensuite multiplié pour chaque mode propre le coefficient obtenu par le terme d'évolution en x , c'est-à-dire par $\exp(i \int_{x_0}^x \alpha_n(\xi) d\xi)$.

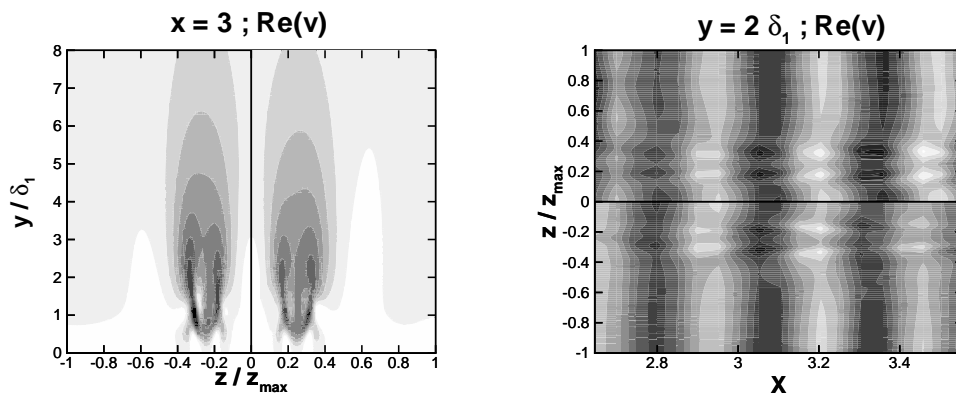


FIG. 3 – Partie réelle de la perturbation de vitesse normale à la paroi. Sur chaque figure $z < 0$ correspond au résultat de la simulation numérique directe, $z > 0$ correspond à la combinaison linéaire de modes propres.

Un exemple de comparaison entre la perturbation calculée par la simulation numérique directe et la combinaison linéaire des modes propres est donné par la figure 3. L'accord est très satisfaisant, que ce soit pour l'évolution dans le plan transverse (y, z) que pour celle dans la direction longitudinale ainsi que pour la longueur d'onde associée, tout du moins pour $x \in [2.8, 3.2]$. Pour des valeurs inférieures de x , les désaccords peuvent s'expliquer par la présence proche de la rugosité, ce qui met en défaut l'hypothèse d'écoulement de base parallèle en x , mais aussi par le fait que les processus de réceptivité qui fixent l'importance de chaque mode propre dans la combinaison totale ne sont pas encore achevés. Pour $x > 3.2$, il semble que la simulation numérique directe ne soit pas encore totalement convergée, et que les effets transitoires perturbent le résultat.

6 Conclusions

Nous avons effectué une analyse de stabilité linéaire biglobale de l'écoulement de pré-stries créé par une allée périodique de micro-rugosités placées au sein d'une couche limite laminaire de plaque plane. Cet écoulement de base, stationnaire, a été calculé par simulation numérique directe. L'approche biglobale permet de calculer les modes propres de stabilité dans chaque plan transverse (y, z) à l'écoulement. En nous aidant d'une méthode perturbative, nous avons montré que les modes biglobaux sont un prolongement des modes bidimensionnels de Tollmien-Schlichting présents dans une couche limite non perturbée par des rugosités. Les modes tridimensionnels biglobaux ont la même vitesse de phase que ces derniers, mais sont moins amplifiés.

Une seconde simulation numérique directe a calculé l'interaction d'une onde TS bidimensionnelle avec les rugosités. Nous avons montré que les perturbations qui en découlent ne sont pas représentées par un seul mode de stabilité, fût-il le plus instable, mais par une combinaison linéaire de l'ensemble des modes propres. L'analyse de stabilité linéaire biglobale nous a ainsi permis de mieux comprendre ce que représentent les résultats des simulations numériques directes.

Nous avons vu que la présence des rugosités permet, via la modification de l'écoulement de base par les pré-stries qu'elles engendrent, de stabiliser chaque mode propre de la couche limite. Cependant, comme nous avons montré que c'est une combinaison linéaire de ces modes propres qui se produit dans les simulations numériques directes, il est légitime de s'interroger sur l'effet stabilisant global. Pour éclaircir ce point, nous comptons mettre en oeuvre une approche de perturbation optimale sur le problème considéré. Ainsi, nous pourrions tout d'abord voir en quoi les perturbations calculées par la simulation numérique directe sont optimales, et en appliquant ce critère d'optimalité à la couche limite non perturbée par les rugosités, voir si l'effet stabilisant des rugosités est effectivement observable. Cela nous permettra d'approfondir notre compréhension de ce phénomène stabilisateur, si prometteur pour les applications de contrôle de traînée.

Références

- Cossu, C., Brandt, L. 2004 On Tollmien-Schlichting-like waves in streaky boundary layers *Eur. Jour. of Mech. B/Fluids* **23** 815-833
- Fransson, J.H.M., Talamelli, A., Brandt, L., Cossu, C. 2006 Delaying transition to turbulence by a passive mechanism *Phys. Rev. Lett.* **96** (6) 064501 1-4
- Landahl, M.T. 1980 A note on algebraic instability of inviscid parallel shear flows *JFM* **98** 243
- Piot, E., Casalis, G. 2006 Stability of the streaks induced by a small roughness placed in a laminar boundary layer : Local, Biglobal stability approaches and DNS *7th ONERA-DLR Aerospace Symposium* Toulouse, France, October 4-6
- Wörner, A. 2003 Numerische Untersuchung zum Entstehungsprozess von Grenzschichtstörungen durch die Interaktion von Schallwellen mit Oberflächenrauigkeiten *PHD thesis* Stuttgart University
- Wörner, A., Rist, U., Wagner, S. 2003 Humps/Steps Influence on Stability Characteristics of Two-Dimensional Laminar Boundary Layer *AIAA Journal* **41** (2) 192-197