

## Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement à rupture avec modèle des forces cohésives

Hichème FERDJANI<sup>1</sup>, Med Zaïm KHELIFI<sup>1</sup> & Jean-Jacques MARIGO<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Département de mécanique, Université Saad Dahlab, BP 270 Route de Soumaa, Blida Algérie

<sup>2</sup>LMM (UMR 7607), Université Paris VI, 4 Place Jussieu, 75005 Paris

*h\_ferdjani@yahoo.fr*

### Résumé :

*Le but du travail est de montrer, dans le cadre de la mécanique de la rupture avec le modèle de forces cohésives, que les défauts de petite taille devant la longueur caractéristique du matériau ont pratiquement peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure. On traite pour cela deux exemples : le cas d'une plaque pré fissurée, puis le cas d'une plaque contenant une cavité circulaire. Les calculs sont effectués avec la méthode des éléments finis.*

### Abstract :

*The goal of this work is to prove that, within the framework of Fracture Mechanics with the model of cohesive forces, the defects the size of which are small compared to the material characteristic length are practically without influence on the limit loads of structures. For that, we treat two examples : the case of a precracked plate, then the case of a plate with a circular hole. The calculations are made with the finite element method.*

### Mots-clefs :

**rupture ; modèle des forces cohésives ; effet d'échelle**

### 1 Introduction

Les modèles de rupture de forces cohésives présentent l'avantage, sur le modèle de Griffith, de rendre compte de l'amorçage de fissure dans une structure saine en termes d'un critère en contraintes, cf. par exemple Del Piero (1999), Del Piero *et al.* (2001), Charlotte *et al.* (2000) ou Laverne *et al.* (2004). De façon générale, les modèles de force cohésive sont de plus en plus employés et il est donc nécessaire de connaître de mieux en mieux leurs propriétés pour pouvoir les utiliser à bon escient. En particulier les effets d'échelle qui les accompagnent du fait de la présence d'une longueur caractéristique sont mal connus. Il ne s'agit évidemment pas ici de valider le modèle des forces cohésives, ni de voir pour quel type de matériau il peut être utilisé, mais de voir s'il est assez robuste pour que, grâce aux effets d'échelle qu'il induit, la réponse des structures ne soit pas sensible à des défauts de petite taille. Ce résultat a été obtenu par Ferdjani *et al.* (2006), dans le cas du modèle de Dugdale (cf. Dugdale (1960)), pour le cas particulier d'une plaque contenant une fissure ou une cavité circulaire sollicitée en traction simple. L'objectif de cette étude est la généralisation de ce résultat à d'autres modèles de forces cohésives.

Le modèle étudié dans ce travail est une combinaison entre le modèle des zones cohésives continus cf. De Xie *et al.* (2006) et le modèle de Dugdale. Ce modèle ajoute au modèle de Dugdale une zone cohésive continuum (ZCC) dans la partie saine du matériau qui se situe sur le trajet de la fissure. La loi de comportement, donnant la relation entre les forces cohésives et

l'ouverture des lèvres de la fissure, en supposant que l'ouverture se fait en mode I pur, est représentée sur la Figure 1.

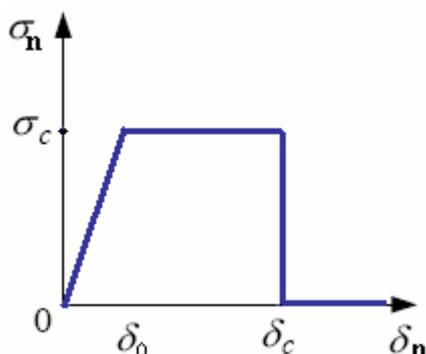


FIG. 1 – Loi de comportement dans le modèle des forces cohésives utilisé

Dans la Figure 1,  $\delta_n$  désigne la discontinuité du déplacement normal,  $\sigma_n$  désigne la contrainte normale d'interaction entre les lèvres de la fissure,  $\sigma_c$  désigne la contrainte critique du matériau,  $\delta_c$  désigne la longueur caractéristique du modèle, et  $\delta_0$  désigne le saut critique de décohésion. La fissure est donc divisée en trois zones représentées sur la Figure 2.

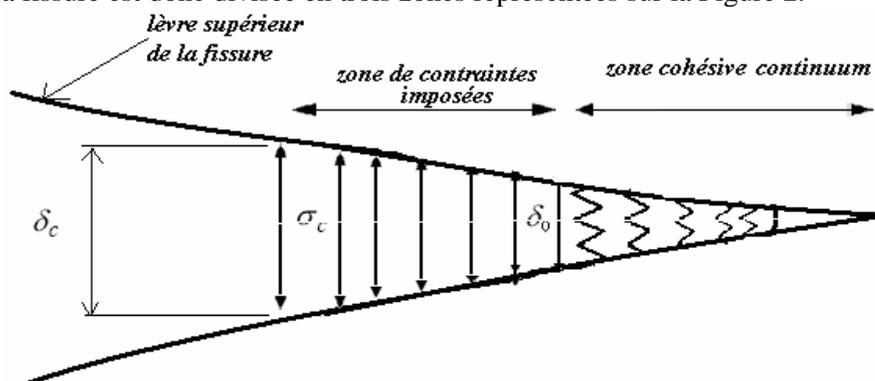


FIG 2 – Les zones de la fissure dans le modèle des forces cohésives utilisé.

Du fait de la présence d'une longueur caractéristique  $\delta_c$  dans le modèle des forces cohésives, les effets d'échelle sont importants. La charge de rupture dépend de façon essentielle du rapport entre la taille du défaut et la longueur caractéristique  $\delta_c$ . Un résultat majeur serait de montrer que, quelle que soit la forme du défaut, la charge de rupture tend vers la contrainte critique  $\sigma_c$  lorsque la taille du défaut tend vers 0, à longueur caractéristique fixée (ou de façon équivalente, lorsque la longueur caractéristique  $\delta_c$  tend vers l'infini, à taille du défaut fixée). Ceci signifierait qu'avec le modèle des forces cohésives, les structures sont insensibles aux petits défauts et se comportent comme des structures saines, et ce bien qu'elles développent des zones d'amorçage avant rupture. On se contentera d'étudier ici les deux cas extrêmes et de montrer qu'une plaque en traction simple est insensible à un petit défaut de type fissure ou cavité circulaire justement en raison des effets d'échelle.

### 3 Position du problème

On considère un milieu bidimensionnel carré  $\Omega = (-L, +L)^2$  de frontière  $\partial\Omega$ , contenant un défaut centré  $D$  de frontière  $\partial D$ . Le milieu  $\Omega$  est soumis sur les faces supérieure  $y = +L$  et inférieure  $y = -L$  à une traction uniforme d'intensité  $\sigma_\infty$  croissante depuis 0. Le défaut considéré  $D$  est un trou circulaire de rayon  $t$  ou une fissure de longueur  $2t$ , cf. Figure 3.

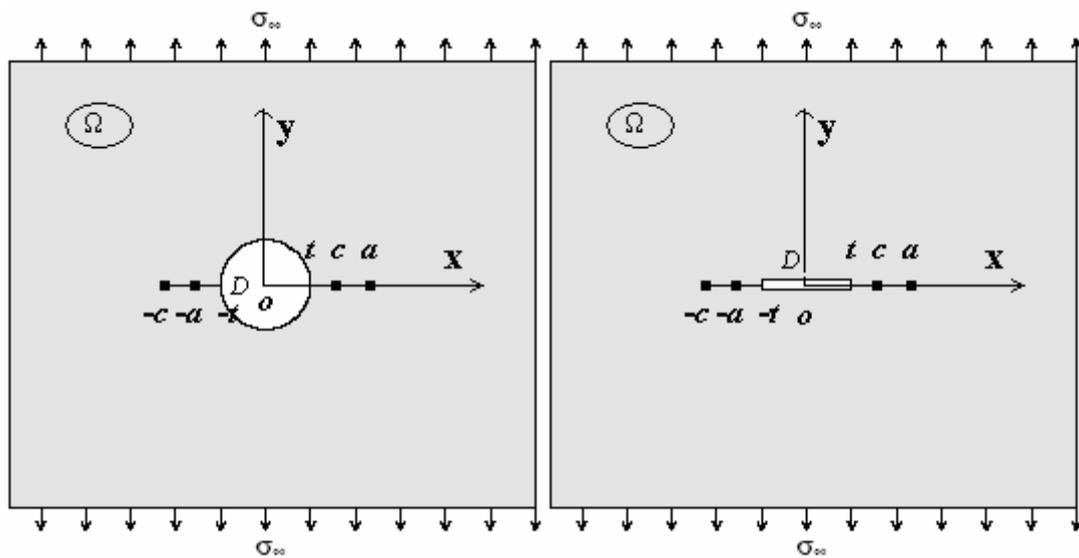


FIG 3 – Géométrie de la plaque trouée et de la plaque fissurée

L'étude est effectuée dans le cadre des contraintes planes. Le matériau est homogène, isotrope et linéairement élastique. Pour des raisons de symétrie, on supposera que la fissuration se développe sur l'axe  $y = 0$  et de façon symétrique depuis les points  $(\pm t, 0)$  du défaut initial. L'évolution de la fissuration suit la loi du modèle des forces cohésives définie dans le section 2, autrement dit les lèvres  $[-L, -t] \cup [t, +L]$  de l'axe  $y = 0$  peuvent comporter trois parties :

1. une zone  $[t, c] \cup [-c, -t]$ , dite *zone non cohésive*, où les lèvres n'interagissent plus,
2. une zone  $[c, a] \cup [-a, -c]$  dite *zone cohésive de contrainte imposée*, où les lèvres sont soumises à des contraintes cohésives de traction d'intensité constante  $\sigma_c$ ,
3. une autre zone  $[a, L] \cup [-L, -a]$ , dite *zone cohésive continuum* et qui s'étend jusqu'au limites du domaine  $\Omega$ .

Les limites entre ces trois zones sont les points  $(\pm a, 0)$  et  $(\pm c, 0)$ . Les valeurs de  $a$  et de  $c$  dépendent évidemment de la valeur de la charge  $\sigma_\infty$ . Compte tenu de la symétrie du problème, toutes les évolutions se feront en mode I pur. Notons que pour certaines valeurs de  $\sigma_\infty$  certaines zones peuvent ne pas exister. On a donc en général  $t \leq c \leq a \leq L$ , les égalités étant possibles. Lors de la mise en charge, les conditions initiales sont  $a = c = t$ .

Les différents critères d'apparition et de propagation de ces zones sont les suivants :

1. La ZCC apparaît dès que la contrainte  $\sigma_{22}$  n'est plus nulle aux points  $x = \pm t$  de l'axe  $y = 0$ , c'est à dire dès la mise en charge.
2. Les points  $x = \pm a$  de la ZCC avancent de telle sorte que l'ouverture de la fissure en ces points  $[v(\pm a)]$  ne dépasse jamais le saut critique de décohéssion  $\delta_0$ .
3. Une zone cohésive de contrainte imposée apparaît et dès lors  $a > c = t$ , lorsque l'ouverture atteint le saut critique de décohéssion  $\delta_0$  aux points  $x = \pm t$ .
4. La zone non cohésive apparaît et dès lors  $a > c > t$ , lorsque l'ouverture atteint la valeur  $\delta_c$  aux points  $x = \pm c$ .
5. Les points  $x = \pm c$  avancent de telle sorte que l'ouverture ne dépasse jamais  $\delta_c$  en ces points.

On peut a priori distinguer trois phases d'évolution de la fissuration lors du processus de chargement :

1) Phase élastique et d'amorçage de la ZCC :  $0 \leq \sigma_x \leq \sigma_a$ .

Durant cette phase, la ZCC s'amorce et la réponse de la structure est purement élastique. Cette phase cesse lorsque l'ouverture maximale de la ZCC atteint le saut critique de décohésion  $\delta_0$ . La valeur de la charge appliquée correspondante est appelée *charge d'amorçage*  $\sigma_a$ .

2) Phase d'amorçage de la zone de forces cohésives à contrainte imposée:  $\sigma_a \leq \sigma_x \leq \sigma_r$ .

Durant cette phase, une fissure se crée mais ne comporte qu'une zone cohésive à contrainte imposée. Au fur et à mesure que l'on augmente le chargement, cette zone grandit et le saut de déplacement normal croît. La valeur de  $a$  est telle que  $[v(\pm a)] = \delta_0$ . Cette phase cesse lorsque l'ouverture maximale dans la zone cohésive à contrainte imposée atteint la valeur  $\delta_c$ . La valeur de la charge appliquée correspondante est appelée *charge de rupture*  $\sigma_r$ .

3) Phase de propagation.

Une fois la charge de rupture atteinte, l'équilibre de la structure ne peut plus être assuré sans que se développe une zone de fissuration non cohésive. Les valeurs de  $a$  et  $c$  sont telles que :

$$[v(\pm a)] = \delta_0 \quad \text{et} \quad [v(\pm c)] = \delta_c$$

## 4 Résultats

Nous étudions le cas d'une plaque carrée de 200 mm de côté comportant un défaut centré de petite taille. Deux types de défauts sont traités : un trou circulaire de rayon égal à 3 mm et une fissure de 6 mm de longueur. Pour des facilités de mise en oeuvre numérique, nous avons choisi d'étudier l'influence de l'effet d'échelle, i.e. du rapport  $\delta_c/t$ , en gardant une dimension constante du défaut et en faisant varier l'ouverture critique  $\delta_c$ . Pour les données matériau, on choisit celles d'un polymère PMMA :  $\sigma_c = 72 \text{ MPa}$ ,  $E = 3000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.36$ ,  $\delta_0 = 0.00402 \text{ mm}$  et  $\delta_c = 0.00804 \text{ mm}$ .

### 4.1 Charge d'amorçage

Nous calculons d'abord la réponse élastique de la structure afin de déterminer la charge d'amorçage  $\sigma_a$  qui est la contrainte appliquée correspondant à une ouverture maximale de la ZCC (au bord du défaut initial) égale au saut critique de décohésion  $\delta_0$ . La charge d'amorçage calculée est égale à 6.48 MPa pour la fissure et à 9.36 MPa pour le trou.

### 4.2 Charge de rupture

La charge de rupture  $\sigma_r$  est la contrainte appliquée correspondant à une ouverture  $[v(\pm a)] = \delta_0$  et  $[v(\pm t)] = \delta_c$ . Nous calculons  $\sigma_r$  pour plusieurs valeurs de la longueur caractéristique  $\delta_c$  ( $\delta_0$  reste fixe). Les valeurs numériques calculées sont représentées dans la Figure 4 dans un diagramme  $\sigma_r$ - $\delta_c$ .

Comme attendu, la charge de rupture est une fonction croissante de  $\delta_c$ , mais on notera que la charge de rupture n'atteint jamais la valeur  $\sigma_c$  quelle que soit la valeur de  $\delta_c$ . C'est dû au caractère fini des dimensions de la plaque. En effet, en utilisant un raisonnement élémentaire de calcul à la rupture, il est facile de voir que la plaque trouée ne peut pas supporter une charge

plus grande que  $(1 - t/L) \sigma_c$  qui correspond à la charge d'équilibre de la plaque lorsque la zone cohésive à contrainte imposée occupe toute la largeur de la plaque. Compte tenu des valeurs numériques choisies, la charge de rupture ne peut donc dépasser  $0.97\sigma_c$ . Notons enfin que si l'on faisait tendre la longueur du défaut vers 0 ou la largeur de la plaque vers l'infini, alors la charge de rupture tendrait vers  $\sigma_c$ .

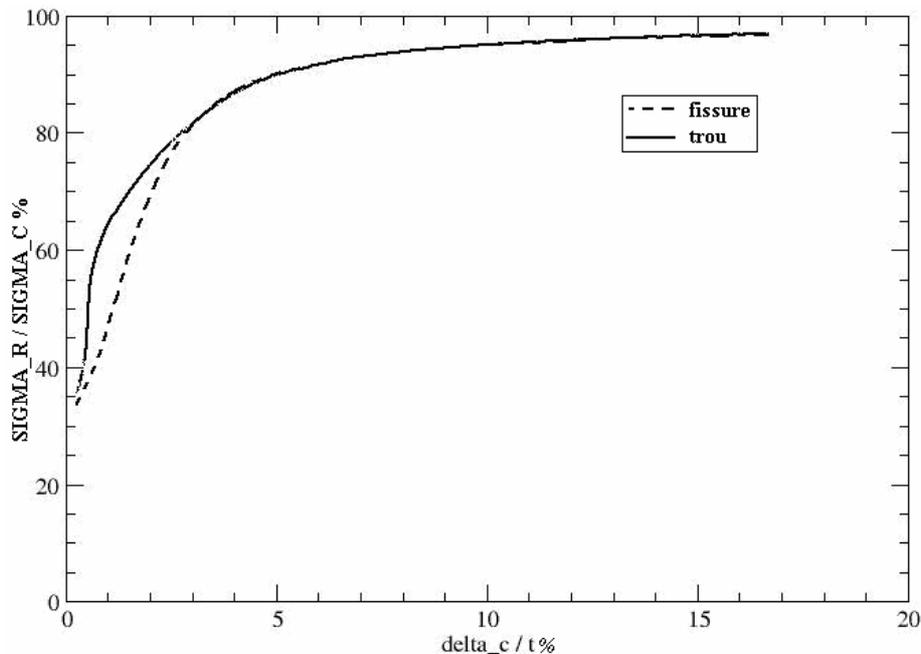


FIG 4 – Dépendance de la charge de rupture avec la taille relative de la fissure initiale

## 5 Conclusion

En comparant les réponses obtenues pour la plaque fissurée et la plaque trouée, on voit que la charge d'amorçage est sensible à la forme du défaut, mais pas à sa taille. Par contre, la charge limite de la structure est très sensible à la taille du défaut, mais peu à sa forme. De plus, on voit que plus le défaut est petit, la longueur de référence étant la longueur caractéristique du matériau introduite dans le modèle des forces cohésives, plus la charge limite se rapproche de la contrainte critique du matériau. Autrement dit, ceci semble indiquer que les défauts de petite taille ont peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure si l'on adopte le modèle des forces cohésives. Ce résultat est identique au résultat obtenu par Ferdjani *et al.* (2006), dans le cas du modèle de Dugdale. Il serait évidemment intéressant de généraliser ce résultat à n'importe quel type de défaut, n'importe quel type de structure et n'importe quel modèle de force cohésive. Cela nécessitera le développement d'outils théoriques et numériques adaptés. Mais on peut considérer que les deux cas traités, extrêmes de par la forme du défaut choisie, et les deux modèles de forces cohésives étudiés sont un gage du caractère générique du résultat.

## Remerciements

Ce travail a été effectué avec le soutien financier de l'OTAN dans le cadre de l'accord PST.MD.CLG 980960, et du CNRS dans le cadre d'un accord de coopération DEF/CNRS.

**Références**

- Charlotte, M., Francfort G., Marigo J.-J. & Truskinovsky L. 2000 Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : comparison of Griffith and Barenblatt surface energy models. In Proceedings of the Symposium on "Continuous Damage and Fracture" (ed. A. Benallal), pp. 7-12. Elsevier, Paris.
- Del Piero G. 1999, "One-dimensional ductile-brittle transition, yielding, and structured deformations", Variations of domain and free-boundary problems in solid mechanics (Paris, 1997), vol. 66 of Solid Mech. Appl., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, p. 203-210.
- Del Piero G., Truskinovsky L., "Macro- and micro-cracking in one-dimensional elasticity", International Journal of Solids and Structures, vol. 38, n° 6, 2001, p. 1135-1138.
- De Xie, Waas A., « Discrete cohesive zone model for mixed-mode fracture using finite element analysis », Engineering Fracture Mechanics 73 (2006) 1783–1796.
- Dugdale D. S., Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8 :100-108, 1960.
- Ferdjani H., Abdelmoula R., Marigo J.-J., « Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement à rupture avec le modèle de Dugdale », Revue Européenne de Mécanique Numérique, Volume 15-n°4/2006, pages 409-425.
- Ferdjani H., Abdelmoula R., Marigo J.-J., « Study of the influence of small size defects on the rupture behavior with the Dugdale model », Third International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics, Hammamet, Tunisia 17-19 Decembre 2006.
- Laverne J., Marigo J.-J., « Approche globale, minima relatifs et Critère d'Amorçage en Mécanique de la Rupture », Comptes Rendus Mécanique, vol. 332, 2004, p. 313-318.