Approximations de la probabilité de détection d'une cible mobile

J.-Pierre Le Cadre
IRISA/CNRS
Campus de Beaulieu
35042, Rennes cedex, France.
lecadre@irisa.fr

Résumé – On s'intéresse ici au calcul de la probabilité de détection d'une cible mobile, par un capteur fixe ou mobile et on présente une synthèse de divers résultats obtenus dans les directions suivantes: suivantes: calcul et approximations de la densité de présence de la cible $p(x, y, t)$ dans les cas où l'on dispose d'informations (distributions) sur le cap et la vitesse de celle-ci, estimation de la probabilité de détection d'une cible diffusante par un capteur fixe, et enfin par un récepteur mobile.

Abstract – The problem we deal with here, is the calculation of the probability of detecting a moving source, either by a stationary sensor or by a moving receiver. Main results are presented for the following case studies: calculation and approximation of the spatio-temporal density $p(x, y, t)$ of a moving target, calculation of the probability of detection of a diffusing target by a stationary sensor, and finally by a moving receiver.

1 Introduction

On s'intéresse ici au calcul de la probabilité de détection d'une cible mobile, par un capteur fixe ou mobile. Il faut noter que l'optimisation des efforts de recherche (search theory) est une étape qui *n'est pas* considérée ici. Si cette étape a été l'objet de nombreuses et profondes études depuis les travaux fondateurs de B. Koopman [1], un point commun à toutes celles-ci est la disponibilité des grandeurs élémentaires que sont d'une part la distribution spatio-temporelle de la cible et, d'autre part, la probabilité de détection conditionnelle (aux efforts de recherche) de celle-ci. En général, celle-ci s'exprime sous la forme $p(x, \varphi(x))$ et a l'interprétation suivante: $p(x, \varphi(x))$ est la probabilité de détecter une cible se trouvant dans la cellule x, conditionnellement à un effort de recherche $\varphi(x)$.

Une hypothèse couramment admise est que $p(x, \varphi(x)) = 1 - \exp(-w_x\varphi(x))$; où w_x est "le" facteur de visibilité associé à la cellule x. Ce facteur est une donnée du problème. La probabilité (globale) de détection (P_D) de la cible est alors obtenue par intégration de ces probabilités conditionnelles sur l'espace de recherche E; soit $P_D = \int_E p(x, \varphi(x))\, dx$ .Les contraintes naturelles sont: $\int_E \varphi(x) dx = \Phi$; $\varphi(x) \geq 0$, $\forall x \in E$. Cette modèlisation est très générale même si elle repose sur des connaissances a priori: la densité a priori de la cible, les facteurs de visibilité w_x.

C'est dans cette direction que se trouve cet article; à la fois pour étudier la distribution spatio-temporelle de la cible (a priori) et les facteurs de visibilité. Ceci dans le but d'examiner l'influence des divers paramètres.Les travaux sur le sujet sont relativement peu nombreux; soit parce que la probabilité de détection conditionnelle dépend très étroitement des caractéristiques du récepteur (et donc de l'application considérée) et du scenario considéré, soit parce qu'un modèle Markovien de cible mobile est suffisant pour de nombreuses applications. Ainsi dans le cas d'une recherche multi-périodes, un modèle Markovien de mouvement de la cible permet non seulement d'avoir un bon degré de généralité mais encore de "casser" les problèmes combinatoires (cf algorithme de Brown). Il est aussi possible de considérer des contraintes sur le comportement de la cible. Cette approche est parfaitement réaliste mais conduit à des problèmes d'optimisation difficiles, qui n'ont été que récemment résolus [2],[3]. Dans cette perspective, l'optimisation de la répartition spatio-temporelle des efforts de recherche $\varphi(x, t)$, sous diverses contraintes, est le but visé [4].

Nôtre but est ici *considérablement plus modeste*. En gardant tout ceci à l'esprit, on s'attache ici à présenter une synthèse des principaux résultats existants dans les directions suivantes:

- Calcul et approximations de la densité de présence de la cible $p(x, y, t)$ dans les cas où l'on dispose d'informations (distributions) sur le cap et la vitesse de celle-ci,
- Approximation de la probabilité de détection d'une cible mobile diffusante, par un récepteur fixe,
- Approximation de la probabilité de détection d'une cible mobile par un récepteur mobile.

Puisque le but visé est l'obtention d'approximations explicites, l'optimisation des efforts de recherche n'est pas considérée ici.

2 Distribution spatio-temporelle de la cible

On se limite ici au cas d'une cible se dépaçant sur un plan. On considère la situation où le cap (φ) et la vitesse v de la cible ne sont qu'imparfaitement connus; soient alors $p(\varphi)$ et $p(v)$ leurs densités respectives. Alors si on désigne par $p_0(x,y)$ la distribution initiale de la cible, sa distribution au temps t sera:

$$\begin{aligned} p(x,y,t) &= \int_{v_1}^{v2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p_0(x - t\,v\cos\varphi, y - t\,v\sin\varphi) \\ &\quad \times p(\varphi)\,p(v)\,d\varphi dv\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Cette expression est très générale mais nous allons voir que l'on peut en déduire des expressions très simples moyennant quelques hypothèses. Le cas le plus simple est bien sûr celui où $p_0(x,y) = \delta(x)\delta(y)$ (δ: Dirac), ce qui signifie que l'on connaît exactement la position initiale. On obtient alors, par passage aux coordonnées polaires (r,θ):

$$p(r,\theta,t) = \frac{1}{r\,t}\,p_1\left(\frac{r}{t}\right)\,p_2(\theta)\ .$$

On peut aussi étendre ce calcul aux cas où la distribution initiale de la cible est arbitraire et est simplement une densité $p_o(r,\theta)$. La distribution initiale est alors considérée comme une densité de cibles ponctuelles et l'on obtient alors:

$$\begin{aligned} p(x,y,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_1\left(\frac{\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]^{1/2}}{t}\right)}{t[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]^{1/2}} \\ &\quad \times p_2\left(\tan^{-1}\left[\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right]\right) p_0(\alpha,\beta) d\alpha d\beta\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Si on suppose, par exemple, que $p_0(\alpha,\beta)$ est gaussienne, centrée et à symétrie de révolution (de variance σ^2), alors un calcul élémentaire [6] conduit à l'expression suivante de $p(r,\theta,t)$ ($\gamma = v\,t$):

$$\begin{aligned} & p(r,\theta,t) = \tfrac{1}{2\pi\sigma^2 t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} p_1\left(\tfrac{\gamma}{t}\right) p_2(\varphi) \\ & \times \exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(r^2 - 2\gamma r\cos(\varphi-\theta) + \gamma^2)\right) d\gamma d\varphi\ . \end{aligned}$$

Si, de plus, suppose que le cap est uniformément réparti (sur $[0,2\pi]$) et que la vitesse l'est aussi entre v_1 et v_2, on obtient ([6], I_0 : fonction de Bessel; $p \triangleq p(r,\theta,t)$) :

$$p = \frac{\exp(-r^2/2\sigma^2)}{2\pi\sigma^2(v_2 - v_1)}\int_{v_1}^{v_2} \exp\left(\frac{-v^2\,r^2}{2\sigma^2}\right)\ I_0\left(\frac{rvt}{\sigma^2}\right) dv\ .$$

Une hypothèse supplémenaire est que la vitesse de la cible est déterministe; un passage à la limite dans l'expression précédente conduit alors à:

$$p(r,\theta,t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(\frac{-(r^2+v_0^2t^2)}{2\sigma^2}\right)\ I_0\left(\frac{rv_0t}{\sigma^2}\right)$$

On voit alors que la distribution de la cible correspond à une "vague" qui se déplace en diffusant. A la "crête" de la vague ($r = v_0t$), le facteur de l'exponentielle décroit en $1/t$. Toutefois, les hypothèses faites ici sont restrictives pour de nombreuses applications où l'on dispose d'informations a priori sur la trajectoire de la cible. On considère alors les cas suivants:

- cap aléatoire, vitesse fixée ,
- cap fixé, vitesse aléatoire.

On suppose tout d'abord que le module du vecteur vitesse est fixe (noté ici v_0), mais que son cap est distribué entre φ_1 et φ_2. Alors, en utilisant l'approximation de Laplace, le résultat suivant a été obtenu [6] ($\frac{v_0^2t^2}{\sigma^2} \to \infty$):

$$p(r,\theta,t) \sim \frac{p_2(\theta)}{\sigma(2\sqrt{\pi v_0 t\, r}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(r - v_0t)^2\right)\ .$$

Si, par contre, le cap est fixé (soit φ_0 ce cap) et la vitesse aléatoire, alors on a:

$$p(r,\theta,t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t}p_1\left(\frac{r}{t}\cos(\theta-\varphi_0)\right)\exp\left(\frac{-r^2\sin^2(\theta-\varphi_0)}{2\sigma^2}\right)\ .$$

3 Probabilité de détection d'une cible mobile par un capteur fixe

Un premier problème est le calcul de la probabilité de détection d' une cible diffusante à l'aide d'un détecteur fixe (placé à l'origine), dans un domaine carré d'aire A. Malgré sa simplicité, ce problème a cependant une certaine importance pratique. Rappelons tout d'abord que la densité p de probabilité dune cible diffusante obéit à l'équation suivante:

$$(d/2)\ \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}\ ,$$

où d est la constante de diffusion et ∇^2 est le Laplacien. En coordonnées cartésiennes et polaires, on obtient respectivement :

$$\begin{aligned} &(d/2)\ \left(\tfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = \tfrac{\partial p}{\partial t}\ , \\ &(d/2)\ \left(\tfrac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial p}{\partial r}\right) = \tfrac{\partial p}{\partial t}\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Il faut, bien sûr, y rajouter les conditions aux limites. Toutefois, le problème ne semble pas admettre une approximation suffisamment explicite dans le cas général. Une simplification (réaliste) est alors de considérer qu'il est à symétrie centrale; le terme $\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}$ est alors nul et on doit résoudre le problème ci-dessous:

$$(d/2)\ \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right)\ \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r}\right)\ \right) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}\ ,$$

$$\left|\begin{array}{l} \text{sous les contraintes :} \\ \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r}\right)_{r=R_A} = 0\ , \\ \bar{p}(r,t) = 0\ \text{ pour }\ r \le R\ , \\ \bar{p}(r,0) = 1/A\ \text{ pour }\ r > R\ , \\ A\ :\ \text{aire totale de recherche,} \\ R_A\ :\ \text{rayon de l'aire de recherche,} \\ R\ :\ \text{rayon détection capteur .} \end{array}\right. \tag{4}$$

Dans l'équation ci-dessus $\bar{p}$ désigne une probabilité *élémentaire* de non-détection. Les hypothèses relatives à la détection se traduisent par les conditions: $\bar{p}(r,t) = 0$ pour $r \le R$ et $\bar{p}(r,0) = 1/A$ pour $r > R$. R_A est le rayon de l'aire de recherche ($R_A = \sqrt{A/\pi}$). On notera également que la détection est supoosée être de type "Cookie-Cutter" [8] (emporte-pièce); ce qui signifie que la cible est détectée si elle se trouve dans un disque de rayon R et non détectée en dehors de ce disque. Enfin la condition $\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r}\right)_{r=R_A} = 0$ exprime le fait que la cible reste à l'intérieur du disque d'aire A et centré en 0; c'est-à-dire que la frontière est "réfléchissante". De plus, si on désigne par PND(t) la probabilité de non-détection au temps t, on a bien sûr:

$$\text{PND}(t) = \int_0^{2\pi} \int_R^{R_A} \bar{p}(r,t); r\, dr dt \;.$$

Revenons maintenant à l'équation (4). Celle-ci peut être considéré comme un "classique" des équations de la diffusion de chaleur [9]. Il y a ainsi des développements en séries entières de la solution. Plus précisément, Muskat en a obtenu la forme ci-dessous:

$$\bar{p}(r,t) = -\left(\frac{\pi}{A}\right) \sum_{n=1}^{\infty} k_n\, U(\alpha_n r)\, \exp\left(-\frac{d}{2}\,\alpha_n^2\, t\right) \,,$$

$$\left|\begin{array}{l} \text{où:} \\ k_n = [J_0(\alpha_n R) J_1(\alpha_n R_A)] \; \left[J_0^2(\alpha_n R) J_1^2(\alpha_n R_A)\right]^{-1} \,, \\ U(\alpha_n r) = Y_1(\alpha_n R_A) J_0(\alpha_n r) - J_1(\alpha_n R_A) Y_0(\alpha_n r) \;. \end{array}\right. \tag{5}$$

Dans les équations ci-dessus, J_0, J_1, Y_0 et Y_1 sont, respectivement, les fonctions de Bessel de première espèce et d'ordre 0, de première espèce et d'ordre 1, de deuxième espèce et d'ordre 0 et enfin deuxième espèce et d'ordre 1. Le scalaire α_n est la n-ième plus petite racine positive de l'équation $U(\alpha\, R) = 0$. Même si (5) a le mérite d'exister, elle est d'interpréation pour le moins difficile. Toutefois, on peut remarquer que si t devient suffisamment grand, $\bar{p}(r,t)$ est correctement approximé par l'équation suivante:

$$\bar{p}(r,t) \sim -\frac{\pi k_1}{A}\, U(\alpha_1 r) \exp\left(-\frac{d}{2}\,\alpha_1^2\, t\right) \;. \tag{6}$$

Les autres termes peuvent être négligés dans la mesure où ils font intervenir des racines plus grandes de l'équation $U(\alpha R) = 0$. Pratiquement, ceci a pour implication que lorsque t est suffisamment grand, alors la décroissance de $\bar{p}(r,t)$ (r fixé) est proportionnelle à $\exp\left(-\frac{d}{2}\,\alpha_1^2 t\right)$. On est alors en mesure d'approximer convenablement PND$(t) = \int_0^{2\pi} \int_R^{R_A} \;\bar{p}(r,t); r\, dr dt$. En utilisant les identités "classiques" $\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$ et $\int x Y_0(x) dx = x Y_1(x)$, on obtient alors [7]:

$$\begin{aligned} \text{PND}(t) \;\; &\sim \;\; [J_1(\alpha_1 R_A) Y_1(\alpha_1 R) - Y_1(\alpha_1 R_A) J_1(\alpha_1 R)] \\ &\quad \times -\left(\frac{2\pi^2 k_1 R}{A}\right) \exp\left(-\frac{d}{2}\,\alpha_1^2\, t\right) \;. \end{aligned} \tag{7}$$

Soit encore PND$(t) \sim K \exp\left(-\frac{d}{2}\,\alpha_1^2\, t\right)$; où la constante K ne dépend que des hypothèses du problème de détection (i.e. R et$A$). Ainsi, pour t suffisamment grand PND(t) a la même vitesse de décroissance que $\bar{p}(r,t)$.

Ceci est à rapprocher la formule (semi-empirique) de Sislioglu [11] qui donne la probabilité de non-détection au temps t (PND(t)) d'une cible de distribution initiale uniforme dans une zone d'aire A et de constante de diffusion d, par un capteur de rayon de détection R:

$$\text{PND}(t) = (1 - \pi R^2/A)\; \exp(-24.7\; R d t/A^{3/2}) \;. \tag{8}$$

Cette formule a été obtenue à partir d'ajustements de résultats obtenus par tirages aléatoires. En fait, le paramètre $\rho \triangleq \frac{R_A}{R}$ a ici une importance considérable et il a été montré [7] que tant que ce paramètre est suffisamment grand devant 1, les approximations données ci-dessus sont tout à fait correctes. Par contre, lorsque ρ se rapproche de 1, elles deviennent plutôt pessimistes. Une constation identique a été établie lorsque t est relativement petit. Ce résultat peut être comparé avec celui obtenu pour le détection d'une cible en mouvement rectiligne uniforme, par un capteur de rayon de détection [5], qui conduit à considérer une fonction de non-détection exponentielle, fonction de R et du CPA de la cible.

4 Probabilité de détection d'une cible mobile par un récepteur mobile

Considérons tout d'abord un pavage régulier d'un domaine d'aire A par des disques élémentaires d'aire R. Si on désigne par θ l'angle des triangles equilatéraux dont les sommets sont les centres de 3 disques contigus, alors un calcul élémentaire montre que la fraction (notée p) de triangle couverte par des disques est [8] ($0 \leq \theta \leq \pi/6$):

$$p = \frac{\pi/2 + 3(\sin\theta\cos\theta - \theta)}{\sqrt{3}\,\cos^2\theta} \;.$$

En ignorant les effets de bord, le nombre n de disques, d'angle charactéristique θ, est $n = A/(2\sqrt{3}R^2\cos^2\theta)$ (l'aire d'un triangle equilatéral élémentaire est $\sqrt{3}R^2\cos^2\theta$ et il y a deux fois plus de triangles que de disques). Si n est donné, l'équation $n = A/(2\sqrt{3}R^2\cos^2\theta)$ permet de déterminer θ ($A/(2\sqrt{3}R^2\cos^2 0) \leq n \leq A/(2\sqrt{3}R^2\cos^2(\pi/6)$). Le pavage par les disques est sans recouvrement tant que n n' excède pas cette limite inférieure et est non lacunaire dès que n excède cette limite supérieure.

Examinons maintenant la détection d'une cible mobile se déplaçant dans un domaine rectangulaire de largueur L, parallèlement aux bords de ce rectangle avec une vitesse u. On suppose, de plus, que le détecteur suit un chemin donné avec une vitesse v et que son rayon de détection (de balayage) est W et on désigne par θ l'angle formé par les vecteurs vitesse de l'observateur et de la cible. La vitesse relative $w(t)$ de l'observateur, par rapport à la cible, est donc:

$$\begin{aligned} w(t) \;\; &= \;\; \left[(v\cos\theta(t) - u)^2 + (v\sin\theta(t)\;)^2\right]^{1/2} \,, \\ &= \left[u^2 + v^2 - 2\,uv\cos\theta(t)\right]^{1/2} \;. \end{aligned} \tag{9}$$

Le "taux" *maximal* de détection est, bien sÛr, égal à $2Rw(t)$. La fraction du domaine d'aire A balayée ne peut donc pas excéder $2R\int_0^T w(t)dt$. Si de plus, on suppose que l'observateur suit un chemin régulier ("Bow Tie"), revenant à sa *direction* initiale en T, alors on a aussi $\int_0^T \cos\theta(t)\; dt = 0$. De plus, d'après (9), on a aussi:

$$\begin{array}{l} w(t) \leq \sqrt{u^2+v^2} - \dfrac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}} \,, \\ \text{d'où:} \\ \int_0^T w(t) dt \leq T\,\sqrt{u^2+v^2} \,, \\ \text{et, par conséquent:} \\ A \leq 2RT\,\sqrt{u^2+v^2} \;. \end{array} \tag{10}$$

D'autre part, la largeur de bande "passée" sous le détecteur de 0 à T est $u\,L\,T$, ce qui siginifie que la probabilité de détection $p(T)$ est nécessairement inférieure au rapport des deux. On a donc[8] la *majoration* suivante de $p(T)$:

$$p(T) \leq \min \left\{ 1, \frac{2R}{L} \sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} \right\} . \qquad (11)$$

Même si les hypothèses relatives au mouvement de l'observateur paraissent relativement restrictives, on a pu constater que cette borne est aussi une approximation acceptable.

Si, maintenant, on suppose que l'angle $\theta(t)$ (observ.-cible) est aléatoire et uniformément réparti sur $[0, 2\pi]$, alors w est remplacée par $\tilde{w}$,définie par:

$$\tilde{w} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}\; d\theta \; .$$

Après quelques manipulations [8], on obtient :

$$\begin{array}{l} \tilde{w} = 2(u+v)\frac{E(K)}{\pi} \; , \\ \text{où } \; K = 2\frac{\sqrt{uv}}{u+v} \text{ et:} \\ E(K) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}\; d\varphi \; . \end{array} \qquad (12)$$

L'intégrale $E(K)$ n'a pas d'expression explicite (intégrale elliptique de seconde espèce). On peut, toutefois, remarquer que c'est une fonction décroissante de K ($E(0) = \pi/2$, $E(1) = 1$). Par ailleurs le paramètre K se trouve toujours compris entre 0 et 1. On peut alors montrer que $\tilde{w}$ est toujours supérieur au majorant de u et v et convenablement approximé par le plus grand de ces deux nombres (sutout s'ils sont sensiblement différents).
Il s'agit d'un phénomène surprenant [1], puisque la vitesse de l'observateur est "accrue" par la vitesse de la cible. En fait, dans ce cas, la cible a tout interêt à avoir une vitesse presque nulle. Le "presque" étant dû au fait qu'une vitesse nulle permet de garantir l'optimalité d'une détection exhaustive.

5 Conclusion

Après avoir considéré le calcul de la distribution spatio-temporelle d'une cible mobile, sous diverses hypothèses; nous avons examiné le calcul d'approximations de la détection d'une cible diffusante par un capteur fixe, puis par un capteur mobile. On dispose alors d'outils cohérents, permettant de quantifier l'influence des divers paramètres et de fournir des modèles de la probabilité de détection. D'autres effets importants sont l'influence de la détection de l'effort de recherche de l'observateur par la cible [8] [12], des variations de fonctions de visibilité et celle des fausses alarmes [8]. Ceux-ci peuvent modifier considérablement la modélisation des problèmes. Sur ces sujets, les références [8], [5] sont riches d'enseignements.

Références

[1] B.O. Koopman, *Search and Screening. General Principles with Historical Applications.* MORS Heritage Series, Alexandria, Virginia, 1999.

[2] F. Dambreville et J.-P. Le Cadre, Optimal Distribution of Continuous Search Effort for Detection of a Target in a Min-Max Game Context. ISIF Conference Fusion 2001, Montreal Can., Aug. 2001.

[3] F. Dambreville et J.-P. Le Cadre, Distribution of Continuous Search Effort for the Detection of a Target with Optimal Moving Strategy. SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets, San Diego, USA, July 2001.

[4] G. Souris et J.-P. Le Cadre, Un panorama des méthodes d'optimisation de l'effort de recherche en détection. Traitement du Signal, vol. 16, no. 6, pp 403–424, 1999.

[5] D.H. Wagner, W.Charles Mylander and T.J. Sanders, *Naval Operations Analysis, 3-rd edition.*. Naval Institute Press, Annapolis, MD, 1999.

[6] I. Moskowitz and J. Simmen, Asymptotic Results in Search Theory. Naval Research Logistics, Vol. 36, pp. 577–596, 1989.

[7] J.N. Eagle, Estimating the Probability of a Diffusing Target Encountering a Stationary Sensor. Naval Research Logistics, Vol. 34, pp. 43–51, 1987.

[8] A.R. Washburn, *Search and Detection.* MAS ORSA Books, Arlington VA, 1989.

[9] M. Muskat, The flow of Compressible Fluids through Porous Media and Some Problems in Heat Combustion. Physics, vol. 5, pp. 71-94, 1934.

[10] A.R. Washburn, On Patrolling a Channel. Naval Research Logistics, Vol. 29, no 4, pp. 609–615, 1982.

[11] M. Sislioglu,*A Mathematical Model for Calculating Detection Probability of a Diffusive Target.* Master's Thesis, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, 1984.

[12] L.C. Thomas and A.R. Washburn, Dynamic Search Games. Operations Research, vol. 39, no. 3, pp. 415–422, 1991.