

Une méthode spectrale pour la résolution des équations de Navier Stokes tridimensionnelles en approximation faible nombre de Mach

Ouafa Bouloumou, Eric Serre & Jochen Fröhlich*

MSNM-GP.UMR CNRS. 38, rue Frédéric Joliot Curie. 13451Marseille Cedex20

*Institute for Fluid Mechanics, Technical University of Dresden, 01062 Dresden, Germany.

Ouafa.BOULOUMOU@l3m.univ-mrs.fr

Résumé :

Dans ce travail nous présentons une méthode numérique basée sur une approximation spectrale Fourier-Chebyshev des équations de la convection dans le cas de fortes variations de densité au moyen d'un modèle faible nombre de Mach. Le problème de Stokes issu de la discrétisation temporelle des équations de Navier-Stokes par un schéma semi-implicite du second ordre en temps, est résolu avec un algorithme itératif de type Uzawa préconditionné. Le code est validé sur des résultats de la littérature en configuration Rayleigh-Bénard et des résultats d'écoulements instationnaires sont présentés en cavité différentiellement chauffée.

Abstract:

A spectral method based on Chebyshev-Fourier discretizations is presented in the framework of low Mach approximation of Navier-Stokes equations. The generalized Stokes problem, which arises from the time discretization by a semi implicit scheme of second order, is solved by a preconditioned iterative Uzawa algorithm. This model is applied to natural convection flows with large density variations in the case of Rayleigh-Bénard convection and results of instationary flows are presented in the case of a differentially heated cavity.

Mots-clés : méthode spectrale, faible nombre de Mach, convection naturelle .

1 Introduction

Cette étude porte sur les écoulements de convection naturelle à fortes variations de masse volumique qui ne satisfont plus l'hypothèse de Boussinesq classiquement utilisée. L'approximation des équations de Navier Stokes par un modèle à faible nombre de Mach permet de tenir compte de ces fortes variations de la densité tout en négligeant les phénomènes acoustiques à des échelles de temps et d'espace très différentes définies par la vitesse du son. Ainsi, ces équations sont de nature similaire aux équations de Navier-Stokes pour un fluide à masse volumique constante, Paolucci (1982). La présence de forts gradients dans ces écoulements nécessitent l'utilisation de méthodes numériques d'ordre élevé afin d'assurer une description précise des modes d'instabilités ainsi que des différents seuils de bifurcation associés. Les travaux de la littérature basés sur des approximations d'ordre élevé sont restreints aux cas bidimensionnels: Chebyshev-Fourier, Fröhlich (1990), Chebyshev-Chebyshev, Le Quéré et al. (1992). La modélisation tridimensionnelle (3D) est limitée à des approximations numériques d'ordre 2 ou 4 au maximum, Lessani et al. (2006), Nicoud (2000) et Accary (2005). Dans ce travail, nous proposons une méthode numérique 3D Chebyshev-Chebyshev- Fourier. Des résultats de validation sont présentés dans la configuration de Rayleigh-Bénard en régime stationnaire. Des résultats instationnaires récents ont été obtenus en cavité différentiellement chauffée et se comparent favorablement avec les résultats de la littérature.

2 Modèle mathématique

Dans le cadre de la modélisation numérique d'écoulements compressibles à faible nombre de Mach, on est confronté à deux types de problèmes numériques. D'une part les pas de temps des schémas explicites deviennent trop petits à cause du critère de stabilité CFL, et d'autre part la précision des approximations décentrées se dégrade fortement. Une des solutions consiste à calculer l'écoulement avec un modèle obtenu par simplification du modèle compressible standard en exploitant le caractère « lent » du phénomène, ce qui permet d'écarter les échelles acoustiques, Paolucci(1982). L'ensemble des variables est développé en termes de gM^2 sous les hypothèses $gM^2 \ll 1$ et $gM^2 / Fr \ll 1$. Ainsi en choisissant $V_{réf} = \mathbf{k}_{réf} / L_{réf}$ comme vitesse de référence le système adimensionné s'écrit:

$$\begin{cases} \nabla p_0 = 0 & (1) \\ \partial_t \mathbf{r} + \nabla \cdot (\mathbf{r}V) = 0 & (2) \\ \mathbf{r}(\partial_t V + V \cdot \nabla V) + \nabla p = \frac{-Ra Pr}{2e} \mathbf{r}e_z + Pr \nabla t & (3) \\ \mathbf{r}(\partial_t \mathbf{q} + V \cdot \nabla \mathbf{q}) - \frac{g-1}{g} d_t p_0 = \nabla^2 \mathbf{q} & (4) \\ \mathbf{r} = \frac{p_0}{\mathbf{q}} & (5) \end{cases}$$

avec $Pr = \mathbf{n}_{réf} / \mathbf{k}_{réf}$ et $Ra = (\mathbf{a}_{réf} \Delta T g_{réf} L_{réf}^3) / (\mathbf{k}_{réf} \mathbf{n}_{réf})$ le nombre de Prandtl et le nombre de Rayleigh. Les paramètres e et $?$ sont l'écart de température adimensionné et le rapport des chaleurs spécifiques. p_0 est la partie thermodynamique de la pression qui est uniforme dans l'espace et n'intervient que dans les équations d'état et d'énergie. La pression dynamique, notée p , contribue au mouvement à travers les équations de transport seulement. L'objectif de cette décomposition de la pression est l'utilisation d'un solveur incompressible pour la résolution des équations dans le cas d'un fluide pratiquement incompressible mais dilatable.

Pour fermer le système (1-5), on a besoin d'une équation supplémentaire sur la pression thermodynamique p_0 . Deux cas se présentent alors, selon que l'on considère le domaine ouvert dans la direction périodique ou fermé. En effet, en boîte ouverte la pression est constante et identique à celle du milieu ambiant. En boîte fermée on utilise la conservation de la masse pour évaluer p_0 qui cette fois varie en temps, sa dérivée est déduite de la projection de l'équation de continuité sur le bord.

3 Méthode numérique

3.1 Discrétisations spatiale et temporelle

La discrétisation spatiale est établie par une méthode spectrale basée sur un développement en polynômes de Fourier dans la direction homogène (x) et en polynômes de Chebyshev dans les deux directions non homogènes (y, z). On note Φ_{KNM} l'approximation de $\Phi = (\vec{V}, P, T, \mathbf{r})$

$$\mathbf{f}_{knm}(x, y, z, t) = \sum_{k=-K}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \mathbf{f}_{nm}^k(t) T_n(y) T_m(z) e^{ikx} \quad (6)$$

Une formulation $P_N - P_{N-2}$ est utilisée pour satisfaire la condition inf-sup du problème de Stokes et évite ainsi l'apparition de modes parasites de pression, Maday et al. (1992). De plus cette formulation possède l'avantage d'utiliser une seule grille de points pour la vitesse et la pression, en l'occurrence les points de Gauss-Lobatto.

La discrétisation temporelle des équations (1-5) est basée sur un schéma semi implicite de type Euler retardé du second ordre combiné au schéma d'Adams-Bashforth:

$$\frac{3\mathbf{j}^{n+1} - 4\mathbf{j}^n + \mathbf{j}^{n-1}}{2\Delta t} + L(\mathbf{j}^{n+1}) = 2M(\mathbf{j}^n) - M(\mathbf{j}^{n-1}) \quad (7)$$

où L et M sont respectivement des opérateurs linéaire et non linéaire. La variation de la densité dans la direction homogène x entraîne un couplage entre les différents modes de Fourier. D'autre part, sa dépendance en temps ne permet pas l'inversion des opérateurs discrets en pré-processing. Afin de réaliser un compromis coût/stabilité, la densité est décomposée en deux parties, une partie hydrostatique, et les déviations par rapport à cet état :

$$\mathbf{r}(x, y, z, t) = \mathbf{r}_s(y, z) + (\mathbf{r}(x, y, z, t) - \mathbf{r}_s(y, z)) \quad (8)$$

De plus, la viscosité et la diffusivité sont supposées constantes, ainsi, la multiplication des équations (3-4) par un facteur $\mathbf{r}_s / \mathbf{r}$ donne lieu à des opérateurs de Helmholtz linéaires et constants en temps, Fröhlich et al. (1992).

3.2 Algorithme de résolution

A chaque pas de temps, la discrétisation conduit à la résolution d'une équation d'Helmholtz pour la température et d'un problème de Stokes pour la pression dynamique et la vitesse. La pression thermodynamique est traitée de manière explicite dans l'équation de température (4) puis recalculée au pas de temps suivant. La densité est alors donnée par la loi d'état. Les équations discrètes s'écrivent sous la forme $L(\mathbf{j}) = F$ où \mathbf{j} représente la température ou une composante de la vitesse. L'opérateur d'Helmholtz est donné par :

$$L = s\mathbf{r}_s - \tilde{\nabla}^2 \quad (9)$$

où $\tilde{\nabla}^2$ est un Laplacien modifié dans le cas de la vitesse par la présence de termes issus de la divergence non nulle. La résolution directe est possible mais prohibitive entraînant une contrainte trop importante sur le maillage. La taille des opérateurs construits explicitement par produits tensoriels entre les deux directions Chebyshev évolue comme N^d pour chaque mode de Fourier. Cependant, dans les configurations considérées (Rayleigh-Bénard entre deux plaques horizontales et cavité verticale différentiellement chauffée), les variations de température et de densité sont principalement unidirectionnelles permettant de décomposer la densité $\mathbf{r}_s(y, z)$ en deux fonctions unidimensionnelles $\mathbf{r}_s(y)$ et $\mathbf{r}_s(z)$ telles que $\mathbf{r}_s(y, z) = \mathbf{r}_s(y) + \mathbf{r}_s(z)$. L'expression algébrique des équations de Helmholtz se simplifie alors sous la forme $A\mathbf{f} + \mathbf{f}B^t = F$. Une technique directe de diagonalisation complète est ensuite employée pour la résolution.

3.3 Problème de Stokes

Le problème de Stokes s'écrit :

$$\begin{cases} L(V) + \mathbf{r}_s / \mathbf{r} \nabla p = F_V \\ \nabla \cdot V = F_R \end{cases} \quad (10)$$

avec F_V et F_R les seconds membres des équations de mouvement (3) et de continuité (4). En définissant les opérateurs $A = \nabla \cdot (L^{-1}(\mathbf{r}_s / \mathbf{r}) \nabla)$, et $F = \nabla \cdot L^{-1}(F_V) - F_R$, on obtient une équation d'Uzawa sur la pression de la forme :

$$A(p) = F \quad (11)$$

Cette équation est résolue au moyen de l'algorithme itératif PCR (résidu conjugué préconditionné) motivé par l'asymétrie de la matrice. Le préconditionnement de A consiste à remplacer la résolution de l'équation (11) par celle du système équivalent

$$\tilde{A}^{-1}A(p) = \tilde{A}^{-1}F \quad (12)$$

tel que $\tilde{A} = \nabla \cdot L^{-1} \nabla$, ainsi le conditionnement de $\tilde{A}^{-1}A$ est plus petit que celui de A .

Le calcul explicite en preprocessing de l'opérateur \tilde{A}^{-1} est inconcevable car trop coûteux. Garba et Haldenwang (2003) ont proposé des stratégies de préconditionnement permettant de ramener la résolution de l'équation d'Uzawa préconditionnée à une équation de Poisson. Nous avons développé dans ce travail une autre alternative qui consiste en une inversion itérative à l'intérieur même de l'algorithme PCR. Le stockage des matrices n'est plus nécessaire entraînant un gain considérable en espace mémoire. Pour un degré d'approximation supérieur à $N=24$, nos résultats montrent que le gain de place mémoire s'accroît très rapidement (gain=95.80% pour $N=48$).

4 Validations de l'algorithme en convection de Rayleigh-Bénard

On considère un fluide pesant enserré entre deux plans parallèles horizontaux soumis à un gradient de température vertical. La force d'Archimède créée par la dilatation du fluide constitue la force motrice du mouvement engendrant l'instabilité de Rayleigh Bénard, dont le paramètre de contrôle est le nombre de Rayleigh, sous forme de rouleaux contrarotatifs. Les parois verticales sont adiabatiques, et on maintient respectivement les plaques supérieure et inférieure à des températures $1-\epsilon$ et $1+\epsilon$. La vitesse satisfait une condition de non glissement sur les parois horizontales et une condition de glissement sur les bords verticaux du domaine. Ceci permet la comparaison avec des solutions bidimensionnelles et périodiques en direction horizontale. L'état initial est l'état hydrostatique sur lequel est superposée une petite perturbation d'amplitude 10^{-12} . Le code est validé sur des résultats 2D obtenus par Fröhlich (1990) en boîtes ouverte et fermée. Un très bon accord est obtenu sur les valeurs des nombres de Rayleigh critiques pour une large gamme de valeurs de ϵ .

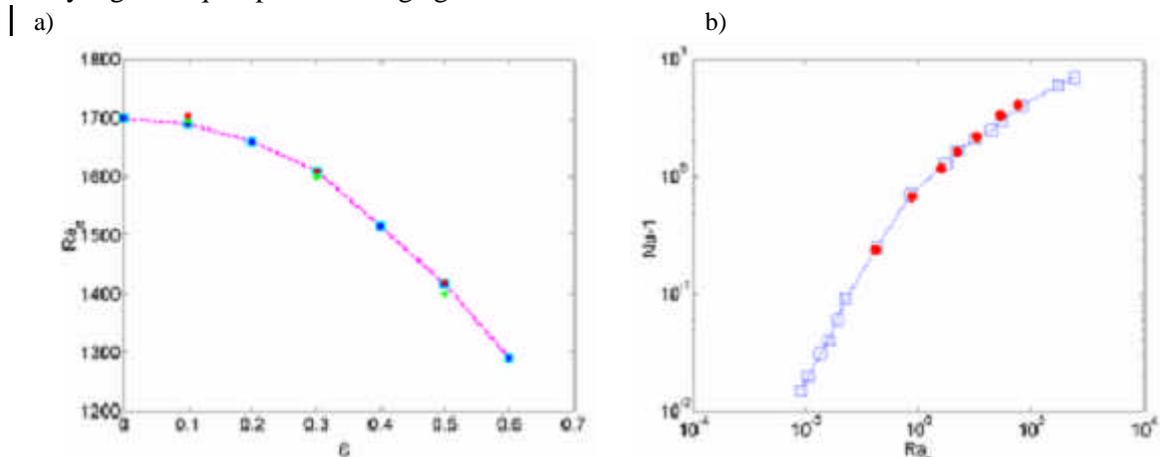


FIG. 1 a) Evolution du nombre de Rayleigh critique en fonction de l'écart de température adimensionné en boîte ouverte. Bleu : Fröhlich (1990). Vert : conductif, Rouge : convectif
b) Evolution du nombre de Nusselt en boîte fermée de rapport de forme $A=2$ en fonction du Rayleigh relatif $Ra_r = (Ra - Ra_c) / Ra_c$, $\epsilon=0.5$

Il est à noter que dans le cas de la boîte fermée¹, le nombre de Rayleigh critique est pratiquement indépendant de ϵ et proche de la valeur critique $Ra_c = 1708$ théoriquement obtenu dans le cas Boussinesq. Au contraire, dans le cas d'une boîte ouverte (FIG.1a), l'écoulement

¹ La différence entre ouverte et fermée concerne uniquement le contact avec l'extérieur et donc la pression thermodynamique car la direction est toujours périodique et donc implicitement infinie d'où la valeur du Rayleigh critique.

devient plus instable lorsque l'on s'éloigne du domaine de validité de l'approximation de Boussinesq (ε très petit). Pour $\varepsilon=0.6$ le nombre de Rayleigh critique diminue à $Ra_c=1300$. Les estimations du nombre de Nusselt concordent également avec les résultats donnés en référence précédente comme le montre la figure 1b dans le cas d'une boîte fermée. Les isolignes de densité et de divergence sont présentées dans le plan (y, z) en figure 2 et mettent l'accent sur l'aspect non incompressible de l'écoulement ainsi que sur le développement d'un régime de couche limite lorsque le nombre de Rayleigh est accru. Les extrêmes de divergence et de densité sont aussi en très bon accord avec les résultats de Fröhlich (1990). Mentionnons finalement, que cette solution 2D s'est montrée être stable à toute perturbation 3D comme attendue dans le cas Boussinesq.

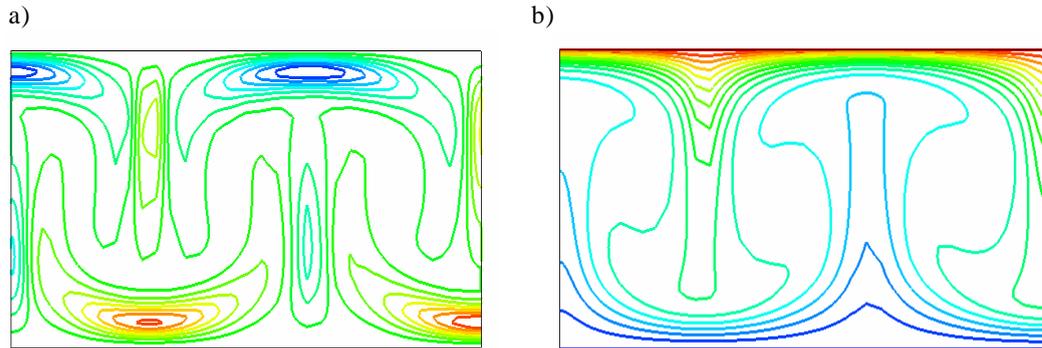


FIG. 2: Champs d'iso-divergence min=-21.7 max=22.09 (a) et iso-densité min=0.67 max=2 (b) obtenus à $Ra=50000$ dans une boîte fermée de rapport de forme $A=2$.

5. Cavité différentiellement chauffée

Afin d'évaluer le code en régime instationnaire, on s'est intéressé aux écoulements d'air en convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée de rapport de forme vertical égal à 8. Les parois haute et basse sont adiabatiques et le gradient de température appliqué entre les parois verticales correspond à un écart de température adimensionné $e=0.6$. La viscosité dynamique est prise constante.

Le nombre de Rayleigh critique a été estimé entre $Ra=2.7 \times 10^5$ et $Ra=3 \times 10^5$ pour un maillage 2D de 91×25 (FIG.3b). Cette valeur est du même ordre, bien qu'inférieure, à la valeur obtenue par Weisman et al. (2001) qui l'estiment entre 3.2×10^5 et 3.4×10^5 dans une cavité de rapport de forme 4. Ce résultat semble cohérent du fait du caractère stabilisant des parois, plus important dans les cavités de plus petit rapport de forme.

Par la suite, on s'est intéressé à la stabilité de cette solution 2D instationnaire obtenue à $Ra=3.4 \times 10^5$. Après interpolation de la solution 2D sur 32 modes de Fourier, une perturbation tridimensionnelle (sinusoïdale) localisée en temps et d'amplitude 10^{-12} est appliquée au champ de température telle que $T = (1 + 10^{12} \sin(2\pi x / 3)) * T$. Après un temps de calcul de 300s, la solution 2D se déstabilise et l'écoulement oscillatoire bifurque (FIG.3a) vers un régime chaotique caractérisé par des structures de convection tridimensionnelles. Ce résultat met en évidence le caractère plus instable de l'écoulement 3D avec un nombre de Rayleigh critique (à déterminer) sensiblement plus faible que celui obtenu en régime 2D. Des calculs supplémentaires sont nécessaires afin de complètement caractériser ces régimes 3D.

6 Remarques finales

Dans ce papier une méthode d'ordre élevé a été proposée pour la résolution des équations tridimensionnelles dans un modèle faible nombre de Mach. Le code optimisé sur le calculateur

vectoriel de l’IDRIS est très performant et autorise des maillages 3D importants. Les premiers résultats de validation sont présentés en considérant de fortes variations de la masse volumique, et sont en très bon accord avec les calculs 2D de la littérature. Les simulations 3D ont été initiées et les résultats préliminaires sont très intéressants et montrent en particulier que la solution 2D obtenue à $Ra=3.4\times 10^5$ est instable.

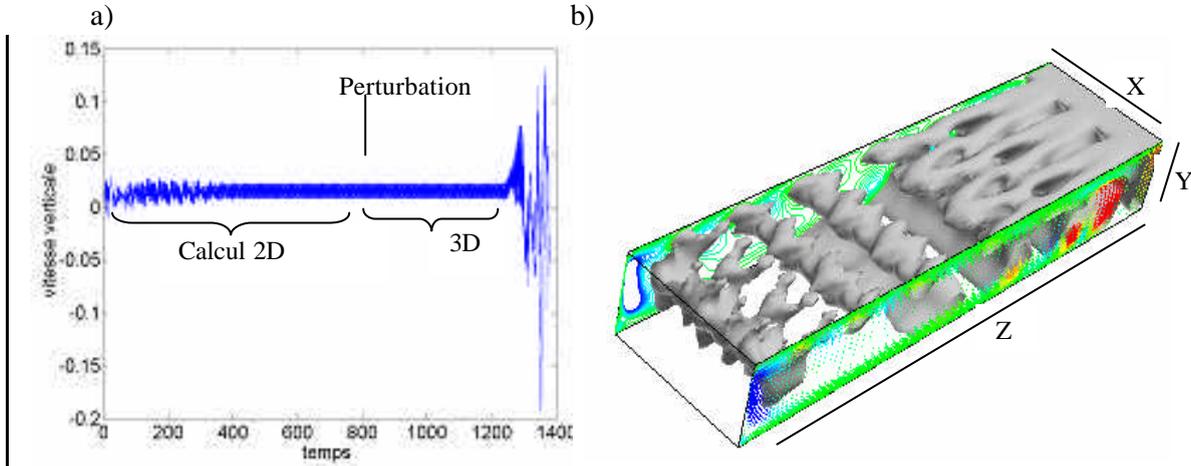


FIG. 3: Calcul 3D de la cavité différentiellement chauffée à $Ra=3.4\times 10^5$. a) Signal de la vitesse au milieu de la cavité. b) Vue tridimensionnelle du champ de vitesse perturbée.

Références :

- Accary, G. 2005 Convection de Rayleigh Bénard dans les fluides supercritiques: Mécanismes d’instabilité et transition à la turbulence, Thesis, Université de la Méditerranée, Marseille.
- Fröhlich, J., Peyret R. 1990 Calculations of Non-Boussinesq Convection by a Pseudospectral Method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 80, 425-433.
- Fröhlich, J., Laure, P., Peyret, R. 1992 Large departures from Boussinesq approximation in the Rayleigh-Bénard problem, *Phys. Fluids, A* 4, 1355-1372.
- Garba, A., Haldenwang, P. 2003 Comparaison of preconditioners for collocation chebyshev approximation of 2D and 3D generalized Stokes problem, *J. Comp. Phys.* 191, 282-304.
- Le Quéré, P., Masson, R., Perrot, P. 1992 A Chebyshev collocation algorithm for 2D non-Boussinesq convection, *J. Comp. Phys.* 103, 320-335.
- Lessani, B., Papalexandris, M. V. 2006 Time accurate calculation of variable density flows with strong temperature gradients and combustion, *J. Comp. Phys.*, 212, 218-246.
- Maday, Y., Patera, A. T., Rønquist, E. M. 1992 The $P_N\times P_{N-2}$ method for the approximation of the Stokes problem, *Laboratoire d’analyse numérique, Paris VI*, 11, fasc. 4.
- Nicoud, F. 2000 Conservative high-order finite-difference schemes for low Mach number flows, *J. Comp. Phys.*, 158, 71-97.
- Paolucci, S. 1982 On the filtering of sound from the Navier Stokes equations, SAND82-8257, Sandia National Laboratories, Livermore.
- Weisman, C., Calsyn, L., Dubois, C. et Le Quéré, P. 2001 Sur la nature de la transition à l’instationnaire d’un écoulement de convection naturelle en cavité différentiellement chauffée à grands écarts de température. *C.R. Acad.Sci. Paris*, t. 329, Série II b, p. 343-350