

Estimation de paramètres de signaux non-stationnaires *via* une modélisation de mixture de variables aléatoires

Christophe DE LUIGI, Claude JAUFFRET

Laboratoire SIS, ISITV, Université de Toulon et du Var
Av. Georges Pompidou, BP 56, 83162 LA VALETTE DU VAR CEDEX (FRANCE)
deluigi@isitiv.univ-tln.fr, jauffret@isitiv.univ-tln.fr

Résumé – Ce papier concerne l'estimation des paramètres d'un signal dont la Fréquence Instantanée (FI) suit une loi dite en S. Les mesures temporelles étant supposées Gaussiennes, nous proposons l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance (EMV) obtenu en pratique par l'algorithme de Gauss-Newton. L'initialisation de la routine numérique est faite sur un estimé dit grossier. Les performances de l'EMV, en termes de variance, sont comparées à la Borne de Cramér-Rao (BCR).

Abstract – This paper deals with the problem of parameter estimation of a S-shaped instantaneous frequency. The temporal measurements being Gaussian, we propose the so-called Maximum Likelihood Estimator (MLE) reached *via* the Gauss-Newton procedure. The initialization is made with a coarse estimator. MLE variance is compared with the Cramér-Rao Lower Bound (CRLB).

1 Introduction

Le scénario dans lequel s'inscrit l'objet de ce papier est celui de la Guerre Electronique : un signal radar intercepté doit être classifié, en d'autres termes attribué à une classe de signaux issue d'une banque de modèles disponibles. Ici, nous nous intéressons à l'estimation des paramètres du signal intercepté (phase nécessaire à toute tentative de classification) lorsque l'on dispose du bon modèle.

Le papier est articulé en quatre parties : la première (section 2) présente nos notations et le modèle concerné. L'objet de la seconde (section 3) est l'extraction des FI qui nous permettra de proposer, dans un troisième temps, une estimation grossière présentée dans la section 4. La section 5 est dévolue à l'EMV, dit estimé fin ainsi qu'à ses performances.

2 Position du problème

Nous considérons dans notre étude des signaux non-stationnaires dont le modèle est le suivant :

$$s_k(A, \varphi, \theta) \triangleq A \cos[\varphi + \omega_k(\theta)] \quad 1 \leq k \leq N_t \quad , \quad (1)$$

où A est l'amplitude du signal, φ est la phase à l'origine, N_t est le nombre d'échantillons temporels et $\omega_k(\cdot)$ est la phase instantanée définie par la relation suivante :

$$\omega_k(\theta) \triangleq 2\pi \left(\theta_1 k \Delta t + \frac{\theta_2}{\theta_3} \ln \left[\frac{1 + \exp[\theta_3 k \Delta t - \theta_4]}{1 + \exp[-\theta_4]} \right] \right) \quad , \quad (2)$$

avec θ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) les composantes du vecteur θ à estimer et $\Delta t = \frac{1}{f_e}$ le pas d'échantillonnage.

La FI du signal s'écrit :

$$f_k(\theta) = \theta_1 + \frac{\theta_2}{\left(1 + \exp \left[-\frac{\theta_3}{f_e} k + \theta_4 \right] \right)} \quad . \quad (3)$$

Les paramètres A , φ et θ sont inconnus et à estimer. Nous définissons alors le vecteur ψ à estimer par :

$$\psi \triangleq [A \quad \varphi \quad \theta^T]^T \quad (4)$$

Le modèle de mesure est donné par la relation suivante :

$$x_k = s_k(\psi) + \varepsilon_k \quad (5)$$

où $\{\varepsilon_k\}$ est un processus Gaussien indépendant et identiquement distribué (i.i.d.) centré et de variance σ_ε^2 .

Enfin, nous définissons le Rapport Signal sur Bruit (*RSB*) en décibel par la relation suivante :

$$RSB = 10 \log_{10} \left(\frac{A^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right) \quad (6)$$

Ainsi posé, ce problème apparaît comme un simple problème d'estimation pour lequel nous proposons l'EMV. Cependant, l'utilisation d'une procédure comme celle de Gauss-Newton échoue la plupart du temps à cause de la présence de multiples maxima locaux. Une initialisation correcte, notée $\hat{\psi}_0$, de l'algorithme assurera alors un taux de convergence acceptable. Comme c'est souvent le cas en traitement du signal, une description harmonique des mesures du signal nous aidera à trouver cette estimation dite grossière $\hat{\psi}_0$.

3 Extraction et Modélisation de la FI

3.1 Extraction

Pour les signaux transitoires non-stationnaires et discrets, lorsque la FI du signal n'est pas une fonction li-

néaire du temps, il est commode d'utiliser la transformée Pseudo Wigner-Ville, fournissant une représentation temps-fréquence voir Figure 1, définie dans [4] par la relation suivante :

$$PWV_x(n, \nu) \triangleq 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n+k} x_{n-k}^* h_{-k}^* \exp(-4i\pi\nu k), \quad (7)$$

où $n = 1, \dots, N_t$ (N_t considéré pair) et ν une variable fréquentielle.

En utilisant une fenêtre rectangulaire h_k de longueur impaire

$$N_h = 2l_h + 1 \quad \text{avec} \quad l_h = \frac{N_t}{12},$$

définie comme suivant :

$$\begin{cases} h_k = 0 & |k| \geq l_h \\ h_k = 1 & |k| < l_h \end{cases},$$

et en échantillonnant les fréquences, nous obtenons la

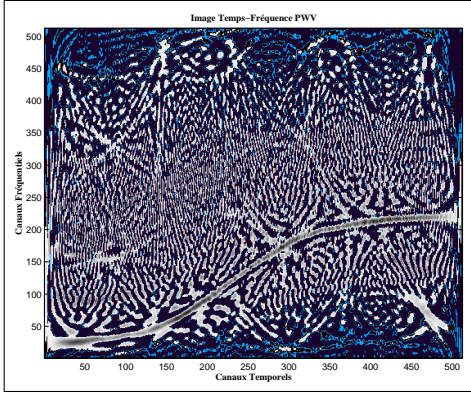


Figure 1 – Image temps-Fréquence de PWV

transformée discrète DPWV du signal x_k :

$$DPWV_x(n, p) = 2 \sum_{k=-M(n)}^{M(n)} x_{n+k} x_{n-k}^* \exp\left(-\frac{4i\pi kp}{N_f}\right), \quad (8)$$

$$\begin{cases} n = 0, \dots, N_t - 1 \\ p = 0, \dots, N_f - 1 \end{cases},$$

où N_f est le nombre de canaux fréquentiels dans l'intervalle $[0; f_e[$ i.e $\Delta\nu = \frac{1}{N_f}$ et

$$M(n) = \min(n - 1, N_t - n, \frac{N_t}{2} - 1, l_h) .$$

L'utilisation du signal analytique [7] permet de s'affranchir des interférences générées par les fréquences positives et négatives.

Notre choix de la localisation du pic d'énergie de la transformée comme estimateur de la FI [1] permet d'obtenir la séquence temporelle de FI :

$$F \triangleq (F_1, \dots, F_N), \quad (9)$$

où F_k est un estimé de la fréquence instantanée $f_k(\theta)$ du signal $s_k(\theta)$ à l'instant t_k , i.e. :

$$F_k \triangleq q f_e \Delta\nu \quad \text{avec } q \text{ tel que} \quad (10)$$

$$DPWV_x(k, q) = \sup_{p \in \{0, \dots, N_f - 1\}} DPWV_x(k, p) .$$

En dessous d'un certain RSB , de nombreux faux esti-

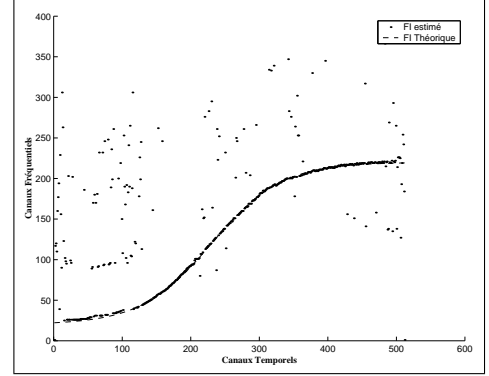


Figure 2 – Extraction de la FI

més apparaissent dans la séquence F , voir Figure 2. Des simulations de Monte-Carlo nous ont permis d'étudier le comportement des FI estimés ; deux populations d'estimés sont en présence :

- ceux dus à la présence du signal ;
- ceux générés par le bruit.

Pour obtenir l'estimé grossier de θ à travers les mesures de la FI, nous aurons à tenir compte de ce fait.

3.2 Modélisation

L'idée est d'utiliser une méthode provenant de la trajectographie sous-marine, [5]. Soient les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{si } f_i(\theta) - 2\sigma \leq F_i \leq f_i(\theta) + 2\sigma \\ &\text{alors } F_i \text{ est originaire du signal} \\ &\text{sinon } F_i \text{ est une fausse alarme} \end{aligned} \quad (11)$$

où σ est un paramètre inconnu à estimer.

Nous définissons alors les deux événements exclusifs et exhaustifs à chaque instant et leur probabilité respective :

$$\begin{aligned} D_i &\equiv \{F_i \text{ est originaire du signal}\} & P(D_i) &= P_c, \\ \bar{D}_i &\equiv \{F_i \text{ est une fausse alarme}\} & P(\bar{D}_i) &= 1 - P_c. \end{aligned} \quad (12)$$

$$(13)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes, [2] :

1. sous D_i , F_i est la réalisation d'une variable aléatoire Gaussienne d'écart-type inconnu σ , et d'espérance $f_i(\theta)$, modèle de mesure à l'instant t_i et dépendant du vecteur d'état $\theta \in \mathbb{R}^4$ à estimer. La densité de probabilité de F_i conditionnée à θ et sous l'hypothèse D_i s'écrit alors :

$$p(F_i|\theta, D_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (F_i - f_i[\theta])^2\right], \quad (14)$$

2. sous \bar{D}_i , F_i est la réalisation d'une variable aléatoire uniformément distribuée dans l'espace des mesures, noté $U = [0; \frac{f_e}{2}]$ et de volume $u = \frac{f_e}{2}$, soit :

$$p(F_i|\theta, \bar{D}_i) = \frac{1}{u} \mathbb{1}_U(F_i) \quad , \quad (15)$$

où $\mathbb{1}_U(\cdot)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble U , définie par l'expression suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{1}_U(F_i) = 1 & \text{si } F_i \in U \\ \mathbb{1}_U(F_i) = 0 & \text{si } F_i \notin U \end{cases} \quad . \quad (16)$$

Nous obtenons alors la densité de probabilité d'une mesure F_i conditionnée au vecteur d'état θ :

$$p(F_i|\theta) = \frac{1 - P_c}{u} \mathbb{1}_U(F_i) + P_c \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (F_i - f_i[\theta])^2 \right] \quad . \quad (17)$$

Remarque. Le paramètre P_c sera fixé à une valeur arbitraire, alors que le paramètre σ sera considéré inconnu.

4 Estimé grossier de ψ

L'estimé grossier est obtenu à partir d'une méthode certes sous-optimale mais simple et robuste : l'estimé $\hat{\psi}_0$, du paramètre ψ (cf. 4), s'écrit :

$$\hat{\psi}_0 = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 \\ \hat{\varphi}_0 \\ \hat{\theta}_0 \end{bmatrix} .$$

$\hat{\theta}_0$ est défini par :

$$\hat{\theta}_0 \triangleq \arg \max_{\theta} \left\{ \sum_{i=1}^N \ln [p(F_i|\theta)] \right\} \quad . \quad (18)$$

où $p(F_i|\theta)$ est donné par (17).

Remarque. Notons que si les fréquences F_i étaient indépendantes dans leur ensemble, alors $\hat{\theta}_0$ serait l'EMV de θ à partir de F .

En utilisant une méthode d'optimisation non-linéaire sous contrainte [3] et un algorithme itératif de recherche de l'optimum, algorithme de Levenberg-Marquardt (LM) [6], nous obtenons les estimés $\hat{\theta}_0$ et $\hat{\sigma}$. Pour obtenir les paramètres \hat{A}_0 et $\hat{\varphi}_0$, nous définissons le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}^2$ suivant :

$$\begin{aligned} \alpha(1) &\triangleq A \cos(\varphi) \quad , \\ \alpha(2) &\triangleq A \sin(\varphi) \quad . \end{aligned} \quad (19)$$

Pour $\theta = \hat{\theta}_0$, la relation (1) s'écrit alors :

$$s_k(\alpha, \theta = \hat{\theta}_0) = \alpha^T y_k(\hat{\theta}_0) \quad , \quad (20)$$

où $y_k(\hat{\theta}_0) \triangleq \left[\cos(\omega_k(\hat{\theta}_0)) \quad -\sin(\omega_k(\hat{\theta}_0)) \right]^T$.

L'estimation de α est obtenue en minimisant la fonctionnelle des Moindres-Carrés :

$$\Lambda(\alpha) \triangleq \sum_{k=1}^{N_t} [x_k - \alpha^T y_k(\hat{\theta}_0)]^2 \quad . \quad (21)$$

En définissant les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} Y &\triangleq [y_1 \quad \dots \quad y_{N_t}] \quad , \\ X &\triangleq [x_1 \quad \dots \quad x_{N_t}] \quad , \end{aligned}$$

le paramètre recherché $\hat{\alpha}_0$ est obtenu par la formule classique :

$$\hat{\alpha}_0 = (Y Y^T)^{-1} Y X^T \quad . \quad (22)$$

Finalement, les paramètres \hat{A}_0 et $\hat{\varphi}_0$ sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= \sqrt{\hat{\alpha}_0(1)^2 + \hat{\alpha}_0(2)^2} \quad , \\ \hat{\varphi}_0 &= \arctan \left(\frac{\hat{\alpha}_0(2)}{\hat{\alpha}_0(1)} \right) \quad . \end{aligned} \quad (23)$$

5 Estimé fin de ψ

A partir des mesures définies par (5), nous obtenons la vraisemblance globale. A nouveau, nous avons à minimiser une fonctionnelle :

$$\Upsilon(\psi) \triangleq \sum_{k=1}^{N_t} [x_k - s_k(\psi)]^2 \quad . \quad (24)$$

Pour obtenir la solution recherchée $\hat{\psi}$, nous utilisons un algorithme de LM sur (24), avec le modèle défini par (1) et (2), et initialisé avec le paramètre $\hat{\psi}_0$ obtenu précédemment. Nous comparerons les performances de l'estimateur $\hat{\psi}_{P_c}$ obtenu avec l'initialisation évaluée avec $P_c = 0.5$ et de l'estimateur $\hat{\psi}_{MC}$ obtenu avec l'initialisation évaluée

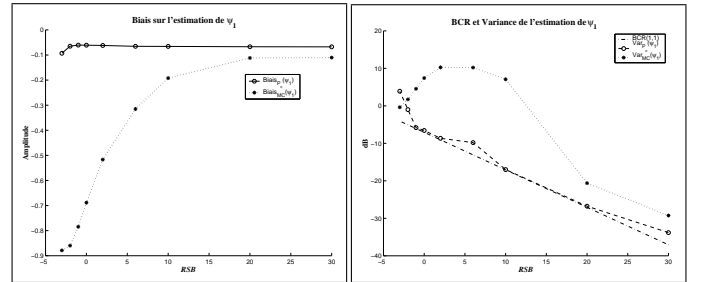


Figure 3 – Erreur Absolue sur l'Amplitude A

Figure 4 – Variance et BCR sur l'Amplitude A

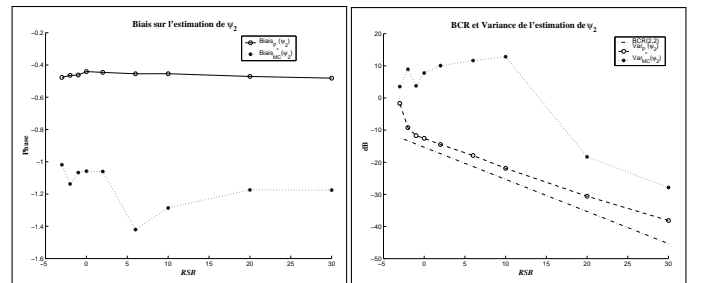


Figure 5 – Erreur Absolue sur la Phase φ

Figure 6 – Variance et BCR sur la Phase φ

avec $P_c = 1$.

Les paramètres utilisés sont les suivants : $T = 1 \mu s$, $f_e = 512 MHz$, $N_t = 512$, $N_f = 1024$, $N_h = 87$. La valeur du vrai vecteur ψ est :

$$\psi = \left[10 \quad \frac{\pi}{4} \quad 10^7 \quad 10^8 \quad 10^7 \quad 4.5 \right]^T \quad .$$

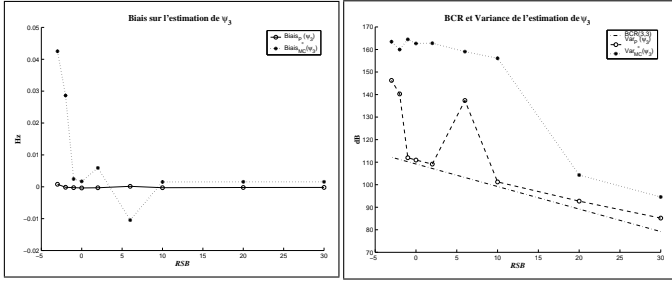


Figure 7 – Erreur Relative sur θ_1 rapportée à f_e

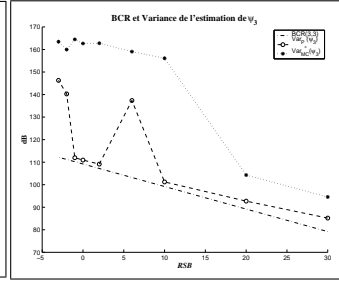


Figure 8 – Variance et BCR sur θ_1

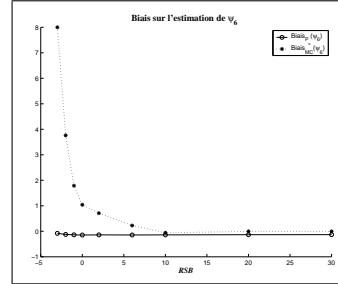


Figure 13 – Erreur Relative sur θ_4

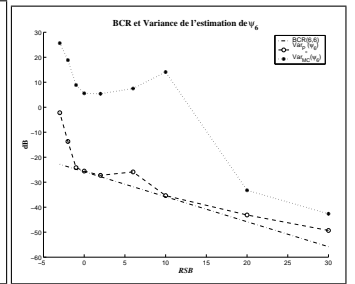


Figure 14 – Variance et BCR sur θ_4

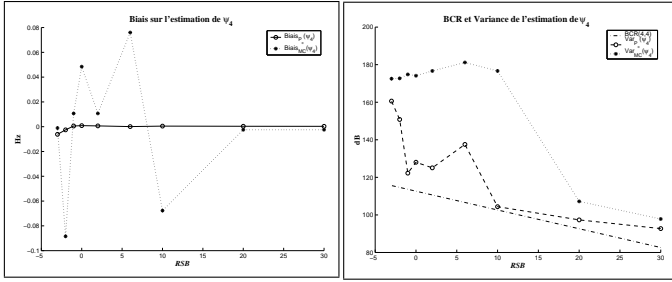


Figure 9 – Erreur Relative sur θ_2 rapportée à f_e

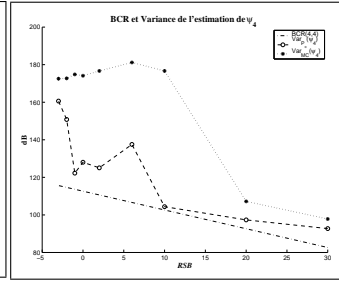


Figure 10 – Variance et BCR sur θ_2

Les résultats, obtenu à partir de 1000 simulations de Monte-Carlo à différents RSB (de 30 dB to -3 dB), sont représentés sur les Figures 3 à 14. Nous comparons les biais des estimateurs $\hat{\psi}_{Pc}$ et $\hat{\psi}_{MC}$, et les éléments diagonaux de la matrice de covariance des deux estimateurs avec ceux de la matrice BCR. Biais et variance sont obtenus respectivement par la moyenne et la matrice de covariance empirique de 1000 estimés.

Les Figures 8, 10, 12 et 14 nous montrent que la succes-

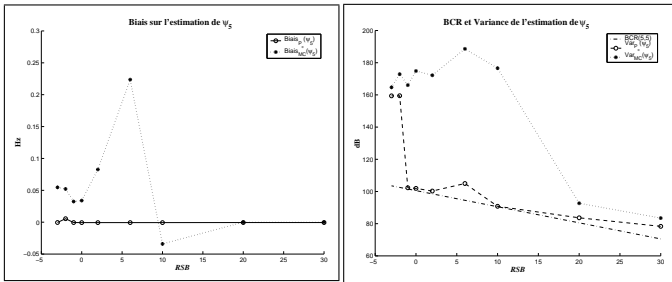


Figure 11 – Erreur Relative sur θ_3 rapportée à f_e

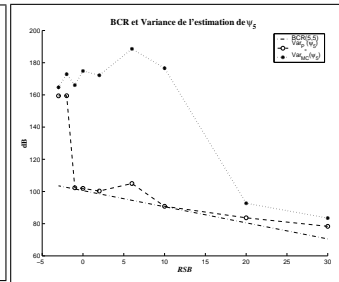


Figure 12 – Variance et BCR sur θ_3

sion des deux estimateurs est un moyen efficace d'extraire les paramètres d'un signal à modulation de fréquence non linéaire, dans le sens où, pour un RSB plus grand que -1 dB, l'estimateur final rencontre la BCR.

Lorsque la présence des fausses alarmes est ignorée, *i.e.* avec $\hat{\psi}_{MC}$, la perte de performance peut être montrée en comparant la courbe relative à $\hat{\psi}_{MC}$ avec celle relative à $\hat{\psi}_{Pc}$ pour chaque figure. De plus, il existe une différence significative entre $\text{Var}_{MC}(\psi_i)$ and $\text{Var}_{Pc}(\psi_i)$ (i variant de 1 à 6).

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté un nouvel algorithme pour estimer les paramètres d'un signal à modulation non linéaire de fréquence. En premier lieu, la FI du signal a pu être extraite au moyen d'une représentation temps-fréquence. Pour pallier aux déficiences de cette méthode sous un certain RSB, nous proposons un estimateur insensible à la présence de fausses alarmes dans la séquence de la FI. Enfin, un EMV fin et robuste est obtenu par un second algorithme de LM initialisé par l'estimé grossier. Jusqu'à un RSB de -1 dB, l'estimateur est statistiquement efficace. Notons que notre approche est applicable quelle que soit le modèle, [2].

Références

- [1] B. Bouashash, Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a signal-Part 1 : Fundamentals, *Proc. IEEE*, vol. 80, pp. 520-538, April 1992.
- [2] C. De Luigi, *Estimation par Méthodes Temps-Fréquence Appliquée à des Signaux Intrapulses Radar*, Thèse de Doctorat, Université de Toulon et du Var, Décembre 2000.
- [3] C. De Luigi and C. Jauffret, "Estimation of Chirp Parameters in Electronic Warfare", *Workshop on Estimation, Tracking, and Fusion : A Tribute to Yaakov Bar-Shalom*, Naval Postgraduate School (NPS), Monterey, May 2001.
- [4] T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbräuer, The Wigner Distribution- A Tool For Time-Frequency Signal Analysis, Part II : Discrete-Time Signals, *Philips Journal Research*, vol 35 $n^{\circ}4 - 5$, pp 276-300, May 1980.
- [5] C. Jauffret, Y. Bar Shalom, Target motion analysis in the presence of false alarms, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 94, $n^{\circ}3$, Pt.1, pp 1372-1375, Sept. 1993.
- [6] D. W. Marquardt, An algorithm for least squares estimation of non linear parameters, *J. SIAM*, vol. 11, pp 431-441, 1963.
- [7] J. Ville, "Théorie et Application de la notion de Signal Analytique", *Câbles et Transmissions*, 2ème année, $n^{\circ}1$, pp. 61-74, 1948.