

Calcul des vibrations moyennes fréquences de structures avec hétérogénéité aléatoire. Application aux masses concentrées

Laurent Blanc¹ & Claude Blanzé²

¹LTDS (École Centrale de Lyon / CNRS UMR 5513, 69130 Ecully, France)

²LMSSC (CNAM, 75003 Paris, France)

Laurent.Blanc@ec-lyon.fr

Résumé :

Ce papier propose des techniques efficaces d'obtention des quantités effectives lors du calcul des réponses vibratoires moyennes fréquences de structures complexes, c'est-à-dire impliquant des paramètres stochastiques relatifs à la présence d'une hétérogénéité. Le premier ingrédient utilisé est une approche dédiée à la résolution des problèmes moyennes - fréquences : la théorie variationnelle des rayons complexes (TVRC). La TVRC, qui exploite des fonctions de base à deux échelles vérifiant exactement l'équation de la dynamique et la relation de comportement, peut être vue comme un moyen d'exprimer l'équilibre des flux de puissance aux différentes interfaces entre les sous-structures. Le deuxième ingrédient introduit dans ce papier est l'utilisation de la décomposition sur le chaos polynomial (PCE) pour calculer la réponse aléatoire. Comme les seuls paramètres aléatoires sont ceux qui apparaissent dans la caractérisation de l'hétérogénéité locale (qui, dans l'application proposée est constituée d'une masse concentrée), cette approche conduit à des calculs très peu coûteux.

Abstract :

This paper proposes efficient techniques to obtain effective quantities when dealing with complex structures (including stochastic parameters, such as heterogeneity parameters) in medium-frequency vibrations. The first ingredient considered is the use of a dedicated approach - the Variational Theory of Complex Rays (VTCR) - to solve the medium-frequency problem. The VTCR, which uses two-scale shape functions verifying the dynamic equation and the constitutive relation, can be viewed as a means of expressing the power balance at the different interfaces between substructures. The second ingredient is the use of the Polynomial Chaos Expansion (PCE) to calculate the random response. Since the only uncertain parameters are those which characterize the heterogeneity (which, in this application, is a concentrated mass), this approach leads to very low computation costs.

Mots-clefs :

moyennes fréquences ; hétérogénéités ; incertitudes

1 Introduction

Aujourd'hui, les principales techniques de modélisation pour l'analyse des vibrations moyennes fréquences sont toutes basées sur des approches par éléments finis ou par éléments de frontières. Pour représenter des phénomènes à petite longueur d'onde dans des structures complexes ces techniques nécessitent un nombre très élevé de degrés de liberté. De plus, les solutions obtenues sont très sensibles aux hétérogénéités structurales, aux propriétés du matériau et aux conditions aux limites. La variabilité des données est représentée par une approche probabiliste. L'enjeu est d'obtenir, à moindre coût, la réponse vibratoire stochastique de la structure et les grandeurs effectives pertinentes.

L'utilisation d'approches hautes fréquences, comme l'étude statistique de l'énergie (SEA) initiée dans Lyon et Maidanik (1962) ou de ses développements se révèle peu adaptée aux vibrations moyennes fréquences : le comportement vibratoire est décrit de manière trop globale et, en général, le facteur de pertes par couplage ne peut pas être calculé de façon prédictive. Ce

papier propose des techniques efficaces d'obtention des quantités effectives lors du traitement de structures complexes impliquant des paramètres stochastiques relatifs à une hétérogénéité.

La première technique utilisée est une approche dédiée à la résolution des problèmes moyennes - fréquences : la théorie variationnelle des rayons complexes (TVRC) décrite dans Ladevèze *et al.* (2001). Basée à l'origine sur l'hypothèse selon laquelle la structure était un assemblage de sous-structures homogènes, la TVRC a été étendue de manière à permettre au concepteur de prendre en compte des hétérogénéités locales dans Blanc *et al.* (2003). La deuxième technique introduite ici est la décomposition de la réponse aléatoire sur le chaos polynomial (PCE) décrite dans Ghanem (1991). Comme les seuls paramètres aléatoires sont ceux qui apparaissent dans la caractérisation de l'hétérogénéité locale, cette approche conduit à des calculs très peu coûteux. Dans l'exemple proposé, la méthode est appliquée à une plaque portant un accéléromètre piézo-électrique utilisé pour des mesures de vibrations. Cet accéléromètre est modélisé par une masse concentrée. La réponse vibratoire de ce système dans le domaine des moyennes fréquences est très sensible à une telle discontinuité dans la structure de la plaque. Notre objectif est de quantifier ce phénomène avant de choisir un modèle particulier dans une gamme d'accéléromètres possibles.

2 Le problème de vibration forcée en moyennes fréquences par la TVRC

2.1 Les bases de la TVRC

La théorie variationnelle des rayons complexes est une approche dédiée pour le calcul des vibrations moyennes fréquences. Elle peut être résumée en deux points majeurs. La première caractéristique de cette approche est l'utilisation d'une formulation variationnelle qui permet d'utiliser *a priori* des approximations indépendantes par sous-structures. En effet, les conditions de transmission en déplacement et en effort aux interfaces entre sous-structure n'ont pas besoin d'être vérifiées exactement mais seulement de façon faible dans une formulation variationnelle. La deuxième caractéristique de la TVRC est l'introduction au sein de chaque sous-structure d'approximations à deux échelles avec un sens mécanique fort : la solution est supposée localement bien décrite dans le voisinage d'un point comme la superposition d'un nombre infini de modes de vibration locaux. Ces modes de base, qui peuvent être des modes intérieurs, des modes de bord ou des modes de coin, vérifient exactement les équations de la dynamique et les relations de comportement de chaque sous-structure. Toutes les directions de propagation des ondes sont prises en compte et les inconnues sont des amplitudes discrétisées par exemple en les choisissant constantes pour toutes les directions de propagation comprises dans un secteur angulaire donné. Ces grandeurs étant par construction associées à l'échelle lente des phénomènes, la résolution du problème porte sur un système linéaire de petite taille. La faisabilité et les performances de cette méthode sont montrées dans Ladevèze *et al.* (2001).

2.2 Extension de la TVRC pour le traitement de structures hétérogènes

L'accéléromètre est modélisé par une masse ponctuelle, ce qui se justifie par la petite taille du capteur devant les longueurs caractéristiques des structures et des phénomènes étudiés. D'un point de vue mécanique, pour une fréquence d'excitation donnée, la masse crée une perturbation de la réponse vibratoire de la structure testée. En effet elle génère une force concentrée qui dépend du déplacement sous l'accéléromètre. Pour en tenir compte la stratégie consiste à enrichir l'espace des champs servant à modéliser la structure non instrumentée : le nouveau champ décrit le comportement d'une plaque infinie soumise à une force unitaire. Son amplitude est une inconnue supplémentaire du problème qui est liée aux amplitudes des autres champs

par la condition d'équilibre de la masse. Le problème discrétisé relatif aux structures hétérogènes est donc contraint, ce qui peut s'exprimer pour la résolution à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange.

3 Prise en compte de l'incertitude sur la masse du capteur

Dans le problème traité, tous les paramètres du modèle sont déterministes en dehors de la masse du capteur : le caractère aléatoire de la réponse provient du comportement aléatoire de la masse concentrée du capteur, modélisée par une variable aléatoire du second ordre $M(\theta)$, avec θ appartenant à l'espace Ω des événements élémentaires. La variable aléatoire $M(\theta)$ conduit, dans l'espace discrétisé, au système linéaire

$$\mathbf{K}(M(\theta)) \mathbf{A}(\theta) = \mathbf{f} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}(\theta) = \sum_{i=0}^P \mathbf{u}_i \Psi_i(\xi(\theta)) \quad (1)$$

où $\Psi_i(\xi(\theta))$ sont des polynômes des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites $\{\xi_j(\theta)\}$, lesquels forment une base complète dans l'espace de Hilbert des variables aléatoires du second ordre selon Cameron (1947). Le nombre de polynômes P dépend de l'ordre p de la décomposition sur le chaos et du nombre L de paramètres stochastiques d'entrée (ici $L = 1$). Le système devient :

$$\sum_{j=0}^P \sum_{i=0}^L c_{ijk} \mathbf{K}_i \mathbf{u}_j = \delta_{0k} \mathbf{f} \quad k = 0, 1, \dots, P \quad (2)$$

où les coefficients c_{ijk} ne sont calculés qu'une seule fois. Les inconnues \mathbf{u}_j sont obtenues par la résolution de ce système linéaire de taille $(P+1) n \times (P+1) n$, n étant le nombre de degrés de liberté du système linéaire déterministe associé.

4 Application

Nous étudions l'influence d'une incertitude sur la valeur de la masse du capteur sur la réponse vibratoire d'une plaque d'acier rectangulaire de longueur $L = 1 \text{ m}$, de largeur $l = 0.8 \text{ m}$ et d'épaisseur $h = 0.8 \text{ mm}$ (figure 1). Le capteur est fixé au centre de la plaque. Les propriétés

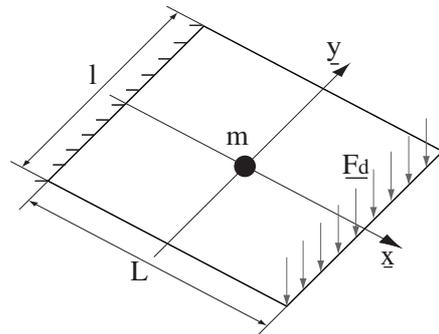


FIG. 1 – Géométrie et conditions aux limites

du matériau sont $E = 210 \text{ GPa}$, $\eta = 0.001$, $\nu = 0.3$ et $\rho = 7,800 \text{ kg/m}^3$. L'excitation harmonique est une force F_d répartie sur un côté : $f = 330 \text{ Hz}$; $F_d = 1 \text{ N/m}$. La plaque est encastree sur le côté opposé. La masse m de l'accéléromètre est une variable aléatoire gaussienne de valeur moyenne \bar{m} et d'écart-type σ . Nous choisissons $\bar{m} = 0.050 \text{ kg}$ et $\sigma = 0.15 \bar{m}$. Pour ξ appartenant à l'intervalle $[-3, 3]$, m appartient à l'intervalle $[\bar{m} - 3\xi, \bar{m} + 3\xi] = [0.024, 0.075] \text{ kg}$.

La solution obtenue par la TVRC étendue fait intervenir 48 modes intérieurs, 84 modes de bord et une fonction d'enrichissement. Elle a été associée à une décomposition sur le chaos polynomial d'ordre 5.

Nous avons d'abord calculé la courbe de réponse donnant le déplacement effectif global $\overline{|w|}$ (c'est-à-dire la valeur moyenne de l'amplitude sur toute la plaque) en fonction de ξ (figure 2). Un échantillonnage de 50 000 valeurs de m a été obtenu par tirage de Monte Carlo. Les queues

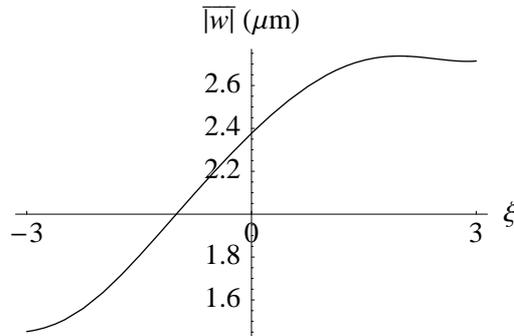


FIG. 2 – Représentation paramétrique de $\overline{|w|}$ sur la base du chaos

de distributions ont été tronquées à $\pm 3\sigma$. La figure 3 montre la fonction densité de probabilité $f_{\overline{|w|}}$ associée à $\overline{|w|}$. La fonction densité de probabilité cumulée $F_{\overline{|w|}}$ associée à $\overline{|w|}$ (figure 4)

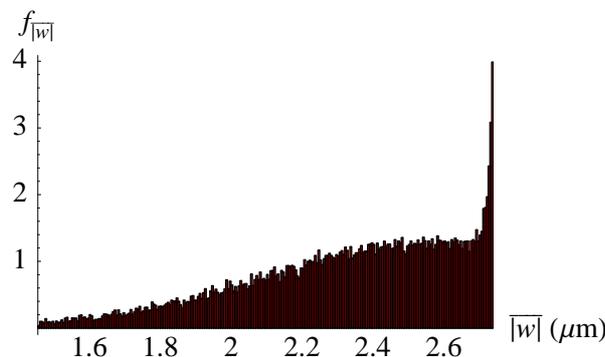
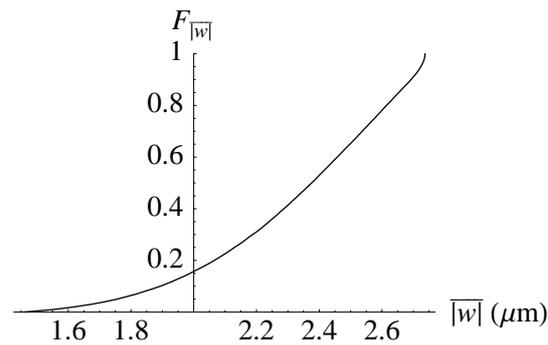
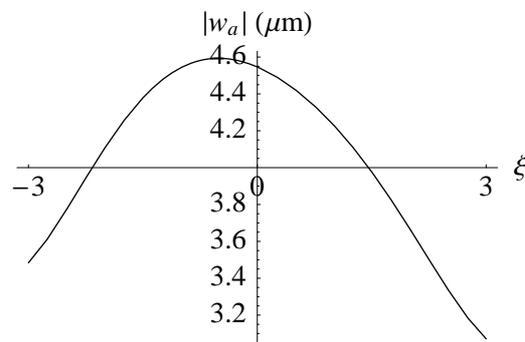


FIG. 3 – Fonction densité de probabilité approchée associée à $\overline{|w|}$

nous permet d'évaluer la probabilité de dépasser un seuil critique.

La même analyse a été réalisée pour l'amplitude locale $w(X_a)$ sous l'accéléromètre. La fonction de réponse (figure 5) a été associée à la fonction densité de probabilité $f_{w(X_a)}$ (figure 6) et à la fonction densité de probabilité cumulée $F_{w(X_a)}$ (figure 7).

Ces résultats montrent qu'en moyennes fréquences les réponses vibratoires sont très sensibles aux discontinuités structurales telles que des masses concentrées additionnelles. Ils permettent de quantifier ce phénomène et de guider l'ingénieur concepteur d'essais lors du choix de capteurs servant à des mesures de vibrations dans cette gamme de fréquences.

FIG. 4 – Fonction densité de probabilité cumulée approchée associée à $|w|$ FIG. 5 – Représentation paramétrique de $w(X_\alpha)$ sur la base du chaos

5 Conclusions

La théorie variationnelle des rayons complexes fournit un cadre général pour la modélisation et le calcul des vibrations en moyennes fréquences. Son intérêt principal réside dans l'utilisation de fonctions de base ayant un sens physique fort combinées grâce à une formulation variationnelle qui permet l'utilisation d'approximations indépendantes d'une sous-structure à l'autre. Lors de l'étude des structures complexes, elle fournit des résultats prédictifs pour un coût numérique faible. De plus, la souplesse de son formalisme permet de prendre en compte assez aisément des hétérogénéités incertaines décrites par des paramètres stochastiques. Le bénéfice tiré de l'utilisation de fonctions de base à deux échelles est alors double : d'abord, la taille du système issu de la décomposition sur le chaos polynomial reste assez faible ; ensuite, la variation des inconnues quand les paramètres de l'hétérogénéité varient est suffisamment lente pour être facilement représentée par une fonction polynomiale. Des exemples faisant intervenir un plus grand nombre de variables aléatoires sont à l'étude.

Références

- Blanc, L., Blanzé, C., Ladevèze, P., and Rouch, P. (2003). A multiscale and Trefftz computational method for medium-frequency vibrations of assemblies of heterogeneous plates. *Computer-Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 10 :375–384.
- Cameron, R. and Martin, W. (1947). The orthogonal development of non linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals. *Ann. Math.*, 48(16) :385–392.

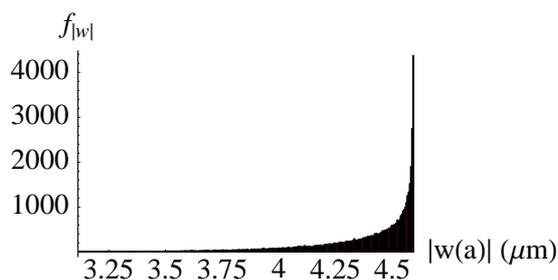


FIG. 6 – Fonction densité de probabilité approchée associée à $w(\underline{X}_a)$

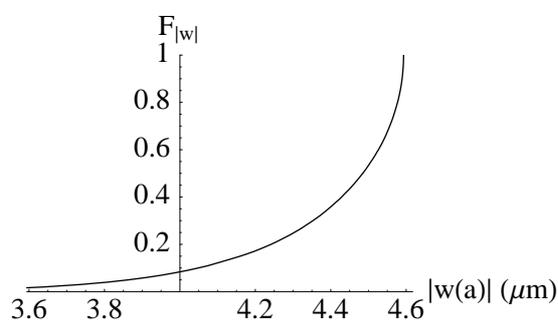


FIG. 7 – Fonction densité de probabilité cumulée approchée associée à $w(\underline{X}_a)$

Ghanem, R. and Spanos, P. (1991). *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer, Berlin.

Ladevèze, P. (1996). Une nouvelle approche pour le calcul des vibrations moyennes fréquences. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*, 322(12) :849–56.

Ladevèze, P., Arnaud, L., Rouch, P., and Blanzé, C. (2001). The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engrg. Comput.*, 18(1) :193–214.

Lyon, R. and Maidanik, G. (1962). Power flow between linearly coupled oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 34(5) :623–39.