

## Modélisation des fissures elliptiques et semi-elliptiques par hybridation des fonctions de poids dans le cas de la fatigue

Brahim-El-Khalil Hachi<sup>1,2</sup>, M'barek Taghite<sup>1</sup>, Mohamed Haboussi<sup>1</sup>, Said Rechak<sup>3</sup>  
& Gérard Maurice<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LEMETA/ ENSEM-INPL, 2 avenue de la Forêt de Haye BP 160 F-54504 Vandœuvre-lès-Nancy, France

<sup>2</sup>C.U. Djelfa, BP 3117 Ain-Cheih, 17000, Djelfa, Algérie

<sup>3</sup>LGMD, Ecole Nationale Polytechnique, BP 182 El-Harrach 16200, Alger, Algérie  
[mohamed.haboussi@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:mohamed.haboussi@ensem.inpl-nancy.fr)

### Résumé :

*Une méthode basée sur l'hybridation de fonctions de poids est utilisée pour décrire la propagation de fissures elliptiques ou semi-elliptiques par fatigue. Une comparaison avec une méthode basée sur les éléments finis montre la pertinence d'une telle approche.*

### Abstract :

*A method based on the hybridization of weight functions is proposed for describing the fatigue growth of elliptical or semi-elliptical cracks. Comparisons with finite element based method shows the efficiency of such approach.*

**Mots-clefs : Fatigue ; Facteur d'intensité de contrainte ; Fonction de poids.**

## 1 Introduction

Nous avons proposé récemment une approche basée sur l'hybridation des fonctions de poids qui permet d'améliorer le calcul du facteur d'intensité de contrainte (FIC) dans le cas des fissures elliptiques et semi-elliptiques soumises à des chargements statiques en mode I (Cf. Hachi et al. (2005, 2006)). Dans ce travail, une extension de cette approche d'hybridation est réalisée dans le cas de la fatigue, afin de simuler la propagation de la fissure sous l'effet de chargements cycliques. On adoptera pour cela de lois de propagation qui sont celles de Paris et al. (1963) et de Sih (1979) associées à la méthode d'hybridation. Une application est proposée pour asseoir la pertinence de telle approche.

## 2 Rappel sur la méthode d'hybridation de fonctions de poids et son couplage avec la PWF

L'expression du FIC pour une fissure elliptique dans un milieu infini, basée sur les fonctions de poids, est donnée par (Oore et al. (1980)) :

$$K_{I_{Q'}} = \int_{(S)} W_{QQ'} q(Q) dS \quad (1)$$

$K_{I_{Q'}}$  représente le facteur d'intensité de contrainte en mode I au point  $Q'$  du bout de fissure,  $q(Q)$ , le chargement au point  $Q$ ,  $S$ , la surface de l'ellipse (voir Figure 1),  $W_{QQ'}$ , la fonction de poids liée au problème. Cette dernière est définie ici par hybridation de deux fonctions de poids. On montre alors qu'il est possible d'améliorer l'évaluation du FIC en restant dans des temps de

calcul comparables voire inférieurs à ceux observés pour les méthodes usuelles. Les deux types fonctions de poids utilisées sont :

$$W_{QQ'} = \frac{\sqrt{2}}{\pi l_{QQ'}^2 \sqrt{\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2}}} \quad (2)$$

$$W_{QQ'} = \frac{2\Pi^{1/4}(\theta)}{\sqrt{\pi a \left(1 - \frac{r^2(\varphi)}{R^2(\varphi)}\right) l_{QQ'}^2 \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2}}} \quad (3)$$

La fonction (2) a été proposée par Oore et al. (1980) pour modéliser toute forme fermée de fissure dans un milieu infini alors que la fonction (3) a été proposée par Krasowsky *et al.* (1999) pour les fissures elliptiques dans un milieu infini.

Dans les expressions (2) et (3),  $r$  et  $\varphi$  représentent les coordonnées polaires du point arbitraire  $Q$ ,  $R(\varphi)$ , la distance entre l'origine  $O$  et le bout de fissure en passant par  $Q$ ,  $l_{QQ'}$ , la distance entre le point  $Q'$  et le point arbitraire  $Q$ ,  $(\Gamma)$ , la courbe de l'ellipse (front de fissure),  $\rho_Q$ , la distance entre le point  $Q$  et le segment infinitésimal  $d\Gamma$ ,  $\theta$ , la position angulaire du point  $Q'$ ,  $\alpha = a/b$ , le rapport entre les axes de l'ellipse et  $\Pi(\theta) = \left( \frac{\sin^2 \theta + \alpha^4 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta} \right)$ , (voir Figure 1).

Partant de l'observation que les fonctions de poids n'ont pas la même efficacité numérique partout à l'intérieur de l'ellipse, l'idée de l'hybridation consiste à utiliser les fonctions (2) et (3), selon leur efficacité, dans deux zones distinctes (I) et (II) de l'ellipse définies par :

$$\begin{cases} \text{zone I : } \left(\frac{x}{b'}\right)^2 + \left(\frac{y}{a'}\right)^2 \leq 1 \\ \text{zone II : } \left(\frac{x}{b'}\right)^2 + \left(\frac{y}{a'}\right)^2 > 1 \end{cases} \quad (4)$$

La séparation de l'ellipse en deux zones est effectuée de manière à minimiser l'erreur relative commise sur le calcul du FIC.

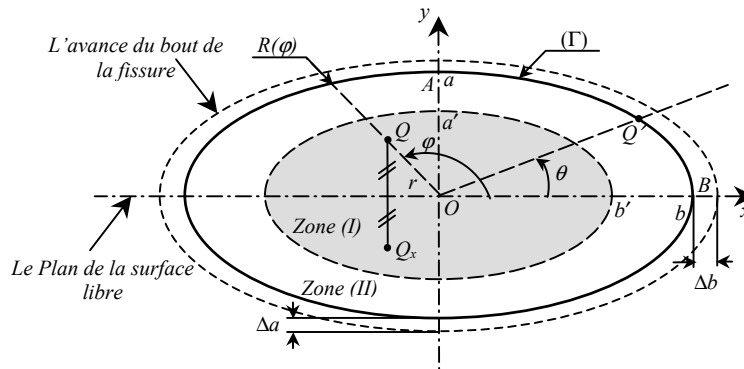


Figure 1 Fissure elliptique

En examinant l'efficacité numérique des fonctions (2) et (3) dans le calcul de (1), le choix suivant a été adopté :

$$W_{QQ'} = \begin{cases} W_{QQ'} \text{ de l'eqn (3) si } Q \in \text{zone I} \\ W_{QQ'} \text{ de l'eqn (2) si } Q \in \text{zone II} \end{cases} \quad (5)$$

Pour simuler les fissures semi-elliptiques débouchantes, nous avons été amené à effectuer un couplage de la méthode d'hybridation avec la PWF (Point Weight Function Method). Celui-ci consiste à chercher l'expression de la fonction de poids  $W_{QQ'}$  sous la forme (Orynyak et al. (1995)) :

$$W_{QQ'} = W_{QQ'}^A + W_{QQ'}^C \quad (6)$$

où  $W_{QQ'}^A$  est la composante asymptotique et  $W_{QQ'}^C$ , la composante correctrice qui permet de prendre en compte l'effet de la surface libre. Les expressions suivantes ont été adoptées pour les deux fonctions :

$$W_{QQ'}^A = W_{QQ'}^{(Ellipse)} \left[ 1 + \left( \frac{l_{QQ'}^2}{l_{Q_x}^2} \right) \left( 1 - \frac{y_{Q'}}{a} \right) \left( 1 - \frac{y_Q}{a} \right) \right] \quad (7)$$

$$W_{QQ'}^C = W_{QQ'}^A \left( 1 - \frac{r}{R} \right) \frac{\min(l_{QQ'}^2, a^2)}{a^2} D(\theta, \alpha) = \overline{W}_{QQ'}^C D(\theta, \alpha) \quad (8)$$

où  $l_{QQ'}$  représente la distance entre le point  $Q'$  et le point  $Q_x$ ,  $W_{QQ'}^{(Ellipse)}$  correspond à la fonction  $W_{QQ'}$  donnée par (5) et  $D(\theta, \alpha)$ , une fonction qui dépend de la géométrie de l'ellipse.

Pour une présentation détaillée de cette approche, on pourra se référer à Hachi et al. (2005, 2006).

### 3 Extension de l'approche d'hybridation à la fatigue

Pour suivre la propagation d'une fissure semi-elliptique, une extension de la méthode d'hybridation est proposée. Cette extension consiste à utiliser la méthode d'hybridation pour calculer les amplitudes  $\Delta K_I$  et  $\Delta S_{\min}$  du FIC en mode I et du facteur de densité d'énergie de déformation apparaissant dans les deux lois de propagation retenues dans cette étude qui sont :

$$da / dN_c = C(\Delta K_I)^m \quad \text{loi de Paris (1963)} \quad (9)$$

$$da / dN_c = C'(\Delta S_{\min})^{m'} \quad \text{loi de Sih (1979)} \quad (10)$$

Dans ces relations,  $da/dN_c$  est la vitesse d'avance de la fissure,  $N_c$ , le nombre de cycle de chargement et  $a$ , une longueur caractéristique de la fissure. Les facteurs  $C$ ,  $m$ ,  $C'$  et  $m'$  sont des constantes propres du matériau dans son environnement liées à chacune des lois de propagation. Les deux amplitudes  $\Delta K_I$  et  $\Delta S_{\min}$  sont exprimées en mode I d'après Barthelemy (1980) comme :

$$\Delta K_I = K_{I(\max)} - K_{I(\min)} = K_I(\sigma_{\max}) - K_I(\sigma_{\min}) \quad (11)$$

$$\Delta(S_{\min}) = S_{\min}(\sigma_{\max}) - S_{\min}(\sigma_{\min}) = \frac{1-2\nu}{4\pi\mu} (K_{I(\max)}^2 - K_{I(\min)}^2) = \frac{1-2\nu}{4\pi\mu} (1-R^2) K_{I(\max)}^2 \quad (12)$$

où  $\sigma_{\min}$  et  $\sigma_{\max}$  sont respectivement la contrainte minimal et la contrainte maximale dans un cycle de fatigue,  $\nu$ , le coefficient de Poisson,  $\mu$ , le module de cisaillement du matériau, et  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$ , le rapport des contraintes.

Dans la procédure de calcul que nous décrivons ci-après, nous avons besoin d'utiliser les lois de Paris et de Sih sous forme incrémentale, à savoir :

$$\frac{\Delta a}{\Delta b} = \left( \frac{\Delta K_I^B}{\Delta K_I^A} \right)^m \quad \text{pour la loi de Paris et} \quad (13)$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta b} = \left( \frac{\Delta S_{\min}^B}{\Delta S_{\min}^A} \right)^{m'} \quad \text{pour la loi de Sih} \quad (14)$$

Ces relations, déduites à partir des équations (9) et (10) en supposant que  $C$  et  $C'$  sont constants, relient les avances  $\Delta a$  et  $\Delta b$  des points A et B du contour de l'ellipse.

La procédure de calcul consiste ; i) à déterminer le FIC en deux points de la fissure  $A$  et  $B$ , ii) d'affecter une avance  $\Delta a_{\max}$  (valeur connue) au point dont le FIC est maximal,  $\Delta a_{\max}$  remplacera alors  $\Delta a$  ou  $\Delta b$  dans les équations (13) et (14) et l'avance  $\Delta a$  ou  $\Delta b$  de l'autre point est déduite. On recalcule ensuite les FIC pour les deux points A et B après prise en compte des changements géométriques de la fissure et on les compare de nouveau. L'avance  $\Delta a_{\max}$  sera affectée toujours au point ayant un FIC maximal et ainsi de suite jusqu'à atteindre la valeur finale de  $a$  ou de  $b$  caractérisant la rupture totale de la structure. Cette approche de calcul est dite à 2 degrés de liberté.

#### 4 Application de l'approche d'hybridation à la prédiction de la propagation d'une fissure dans une pièce à joints de soudure

L'exemple suivant concerne une pièce de structure d'avion présentant des joints de soudure décrite sur la figure 2.

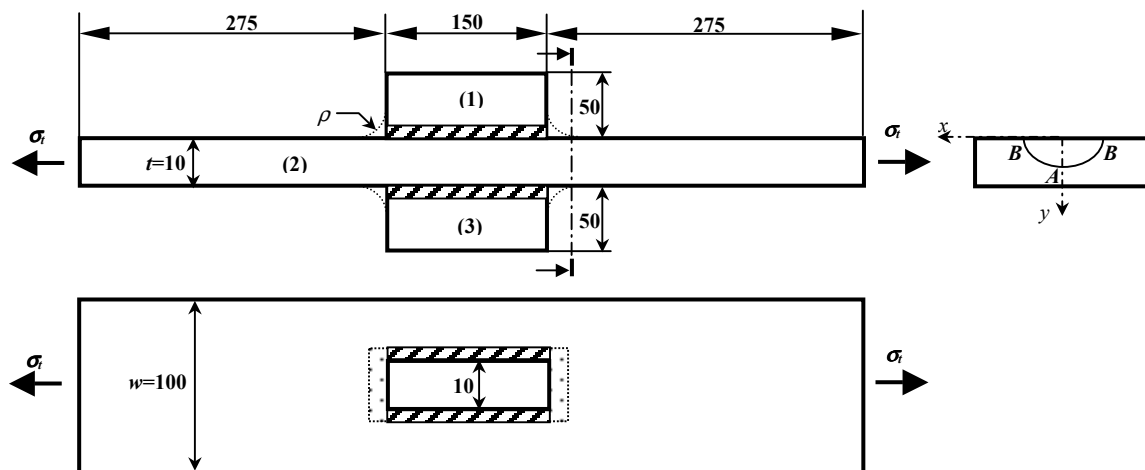


Figure 2 Pièce étudiée dite out-of-plane gusset welded

Sous l'action d'un chargement de traction, l'initiation d'une fissure surfacique sur la portion 2 au voisinage de sa jonction avec la portion 1 ou 3 est très probable à cause de la concentration de contrainte à cet endroit (voir Figure 2). Le problème a été étudié par Choi et Choi (2005) en utilisant la méthode des éléments finis et la loi de propagation de Sih. Deux cas de figure ont été examinés. Dans le premier, les joints de soudure sont présents uniquement sur les grands côtés des portions 1 et 3 (c'est-à-dire le cas où  $\rho=0$ ). Dans le deuxième cas, des joints de soudure de rayon de courbure  $\rho=30\text{mm}$  sur les petits côtés des portions 1 et 3 sont considérés. Au total, les configurations suivantes ont été étudiées :

- i)-  $\rho=0$ ,  $a_0=0.4\text{mm}$ ,  $\alpha_0=0.4$ ,  $\Delta a_{\max}=0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_t=93\text{MPa}$ ,  $R=0.1$ .
- ii)-  $\rho=0$ ,  $a_0=0.4\text{mm}$ ,  $\alpha_0=0.4$ ,  $\Delta a_{\max}=0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_t=124\text{MPa}$ ,  $R=0.1$ .
- iii)-  $\rho=0$ ,  $a_0=0.4\text{mm}$ ,  $\alpha_0=0.4$ ,  $\Delta a_{\max}=0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_t=155\text{MPa}$ ,  $R=0.1$ .

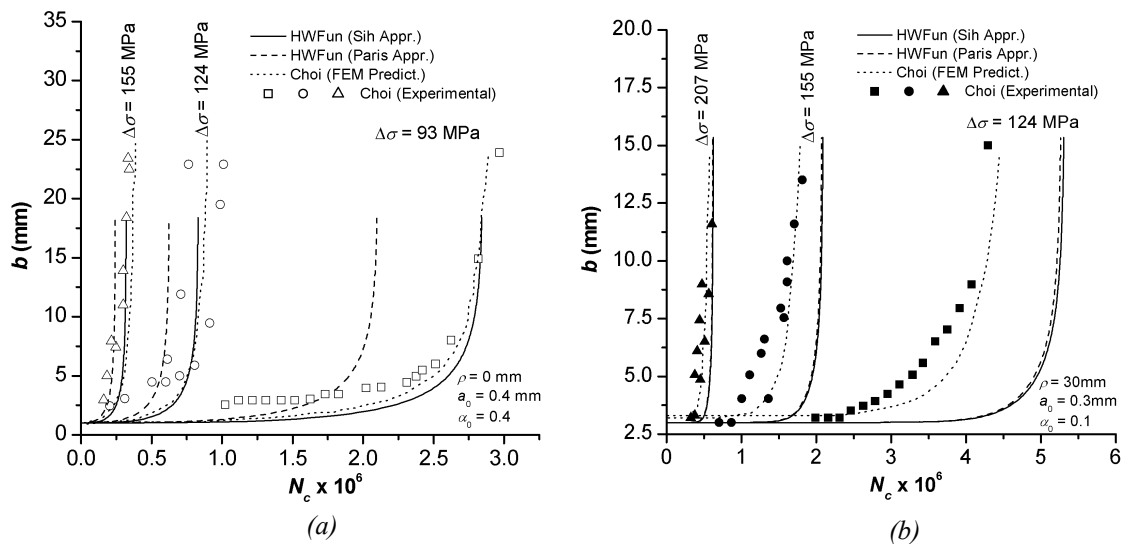
- iv)-  $\rho = 30\text{mm}$ ,  $a_0 = 0.3\text{mm}$ ,  $\alpha_0 = 0.1$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_i = 124\text{MPa}$ ,  $R = 0.1$ .  
v)-  $\rho = 30\text{mm}$ ,  $a_0 = 0.3\text{mm}$ ,  $\alpha_0 = 0.1$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_i = 155\text{MPa}$ ,  $R = 0.1$ .  
vi)-  $\rho = 30\text{mm}$ ,  $a_0 = 0.3\text{mm}$ ,  $\alpha_0 = 0.1$ ,  $\Delta a_{\max} = 0.2a_0$ ,  $\Delta\sigma_i = 207\text{MPa}$ ,  $R = 0.1$ .

La pièce étudiée est en acier appelé POSTEN80 dont le module de cisaillement et le coefficient de Poisson sont respectivement 77GPa et 0.3 d'après Choi et Choi (2005). Les autres paramètres matériau dont nous avons besoin sont reportés dans le tableau I.

**Tableau I** Paramètres de propagation de fissure du POSTEN80 obtenus par Choi et al. (2005).

$\rho$	$\alpha$	$C'$	$m'$	$C \times 10^{-13}$	$m$
0	0.1 - 1.0	0.63	2.11	3.66	4.22
30	0.1 - 1.0	0.11	2.09	0.84	4.18

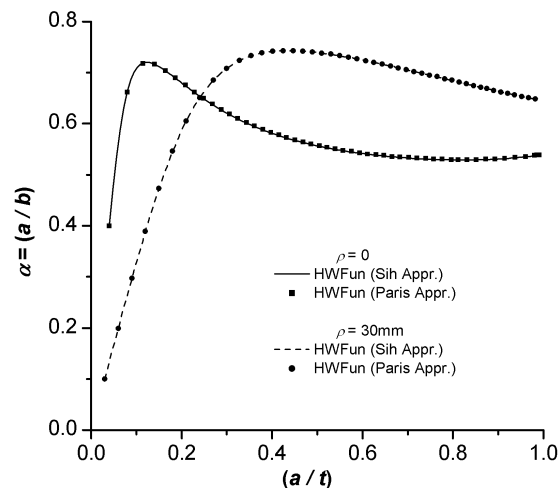
Sur les figures 3a et 3b présentent les résultats de Choi et Choi (2005) (expérimentaux et numériques en utilisant l'approche de Sih) ainsi que les résultats obtenus avec la méthode d'hybridation des fonction de poids associée aux lois de propagation de Sih et de Paris.



**Figure 3** Prédiction du nombre de cycles avec différentes approches :  
(a) pour  $\rho = 0$  - (b) pour  $\rho = 30$  mm

Nous remarquons que :

- 1- Pour la même amplitude de contrainte  $\Delta\sigma_i$ , la pièce a une durée de vie beaucoup plus importante en adoptant une soudure au rayon de courbure  $\rho$  plus grand.
- 2- Toutes nos prédictions basées sur la méthode d'hybridation sont globalement proches des résultats numériques et expérimentaux de Choi et al. (2005) à l'exception de la quatrième configuration ( $\rho = 30\text{mm}$ ,  $\Delta\sigma_i = 124\text{MPa}$ ) où l'écart est significatif entre les résultats de Choi et al. (2005) et nos prédictions obtenues aussi bien avec la loi de Sih qu'avec la loi de Paris.
- 3- Les résultats obtenus avec la loi de Sih, comparés à la loi de Paris, sont globalement plus proches aux mesures expérimentales.
- 4- Pour de faibles valeurs de  $R$  ( $R = 0.1$  par exemple), l'apport de la loi de Sih ne nous semble pas significatif devant de la complexité relative à son utilisation.



**Figure 4** Comparaison des résultats obtenus avec la Loi de Sih et ceux obtenus avec la loi de Paris

## Références

- Barthelemy, B. 1980 Notions pratiques de la mécanique de la rupture, Ed. Eyrolles, Paris.
- Choi, D.H. & Choi, H.Y. 2005 Fatigue life prediction of out-of-plane gusset welded joints using strain energy density factor approach, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* **44**, 17-27.
- Hachi, B.K., Rechak, S., Belkacemi, Y. & Maurice., G. 2005 Modelling of elliptical cracks in infinite body and in pressurized cylinder by a hybrid weight function approach, *Int. J. Press. Vess. Piping* **82**, 917-924.
- Hachi, B.K., Rechak, S., Haboussi, M. & Taghite, M. 2006 Modélisation des fissures elliptiques internes par hybridation de fonctions de poids, *C.R. Mécanique* **334**, 83-90.
- Hachi, B.K., Rechak, S., Ouadjaout, M. & Haboussi, M. 2005 Modélisation des fissures semi-elliptiques par couplage de la méthode d'hybridation de fonctions de poids HWFM avec la méthode fonction de poids du point PWFPM, *session 13 dans le proceeding CFM2005*, Troyes, France.
- Krasowsky, A.J., Orynyak, I.V. & Gienko, A.Yu. 1999 Approximate Closed form Weight Function for an Elliptical Crack in an Infinite Body, *Int. J. Fracture* **99/1-2**, 117-130.
- Oore, M. & Burns, D.J. 1980 Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields. *Transaction of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology* **102/2**, 202-211.
- Orynyak, I.V. & Borodii, M.V. 1995 Point weight function method application for semi-elliptical mode I cracks, *Int. J. Fracture* **70**, 117-124.
- Paris, P. & Erdogan, F. 1963 A critical analysis of crack propagation laws, *Journal of Basic Engineering, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 528-534.
- Sih, G.C. 1979 An introduction to Fracture Mechanics, *Reference Material for the course on Advanced Fracture Mechanics*, Lehigh University, Bethlehem, Pa., USA.