

## Approche numérique pour les structures périodiques. Application au comportement vibratoire d'un pneumatique

Hong-Hai NGUYEN <sup>(1)</sup>, Denis DUHAMEL <sup>(2)</sup> & Silvano ERLICHER <sup>(3)</sup>

*Ecole Nationale des Ponts et Chaussées  
Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification (LAMI)  
6 et 8 avenue Blaise Pascal - Cité Descartes  
Champs-sur-Marne - 77455 MARNE LA VALLEE CEDEX 2  
Email : <sup>(1)</sup> nguyen.hong-hai@lami.enpc.fr  
<sup>(2)</sup> duhamel@lami.enpc.fr  
<sup>(3)</sup> erlicher@lami.enpc.fr*

### Résumé :

*L'approche proposée s'appuie sur la propagation d'ondes et la théorie de la matrice de transfert entre les cellules. Un modèle efficace des éléments finis développé à partir d'une cellule est introduit pour l'application aux structures périodiques totales. Une technique de réduction du système est proposée. Un modèle composite est appliqué dans l'identification des paramètres des matériaux du pneumatique. La réponse en fréquence est présentée dans quelques exemples des structures périodiques simples.*

### Abstract :

*The approach is based on the wave propagation and on the theory of the transfer matrix between the cells. A finite element model developed from a cell is introduced in the application on the total periodical structures. A system reduction technique is suggested. The material parameters are identified by the composite modeling. The frequency response results of some simple periodical structures are presented.*

### Mots-clefs :

**Structures périodiques ; vibration d'un pneumatique ; éléments finis périodiques**

## 1 Introduction

L'objectif de cette étude est de proposer une méthode numérique efficace pour les guides d'ondes et les structures périodiques 1D et de l'appliquer au comportement vibratoire d'un pneumatique sur une large bande de fréquences. La méthode des éléments finis (EF) est utilisée en se basant sur la théorie de propagation d'ondes dans les structures périodiques. Le maillage et donc les matrices de rigidité et de masse d'une cellule sont obtenus par un logiciel EF conventionnel. Les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de transfert entre une cellule périodique et la suivante sont calculés. Les valeurs propres forment une base de fonction qui permet de construire facilement les matrices globales de rigidité et de masse et puis de calculer efficacement la réponse en fréquence. L'avantage principal est que ce modèle EF peut être utilisé pour calculer ces matrices pour des structures avec des géométries et des distributions des matériaux complexes. Ce modèle est appliqué au calcul de la mobilité d'un pneumatique. L'identification des matériaux de la section du pneumatique est nécessaire. Elle permet la construction du modèle EF périodique d'un pneumatique complet à partir de calculs sur une seule cellule périodique. Des exemples de fonctions de réponse en fréquence sont finalement donnés.

## 2 Méthode des éléments finis pour structures périodiques

La méthode consiste à construire les matrices de rigidité et de masse de la structure totale en exploitant les propriétés d'une cellule.

### 2.1 Equations de discrétisation

#### 2.1.1 Dynamique des cellules

En introduisant la matrice de rigidité dynamique  $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}$ , décomposant en degrés de libertés (ddl) à gauche ( $L$ ) et à droite ( $R$ ), et dlls à l'intérieur ( $I$ ), supposant qu'il n'existe pas des forces aux nœuds à l'intérieur, l'équation discrétisée d'une cellule devient :

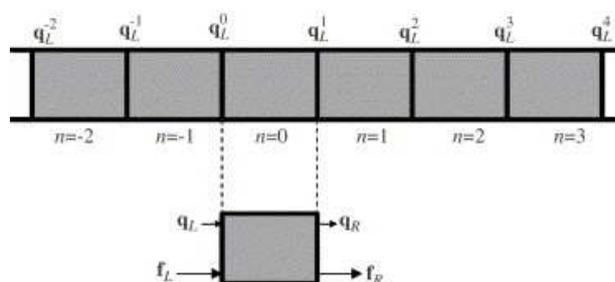


FIG. 1 – Structure périodique. Une cellule avec les vecteurs des forces, des déplacements à gauche et à droite

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{II} & \tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{LI} & \tilde{\mathbf{D}}_{LL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RI} & \tilde{\mathbf{D}}_{RL} & \tilde{\mathbf{D}}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} \quad (1)$$

Éliminant les dlls intérieurs, on obtient l'équation sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} \quad (2)$$

#### 2.1.2 Base réduite des matrices

Introduisant des fonctions de base indépendantes  $\mathbf{Q}_i$ ,  $1 \leq i \leq N_s$ , retenant  $n < N_s$  fonctions, les déplacements dans une section transversale sont approximés par :

$$\mathbf{q} \cong \sum_{i=1}^{i=n} r_i \mathbf{Q}_i \quad (3)$$

Projetant les matrices dans la base réduite, introduisant les forces et les déplacements réduits ( $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{r}$ ), on obtient l'équation réduite :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^r & \mathbf{D}_{LR}^r \\ \mathbf{D}_{RL}^r & \mathbf{D}_{RR}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_L \\ \mathbf{r}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_L \\ \mathbf{g}_R \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 2.2 Propagation d'ondes dans une cellule

S'il n'y a pas de forces extérieures appliquées sur la structure, la continuité des déplacements et l'équilibre des forces donnent la forme de la matrice de transfert  $\mathbf{T}$ , qui relie les forces et les déplacements entre les deux sections transversales  $n$  et  $n + 1$ , en fonction des parties de la matrice  $\tilde{\mathbf{D}}$ . En écrivant le problème de valeurs et vecteurs propres de la propagation d'ondes libre, notant que  $(\lambda, 1/\lambda)$  sont une paire de valeurs propres associées aux vecteurs propres à gauche et à droite, qui représentent les ondes propagées dans les deux sens positive et négative, on obtient l'orthogonalité de vecteurs propres.

On distingue les  $2n$  valeurs propres du problème en deux ensembles dénotés par  $(\lambda_i, \Phi_i^+)$  et  $(1/\lambda_i, \Phi_i^-)$ . On cherche les valeurs les plus proches de l'unité. Pour éviter le faible conditionnement de la matrice de transfert, on définit le problème en fonction de  $(\lambda + 1/\lambda)$ , les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$ . L'utilisation de la symétrie de la matrice de rigidité dynamique donne l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{LR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_L \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda}} \begin{bmatrix} -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) & -(\mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{RL}) \\ (\mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{RL}) & -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_L \end{bmatrix} \quad (5)$$

où  $\tilde{\mathbf{q}}_L = \lambda \mathbf{q}_L$ .

D'ici, on peut déterminer les valeurs propres  $\lambda$  en connaissant la fréquence  $\omega$  ou  $f$ . Pour une bande de fréquences, on choisit les vecteurs propres associées aux valeurs propres proches de l'unité comme base réduite mentionnée :

$$\mathbf{Q}^+ = [q(\lambda_1), \dots, q(\lambda_n)] \quad (6)$$

On choisit un ensemble des fréquences  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  et la base calculée pour la fréquence  $f_i$  est utilisée pour les fréquences autour de  $f_i$ .

## 2.3 Analyse de la structure complète

On considère une structure de  $N$  cellules identiques. En décomposant les vecteur d'état de deux sections à gauche et à droite, on obtient la relation des forces et des déplacements entre ces deux section, et en plus, par généralisation, entre la section gauche de la première cellule et la section droite de la dernière cellule. Finalement, une relation sous la forme suivante est construite :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_{N+1} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_T \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_{N+1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

où  $\mathbf{D}_T$  est la matrice de rigidité dynamique de la structure totale en fonction des partie de la matrice  $\mathbf{D}$  et de la matrice diagonale des valeurs propres du problème mentionné.

On considère maintenant une structure complète composée par plusieurs parties  $i$ , chaque partie comprend  $N_i$  cellules périodiques. L'utilisation de l'analyse précédente nous permet de calculer les matrices  $\mathbf{D}_T^i$  données par l'Eq. (7). L'assemblage de ces matrices donne l'équation des EFs de la structure complète.

## 2.4 Exemples numériques pour quelques structures simples

### 2.4.1 Poutre

#### *Matrice de rigidité dynamique*

La longueur de la cellule est choisie égale à  $l$ . La poutre de longueur  $L = Nl$  est divisée par deux parties de longueurs  $L_1 = N_1l$  et  $L_2 = N_2l$  comme dans la Fig 2 .

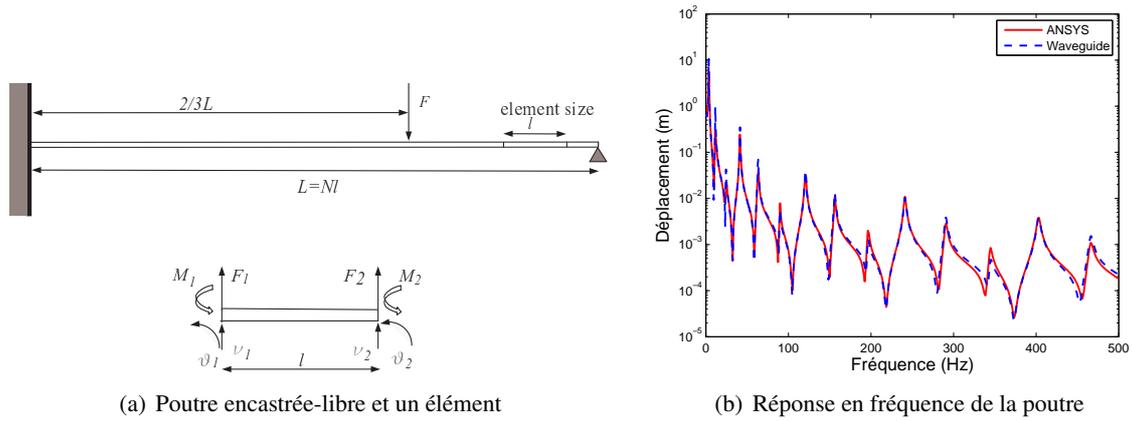


FIG. 2 – Schéma de la poutre et les RFs

L'adimensionalisation est utilisée pour la simplicité de calculs. A partir des matrices de rigidité et de masse d'une cellule (Petyt (1990)), en acceptant l'hypothèse de l'amortissement hystérique  $\mathbf{C}_e = \eta \mathbf{K}_e$ , on obtient la matrice de rigidité dynamique de la cellule  $\mathbf{D}_e = \mathbf{K}_e + j\mathbf{C}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e$  :

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} 12 - \frac{156}{420}(kl)^2 & 6 - \frac{22}{420}(kl)^2 & -12 - \frac{54}{420}(kl)^2 & 6 + \frac{13}{420}(kl)^2 \\ 6 - \frac{22}{420}(kl)^2 & 4 - \frac{4}{420}(kl)^2 & -6 - \frac{13}{420}(kl)^2 & 2 + \frac{3}{420}(kl)^2 \\ -12 - \frac{54}{420}(kl)^2 & -6 - \frac{13}{420}(kl)^2 & 12 - \frac{156}{420}(kl)^2 & -6 + \frac{22}{420}(kl)^2 \\ 6 + \frac{13}{420}(kl)^2 & 2 + \frac{3}{420}(kl)^2 & -6 + \frac{22}{420}(kl)^2 & 4 - \frac{4}{420}(kl)^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

où  $k = \sqrt{\rho S l^2 \omega^2 / \tilde{E} I}$  est le nombre d'ondes,  $\rho$  est la densité du matériau,  $S$  est le moment de la section,  $\tilde{E} = (1 + \eta E)$  est le module complexe et  $\omega$  est la fréquence angulaire de vibration.

#### Réponse en fréquence

Dans la Fig. (2b), la réponse en fréquence est calculée dans le cas d'une charge unité ponctuelle appliquée au point de  $2/3L$ . Les forces et les déplacements de deux parties sont dénotés par les indices 1 et 2. L'écriture des expressions des relations entre eux de chaque partie et les conditions aux limites donne le système des déplacements et des rotations à chercher.

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{tot} \begin{bmatrix} v_L^2 \\ \theta_L^2 \\ \theta_R^2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

où  $\mathbf{D}_{tot}$  est la matrice de rigidité dynamique de la structure totale obtenue par celles de deux parties en les assemblant et éliminant des ddls inutiles.

#### 2.4.2 Plaque

La plaque est simplement articulée aux bords, excitée par une force concentrée  $F$  au centre (Fig. (3a)). Le matériau est l'acier et les dimensions sont indiquées dans la figure.

L'approche est similaire comme dans le cas de la poutre. On divise la plaque en deux parties et les variables sont les déplacements et les rotations de deux extrémités et de la section passant la position de la force au milieu. Les conditions aux limites et la base réduite sont introduites par les matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{C}$  ( $\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{C}\mathbf{f}$  aux bords) et  $\mathbf{Q}^+$  comme ci-dessus. La comparaison est effectuée entre les solutions analytique, celle calculée par le code EF ANSYS et celle de la théorie des guides d'ondes présentée ci-dessus. En introduisant les conditions aux limites dans

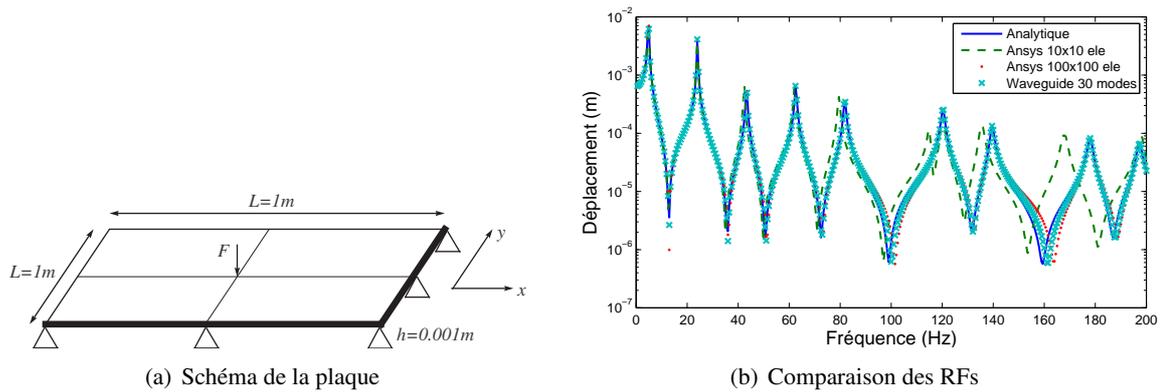


FIG. 3 – Déplacements au centre de la plaque sollicitée une force harmonique

la base réduite  $A' = {}^t Q^+ A Q^+$ ;  $C' = {}^t Q^+ C Q^+ ({}^t Q^+ Q^+)^{-1}$ , le système est finalement écrit par :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'D_{11} - A' & C'D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ 0 & C'D_{32} & C'D_{33} - A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Les résultats de réponse en fréquence sont introduits dans la Fig. (3b)

## 2.5 Application aux comportements vibratoires des pneumatiques

La première modélisation est utilisée dans le cas d'un pneumatique supposé constitué d'un seul matériau homogène, isotrope et ayant des propriétés données dans le Tab.1 (Muggleton *et al.* (2003)). où  $R$  est la rayon extérieur du pneumatique et  $r$ , le rayon de la jante.

Paramètres	$R$	$r$	$E$	$\nu$	$\rho$	$\eta$
Valeurs(SI)	0.275	0.168	8.E7	0.42	1200	0.1

TAB. 1 – Propriétés physiques et géométrique du pneumatique

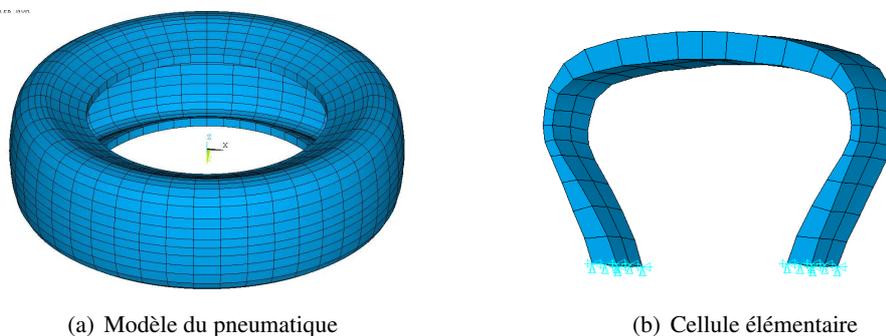


FIG. 4 – Description du pneumatique

En tenant compte de la périodicité sur le contour du pneumatique, on transforme les matrices de rigidité et de masse à la section 1. La continuité des déplacement et l'équilibre entre les sections 1 et  $N + 1$  (Fig. 5) impliquent le système :

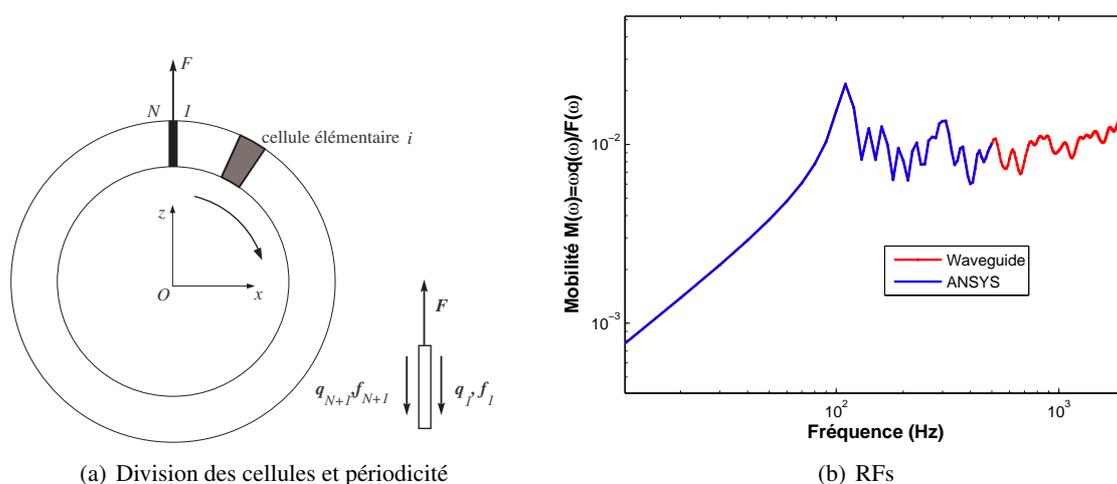


FIG. 5 – Application au pneumatique

$$\boxed{\mathbf{D}_{\text{tot}} \mathbf{q} = -\mathbf{F}} \quad (11)$$

où  $\mathbf{D}_{11}^T + \mathbf{D}_{12}^T + \mathbf{D}_{21}^T + \mathbf{D}_{22}^T = \mathbf{D}_{\text{tot}}$ .

### 3 Conclusions

Une théorie de la méthode des EFs est présentée en se basant sur la propagation d'ondes dans les structures périodiques. Des résultats numériques ont montré la capacité de la méthode. Le développement de l'application de cette théorie dans le pneumatique est encore ouverte dans le cas de complexité de la géométrie et de la distribution des matériaux. Grâce à elle, les études du comportement vibratoire du pneumatique à hautes fréquences sont possibles. .

### Références

- Duhamel, D., Mace, B.R., Brennan, M.J. 2006 Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*. **294** 205-220
- Petyt, M. Introduction to Finite Element Vibration Analysis. *Cambridge University Press, New York, USA*. **1990**
- Muggleton, J. M., Mace, B.R., Brennan, M.J. 2003 Vibrational response prediction of a pneumatic tyre using an orthotropic two-plate wave model. *Journal of Sound and Vibration*. **264** 929-950