

## Relation entre la fraction volumique de martensite et la déformation de transformation en pseudoélasticité proportionnelle et non proportionnelle

Karine Taillard<sup>(a)</sup>, Sylvain Calloch<sup>(b)</sup>, Shabnam Arbab-Chirani<sup>(c)</sup> & Christian LExcellent<sup>(d)</sup>

<sup>(a)</sup>LMT Cachan - UMR 8535  
61 avenue du Président Wilson 94235 Cachan cedex  
taillard@lmt.ens-cachan.fr

<sup>(b)</sup>LMSN Brest

<sup>(c)</sup>LI2 Brest

<sup>(d)</sup>LMARC Besançon

### Résumé :

*La pseudoélasticité est l'une des propriétés des Alliages à Mémoire de Forme (AMF) les plus utilisées. Récemment, un modèle macroscopique isotrope a été proposé par Bouvet et al. (2004) permettant de modéliser la pseudoélasticité des AMF sous chargements multiaxiaux complexes. Dans ce modèle, une hypothèse est faite concernant l'existence d'une relation linéaire entre la déformation équivalente de transformation et la fraction volumique de martensite.*

*L'objectif est ici de montrer la validité de cette hypothèse dans le cas des chargements multiaxiaux proportionnels et non proportionnels.*

*Comme l'AMF utilisé s'est révélé anisotrope, une extension de la définition de la contrainte équivalente et de la déformation de transformation équivalente ont été proposées pour les AMF anisotropes. Des essais de traction-torsion sur un AMF de type Cu-Al-Be, sous chargement proportionnels et non proportionnels, permettent de vérifier la relation entre la fraction volumique de martensite et la déformation de transformation équivalente.*

### Abstract :

*The present paper deals with the superelastic behavior of anisotropic Shape Memory Alloys (SMA). Recently, a macroscopic model, which permits to simulate the superelasticity of isotropic SMA under complex multi-axial loading, has been proposed by Bouvet et al. (2004). In this model, a conjecture concerning the proportionality of the equivalent transformation strain with the martensite volume fraction has been adopted.*

*The main goal of this study is to show the validity of this conjecture when the stress state is multi-axial, proportional or not.*

*The case of anisotropic SMA is considered. Equivalent stress and equivalent transformation strain are generalised to take into account the anisotropy of the material. The relation between the equivalent transformation strain and the martensite volume fraction is discussed by using experimental results under proportional and non proportional tension-torsion loadings on a textured Cu-Al-Be.*

### Mots-clefs :

**pseudoélasticité ; résistivité ; déformation de transformation équivalente**

### 1 Introduction

A l'heure actuelle, les AMF sont déjà utilisés dans des domaines très variés : aéronautique, médical, automobile et domestique. Ces applications mettent en jeu les différentes propriétés des AMF et notamment la pseudoélasticité.

Pour concevoir, dimensionner et assurer la fiabilité de ces systèmes, il est nécessaire de disposer de modèles robustes, aptes à représenter le comportement complexe des AMF.

De tels modèles existent déjà pour décrire le comportement 1D, et sont suffisants pour un grand nombre d'applications, mais dans les cas les plus complexes ils ne suffisent plus. Le

développement de modèles tridimensionnels de comportement des AMF constitue donc une étape clef pour leur utilisation.

Les modèles phénoménologiques de comportement des AMF sont très nombreux dans la littérature. Pour la pseudoélasticité on citera notamment : Juhasz *et al.* (2002), Helm et Haupt (2003), Bouvet *et al.* (2002, 2004).

Dans ces modèles, certaines propositions n'ont pas été validées expérimentalement. Parmi les propositions non validées, la plupart des modèles suscités et notamment celui de Bouvet *et al.* (2004) font l'hypothèse qu'il existe une relation de linéarité entre la fraction volumique de martensite  $z$  et une norme du tenseur de déformation de transformation équivalente  $\|\underline{\epsilon}^{tr}\|$  qui doit être définie (équation 1). Le fait que le modèle de Bouvet *et al.* (2004) ait été comparé à des résultats d'essais en pseudoélasticité 3D non proportionnelle constitue une validation indirecte de cette relation, mais aucune validation expérimentale directe n'a encore été réalisée.

$$\|\underline{\epsilon}^{tr}\| = \gamma \cdot z \quad (1)$$

Dans ce papier, nous proposons une stratégie de validation de la relation 1 pour les AMF anisotropes. Dans un premier temps, les notions de contrainte et de déformation de transformation équivalentes définies par Bouvet *et al.* (2004) seront étendues au cas des AMF anisotropes. Dans un second temps, des essais de traction-compression-torsion sur un alliage de type Cu-Al-Be sont réalisés, couplés à une mesure de résistance électrique permettant de déterminer la fraction volumique de martensite.

## 2 Contrainte et déformation de transformation équivalentes pour les AMF anisotropes

### 2.1 Rappels dans le cas isotrope

Pour les AMF isotropes, Bouvet *et al.* (2004), ont proposé la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  suivante :

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\bar{\sigma}, y_\sigma) = \bar{\sigma} g(y_\sigma) \quad (2)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{3}{2} dev(\underline{\sigma}) : dev(\underline{\sigma})} \\ y_\sigma &= \frac{27 det(dev(\underline{\sigma}))}{2 \bar{\sigma}^3} \end{aligned} \quad (3)$$

et la fonction  $g(y_\sigma)$  est définie par l'équation 4 :

$$g(y_\sigma) = \cos\left\{\frac{\arccos(1 - a(1 - y_\sigma))}{3}\right\} \quad (4)$$

avec  $a$  un paramètre matériau compris entre 0 et 1, permettant de décrire la dissymétrie traction-compression.

La définition de la déformation de transformation équivalente  $\epsilon_{eq}^{tr}$  associée à la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  qui vient d'être définie, est basée sur le concept d'équivalence en puissance (Bouvet *et al.* (2004)) : c'est à dire que la puissance de transformation sous chargement proportionnel  $P^{tr} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^{tr}$  est égale à la puissance de transformation équivalente  $P_{eq}^{tr} = \sigma_{eq} \cdot \dot{\epsilon}_{eq}^{tr}$ . On fait également l'hypothèse de la loi de normalité, c'est-à-dire que la direction du taux de déformation de transformation est supposée normale à la surface de début de transformation associée

à la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$ . Tous calculs faits, la déformation de transformation équivalente, cohérente avec la contrainte équivalente, est définie par :

$$\epsilon_{eq}^{tr} = \frac{g(-y_{\epsilon^{tr}})}{g(-1)} \quad (5)$$

## 2.2 Extension au cas anisotrope

Pour définir une contrainte équivalente capable de représenter les surfaces seuil de début de transformation d'un AMF anisotrope, on introduit la notion de tenseur des contraintes dilatées  $\bar{\sigma}$ , obtenu à partir du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$  par une transformation affine de matrice  $\underline{D}$  (détails dans Taillard *et al.* (2006)).

$$\bar{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\sigma} \quad (6)$$

D'autre part, de façon à être capable de décrire des dissymétries différentes suivant les trois axes matériau, la nouvelle contrainte équivalente anisotrope  $\sigma_{eq\ ani}$  est définie par :

$$\sigma_{eq\ ani} = \sigma_{eq\ ani}(\bar{\sigma}, x_{\bar{\sigma}}) = \bar{\sigma} \cdot h(x_{\bar{\sigma}}) \quad (7)$$

avec  $x_{\bar{\sigma}}$  une expression modifiée de  $y_{\bar{\sigma}}$  et  $h$  une fonction définie par la relation 8.

$$h(x_{\bar{\sigma}}) = \cos \left\{ \frac{1}{3} \cos^{-1}(x_{\bar{\sigma}}) \right\} \quad (8)$$

Le paramètre de dissymétrie  $a$  de la contrainte équivalente isotrope  $\sigma_{eq}$  est remplacé par trois paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  dans la définition de  $x_{\bar{\sigma}}$  qui permettent de prendre en compte des dissymétries différentes suivant les 3 axes matériau.

La déformation de transformation équivalente  $\epsilon_{eq\ ani}^{tr}$  est définie d'une façon légèrement différente à la déformation équivalente  $\epsilon_{eq}^{tr}$ .

On conserve l'hypothèse de normalité du taux de déformation  $\dot{\underline{\epsilon}}^{tr}$  à la surface seuil associée à  $\sigma_{eq\ ani}$  :

$$\dot{\underline{\epsilon}}^{tr} = \dot{\lambda} \frac{\partial \sigma_{eq\ ani}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (9)$$

Par contre, il n'existe aucune raison, a priori, pour un AMF anisotrope, pour que la puissance ou l'énergie de transformation, pour les chargements proportionnels, soit identique dans chacune des directions matériau. Par conséquent :

$$\underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}}^{tr} \neq \sigma_{eq\ ani} \cdot \dot{\epsilon}_{eq\ ani}^{tr} \quad (10)$$

Des résultats expérimentaux (Taillard *et al.* (2006)) montrent que l'énergie de transformation  $W^{tr}$  (équation 11), pour une valeur donnée de la fraction volumique de martensite  $z$ , dépend de la direction de chargement. Une différence de 20% est observée dans certains cas. C'est pour cela que la notion de "surfaces d'énergie d'iso-transformation" (*i.e.* à fraction volumique de martensite  $z$  constante) est introduite ici.

$$W^{tr} = \int_z \underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}}^{tr} dz \quad (11)$$

Ces "surfaces d'énergie d'iso-transformation" peuvent être représentées par des hyper ellipses dans l'espace des contraintes, non inclinées et symétriques. De plus, leur forme reste identique quelle que soit la valeur de  $z$  considérée ; elles sont homothétiques.

On peut alors écrire  $W^{tr}$  comme une fonction de la direction de chargement  $\underline{N}$  et de  $z$  :

$$W^{tr}(\underline{N}, z) = W_{traction}^{tr}(z) \cdot \alpha(\underline{N}) \quad (12)$$

Comme l'énergie de transformation équivalente  $\int_z \sigma_{eq\ ani} \cdot \dot{\epsilon}_{eq\ ani}^{tr} dz$  doit être la même quelle que soit  $\underline{N}$  et égale à l'énergie de transformation en traction  $W_{traction}^{tr}$ , on peut déduire :

$$\begin{aligned} \int_z \sigma_{eq\ ani} \cdot \dot{\epsilon}_{eq\ ani}^{tr} dz &= W_{traction}^{tr}(z) \\ &= \frac{1}{\alpha(\underline{N})} \int_z \underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}}^{tr} dz \end{aligned} \quad (13)$$

D'où l'on déduit pour chaque trajet proportionnel, la définition de la déformation de transformation équivalente  $\epsilon_{eq\ ani}^{tr}$  associée à la contrainte équivalente  $\sigma_{eq\ ani}$  :

$$\epsilon_{eq\ ani}^{tr} = \frac{1}{\alpha(\underline{N})} \int_z \frac{\underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}}^{tr}}{\sigma_{eq\ ani}} \cdot dz \quad (14)$$

$\alpha(\underline{N})$  est identifié à partir des résultats d'essai suivant une procédure décrite dans Taillard *et al.* (2006).

Dans le cas des trajets non proportionnels, l'idée est de se ramener au cas proportionnel en ne conservant que la partie du taux de déformation de transformation  $\dot{\underline{\epsilon}}^{tr}$  normale à la surface seuil définie par la contrainte équivalente  $\dot{\underline{\epsilon}}_{normale}^{tr}$  (équation 15). Cela revient à éliminer la contribution de la réorientation  $\dot{\underline{r}}$ , tangentielle à la surface seuil, pour laquelle la direction du tenseur de taux de déformation change sans que sa norme, et donc la fraction volumique de martensite  $z$ , n'évoluent.

$$\dot{\underline{\epsilon}}^{tr} = \dot{\underline{\epsilon}}_{normale}^{tr} + \dot{\underline{r}} \quad (15)$$

Finalement, le cas non proportionnel est donc traité de façon similaire au cas proportionnel, en prenant :

$$\epsilon_{eq\ ani}^{tr} = \frac{1}{\alpha(\underline{N})} \int_z \frac{\underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}}_{normale}^{tr}}{\sigma_{eq\ ani}} \cdot dz \quad (16)$$

### 3 Stratégie expérimentale

La validation expérimentale de cette relation est faite à l'aide d'essais proportionnels en traction-compression-torsion sur un AMF de type Cu-Al-Be durant lesquels on souhaite déterminer, d'une part, la fraction volumique de martensite  $z$ , et d'autre part, la déformation de transformation équivalente  $\epsilon_{eq\ ani}^{tr}$  à partir de  $\dot{\underline{\epsilon}}^{tr}$ .

L'alliage utilisé pour ces essais est un AMF de type Cu-Al-Be fourni par la société Tréfil-métaux. Sa composition massique est : 87,75% de cuivre, 11,33% d'aluminium et 0,49% de béryllium. Les températures de transformation ont été déterminées grâce à des mesures de résistance électrique à contrainte nulle (Patoor et Berveiller (1994)) :  $A_s = 25^\circ C$ ,  $A_f = 38^\circ C$ ,  $M_s = 22^\circ C$  et  $M_f = 4^\circ C$ .

Les essais sont réalisés sur une machine électro-hydraulique asservie MTS de traction-torsion, dont les vérins axial et rotatif ont des capacités respectives de  $100kN$  et de  $1, 2kN.m$ .

Les éprouvettes sont des tubes minces à l'extérieur desquels sont collées des jauges grandes déformation de type "rosette à 45 degrés" permettant de mesurer les déformations axiale  $\epsilon$  et de cisaillement  $\gamma$ . Les contraintes axiale  $\sigma$  et de cisaillement  $\tau$ , sont déterminées à partir des informations de la cellule d'effort : effort axial,  $F$ , et couple,  $M$ .

En parallèle, nous avons développé une méthode de mesure in-situ de la fraction volumique de martensite  $z$ . Comme l'austénite et la martensite ont des résistivités différentes, l'évolution de la fraction volumique de martensite, peut être déterminée au cours d'un essai mécanique via des mesures de variation de la résistance électrique de l'éprouvette (Patoor et Berveiller (1994)). Ces mesures nécessitent un certain nombre de précautions qui sont décrites dans Taillard *et al.* (2006).

Neuf essais proportionnels et deux trajets non proportionnels en traction-compression-torsion (figure 2) ont été réalisés sur des éprouvettes tubulaires. La fraction volumique de martensite  $z$  dans les éprouvettes de Cu-Al-Be, déterminée par des mesures de résistance électrique, est alors comparée à la déformation de transformation équivalente  $\epsilon_{eq ani}^{tr}$ . Les figures 1 et 3 montrent la réponse sur une courbe  $(\epsilon_{eq ani}^{tr}, z)$  pour les trajets de chargement réalisés.

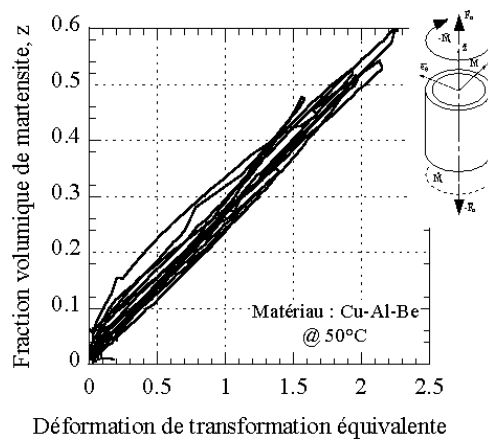


FIG. 1 – Fraction volumique de martensite en fonction de  $\epsilon_{eq ani}^{tr}$  dans le plan  $(\sigma_{11}, \sigma_{1\theta})$  pour 9 trajets de chargement proportionnels.

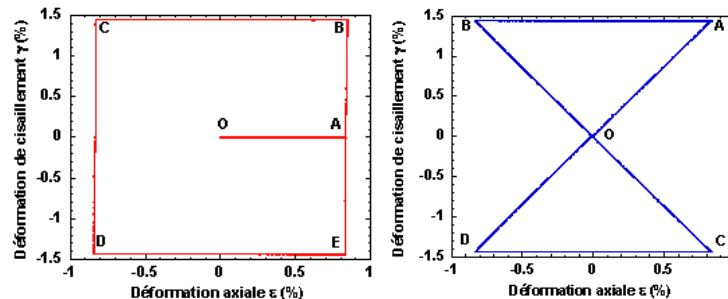


FIG. 2 – Trajets de chargement non proportionnels carré et sablier.

Il existe donc bien une relation de linéarité entre la fraction volumique de martensite  $z$  et la déformation de transformation équivalente  $\epsilon_{eq ani}^{tr}$ . La relation  $\epsilon_{eq ani}^{tr} = \gamma \cdot z$  est donc validée expérimentalement.

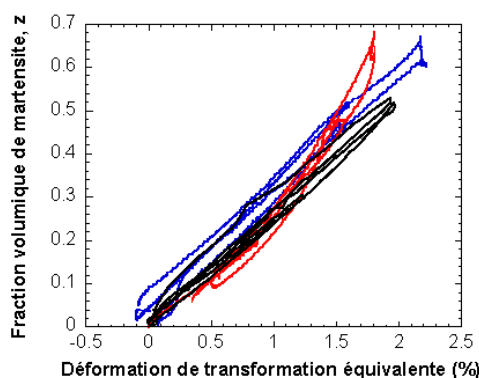


FIG. 3 – Fraction volumique de martensite en fonction de  $\epsilon_{eq}^{tr}$  dans le plan  $(\sigma_{11}, \sigma_{1\theta})$  pour les deux trajets de chargement non proportionnels (carré et sablier).

#### 4 Conclusions

Une contrainte équivalente a été définie pour les AMF anisotropes. Les surfaces seuil anisotropes ainsi définies sont capables de décrire tous les phénomènes expérimentaux observés (Taillard *et al.* (2006)). Associée à cette contrainte équivalente, une déformation de transformation équivalente a été proposée, basée sur la loi de normalité et l'anisotropie de l'énergie de transformation. Finalement, la relation de linéarité entre la fraction volumique de martensite et la déformation de transformation équivalente a été validée dans le cas des AMF anisotropes sous chargement tant proportionnels que non proportionnels. Par conséquent, l'hypothèse  $\epsilon_{eq}^{tr} = \gamma \cdot z$  est validée dans tous les cas.

#### Références

- Bouvet, C., Calloch, S., LExcellent, C. 2002 Mechanical behavior of a Cu-Al-Be shape memory alloy under multiaxial proportional and nonproportional loadings. *Transactions of the ASME* pp. 112-124.
- Bouvet, C., Calloch, S., LExcellent, C. 2004 A phenomenological model for pseudoelasticity of shape memory alloys under multiaxial proportional and nonproportional loadings. *European Journal of Mechanics A/Solids* **23** 37-61
- Helm, D., Haupt, P. 2003 Shape memory behaviour : modelling within continuum thermomechanics. *International Journal of Solids and Structures* **40** 827-849
- Juhasz, L., Schnack, E., Hesebeck, O., Andrá, H. 2002 Macroscopic modeling of shape memory alloys under non-proportional thermo-mechanical loadings. *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures* **13** 825-836
- Patoor, E., Berveiller, M. 1994 Technologie des Alliages à Mémoire de Forme. *Hermès*
- Taillard, K., Arbab-Chirani, S., Calloch, S., LExcellent, C. 2006 Relation between martensite volume fraction and transformation strain for isotropic and anisotropic shape memory alloys. *Mechanics of Materials* **soumis**