

Une comparaison de récepteurs source-canal conjoint utilisant des codes LDPC

Charly POUILLIAT^{1,3*}, Catherine LAMY-BERGOT², Inbar FIJALKOW¹

¹ETIS - UMR8051, ENSEA/UCP/CNRS

6 avenue du Ponceau, F-95014 Cergy-Pontoise, FRANCE

²THALES Land & Joint Systems, EDS/SPM WaveForm Design Group
160 boulevard de Valmy, B.P. 82, F-92704 Colombes Cedex, FRANCE

³Coding Group, Dept. of Elec. Eng., University of Hawaii
2540 Dole Str., Honolulu, HI 96813, USA

{poulliat, fijalkow}@ensea.fr, catherine.lamy@fr.thalesgroup.com

Résumé – L’optimisation d’un récepteur utilisant un décodage source-canal conjoint (DSCC) impliquant un code LDPC sera considérée pour les systèmes itératifs suivant : (a) récepteur source-canal conjoint optimal, (b) récepteurs compatibles avec des applications non conjointes, (c) le récepteur tandem optimal supposant une compression de source parfaite. Des résultats d’optimisation et de simulation seront fournis pour différents rendements et longueurs de mots de code.

Abstract – In this paper, we compare different Joint Channel Decoding (JSCD) schemes involving LDPC codes: (i) JSCD optimised, (ii) non-JSCD compatible optimised, and finally (iii) an optimal tandem system assuming perfect source compression. Some Optimisation and simulation results are provided for different rates and codeword lengths.

1 Introduction

Les récepteurs source-canal conjoints sont des récepteurs de type "turbo" entre un décodeur de source et un décodeur de canal à entrées et sorties souples, dont le but est d’exploiter au mieux la redondance résiduelle et la structure de la source afin d’améliorer les performances en réception. Ainsi, par exemple, [1] considèrent un codeur source concaténé avec un code convolutif et [2] considèrent un système doublement itératif mettant en jeu des turbo-codes. [3] utilisent un code LDPC (Low Density Parity Check) comme code correcteur concaténé : ce choix fut motivé par la facilité d’optimisation de la structure du code permettant de donner un récepteur asymptotiquement optimal pour une source et un code source associé donnés. Ainsi les auteurs proposent-ils une méthode d’analyse et d’optimisation pour obtenir le récepteur optimal sous approximation gaussienne. Cependant, les codes obtenus par cette méthode, si ils permettent d’atteindre de bonnes performances pour le système conjoint, n’offrent pas forcément des performances satisfaisantes si ils sont considérés hors système conjoint. Il est d’un intérêt pratique d’avoir des systèmes qui offrent de bonnes performances à la fois dans un cadre source-canal conjoint et dans un cadre tandem. La question est alors de savoir quels peuvent être ces récepteurs et offre-t-ils un bon compromis de performances sur les deux types d’applications ? Ainsi, l’optimisation du récepteur source-canal conjoint sera considérée pour les systèmes itératifs suivant : (a) récepteur source-canal conjoint optimal, (b) récepteurs compatibles avec des applications non conjointes, (c) le récepteur tandem optimal supposant

une compression de source parfaite.

La suite du papier est organisée comme suit : la section 2 présente le système itératif et les hypothèses considérés. En section 3, l’analyse asymptotique de convergence du récepteur conjoint est brièvement décrite. L’optimisation du récepteur conjoint dans les différents cas d’application précités est discutée en section 4. Enfin, des résultats d’optimisation et de simulations sont fournis section 5 et les conclusions et perspectives sont données section 6.

2 Description du récepteur et hypothèses

Dans la suite du papier, le canal de propagation considéré est le canal sans mémoire à Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG). Pour des raisons pratiques d’implémentation, nous supposons le code LDPC systématique. Une itération globale de décodage est composée d’une itération de décodeur LDPC suivie d’une itération du décodeur source. Comme dans de nombreux travaux, nous supposons ici la synchronisation des données effective au niveau paquet (mot de code). Le graphe factoriel correspondant au système proposé est représenté Figure 1.

L’algorithme de propagation de croyances (BP) est utilisé pour le décodage itératif du code LDPC et un Maximum A Posteriori (MAP) pour le décodeur de source. L’optimisation du récepteur conjoint étant basée sur une étude asymptotique de la convergence, on considérera dans un premier temps des mots de code infiniment longs. Cependant, des résultats de simulations seront fournis dans le cas de mots de code de tailles longues et moyennes.

*C. Poulliat est actuellement financé par une bourse postdoctorale du programme Lavoisier du Ministère des Affaires Etrangères.

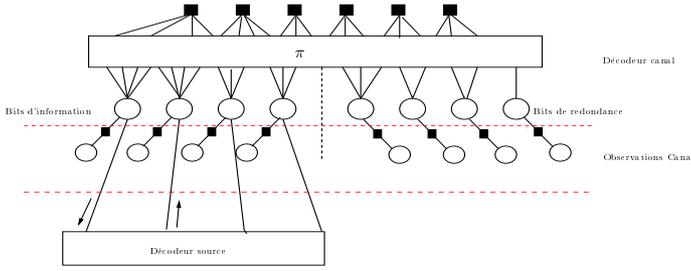


FIG. 1 – Représentation graphique du récepteur conjoint.

3 Analyse asymptotique de convergence

Le paramètre monodimensionnel considéré pour l'analyse asymptotique est l'information mutuelle associée à chaque message log-rapport de vraisemblance (Log-Likelihood ratio, LLR) transitant dans le graphe associée au récepteur (voir [4] [5]). Le décodeur source ne fournissant une information extrinsèque que sur les bits d'information, on distinguera, parmi les noeuds de donnée du codes LDPC, les noeuds de donnée associés aux bits d'information et ceux associés aux bits de redondance. A l'itération de décodage ℓ , on note $x_{cv}^{(\ell)}$, $x_{vc}^{I(\ell)}(i)$, $x_{vc}^{R(\ell)}(i)$, $x_{vs}^{(\ell)}(i)$ et $x_{sv}^{(\ell)}(i)$ respectivement l'information mutuelle en sortie des noeuds de parité, l'information mutuelle associée aux messages entre les noeuds de donnée associés aux bits d'information (I) de degré i et les noeuds de parité, l'information mutuelle associée aux messages entre les noeuds de donnée associés aux bits de redondance (R) de degré i et les noeuds de parité, l'information mutuelle associée aux messages entre les noeuds de donnée de degré i et le décodeur source et enfin l'information mutuelle en sortie de décodeur source. On définit $x_{vc}^{(\ell)}$ comme l'information mutuelle à l'entrée des noeuds de parité (après l'entrelaceur π). On a donc une mixture de $x_{vc}^{I(\ell)}(i)$ et $x_{vc}^{R(\ell)}(i)$. Dans le cadre d'une approximation gaussienne [6], la relation entre l'information mutuelle et la moyenne des messages LLR associés est donnée par la fonction $J(\cdot)$ [4] :

$$J(m) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi m}} \int_{\mathbf{R}} \log_2(1 + e^{-v}) \exp\left(\frac{-(v-m)^2}{4m}\right) dv.$$

Pour le code LDPC, $\underline{\rho} = [\rho_2, \dots, \rho_{t_{r_{\max}}}]^T$, $\underline{\lambda}^I = [\lambda_2^I, \dots, \lambda_{t_{c_{\max}}}^I]^T$ et $\underline{\lambda}^R = [\lambda_2^R, \dots, \lambda_{t_{c_{\max}}}^R]^T$ représentent respectivement la proportion de branches du graphe connectées avec des noeuds de parité de degré de connexion $\{j, j = 2, \dots, t_{r_{\max}}\}$, la proportion de branches du graphe connectées avec des noeuds de données d'information de degré de connexion $\{i, i = 2, \dots, t_{c_{\max}}\}$ et la proportion de branches du graphe connectées avec des noeuds de données de redondance de degré de connexion $\{r, r = 2, \dots, t_{c_{\max}}\}$. On définit également $\underline{\lambda} = [\underline{\lambda}^I, \underline{\lambda}^R]^T$, $1/t_c = [1/2, \dots, 1/t_{c_{\max}}]^T$ et $1/t_r = [1/2, \dots, 1/t_{r_{\max}}]^T$. $t_{r_{\max}}$ (resp. $t_{c_{\max}}$) est le degré de connexion maximum pour un noeud de parité (resp. pour un noeud de donnée). Le canal de propagation étant le canal BABG, la moyenne des messages LLR associés aux observations du canal est donnée par $\mu_0 = 2/\sigma^2$ avec σ^2 la variance du bruit du canal.

Dans le cadre d'une approximation gaussienne de la densité des messages pour le décodeur LDPC et le décodeur source, les équations décrivant l'évolution de l'information mutuelle au sein du récepteur conjoint sont les suivantes [3] :

- Mise à jour des messages pour les noeuds de donnée :

$$\begin{aligned} x_{vc}^{I(\ell)}(i) &= J(\mu_0 + (i-1)J^{-1}(x_{cv}^{(\ell-1)}) + J^{-1}(x_{sv}^{(\ell-1)}(i))) \\ x_{vc}^{R(\ell)}(r) &= J(\mu_0 + (r-1)J^{-1}(x_{cv}^{(\ell-1)})) \\ x_{vc}^{(\ell)} &= \sum_{i=2}^{t_{c_{\max}}} \lambda_i^I x_{vc}^{I(\ell)}(i) + \sum_{r=2}^{t_{c_{\max}}} \lambda_r^R x_{vc}^{R(\ell)}(r) \end{aligned} \quad (1)$$

- Mise à jour des messages pour les noeuds de parité :

$$x_{cv}^{(\ell)} = 1 - \sum_{j=2}^{t_{r_{\max}}} \rho_j J((j-1)J^{-1}(1 - x_{vc}^{(\ell)})) \quad (2)$$

- Mise à jour des messages du décodeur LDPC vers le décodeur source :

$$x_{vs}^{(\ell)}(i) = J(\mu_0 + iJ^{-1}(x_{vc}^{(\ell)})), \forall i = 2, \dots, t_{c_{\max}} \quad (3)$$

- Mise à jour des messages en sortie de décodeur source :

$$x_{sv}^{(\ell)}(i) = T(x_{vs}^{(\ell)}(i)), \forall i = 2, \dots, t_{c_{\max}} \quad (4)$$

où $T(\cdot)$ la fonction EXIT chart associée au décodeur source, généralement obtenue par méthode de Monte Carlo comme dans [7] en utilisant une approximation gaussienne. La combinaison des équations (1), (2), (3) and (4) donne l'évolution complète de l'information mutuelle

$$x_{vc}^{(\ell+1)} = F([\underline{\lambda}^I, \underline{\lambda}^R], x_{vc}^{(\ell)}, \mu_0) \quad (5)$$

et pour laquelle les conditions à l'initialisation sont $\forall i = 2 \dots t_{c_{\max}}$, $x_{sv}^{(0)}(i) = 0$ and $x_{cv}^{(0)} = 0$. La condition $F([\underline{\lambda}^I, \underline{\lambda}^R], x, \mu_0) > x, \forall x \in [0, 1]$ assure quant à elle la convergence au point fixe $x = 1$ de l'équation (5), correspondant en fait à une probabilité d'erreur nulle. En notant $M = J^{-1}(T(1))$, la condition de stabilité du système autour de ce point fixe peut être déterminée de manière semi-analytique et est donnée par [3][5] : (i) si $T(1) = 1$: $\lambda_2^R < e^{2\sigma^2} / \sum_j \rho_j (j-1)$, (ii) si $T(1) < 1$: $\lambda_2^I e^{-\frac{M}{4}} + \lambda_2^R < \lambda_2^*(\sigma^2, \underline{\rho}) = e^{\frac{1}{2\sigma^2}} / \sum_{j=2}^{t_{r_{\max}}} \rho_j (j-1)$.

4 Optimisation du récepteur joint

Dans cette section sont décrites différentes stratégies d'optimisation : le récepteur conjoint optimal (optimisation DSCC) et les récepteurs compatibles avec des applications non conjointes (optimisation compatible non-DSCC).

4.1 Optimisation DSCC

L'optimisation des paramètres du code LDPC irrégulier peut s'écrire sous la forme d'un problème d'optimisation que l'on peut résoudre par programmation linéaire lorsque l'on considère le rendement comme fonction de coût à maximiser [3]. Pour $\rho(x)$ et σ^2 fixés, le problème d'optimisation s'écrit comme suit :

$$\underline{\lambda}_{opt} = \max_{\underline{\lambda}} [1/t_c, 1/t_r]^T \underline{\lambda} \text{ avec les contraintes : } (6)$$

$$[C_1] \text{ proportions : } 1^T \underline{\lambda} = 1 \text{ et } 1/t_c \underline{\lambda}^R = 1/t_r \underline{\lambda}^I,$$

$$[C_2] \text{ convergence : } F(\underline{\lambda}, x, \mu_0) > x,$$

$$[C_3] \text{ condition de stabilité : } \lambda_2^I e^{-\frac{M}{4}} + \lambda_2^R < \lambda_2^*(\sigma^2, \underline{\rho}).$$

Pour un rendement de codage cible R , par recherche successive sur σ^2 et $\rho(x)$, on obtient les paramètres optimaux $(\lambda(x), \rho(x))$, donnant le meilleur seuil de convergence $\delta^* = (E_b/N_0)_{opt}$ sous approximation gaussienne.

4.2 Optimisation compatible non-DSCC

Pour des raisons système pratiques, il est souvent souhaité que le codeur canal conçu puisse offrir de bonnes performances sur un canal donné avec ou sans interactions avec le décodeur source. Pour un canal de transmission donné standard (BABG par exemple), il est possible de déterminer les paramètres du code LDPC permettant d'approcher le plus proche possible de la capacité du canal. Ce code est alors un candidat naturel pour notre récepteur compatible. D'un point de vue théorique (approche asymptotique utilisant le seuil de convergence comme critère de performance), tous les mappings d'information sont équivalents. D'un point de vue pratique cependant, le mapping d'information consistant à allouer les bits d'information aux noeuds les plus connectés permet de minimiser la probabilité d'erreur bit moyenne à nombre d'itérations fini. Nous notons ce mapping \mathcal{M}_0 . Compte tenu de la dissymétrie information/redondance dans le cadre source-canal conjoint, différents mappings conduisent à des seuils de convergence différents et donc rien ne garantit que le mapping \mathcal{M}_0 soit optimal du point de vue asymptotique pour des applications compatibles. La question est alors : quel est le mapping optimal \mathcal{M}^* ? Quels sont ses performances ?

En considérant la méthode d'optimisation (6), le mapping optimal \mathcal{M}^* en terme de seuil de convergence est obtenu simplement par ajout de la contrainte suivante :

$$[C_4] \forall k = 2 \dots t_{c_{\max}}, \lambda_k^I + \lambda_k^R = \lambda_k^{(a)}$$

$\lambda_k^{(a)}$ est la proportion de branches connectées à des noeuds de donnée de degré k pour le code optimisé sur le canal considéré (ici le canal BABG).

5 Résultats

Sans perte de généralités, le décodeur source considéré est un décodeur de codes source de type Huffman à entrées et sorties souples (Variable Length Code, SISO-VLC). Le code de source considéré en exemple et la source de symboles correspondante sont issus de [1] : on considérera donc dans la suite le code $\mathcal{C} = (00, 11, 010, 101, 0110)$. Les probabilités associées sont $\mathcal{P} = (0.33, 0.30, 0.18, 0.10, 0.09)$. L'entropie associée et la longueur moyenne d'un mot de code source sont données respectivement par $H = 2.14$ et $\bar{l} = 2.46$ bits/symboles. La redondance résiduelle est alors $R_s = H/\bar{l} = 0.86992$. Le décodeur de source SISO-VLC est un décodeur MAP sur le treillis bit du code [8]. La fonction de transfert $T(\cdot)$ du décodeur source est estimée par méthode de Monte Carlo [7]. Pour le code source utilisé, l'EXIT chart simulée donne $T(1) \simeq 1$. On considérera par ailleurs des degrés concentrés pour $\rho(x)$ [6]. L'optimisation pour différentes valeurs de $\bar{\rho} = \rho_j + (1 - \rho)(j + 1)$ est réalisée pour obtenir le code avec le meilleur seuil de convergence pour $t_{c_{\max}} = 30$, $R = 1/2$ et $R = 2/3$. Le rendement global est $R_T = R_s R = 0.43496$ pour le système avec un code de rendement $R = 1/2$ et $R_T = 0.5799$ pour celui avec le code de rendement $R = 2/3$. La limite de Shannon pour le canal BABG donne les rapports signal à bruit théoriques optimaux $E_b/N_0 = -0.0957$ dB et $E_b/N_0 = 0.5734$ dB pour $R_T = 0.43496$ et $R_T = 0.5799$ respectivement.

$\lambda(x)$	$R = 1/2$ \mathcal{M}^*		$R = 1/2$ \mathcal{M}_0		$R = 2/3$ $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}^*$	
	I	R	I	R	I	R
λ_2	0.0080	0.2022	/	0.2102	0.0348	0.1345
λ_3	0.1641	0.0301	0.1777	0.0165	0.2011	/
λ_5	0.0435	/	0.0435	/	0.0008	/
λ_7	0.1400	/	0.1400	/	0.1964	/
λ_8	0.1044	/	0.1044	/	0.0926	/
λ_{30}	0.3036	/	0.3036	/	0.3388	/

TAB. 1 – Mappings avec optimisation compatible non-DSCC.

5.1 Résultats d'optimisation

Dans le cadre de l'optimisation DSCC, le seuil de convergence théorique $\delta^* = 1/(2 * R_T * \sigma^2)$ du récepteur conjoint global est une fonction de $\bar{\rho}$. Par optimisation successive, on peut montrer qu'il existe, à la fois pour les rendements $R = 1/2$ et $R = 2/3$, une valeur minimal δ^* qui nous donne alors les paramètres optimaux $(\lambda(x), \rho(x))$ pour le récepteur conjoint. Pour $R = 1/2$ et $R = 2/3$, les valeurs optimales de $\bar{\rho}$ minimisant le seuil de convergence sont respectivement $\bar{\rho} = 7.91$ et $\bar{\rho} = 12.46$. Pour $R = 1/2$, en utilisant une représentation polynomiale [6], le profile du code pour les distributions des branches connectées à des noeuds de données est donné par $\lambda(x) = \lambda^I(x) + \lambda^R(x)$ avec $\lambda^I(x) = 0.1130x + 0.0830x^3 + 0.1201x^4 + 0.0588x^8 + 0.1044x^9 + 0.2516x^{29}$ et $\lambda^R(x) = 0.2216x + 0.0475x^2$. De même, pour $R = 2/3$, nous obtenons $\lambda^I(x) = 0.1130x + 0.0830x^3 + 0.1201x^4 + 0.0588x^8 + 0.1044x^9 + 0.2516x^{30}$ et $\lambda^R(x) = 0.1608x$.

Dans le cadre de l'optimisation compatible non DSCC, l'optimisation des profiles des codes est réalisée tout d'abord pour le canal BABG pour $t_{c_{\max}} = 30$, $R = 1/2$ et $R = 2/3$ sous approximation gaussienne [6] en utilisant l'évolution de l'information mutuelle [5]. Pour chaque rendement de codage, les mappings \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}^* sont ensuite déterminés, en utilisant pour \mathcal{M}^* la méthode d'optimisation (6) avec la contrainte additionnelle C_4 . Les résultats sont donnés Table 1. Il s'avère que, en fonction du rendement considéré, il est possible de trouver un mapping \mathcal{M}^* différent de \mathcal{M}_0 donnant le meilleur seuil de convergence pour un système compatible. Cependant, la différence semble localisée sur les degrés les plus bas, comme on peut le voir Table 1 pour $R = 1/2$.

5.2 Résultats de simulation

Pour le décodage itératif, la règle suivante est adoptée : le décodage itératif est arrêté si l'on trouve un mot de code valide (calcul du syndrome après chaque itération) ou le nombre maximum d'itérations autorisé est atteint (contrainte de délai). Pour nos simulations, le nombre d'itérations maximum est fixé arbitrairement à 150. Examinons maintenant les résultats obtenus pour des tailles de mots de code longues et moyennes. Dans les deux cas, la longueur des mots de codes est choisie de façon à avoir le même nombre de symboles sources par trame. Cela nous permet alors de comparer le taux d'erreur paquet (TEP), ainsi que le taux d'erreur bit (TEB) pour les différents rendements et récepteurs considérés. Principalement, quatre systèmes pour deux rendements différents seront comparés :

- (i) le récepteur optimal source canal conjoint (DSCC-opt).
- (ii) le récepteur source-canal conjoint utilisant un code op-

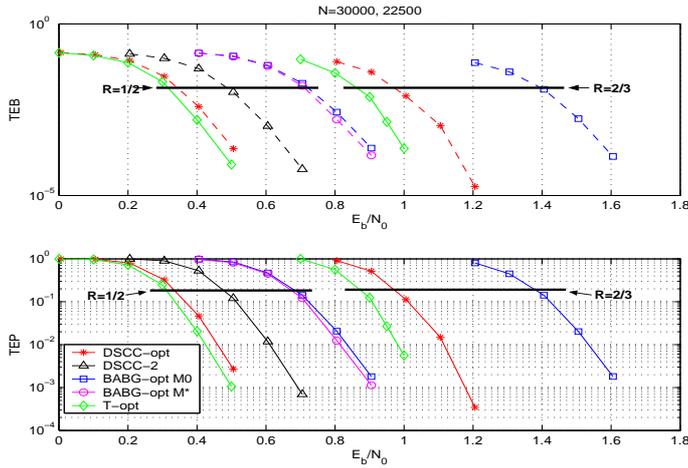


FIG. 2 – TEB et TEP pour $\{N = 30000, R = 1/2\}$ et $\{N = 22500, R = 2/3\}$.

timisé pour le canal BABG et utilisant le mapping \mathcal{M}_0 (BABG-opt \mathcal{M}_0).

- (iii) le récepteur source-canal conjoint utilisant un code optimisé pour le canal BABG et utilisant le mapping \mathcal{M}^* (BABG-opt \mathcal{M}^*) (seulement pour $R_T = 0.43496$).
- (iv) le schéma tandem optimal (T-opt) : la source est supposée parfaitement compressée et codée avec un code de rendement R_T optimisé sur le canal BABG.

Par comparaison des courbes de TEP et TEB Figure 2, le récepteur DSCC-opt exhibe de meilleures performances que les récepteurs BABG-opt \mathcal{M}^* et BABG-opt \mathcal{M}_0 . Pour les deux rendements, le seuil de convergence est amélioré de 0.4 dB. Les récepteurs BABG-opt \mathcal{M}^* et BABG-opt \mathcal{M}_0 ont des performances finalement proches. Pour le TEP, le récepteur DSCC-opt est à moins de 0.1 dB du récepteur T-opt pour $R_T = 0.43496$, et à 0.15 dB pour $R_T = 0.5799$: le but de notre récepteur source-canal conjoint semble atteint, *i.e* avoir une exploitation efficace de la redondance résiduelle pour s'approcher le plus près possible de la limite donnée par T-opt.

Les mêmes observations que pour les tailles de mots de code longs peuvent être faites Figure 3. Cependant, contrairement à ce que l'on peut observer sur les courbes précédentes, un plancher d'erreur intervient aux alentours de 10^{-3} pour les courbes de TEP, et une réduction de la pente pour les courbes de TEB. Une étude des profils des codes montre que la présence de noeuds de données de degrés 2 semble pénaliser la partie informative pour les schémas DSCC (faible robustesse). Pour vérifier cette hypothèse, l'optimisation DSCC pour $R = 1/2$ a été réalisée en imposant des degrés strictement supérieurs à 2 sur la partie informative. L'analyse de ce nouveau schéma DSCC-2 sur les Figures 2 et 3 montre une perte sur le seuil de convergence (degrés de liberté supprimés à l'optimisation), mais semble donner une amélioration du plancher d'erreur à taille moyenne.

6 CONCLUSION

Dans ce papier, différents schémas de décodage source-canal-conjoint impliquant un décodeur LDPC comme codeur canal sont comparés pour des tailles de mots de code et rendements différents. L'analyse des résultats montre que le récepteur op-

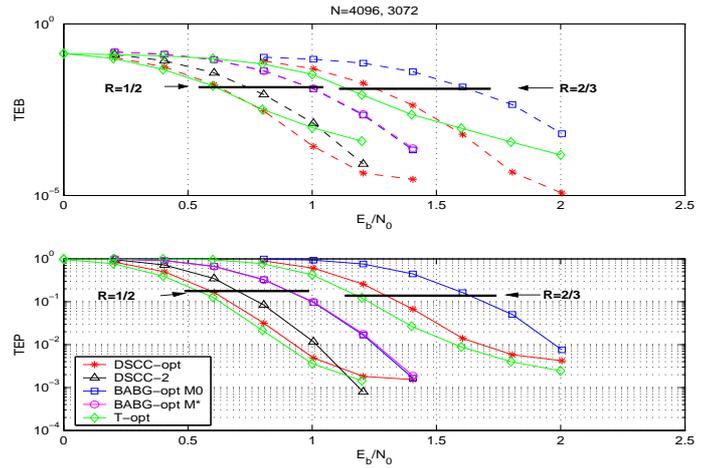


FIG. 3 – TEB et TEP pour $\{N = 4096, R = 1/2\}$ et $\{N = 3072, R = 2/3\}$.

timal permet d'accroître les performances vis à vis des autres schémas. Pour les systèmes compatibles avec des applications non conjointes, le mapping naturel généralement utilisé semble offrir d'aussi bonnes performances que le mapping optimal. L'apparition de planchers d'erreur à taille moyenne incite à développer des études pour une optimisation à taille finie. Une future étude possible concerne l'allocation de la redondance entre source et code de canal de manière optimale.

Références

- [1] R. Bauer, J. Hagenauer, "On variable length codes for iterative source/channel decoding," in IEEE Data Comp. Conf., pp. 272–282, Snowbird, UT, USA, Mar. 2001.
- [2] X. Jaspard, L. Vandendorpe, "New iterative decoding of variable length codes with turbo codes," in IEEE Int. Conf. on Com., Paris, France, Jun. 2004.
- [3] C. Poulliat, D. Declercq, C. LamyBergot, I. Fijalkow, "Analysis and optimization of irregular LDPC codes for joint sourcechannel decoding," IEEE Com. Letters, Accepted for publication, November 2004.
- [4] S. ten brink, "Convergence behavior of iteratively de-coded parallel concatenated codes," IEEE Trans. on Com., vol. 49, no. 10, pp. 1727–1737, Oct. 2001.
- [5] A. Roumy, S. Guemghar, G. Caire, S. Verdù, "Design methods for irregular repeat-accumulate codes," IEEE Trans. on Inf. Theory, vol. 50, no. 8, pp. 1711–1727, Aug. 2004.
- [6] S.Y. Chung, T.J. Richardson, R.L. Urbanke, "Analysis of sum product decoding of low density parity check codes using a gaussian approximation," IEEE Trans. on Inf. Theory, vol. 47, no.2, pp. 657–670, Feb. 2001.
- [7] J. Hagenauer, R. Bauer, "The turbo principle in joint source channel decoding of variable length codes," in IEEE Inf. Theory Work., pp. 128–130, Cairns, Australia, Sept. 2001.
- [8] V.B. Balakirsky, "Joint source and channel decoding with variable length codes," Prob. of Inf. Trans., vol. 27, no. 1, pp. 12–27, 2001.