

# Estimation de l'erreur de phase d'une modulation QAM conjointement au décodage itératif d'un code bloc.

C. Vanstraceele<sup>(1)</sup>, J.P. Barbot<sup>(1)</sup>, L. Atallah<sup>(1)</sup>, B. Geller<sup>(1,3)</sup>, J.M. Brossier<sup>(2)</sup>.

<sup>1</sup>SATIE ENS Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France.

<sup>2</sup>LIS/ENSIEG. BP 46. 38402 Saint-Martin d'Hères. France.

<sup>3</sup>LETIC-ESRR Université Paris12, 110 rue Paul Armangot, 94400 Vitry sur Seine, France.

vanstraceele@satie.ens-cachan.fr, barbot@satie.ens-cachan.fr, atallah@satie.ens-cachan.fr,

jean-marc.brossier@lis.inpg.fr, geller@lesir.ens-cachan.fr

*Abstract*— This paper presents a new synchronizing scheme designed for block turbo coded system. The phase estimation relies on the feedback of the extrinsic information. A near optimum version of the algorithm based on the block turbo decoder devised by Pyndiah allows easy implementation. We display various results showing that the proposed algorithm is able to track frequency shifts and that it works very well in the case of general Quadrature Amplitude Modulation (QAM) constellations. We also show that this turbo synchronizer works at low Signal to Noise Ratios (SNR) taking completely advantage of the turbo coding possibilities.

*Résumé*— : Ce papier présente une nouvelle technique de synchronisation de systèmes exploitant des turbo-codes blocs. L'estimation de la phase repose sur l'exploitation de la valeur extrinsèque en sortie du décodeur pour estimer cet écart en phase conjointement au décodage itératif des symboles. Nous présentons plusieurs résultats montrant que l'algorithme proposé permet de poursuivre des décalages en fréquence, qu'il fonctionne pour des modulations QAM et qu'il fonctionne à faible rapport signal à bruit (RSB). Une comparaison de la variance de cet estimateur à la borne de Cramer-Rao vraie (CRB) et modifiée (MCRB) est également effectuée.

## I. INTRODUCTION

Le turbo décodage [1], basé sur le principe d'un décodage itératif Maximum a Posteriori (MAP) de codes concaténés convolutifs, autorise des performances proches de la capacité de Shannon. Dans le cas de rendement élevés, le décodage itératif de codes blocs [2] permet également d'atteindre cette performance remarquable et Pyndiah [3] a proposé un algorithme de décodage de turbo codes blocs à faible complexité proche de l'optimum. Certaines améliorations [4], [5] permettant de diminuer la complexité et le temps de décodage des Turbo Codes Blocs (TCB) restent possibles.

Toutefois, toutes ces techniques supposent une parfaite synchronisation, ce qui n'est pas réaliste pour des faibles RSB où ces algorithmes de décodage sophistiqués sont efficaces. A titre d'exemple, la figure 1 illustre les effets d'une erreur de phase sur le taux d'erreur (BER) d'un code BCH(32,26,4)<sup>2</sup> décodé itérativement. Il est donc bien clair que pour atteindre ces performances théoriques le décalage en phase de la porteuse doit être estimé et compensé.

Comme un décalage en phase de la porteuse réduit la valeur moyenne de la puissance extrinsèque en sortie du turbo décodeur, [6] [7] ont proposé des algorithmes permettant de retrou-

ver la phase, dans le cas de systèmes codés convolutivement, à l'aide d'une recherche d'extremum de la moyenne de la valeur extrinsèque. Dans [8], une étude des bornes de performance asymptotiques dans le cas du codage en treillis est établie. L'algorithme d'estimation de la phase que nous proposons dans cet article fonctionne dans le cas de turbo codes blocs et permet une réduction significative du temps de latence de décodage. Nous considérons également le problème de la synchronisation dans le cas de différentes constellations QAM.

L'organisation de ce papier est la suivante. Dans la partie II nous rappelons brièvement le principe du décodage TCB et nous présentons le modèle du système utilisé. La section III détaille l'algorithme de turbo synchronisation et présente différents résultats. Une analyse des performances de cet estimateur est proposée dans la section IV, la variance de l'estimateur étant comparée à la borne de Cramer Rao vraie et modifiée (MCRB). Enfin, la section V ouvre une discussion au sujet de cet algorithme.

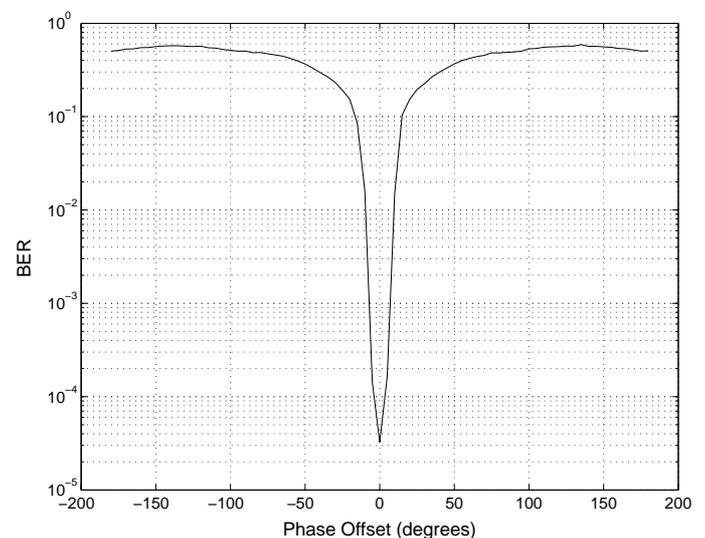


Fig. 1. BER en fonction de l'erreur de phase à la sortie d'un décodeur de code BCH(32,26,4)<sup>2</sup> (SNR=9dB, 16-QAM)

## II. MODÈLE DU SYSTÈME

### A. Turbo Codes Blocs

Au niveau de l'émetteur, un code produit est obtenu en encodant en deux dimensions un tableau de  $k_1 * k_2$  symboles d'informations binaires; chaque colonne est encodée en utilisant un code bloc binaire linéaire  $C_1(n_1, k_1, d_1)$  et chaque ligne est encodée avec un code  $C_2(n_2, k_2, d_2)$ . Le code produit résultant  $[P] = C_1 * C_2$  est un code  $P(n_1 n_2, k_1 k_2, d_1 d_2)$ . Nous avons considéré le cas de différents codes BCH, avec  $C_1 = C_2$  pour des raisons de simplicité; on peut aisément voir qu'une distance minimale de 16 peut être obtenue avec de simples codes de Hamming étendus.

Le tableau  $n_1 * n_2$  reçu  $[R]$  est décodé dans chacune des dimensions avec un algorithme de Chase [9]; ceci signifie que pour chaque ligne et chaque colonne, des motifs de tests sont formés en inversant les valeurs des  $p$  positions reçues les moins fiables. Après décodage des motifs de test, le plus probable parmi les mots de codes générés est retenu pour être le mot de code décidé.

Dès lors, la fiabilité de chaque bit est exprimée en terme de rapport de log vraisemblance (LLR):

$$\Lambda(d_j) = \log \frac{\Pr(e_j = +1/R)}{\Pr(e_j = -1/R)} \quad (1)$$

où  $D = (d_1 \dots d_j \dots d_n)$  est le mot de code décidé après décodage de Chase,  $R = (r_1 \dots r_j \dots r_n)$  est la séquence bruitée reçue et  $E = (e_1 \dots e_j \dots e_n)$  est le mot de code transmis. Pyndiah [3] a obtenu l'approximation du LLR normalisé suivant  $r'_j$ :  $r'_j = r_j + \alpha w_j$ , où  $\alpha$  est un facteur de pondération et l'information extrinsèque  $w_j$  dépend de  $C^{+1(j)} = (c_1^{+1(j)} \dots c_n^{+1(j)})$  et  $C^{-1(j)} = (c_1^{-1(j)} \dots c_n^{-1(j)})$  les mots de code à la distance Euclidienne minimale de  $R$  avec respectivement une valeur  $+1$  et  $-1$  à la  $j^{ieme}$  position de bit. [3] a alors montré que :

$$w_j = \sum_{k=1, k \neq j}^n r_k c_k^{+1(j)} p_k \quad (2)$$

avec  $p_k = 0$  si  $c_k^{+1(j)} = c_k^{-1(j)}$  et  $p_k = 1$  si  $c_k^{+1(j)} \neq c_k^{-1(j)}$ . Lorsque tous les mots de code en compétition du décodage de Chase ont la même valeur à la position  $j$ , le LLR normalisé se réduit simplement à :  $r'_j = \beta d_j$ .

La mise à jour précédente du LLR normalisé est effectuée sur tous les bits du tableau du code [3][10]:

$$[R'] = [R] + \alpha [W] \quad (3)$$

Une itération complète de décodeur de TCB est obtenue après la mise à jour du LLR normalisé traitant les mots en ligne suivie de la mise à jour du LLR normalisé traitant les mots en colonne. Quatre itérations sont généralement suffisantes pour assurer une convergence satisfaisante de l'algorithme.

### B. Turbo synchronisation en bande de base

Sur la figure 2, le turbo décodeur précédant est inclus dans la partie droite du schéma général de la turbo synchronisation. Sur la partie gauche de la figure 2, les échantillons du signal QAM bruité et démodulé  $Y$  sont multipliés par le terme  $\exp(-j\hat{\phi})$  de

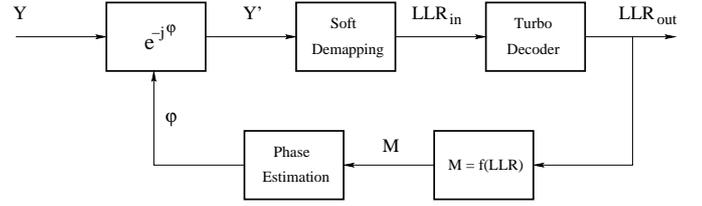


Fig. 2. Schéma bloc de la turbo synchronisation

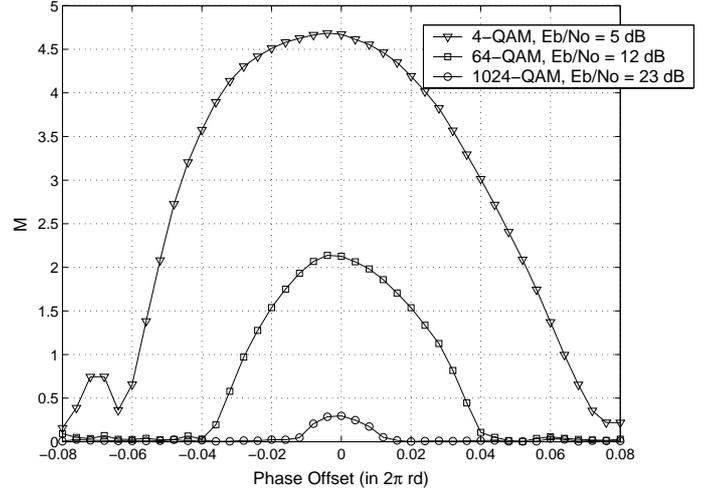


Fig. 3. Valeur extrinsèque en fonction de l'erreur de phase pour différentes constellations QAM

façon à corriger un possible défaut de phase, où  $\hat{\phi}$  est le résidu de décalage de phase estimé; comme détaillé dans la partie III, l'estimation de la valeur du décalage de phase est pilotée par la contre réaction de la sortie du turbo décodeur. Le flot de données résultant  $Y'$  est alors démappé de façon souple de manière à ce que le turbo décodeur fonctionne sur des valeurs souples représentant les bits.

## III. ESTIMATION DE LA PHASE

Un décalage en phase de la porteuse au niveau du récepteur induit une diminution de la puissance à l'entrée du turbo décodeur, ce qui provoque une réduction de la valeur extrinsèque à la sortie du décodeur. Ceci est illustré sur la figure 3 pour différentes constellations QAM où  $M$  est une mesure des valeurs extrinsèques du mot de code BCH(16,11,4)<sup>2</sup>; plus précisément, si  $M^{(l)}$  désigne la moyenne des plus petites valeurs extrinsèques à la fin du décodage du  $l^{ieme}$  mot de code, on a la formulation suivante :

$$M^{(l)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |w_k^{(l)}| \quad (4)$$

où  $m$  est un entier plus petit que la longueur du code et  $w_k^{(l)}$  est une des  $m$  plus petites valeurs extrinsèques obtenue pour le  $l^{ieme}$  mot de code. Cet article est illustré par le cas du simple code de Hamming BCH(16,11,4)<sup>2</sup> étendu, avec  $m = 10$ .

Fort logiquement, plus la taille de la constellation QAM est petite et plus le lobe principal de  $M$  représenté dans la figure 3 est large. L'estimation du décalage de phase revient donc à rechercher l'argument du maximum de  $M$ .

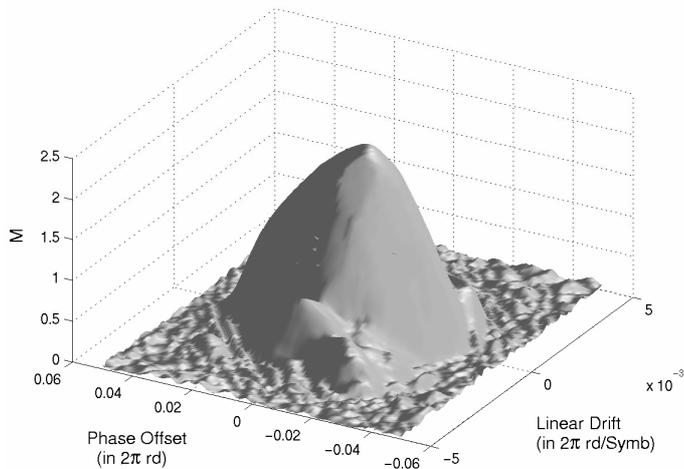


Fig. 4. Evolution de  $M$  en fonction d'un décalage de phase constante et d'un décalage en fréquence constant pour une constellation de type 64 QAM, sur un mot de code

Si l'on suppose qu'à l'initialisation, le récepteur n'a pas de connaissance a priori sur la valeur de la phase, il est possible de calculer simultanément plusieurs  $M^{init}(i)$  correspondant à plusieurs valeurs d'essais de  $\hat{\theta}_i$  équiréparties à l'aide de la chaîne représentée figure 2; la valeur de la phase correspondant à la plus grande valeur de  $M^{init} = \max_i [M^{init}(i)]$  est alors choisie comme phase initiale pour le premier mot de code.

Une fois l'acquisition initiale de la phase effectuée, la valeur maximale de  $M$  peut être atteinte avec un algorithme du gradient stochastique. Dans ce cas, l'algorithme de recherche de la phase de la porteuse est :

$$\hat{\varphi}_l = \hat{\varphi}_{l-1} + \mu(M^{(l)} - M^{(l-1)})[\text{sign}(\hat{\varphi}_{l-2} - \hat{\varphi}_{l-1})] \quad (5)$$

où classiquement la valeur du pas  $\mu$  est choisie de façon à réaliser un compromis entre l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) et la vitesse de convergence.

Dans la pratique, il y a souvent un décalage en fréquence entre les horloges de l'émetteur et du récepteur; ce problème classique de synchronisation [11] peut être dû par exemple à des décalages Doppler et l'évolution temporelle de la phase résiduelle en bande de base peut être modélisée par un mouvement Brownien avec une dérive linéaire [12]. La figure 4 est une illustration typique des variations de  $M$  non seulement en fonction d'un décalage de phase constant, mais également en fonction d'une dérive linéaire et constante de celle-ci. Cette surface a été tracée dans le cas d'une constellation 64-QAM et pour un code produit BCH(16, 11, 4)<sup>2</sup> étendu ; le RSB =12 dB considéré donnerait un taux d'erreur symbole de 0.05 dans le cas d'une constellation 64-QAM non codée et sous l'hypothèse d'une parfaite synchronisation. On retrouve bien la courbe de la figure 3, dans le cas de cette constellation 64-QAM, en coupant la surface de la figure 4 par le plan où la dérive de phase est nulle. Le lobe central montre que la définition précédente de  $M$  permet de détecter des décalages linéaires de l'ordre de  $10^{-2}$  radian par symbole 64-QAM. La figure 5 illustre la capacité de poursuite dans le domaine temporel de cette turbo synchronisation dans le cas d'une dérive de  $2\pi \cdot 10^{-4}$  radian par symbole 64-QAM.

Comparons l'algorithme proposé avec un estimateur de phase

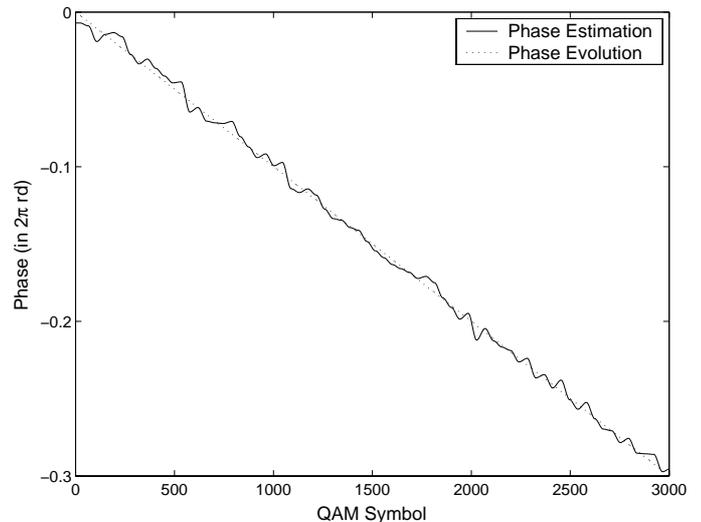


Fig. 5. Poursuite de la phase par l'algorithme proposé dans le cas d'une dérive de phase linéaire  $2\pi \cdot 10^{-4}$  rd/symb. (64 QAM) tracée dans le domaine temporel (SNR=12 dB)

puissance quatre [13]. Cet algorithme est fréquemment utilisé dans le cas de constellations QAM. Si on note l'observation par  $y_k = a_k e^{i\varphi_k} + n_k$ , où les  $a_k$  sont des variables aléatoires i.i.d. d'une constellation QAM,  $n_k$  est un bruit gaussien complexe et  $\varphi_k$  est le terme de phase à estimer, alors pour une phase constante  $\varphi_k = \varphi$ , l'estimateur puissance quatre est basé sur l'égalité  $\varphi = \frac{1}{4} \arg(E(y_k^4)) + \frac{\pi}{4}$  et son implémentation adaptative se fait par

$$\hat{\varphi}_k = \hat{\varphi}_{k-1} + \gamma \text{Im}(y_k^4 e^{-i4\hat{\varphi}_{k-1}}) \quad (6)$$

Elle converge vers la solution (avec une ambiguïté de  $\pi/2$ ) quand on estime une phase constante; dans l'équation 6,  $\text{Im}(z)$  représente la partie imaginaire du nombre complexe  $z$  et la valeur du pas est fixée à sa valeur optimale [12]. Les figures 6, 7 illustrent dans le cas d'une 1024-QAM le fait que cette turbo synchronisation présentant une plus faible EQM conduit par conséquent à un meilleur taux d'erreur pour un RSB donné.

#### IV. ETUDE DE PERFORMANCE

Le Borne de Cramer-Rao ( $CRB$ ) représente un moyen pour évaluer les performances d'un estimateur de façon absolue, puisqu'elle correspond à la variance minimale d'un estimateur non biaisé. La difficulté de calcul de la  $CRB$  relative aux paramètres de synchronisation est liée à la présence des symboles inconnus assimilables à un bruit multiplicatif.

En supposant l'équiprobabilité des symboles de la constellation, la  $CRB$  exacte [14] peut être numériquement obtenue en utilisant une intégration par rapport aux points de la constellation lors du calcul de la vraisemblance des observations. Dans [14], la  $CRB$  exacte dans le cas de constellations QAM carrées est calculée. La symétrie de ces constellations permet d'écrire la vraisemblance d'une observation  $r_k$  comme :

$$f(r_k, \varphi) = \exp\left(-\frac{|r_k|^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sum_{c_i \in C_1} \exp\left(-\frac{|c_i|^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{2 \cosh\left(\frac{\text{Re}(r_k c_i^* \exp(-j\varphi))}{\sigma^2}\right) + 2 \cosh\left(\frac{\text{Re}(r_k c_i \exp(-j\varphi))}{\sigma^2}\right)}{2}$$

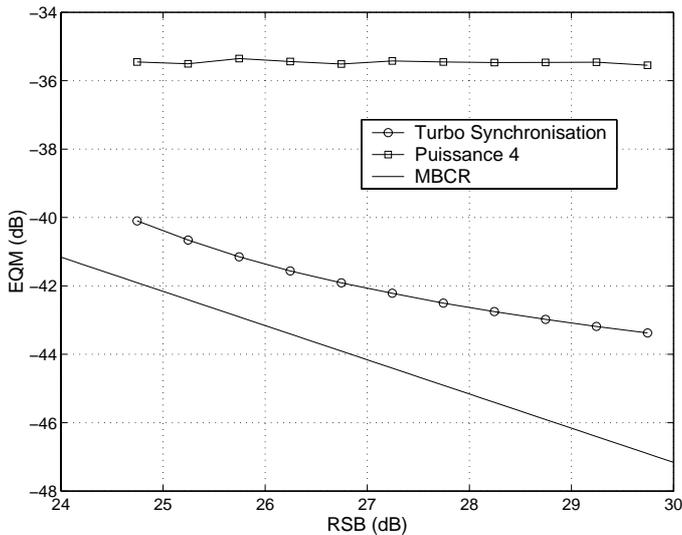


Fig. 6. Comparaison des EQM obtenues par le schéma de turbo synchronisation et l'estimateur puissance quatre pour la constellation 1024-QAM

où  $C_1$  contient les symboles du premier quadrant et  $\sigma^2$  désigne la variance du bruit. La  $CRB$  exacte est calculée soit par intégration numérique ou par réalisations de Monte Carlo.

Le calcul de la  $CRB$  exacte devient rapidement très complexe pour des constellations de plus en plus grandes. Pour contourner ceci, une borne modifiée  $MCRB$  [8] utilise un report de la marginalisation par rapport aux symboles lors du calcul de la matrice de Fisher par :

$$MCRB(\varphi)^{-1} = -E_{\mathbf{r}, \mathbf{a}} \left( \frac{\partial^2 \log(f(\mathbf{r}|\mathbf{a}, \varphi))}{\partial \varphi^2} \right)$$

avec  $\mathbf{a}$  l'ensemble des séquences possibles.

Ceci permet d'obtenir des expressions plus faciles à mettre en œuvre. Dans le cas d'une erreur de phase,  $MCRB(\varphi) = \frac{\sigma^2}{N}$  où  $N$  désigne le nombre de symboles observés. La  $MCRB$  est inférieure à la  $CRB$ , elles coïncident à fort  $RSB$ .

La figure 6 compare les Erreurs Quadratiques Moyennes (EQM) obtenues par le schéma de turbo synchronisation et l'estimateur puissance quatre à la CRB et la MCRB. Elle montre la bonne précision des estimées de la phase obtenues par le schéma proposé de synchronisation conjointement au décodage itératif. La courbe 7 des taux d'erreurs binaires montre que les performances obtenues s'approchent du cas d'une synchronisation parfaite. Pour comparer les abscisses des figures 6 et 7, on a  $RSB = mR \frac{E_b}{N_0}$  où  $m$  est le nombre de bits par symbole QAM et  $R$  est le rendement du code.

## V. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons présenté un nouvel algorithme de synchronisation de phase. Exploitant l'information extrinsèque de contre réaction du turbo code bloc, cet algorithme fonctionne y compris dans des situations de faible rapport signal à bruit ou de décalages fréquentiels. Les turbo codes blocs ont des caractéristiques intéressantes [3][10] dans le cas de systèmes de transmissions de l'information à haut débit où des constellations de très grande taille sont requises ; l'algorithme de synchronisation que nous proposons s'adapte très bien au cas de grandes constellations. De plus, ce turbo estimateur de phase ne souffre pas des traditionnels défauts de l'estimateur puissance quatre [12] :

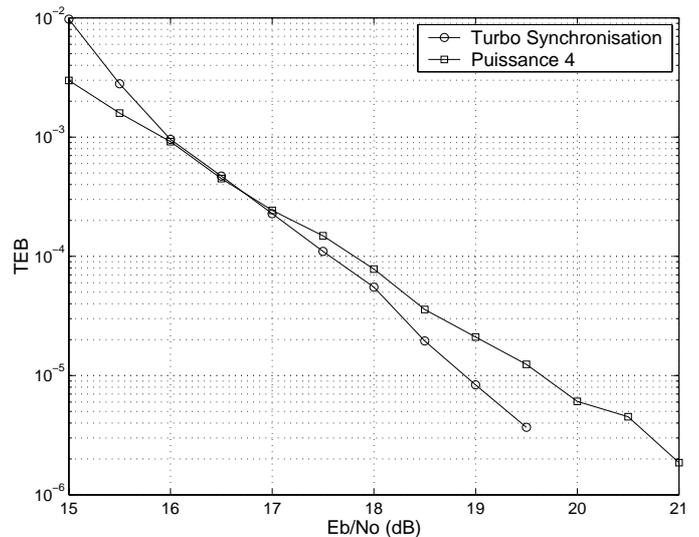


Fig. 7. Comparaison des TEB obtenus par le schéma de turbo synchronisation et l'estimateur puissance quatre pour la constellation 1024-QAM

bruit auto généré, glissement de phase et une ambiguïté de  $\Pi/2$  qui peut aussi influencer la conception d'une modulation codée en treillis. L'algorithme proposé peut donc être utile dans le cas de systèmes codés par des Turbo Codes Blocs.

## REFERENCES

- [1] C. Berrou and A. Glavieux, "Near optimum error correcting coding and decoding : Turbo-codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 10, pp. 1261–1271, October 1996.
- [2] S. Hagenauer, E. Offer, and L. Papke, "Iterative decoding of binary block and convolutional codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, no. 2, pp. 429–445, March 1996.
- [3] R. Pyndiah, "Near optimum decoding of product codes : block turbo codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, no. 8, pp. 1003–1010, August 1998.
- [4] S. A. Hirst, B. Honary, and G. Markarian, "Fast chase algorithm with an application in turbo decoding," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 10, pp. 1693–1699, October 2001.
- [5] C. Argon and S. McLaughlin, "A parallel decoder for low latency decoding of turbo product codes," *IEEE Commun. Letters*, vol. 6, no. 2, Feb. 2002.
- [6] W. Oh and K. Cheun, "Joint decoding and carrier phase recovery algorithm for turbo codes," *IEEE Commun. Letters*, vol. 5, no. 9, pp. 375–377, September 2001.
- [7] V. Lottici and M. Luise, "Iterative carrier phase synchronization for coherent detection of turbo-coded modulations," in *European Wireless*, Florence, Feb. 2001.
- [8] N. Noels, H. Steendam, and M. Moeneclaey, "The cramer-rao bound for estimating phase estimation from coded linearly modulated signals," in *to appear in IEEE Commun. Letters*.
- [9] D. Chase, "A class of algorithms for decoding block codes with channel measurement information," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 18, no. 1, pp. 170–182, January 1972.
- [10] C. Vanstracele, B. Geller, J. P. Barbot, and J. M. Brossier, "Block turbo codes for multicarrier local loop transmission," in *Proc. VTC'2002 Fall*, vol. 3, Vancouver, September 2002, pp. 1775–1778.
- [11] H. Meyr, Moeneclaey, and S. Fechtel, *Digital communication receivers : Synchronisation, Channel Estimation and Signal Processing*. New-York : Wiley, 1998.
- [12] J. M. Brossier, P. O. Amblard, and B. Geller, "Self adaptative pll for multicarrier local loop transmission," in *Proc. Eusipco*, Toulouse, September 2002, pp. 631–634.
- [13] M. Moeneclaey and G. de Jonghe, "MI oriented nda carrier synchronization for general rotationally symmetric signal constellations," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, pp. 2531–2533, August 1994.
- [14] F. Rice, B. Cowley, B. Moran, and M. Rice, "Cramér-rao lower bounds for qam phase and frequency estimation," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 9, pp. 1582–1591, September 2001.