

Approximation non-linéaire de signaux déterministes

Bernard PICINBONO

Laboratoire des Signaux et Systèmes
Supélec, Plateau de Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette, France
bernard.picinbono@lss.supelec.fr

Résumé – L’approximation linéaire des signaux est d’usage courant et le meilleur exemple est celui des développements de Fourier. Toutefois la meilleure approximation d’un signal en fonction d’autres signaux n’a aucune raison d’être linéaire. Utilisant le critère de l’erreur quadratique on pose le problème et on en donne la solution générale. L’examen de quelques exemples permet d’évaluer l’avantage de la méthode par rapport à celle linéaire. Ces résultats sont appliqués dans le cas de signaux complexes et l’on retrouve dans le contexte déterministe les concepts de circularité introduits pour les variables aléatoires complexes.

Abstract – Linear approximation of signals is commonly used in Signal Processing and the best example is the Fourier expansion. However there is no reason for the approximation of a signal in terms of other signals to be linear. By using the criterion of mean square error the problem is stated and solved. The advantage of the non-linear procedure with respect to the linear one is analyzed by calculating the approximation error. Some extensions to the case of complex signals are presented, which introduces in a deterministic context the ideas of circularity known for random signals.

1 Introduction

L’approximation linéaire de signaux déterministes est courante en traitement du signal et le meilleur exemple est celui des séries de Fourier. Soit un signal $y(t)$ et une suite de N signaux $x_n(t)$ tous à support borné sur un intervalle ΔT que l’on peut prendre sans restreindre la généralité égal à $[0, 1]$. Il est courant de remplacer $y(t)$ par une approximation du type $\hat{y}(t) = \sum_{n=1}^N c_n x_n(t)$, les coefficients c_n étant déterminés en minimisant une certaine erreur. L’intérêt principal de ce développement est de remplacer un signal à temps continu $y(t)$ par une suite de nombres c_n fournissant approximativement la même information. Cela permet d’appliquer aux signaux toutes les méthodes bien connues d’algèbre linéaire et ce développement est encore plus intéressant quand les $x_n(t)$ sont fonctions propres de certains opérateurs linéaires particulièrement importants. C’est le cas des séries de Fourier utilisant les fonctions propres du filtrage linéaire.

Toutefois il n’y a en principe aucune raison de se limiter à une *approximation linéaire*. On peut alors poser le problème sous la forme suivante. Soit \mathcal{S} l’ensemble des signaux pouvant se mettre sous la forme $s(t) = S[\mathbf{x}(t)]$, où S représente l’action d’un système soumis simplement à quelques conditions d’existence et $\mathbf{x}(t)$ le vecteur de composantes $x_k(t)$. Il s’agit alors de trouver au moins un élément de \mathcal{S} dénommé $\hat{y}(t)$ et minimisant un critère d’erreur. Un des plus simples possible est l’erreur quadratique définie par

$$\epsilon^2 = \int_0^1 [y(t) - \hat{y}(t)]^2 dt = \int_0^1 \{y(t) - S[\mathbf{x}(t)]\}^2 dt. \quad (1)$$

Il n’y a évidemment aucune raison pour que la solution, si elle existe, soit linéaire et le but de cet exposé consiste à résoudre ce problème et à en tirer un certain nombre de conséquences.

2 Théorie générale

Il est difficile d’obtenir directement une expression explicite du résultat. Toutefois on peut être guidé dans cette tâche par une analogie avec le problème similaire de *l’estimation en moyenne quadratique* (EMQ) rencontré en traitement statistique du signal et consistant à estimer une variable aléatoire (VA) $Y(\omega)$ réelle en fonction de N autres VA $X_n(\omega)$. Il s’agit alors de trouver une VA \hat{Y} fonction des $X_n(\omega)$ minimisant l’erreur quadratique $E[(Y - \hat{Y})^2]$. La solution est connue et l’expression explicite de \hat{Y} est l’espérance conditionnelle $E_Y[Y|\{x_n\}]$ également dénommée régression $r(\{x_n\})$. Celle-ci n’a aucune raison d’être linéaire par rapport aux x_n et se déduit de la distribution de probabilité conjointe des X_n et de Y [1].

Partant de cette analogie on peut obtenir l’expression explicite de la solution du problème posé. Soit en effet T une VA uniformément répartie dans $[0, 1]$. On peut alors introduire les VA $X_n = x_n(T)$ et $Y = y(T)$ et l’erreur (1) est alors la valeur moyenne $E[y(T) - \hat{y}(T)]^2$. On est donc ramené au problème de l’EMQ dont la solution est alors l’espérance conditionnelle. Pour la calculer il faut connaître la distribution de probabilité conjointe de $X_n = x_n(T)$ et $Y = y(T)$ qui se déduit évidemment de la distribution uniforme de T . Pour effectuer le calcul le plus simple consiste à utiliser la fonction caractéristique conjointe $\phi(\mathbf{u}, v) = E\{\exp[j(\mathbf{u}^T \mathbf{X} + vY)]\}$ qui vaut

$$\phi(\mathbf{u}, v) = \int_0^1 \exp\{j[\mathbf{u}^T \mathbf{x}(t) + v y(t)]\} dt. \quad (2)$$

Par une transformation de Fourier qui peut être plus ou moins compliquée selon les cas on obtient la densité de probabilité (ddp) conjointe $p(\mathbf{x}, y)$ qui permet d’obtenir l’espérance conditionnelle qui vaut $E_Y[Y|\mathbf{x}] = \int y p(y|\mathbf{x}) dy$, avec $p(y|\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, y)/p_X(\mathbf{x})$ et $p_X(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}, y) dy$. Il en résulte que la meilleure approximation au sens de l’erreur

quadratique (1) de $y(t)$ en fonction de $\mathbf{x}(t)$ vaut

$$\hat{y}(t) = \mathcal{S}[\mathbf{x}(t)] = \frac{\int y p[\mathbf{x}(t), y] dy}{\int p[\mathbf{x}(t), y] dy}. \quad (3)$$

Cette expression n'a aucune raison d'être linéaire en $\mathbf{x}(t)$. Notons par ailleurs que son dénominateur est la ddp $p_X(\mathbf{x})$ du vecteur aléatoire $\mathbf{x}(T)$.

L'erreur (1) peut être considérée comme une distance, ce qui introduit une interprétation géométrique du problème : $\hat{y}(t)$ est la projection orthogonale de $y(t)$ sur le sous-espace \mathcal{S} où le produit scalaire de deux signaux est défini par l'intégrale de leur produit. L'erreur (1) est alors le carré scalaire de l'innovation $\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ qui se calcule aisément à l'aide du théorème de Pythagore, soit $\epsilon^2 = E_y - E_{\hat{y}}$, où E_s est l'énergie du signal $s(t)$, c'est à dire l'intégrale de son carré.

Si l'on impose la contrainte de linéarité on est conduit à projeter $y(t)$ sur le sous-espace des combinaisons linéaires de $x_n(t)$ et l'on retrouve alors la théorie classique avec une erreur ϵ_L^2 évidemment supérieure ou égale à ϵ^2 .

La mise en œuvre de (3) nécessite des précautions liées aux problèmes de redondance apparaissant quand certaines composantes du vecteur \mathbf{X} peuvent se déduire des autres. Ce problème qui existe aussi pour l'EMQ se rencontre beaucoup plus fréquemment ici car toutes les VA X_n se déduisent d'une seule T . S'il y a redondance, il faut commencer par réduire la dimension du vecteur \mathbf{X} par des procédures ne présentant pas de difficultés de principe. Par ailleurs la formule s'étend aisément au cas où il y a des distributions discrètes pour le vecteur aléatoire \mathbf{X} interdisant l'usage d'une ddp au dénominateur de (3).

3 Exemples

3.1 Approximation nulle

Dans le cas aléatoire cette situation se produit en particulier quand \mathbf{X} et Y sont des VA indépendantes. Dans ce cas l'espérance conditionnelle $E[Y|\mathbf{x}]$ se réduit à $E(Y) = m_y$. L'erreur (1) est alors simplement la variance de Y .

La situation d'indépendance est impossible ici, sauf si l'un des deux signaux $\mathbf{x}(t)$ ou $y(t)$ est constant, car (2) ne peut se factoriser en un produit d'une fonction de \mathbf{u} par une autre de v .

Cela ne signifie pas que la situation d'approximation nulle soit impossible. On en a un exemple très simple quand les signaux $\mathbf{x}(t)$ et $y(t)$ ont des supports temporels disjoints. Bien que (2) ne se factorise pas, on retrouve le même résultat que si ces VA étaient indépendantes.

3.2 Approximation linéaire

Une des grandes questions dans le cas de l'EMQ est de savoir quand la meilleure estimation devient linéaire. On sait que ceci se produit en particulier dans le cas des signaux normaux ou autorégressifs.

Il est impossible de trouver des signaux déterministes $\mathbf{x}(t)$ et $y(t)$ tels que (2) ait la forme normale. Par contre on peut construire des signaux déterministes qui, pour le

problème de l'approximation, se comportent comme des signaux aléatoires autorégressifs. L'exemple le plus simple est le suivant. Supposons que $y(t)$ s'écrive $\mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + n(t)$ et que les supports temporels de $\mathbf{x}(t)$ et de $n(t)$ soient disjoints. On trouve alors aisément que la meilleure approximation de $y(t)$ à l'aide de $\mathbf{x}(t)$ est simplement $\hat{y}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$.

3.3 Signaux $x_i(t)$ disjoints

En communications on utilise souvent des signaux à supports temporels disjoints, ce que l'on rencontre par exemple dans le multiplexage temporel. Supposons donc que l'intervalle $[0, 1]$ soit partitionné en N intervalles disjoints ΔT_k et que $x_k(t)$, $1 \leq k \leq N$, soit nul en dehors de l'intervalle ΔT_k . L'erreur ϵ^2 donnée par (1) peut alors se décomposer en une somme d'erreurs ϵ_k^2 où ϵ_k^2 est l'intégrale de $\{y(t) - S[\mathbf{x}(t)]\}^2$ sur ΔT_k . Soit $y_k(t)$ les signal égal à $y(t)$ pour $t \in \Delta T_k$ et 0 dans le cas contraire. De même pour $t \in \Delta T_k$ on peut écrire $S[\mathbf{x}(t)] = S_k[x_k(t)]$ puisque tous les autres signaux $x_i(t)$, $i \neq k$, sont nuls. L'erreur ϵ_k^2 s'écrit donc

$$\epsilon_k^2 = \int_{\Delta T_k} \{y_k(t) - S_k[x_k(t)]\}^2 dt. \quad (4)$$

Rendre minimum ϵ^2 revient à minimiser chacune des erreurs ϵ_k^2 indépendamment les unes des autres, et ce problème est le même que celui de départ, sauf qu'il ne fait intervenir que deux signaux $x_k(t)$ et $y_k(t)$. Ceci conduit à étudier plus en détail l'approximation d'un signal $y(t)$ à l'aide d'un autre $x(t)$.

4 Approximation à deux signaux

4.1 Situation extrême

Par cette expression nous entendons une situation où l'approximation linéaire est nulle alors que la non-linéaire est parfaite. C'est donc le cas le plus évident de l'avantage de la méthode non-linéaire par rapport à la linéaire en général utilisée.

Donnons un exemple d'une telle situation. Supposons que $x(t)$ et $y(t)$ soient limités à l'intervalle $[-1/2, +1/2]$, que $x(t)$ soit une fonction strictement monotone et impaire, alors que $y(t)$ est une fonction paire. Il résulte de ces hypothèses que les VA $x(T)$ et $y(T)$ sont décorréées, ce qui entraîne que l'approximation linéaire est nulle. Par contre l'hypothèse de monotonie entraîne que $x(t)$ peut s'inverser ce qui permet une approximation non-linéaire parfaite.

4.2 Signal $x(t)$ triangulaire

Pour analyser la méthode à l'aide de calculs pouvant être effectués explicitement, considérons le problème de l'approximation du signal $y(t) = t^n$ à l'aide du signal triangulaire représenté sur la Figure 1 et valant $2t$ pour $0 \leq t \leq 1/2$ et $-2t + 2$ pour $1/2 \leq t \leq 1$.

La fonction de répartition de la VA $x(T)$ vaut x et sa ddp apparaissant au dénominateur de (3) est égale à 1.

Comme $y(t)$ est inversible par $t = y^{1/n}$, la ddp conditionnelle $p(x|y)$ vaut $\delta(x - 2y^{1/n})$ pour $0 \leq y \leq 2^{-n}$ et $\delta(x - 2 + 2y^{1/n})$ pour $2^{-n} \leq y \leq 1$. De plus la ddp $p_Y(y)$ de $y(T)$ vaut $(1/n)y^{(1-n)/n}$. On en déduit que $p(x, y)$ apparaissant dans (3) s'écrit

$$p(x, y) = \frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} \delta(x - 2y^{1/n}) \quad (5)$$

pour $y < 2^{-n}$ et pour $2^{-n} < y < 1$ il suffit de remplacer le terme final par $\delta(x - 2 + 2y^{1/n})$.

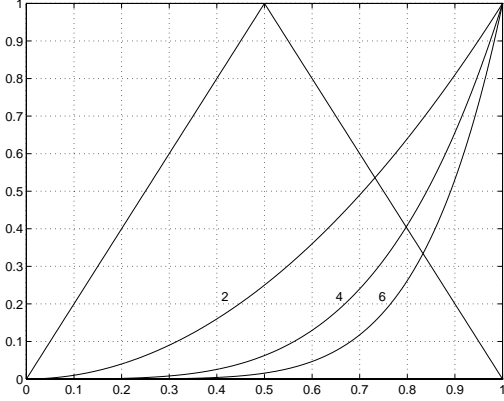


Fig. 1. Signal $x(t)$ et signaux $y(t) = t^n$, $n = 2, 4, 6$.

Il en résulte que la régression $r(x)$ vaut

$$r(x) = E[Y|x] = \frac{1}{2^{(n+1)}} [x^n + (2-x)^n]. \quad (6)$$

Ainsi l'application de (3) montre que la meilleure approximation $\hat{y}(x)$ de $y(t) = t^n$ en fonction des $x(t)$ représentés sur la Figure 1 vaut

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{2^{(n+1)}} \{x^n(t) + [2 - x(t)]^n\}. \quad (7)$$

Il est clair que cette approximation n'est pas linéaire en $x(t)$. Il est intéressant de donner l'expression explicite de $\hat{y}(t)$ en fonction de t qui vaut

$$\hat{y}(t) = (1/2)[t^n + (1-t)^n]. \quad (8)$$

Cette approximation est représentée sur la Figure 2 pour $n = 5$. Sur cette figure on a également tracé la meilleure approximation affine de $y(t)$ qui s'écrit $\hat{y}_L(t) = a + bx(t)$, le calcul des coefficients a et b n'étant pas reproduit ici.

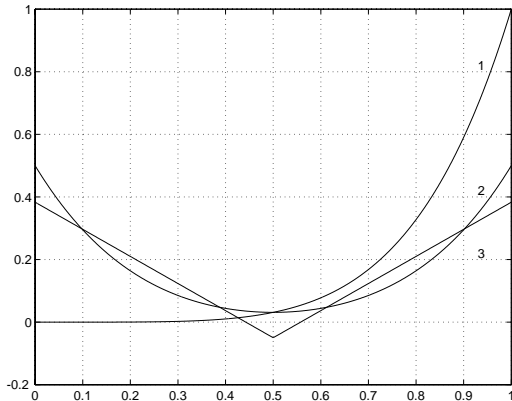


Fig. 2. Signal $y = t^5$ (1), approximation optimale (2) et affine (3).

Afin d'évaluer l'intérêt de la méthode, et en particulier son avantage par rapport aux procédures linéaires, il convient de calculer l'erreur d'approximation. Comme la variance σ_y^2 de $y(t)$ dépend de n , on utilise l'erreur normalisée $\eta^2 = \epsilon^2/\sigma_y^2$. Par des calculs non-reproduits ici on trouve que cette erreur normalisée vaut

$$\eta_n^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \left[1 - \frac{n!(n-1)!}{2(2n-1)!} \right]. \quad (9)$$

On constate que $\eta_1^2 = 1$, ce qui caractérise l'approximation nulle puisque dans ce cas l'erreur d'approximation ϵ^2 est égale à la variance du signal à approximer. On retrouve évidemment ce fait sur (8) qui donne $\hat{y}(t) = 1/2 = m_y$. Par ailleurs on voit que η_n^2 tend vers $1/2$ quand n devient très grand. L'évolution de η_n^2 en fonction de n est représentée sur les figures 3 et 4. On y a également représenté l'erreur normalisée provenant de l'approximation affine valant

$$\eta_{L,n}^2 = 1 - 3 \frac{2n+1}{[n(n+2)]^2} [n - 2 + 2^{-(n-1)}]^2. \quad (10)$$

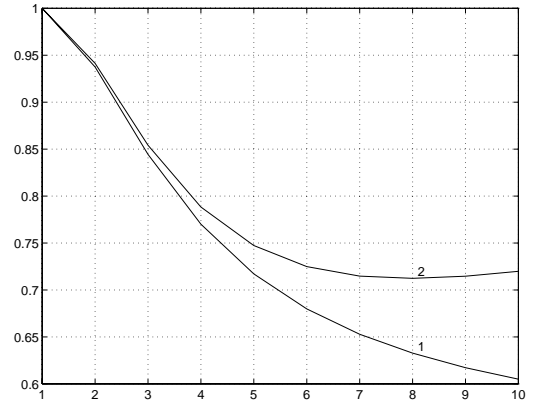


Fig. 3. Erreurs normalisées : optimale (1), affine (2), $1 \leq n \leq 10$.

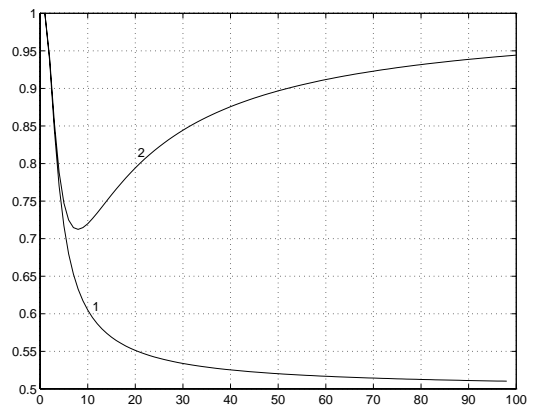


Fig. 4. Erreurs normalisées : optimale (1), affine (2), $n < 100$.

On constate que pour $n < 5$ les deux procédures d'approximation donnent des résultats très proches. Par contre ils diffèrent fortement pour les valeurs supérieures de n , et on voit en particulier que $\eta_{L,n}^2$ tend vers 1 si $n \rightarrow \infty$, ce qui signifie que l'approximation linéaire tend à devenir l'approximation nulle. Ceci montre bien l'intérêt de faire une estimation non-linéaire plutôt que linéaire.

5 Approximation linéaire au sens large et circularité

Supposons maintenant que les signaux $x_n(t)$ et $y(t)$ soient complexes, comme dans le cas des développements de Fourier. L'approximation linéaire s'écrit dans ce cas $\hat{y}(t) = \mathbf{u}^H \mathbf{x}(t)$ où \mathbf{u} est un vecteur complexe minimisant l'erreur quadratique (1) où le carré est remplacé par le carré du module.

On a montré dans le cas de l'EMQ l'intérêt de l'approximation linéaire au sens large [2]. Celle-ci s'écrit

$$\hat{y}(t) = \mathbf{u}^H \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}^H \mathbf{x}^*(t). \quad (11)$$

Elle n'est pas linéaire car la multiplication de \mathbf{x} par un facteur complexe λ ne multiplie pas $\hat{y}(t)$ par ce facteur. Il s'agit maintenant de trouver les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} minimisant l'erreur quadratique.

Pour ceci il suffit d'appliquer le principe d'orthogonalité en disant que $y(t) - \hat{y}(t)$ est orthogonal à $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{x}^*(t)$. Il convient ici de noter que le produit scalaire de deux signaux $a(t)$ et $b(t)$ est maintenant défini par $I[a(t)b^*(t)]$ où $I[\cdot]$ signifie une intégration par rapport à t de 0 à 1. Ceci permet d'introduire les matrices $\mathbf{\Gamma} = I[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H]$ et $\mathbf{C} = I[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T]$ et les vecteurs $\mathbf{r} = I[\mathbf{x}(t)y^*(t)]$ et $\mathbf{s} = I[\mathbf{x}(t)y(t)]$. Supposons, comme on le fait presque toujours, que les signaux $x_n(t)$ soient orthonormés, ce qui entraîne que la matrice $\mathbf{\Gamma}$ soit la matrice unité. Les deux relations d'orthogonalité s'écrivent alors

$$\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^*\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{s}^*. \quad (12)$$

Ce système linéaire se résout aisément, ce qui donne

$$\mathbf{u} = [\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^*]^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{s}^*), \quad \mathbf{v} = [\mathbf{I} - \mathbf{C}^*\mathbf{C}]^{-1}(\mathbf{s}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{r}). \quad (13)$$

En utilisant le théorème de Pythagore l'erreur quadratique prend la forme

$$\epsilon^2 = E_y - (\mathbf{u}^H \mathbf{r} + \mathbf{v}^H \mathbf{s}^*) \quad (14)$$

où \mathbf{u} et \mathbf{v} sont donnés par les expressions précédentes. Pour comparer cette méthode avec celle strictement linéaire habituellement utilisée, on introduit la différence $\delta\epsilon^2 = \epsilon_L^2 - \epsilon^2$, ϵ_L^2 étant l'erreur obtenue avec l'approximation linéaire. Après quelques calculs, cette différence des erreurs peut se mettre sous la forme

$$\delta\epsilon^2 = [\mathbf{s}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{r}]^H [\mathbf{I} - \mathbf{C}^*\mathbf{C}]^{-1} [\mathbf{s}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{r}]. \quad (15)$$

Cette quantité est toujours non-négative car la matrice entre crochets est définie non-négative. On admet dans la suite qu'elle n'a aucune valeur propre nulle. Les deux méthodes sont identiques quand $\delta\epsilon^2 = 0$ et ceci se produit dans les trois cas suivants. Le plus évident apparaît si $\mathbf{r} = \mathbf{s} = \mathbf{0}$. On obtient alors une approximation nulle quelle que soit la méthode linéaire utilisée. On peut également avoir des signaux particuliers tels que $\mathbf{s} = \mathbf{C}\mathbf{r}^*$. Il s'agit d'un cas très particulier sans grand intérêt. Le cas le plus intéressant se produit lorsque $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, ce qui caractérise ce qu'on appelle la *circularité totale* [3] [4].

L'interprétation de ce terme est la suivante. Supposons que le couple $\mathbf{x}(t), y(t)$ satisfasse cette condition. Considérons alors le couple $\mathbf{x}'(t), y'(t)$ avec $\mathbf{x}'(t) = e^{[j\phi(t)]} \mathbf{x}(t)$

et $y'(t) = e^{[j\phi(t)]} y(t)$. Dans cette transformation la matrice $\mathbf{\Gamma}$ et le vecteur \mathbf{r} sont inchangés à cause du complexe conjugué supprimant le facteur de phase $\exp[j\phi(t)]$. Mais la matrice \mathbf{C} et le vecteur \mathbf{s} sont aussi inchangés car ces quantités sont nulles. En conséquence les deux équation (12) sont inchangées et il en est de même pour leur solution qui prend d'ailleurs la forme $\mathbf{u} = \mathbf{r}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ce qui caractérise un système linéaire au sens strict. Le terme de circularité est associé à l'idée d'une invariance du problème par une rotation de phase instantanée $\exp[j\phi(t)]$. On voit ainsi que dans le cas des signaux circulaires l'approximation linéaire au sens strict est optimale et il est inutile de chercher une solution linéaire au sens large du type (11).

Examinons pour terminer quelques exemples simples d'application des résultats qui précèdent.

Supposons tout d'abord que les signaux $x_n(t)$ soient circulaires sans que $y(t)$ le soit. Ceci se traduit par $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. On déduit immédiatement de (13) que le système optimal est linéaire au sens large et défini par $\mathbf{u} = \mathbf{r}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{s}^*$. L'amélioration par rapport au système linéaire caractérisé par $\mathbf{u} = \mathbf{r}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ est donnée par (15) qui devient ici $\delta\epsilon^2 = \mathbf{s}^H \mathbf{s}$. C'est donc l'existence d'un vecteur \mathbf{s} non nul qui entraîne l'intérêt de la méthode. Par ailleurs si $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, on se retrouve dans la situation précédente de circularité totale.

Supposons maintenant que $y(t)$ soit réel. Ceci se traduit par $\mathbf{r} = \mathbf{s}$. On voit alors que $\mathbf{v} = \mathbf{u}^*$, de sorte que le système (11) calcule maintenant $\hat{y}(t) = 2\text{Re}[\mathbf{u}^H \mathbf{x}(t)]$.

Venons-en pour terminer au cas évoqué au début des séries de Fourier où $x_n(t) = \exp(j2\pi n t)$ et n va de $-N$ à $+N$, ce qui entraîne la circularité des $x_n(t)$.

Mais nous allons voir que même pour un signal non-circulaire l'approximation de type (11) ne s'impose pas. En effet les $x_n(t)$ ont une propriété beaucoup plus forte que la circularité provenant du fait que le vecteur $\mathbf{x}^*(t)$ n'est autre que le vecteur $\mathbf{x}(t)$ dont on a changé l'ordre des composantes. Ainsi ce vecteur n'apporte aucune information nouvelle et on peut alors montrer qu'il n'y a aucun intérêt en matière d'approximation à utiliser un système linéaire au sens large. Mais cette propriété est spécifique des exponentielles complexes et n'a aucune raison de se retrouver pour un autre système de signaux propres.

Par contre si l'on se limite aux signaux $x_n(t) = e^{(j2\pi n t)}$ pour $1 \leq n \leq N$, la méthode au sens large consiste précisément à faire intervenir les complexes conjugués, c'est à dire à retrouver les séries de Fourier traditionnelles.

Références

- [1] B. Picinbono, *Signaux aléatoires, tome 3, bases du traitement statistique du signal*, Dunod, Paris, 1995.
- [2] B. Picinbono et P. Chevalier, *Widely linear estimation with complex data*, IEEE Trans. Signal Proc., 43, pp. 2030-2033, 1995.
- [3] B. Picinbono, "On circularity", IEEE Trans. Signal Proc., 42, pp. 3473-3482, 1994.
- [4] J.L. Lacoume, "Variables et signaux aléatoires complexes", Traitement du signal, 15, pp. 535-544, 1998.