

Egaliseur récursif bilatéral autodidacte et filtre DFE associé

Arnaud BOUTTIER^{1,2}, Georges VEZZOSI²

¹Thomson CSF Communications
66 rue du Fossé Blanc, 92231 Gennevilliers cedex, France

²Laboratoire de Traitement du Signal et de l'Image, Université de Rennes I
Campus de Beaulieu, Bât 22, 35042 Rennes cedex, France
bouttier@ltsi4.univ-rennes1.fr, vezzosi@ltsi4.univ-rennes1.fr

Résumé – Cet article présente un nouvel algorithme d'égalisation autodidacte adapté au traitement par blocs des canaux fortement perturbés et non-stationnaires dans le temps. L'égaliseur est constitué d'un filtre transverse court suivi de deux filtres récursifs, l'un causal et l'autre anticausal, tous deux mis en oeuvre sous forme de treillis pour assurer la stabilité de l'ensemble. Les coefficients de l'égaliseur sont calculés par minimisation du critère CMA à l'aide de l'algorithme de Gauss-Newton. Contrairement aux structures transverses, l'égaliseur récursif bilatéral nécessite un nombre de coefficients qui ne dépend que de la longueur du canal et non de son inverse. La structure récursive autorise aussi une transition simple vers le mode DFE. Dans cet article, nous proposons un filtre DFE bilatéral qui permet d'améliorer notablement le taux d'erreur en sortie d'un égaliseur quelconque dans le cas de signaux PSK.

Abstract – This paper presents a novel unsupervised block equalization algorithm particularly suited for highly distorted and time-variant channels. The equalizer is composed of a short transversal filter followed by two recursive filters, respectively causal and anticausal, implemented in lattice form to insure the overall stability. The adaptation of the coefficients is carried out via the Gauss-Newton algorithm by minimizing the CMA cost function. Unlike transversal filters, the new equalizer requires a number of taps which depends only on the length of the channel and not of its inverse. Thanks to its recursive structure, the equalizer can be easily switched into DFE mode. In this paper, we propose a two-sided DFE equalizer designed for PSK signals which is able to reduce significantly the symbol error rate at the output of any equalizer.

1 Introduction

Les modulations linéaires à bande limitée de type QAM et PSK constituent un support privilégié pour les transmissions de données à haut débit. Dans ce contexte, la démodulation autodidacte consiste à reconstruire une suite de symboles transmise au travers d'un canal linéaire inconnu sans faire usage de séquences de référence. Ses principaux domaines d'application sont les réseaux de diffusion, les faisceaux hertziens et la guerre électronique. L'algorithme de Viterbi tout comme les algorithmes d'estimation autodidacte du canal se caractérisent par une complexité qui croît rapidement avec la longueur de ce dernier. La démodulation autodidacte des modulations linéaires repose donc pour l'essentiel sur l'égalisation par filtrage inverse avec mise à jour adaptative des coefficients et traitement séquentiel des données.

L'algorithme CMA [1] s'est affirmé au fil du temps comme la technique de référence de l'égalisation aveugle avec pour principale limite une faible vitesse de convergence. Des progrès significatifs ont été obtenus dans ce domaine en adaptant au critère de Godard des techniques supervisées [2]. Les algorithmes d'égalisation aveugle de type transverse souffrent aussi du phénomène d'amplification de bruit propre au filtrage inverse. Une solution pour réduire l'impact du bruit consiste à munir l'égaliseur d'une structure récursive ce qui permet de passer en mode DFE une fois à l'équilibre sans faire face à des problèmes de

convergence. Une telle structure permet aussi de réduire le nombre de coefficients de l'égaliseur et de le rendre moins sensible aux minima locaux par troncature.

La stabilité constitue le principal point d'achoppement de ces structures. Une solution astucieuse a été proposée par Labat et Macchi [3]. En phase d'accrochage, l'égaliseur opère séparément sur l'amplitude et la phase du canal. L'égaliseur est constitué d'un blanchisseur récursif causal stable par construction suivi d'un traditionnel filtre transverse CMA. Une fois en phase de poursuite, l'ordre des filtres est inversé et l'égaliseur passe en mode DFE. Dans [4], nous avons proposé une autre structure d'égalisation récursive constituée d'un filtre transverse et d'un filtre récursif en treillis qui permet un suivi simple de la stabilité. Il n'est plus nécessaire dans ce cas de commuter les deux filtres pour passer en mode DFE.

Les gains obtenus en termes de vitesse de convergence et de robustesse au bruit permettent aujourd'hui aux algorithmes d'égalisation aveugle auto-adaptatifs de répondre à la plupart des besoins opérationnels. Il existe néanmoins des contextes où ces algorithmes sont inopérants. Il s'agit des canaux à fort étalement Doppler. La seule alternative est alors de traiter les données par blocs où la taille du bloc est choisie inférieure au temps de cohérence du canal. Dans cet article, nous proposons un algorithme d'égalisation par blocs basé sur une structure récursive bilatérale qui autorise l'inversion de canaux fortement perturbés avec un nombre réduit de coefficients. Cette structure est aussi

particulièrement adaptée au passage en mode DFE. Nous proposons ici un algorithme destiné aux modulations à module constant qui permet d'améliorer significativement le taux d'erreur en sortie d'un égaliseur quelconque. Cette technique prend la forme d'un filtre DFE bilatéral initialisé par la sortie de l'égaliseur. Ces deux algorithmes sont décrits respectivement dans les paragraphes 2 et 3.

2 Egaliseur récursif bilatéral

2.1 Structure de l'égaliseur

Dans un traitement séquentiel des données, l'introduction de pôles dans la fonction de transfert de l'égaliseur ne peut être mise en oeuvre qu'au travers d'une structure récursive causale. Le filtre égaliseur doit donc être muni d'une partie transverse pour corriger les zéros situés à l'extérieur du cercle unité. Dans un traitement par blocs, la contrainte sur la causalité du filtre récursif disparaît. L'égaliseur proposé dans cet article est ainsi construit autour de deux structures récursives, une causale qui traite la partie à phase minimale du canal et une anticausale qui traite sa partie à phase maximale. Les critères d'égalisation aveugle autorisent l'inversion du canal à un retard près. L'égaliseur est donc complété par une courte partie transverse. On observe un bloc de N données successives $\{y_t, 0 \leq t \leq N-1\}$. La sortie de l'égaliseur prend la forme suivante

$$z_t = \frac{N(z)}{A(z)B(z)} y_t \quad (1)$$

- où $N(z) = \sum_{l=-n_f}^{+n_f} \alpha_l z^{-l}$ est un filtre transverse,
- $1/A(z)$ est un filtre récursif causal avec

$$A(z) = \prod_{i=1}^{n_a} (1 - a_i z^{-1}), \quad |a_i| < 1 \quad (2)$$

- $1/B(z)$ est un filtre récursif anticausal avec

$$B(z) = \prod_{j=1}^{n_b} (1 - b_j z), \quad |b_j| < 1 \quad (3)$$

Le filtre récursif anticausal est mis en oeuvre en filtrant $\{y_{-t}\}$ par le filtre causal stable $1/B(z^{-1})$. Les filtres $1/A(z)$ et $1/B(z^{-1})$ sont réalisés en pratique par deux filtres récursifs en treillis causaux dans le but d'assurer la stabilité de l'égaliseur. Il suffit pour cela de maintenir les coefficients de réflexion inférieurs à l'unité en module. On note respectivement $\{k_i^a, 1 \leq i \leq n_a\}$ et $\{k_j^b, 1 \leq j \leq n_b\}$ les coefficients de réflexion des filtres $1/A(z)$ et $1/B(z^{-1})$.

2.2 Equation de mise à jour

La mise à jour de l'égaliseur s'effectue sur le vecteur

$$H = [\alpha_{-n_f}, \dots, \alpha_{+n_f}, k_1^a, \dots, k_{n_a}^a, k_1^b, \dots, k_{n_b}^b]^T \quad (4)$$

concaténation des coefficients des filtres $N(z)$, $1/A(z)$ et $1/B(z^{-1})$. Les coefficients sont calculés de manière à minimiser le critère CMA22 à l'aide d'un algorithme d'opti-

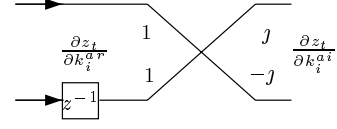


FIG. 1: Cellule de rang i du filtre de dérivation $\frac{\partial A(z)}{\partial k_i^{a \epsilon}}$

misation de type Gauss-Newton. La fonctionnelle à minimiser s'écrit

$$\mathcal{C} = \sum_{t=0}^{N-1} (|z_t(H)|^2 - \gamma_{22})^2 = \sum_t g_t^2(H) \quad (5)$$

Le filtre égaliseur est mis à jour suivant la relation

$$H_{n+1} = H_n + \mu \delta H \quad (6)$$

où la direction de descente δH s'obtient par résolution du système linéaire

$$\left[\sum_t \nabla_g \nabla_g^T \right] \Big|_{H=H_n} \delta H = - \left[\sum_t g_t \nabla_g \right] \Big|_{H=H_n} \quad (7)$$

avec $\nabla_g = \frac{\partial g_t}{\partial H}$ le gradient de la fonction g_t par rapport au coefficients du filtre égaliseur. Par définition, on a

$$\nabla_g = \frac{\partial |z_t|^2}{\partial H} = Re \left(z_t^* \frac{\partial}{\partial H^r} z_t \right) + j Im \left(z_t^* \frac{\partial}{\partial H^i} z_t \right) \quad (8)$$

où $H = H^r + jH^i$ est la décomposition du vecteur H en ses parties réelles et imaginaires. Pour les composantes de la partie transverse, l'expression (8) prend la forme traditionnelle $\frac{\partial |z_t|^2}{\partial \alpha_l} = z_t y_{t-l}^*$. La difficulté consiste à calculer le gradient par rapport aux coefficients de réflexion des deux filtres en treillis. Le principe du calcul est identique pour les coefficients de réflexion $\{k^a\}$ et $\{k^b\}$. La procédure est présentée uniquement pour les premiers. On montre

$$\frac{\partial z_t}{\partial k_i^{a \epsilon}} = - \frac{\partial A(z)}{\partial k_i^{a \epsilon}} \frac{1}{A(z)} z_t \quad (9)$$

où $\epsilon = \pm 1$, tel que $k^{+1} = Re\{k\}$ et $k^{-1} = Im\{k\}$. A ce stade, on utilise l'équation qui relie la fonction de transfert $A(z)$ aux coefficients de réflexion

$$\begin{bmatrix} A(z) \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_1^a z^{-1} \\ k_1^{a*} & z^{-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & k_{n_a}^a z^{-1} \\ k_{n_a}^{a*} & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

A partir de cette expression, on montre aisément que le filtre $\frac{\partial A(z)}{\partial k_i^{a \epsilon}}$ s'obtient en modifiant la cellule de rang i du filtre FIR en treillis $A(z)$ comme indiqué sur la figure 1. La dérivation par rapport à chaque coefficient de réflexion implique donc deux filtres FIR en treillis en entrée desquels on applique le signal $\frac{1}{A(z)} z_t$. En exploitant la redondance entre ces différents filtres, le nombre de cellules à calculer peut être ramené de $2n_a^2$ à $\frac{n_a(3n_a+1)}{2}$. La complexité de la dérivation peut être réduite encore plus par le biais d'une approximation supplémentaire non décrite ici.

Remarque : Pour assurer le bon conditionnement de la matrice de Gauss-Newton, il est nécessaire d'effectuer plusieurs itérations avec un gradient pondéré en ne retenant que le terme diagonal de la matrice.

2.3 Mise en oeuvre

L'utilisation d'une technique d'optimisation de type Gauss-Newton permet de s'affranchir des traditionnels réglages du pas de convergence. Une valeur comprise entre 0.1 et 2 est satisfaisante dans la plupart des cas. Le second degré de liberté de l'algorithme est bien sûr la taille du filtre égaliseur. Dans le cas d'un égaliseur transverse, le nombre de coefficients doit être ajusté en fonction de l'inverse du canal. Cette taille peut varier dans de très fortes proportions pour un canal de longueur fixée. Dans le cas présent, la taille du filtre égaliseur dépend uniquement de la longueur du canal.

La solution optimale pour la partie récursive consiste à prendre $n_a = n_{z^-}$ et $n_b = n_{z^+}$ où n_{z^-} , (resp. n_{z^+}) est le nombre de zéros du canal situés à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du cercle unité. Ces deux valeurs sont bien sûr inconnues en pratique. Le plus simple est de faire $n_a = n_b = n$ avec $n = L - 1$ où L est la longueur du canal. Il est possible aussi de retenir une valeur n légèrement inférieure à $L - 1$ et de faire suivre l'égaliseur par un filtre transverse très court destiné à achever l'égalisation le cas échéant.

La principale difficulté est de fixer la taille du numérateur. Les simulations montrent que la partie transverse n'a pas pour seule fonction d'absorber le décalage aléatoire de l'égaliseur. Elle permet aussi d'assurer la convergence de la partie récursive qui exploitée seule présente de nombreux minima parasites (y compris pour un décalage nul). Une taille trop courte ou trop longue tend à grever la vitesse de convergence de l'algorithme. La valeur $n_f = \lceil n/2 \rceil + 1$ apparaît comme un bon compromis.

2.4 Discussion

La présence d'une structure récursive rend difficile l'étude analytique de la convergence de l'égaliseur. Aussi, l'algorithme a été testé sans bruit sur plusieurs centaines de canaux tirés aléatoirement (tirage aléatoire des zéros et de la taille) pour différentes tailles de blocs. Ces tests permettent raisonnablement d'affirmer que l'algorithme proposé est consistant au sens du critère du Zero Forcing. Naturellement, si la taille du bloc est trop faible, l'égaliseur est susceptible de converger vers des minima locaux. En revanche, l'expérience montre que cette sensibilité apparaît beaucoup plus tardivement que dans le cas des égaliseurs transverses. On tire ici profit du nombre réduit de paramètres de l'égaliseur.

Comme l'égaliseur est linéaire, il existe une forte redondance entre le numérateur et le dénominateur. Après convergence, tous les zéros et pôles inutilisés ont tendance à se compenser par paires près du cercle unité. Ce phénomène de compensation est la principale limite de l'égaliseur récursif bilatéral (ERB). Il faut noter que ni la stabilité ni la robustesse au bruit de l'égaliseur ne sont affectées par ces compensations. Il est préférable néanmoins de limiter au mieux la taille de l'égaliseur en estimant sommairement la longueur du canal.

TAB. 1: *Exemple de performances pour la QPSK*

canal	SNR (dB)	itérations	EQM	erreurs
macchi	11.5	63	0.216	62
proakis b	18.2	62	0.212	54
friedlander	9.6	55	0.222	67

TAB. 2: *Exemple de performances pour la 16QAM*

canal	SNR (dB)	itérations	EQM	erreurs
macchi	15.8	70	0.111	598
proakis b	29.6	86	0.117	637
friedlander	14.0	78	0.130	601

2.5 Simulations

Sans outils pour caractériser globalement les canaux de propagation, il est difficile de mesurer de manière exhaustive les performances d'un égaliseur. Les performances de l'algorithme sont présentées ici à titre d'illustration pour la QPSK et la 16QAM sur 3 canaux de référence [5]. La taille du bloc de données a été fixée à $N = 1000$ pour la QPSK et à $N = 2000$ pour la 16QAM. Ces tailles se justifient par le caractère très sévère des canaux considérés. La taille du filtre égaliseur retenue est $n_f = 4$, $n_a = n_b = 5$. La robustesse au bruit d'un algorithme d'égalisation varie selon la nature du canal. Le rapport signal à bruit a donc été fixé de telle sorte que le rapport EQM/P_c en sortie du filtre linéaire optimal de Wiener soit de 0.1 pour la 16QAM et de 0.2 pour la QPSK, où P_c est la puissance moyenne des symboles d'entrée.

Le résultat des simulations moyenné sur 10 itérations est présenté sur les tableaux 1 et 2. Ces valeurs ne correspondent pas aux performances optimales de l'algorithme. L'objectif de ces simulations est simplement de montrer la capacité de l'égaliseur à corriger des canaux fortement perturbés dans des conditions de bruit défavorables. Le nombre important d'itérations est d'ailleurs lié à ces conditions particulières. Dans la majorité des cas, le temps de convergence n'excède pas une trentaine d'itérations. On vérifie par ailleurs que la valeur de l'EQM en sortie n'est pas très éloignée de la valeur théorique du filtre de Wiener. Plus généralement, les simulations montrent que la robustesse au bruit de l'égaliseur est sensiblement identique voire inférieure à celle de l'égaliseur CMA transverse.

Le principal intérêt de l'égaliseur ERB est de permettre l'égalisation avec un nombre restreint de coefficients. Ainsi, le canal $H(z) = 1 - 0.98z^{-1}$ qui nécessite en transverse plus de 30 coefficients pour la 16QAM est inversé par l'ERB avec juste 7 coefficients. Une fois la convergence établie, il est possible de faire fonctionner l'égaliseur en mode DFE pour chaque partie récursive et de combiner les deux résultats. Dans le cas des modulations PSK, une autre solution consiste à exploiter l'égaliseur DFE bilatéral introduit ci-dessous.

3 Egaliseur DFE bilatéral

En présence de canaux fortement résonnants, le taux d'erreur en sortie du filtre égaliseur peut être très dégradé

bien que le rapport signal à bruit d'entrée soit élevé. C'est le phénomène d'amplification de bruit. Nous proposons ici un filtre DFE bilatéral auto-adaptatif par blocs qui permet d'améliorer le taux d'erreur symbole des modulations PSK *en sortie d'un égaliseur quelconque*. Le DFE bilatéral optimal est le filtre qui annule strictement l'interférence entre symboles (IES) due aux symboles passés et futurs. Cette structure qui n'a pas de sens dans un traitement séquentiel des données est constituée du filtre adapté au canal et d'un filtre récursif bilatéral dont les coefficients sont égaux à l'autocorrélation du canal.

Dans le cas présent, on ne dispose ni du canal ni des décisions correctes mais simplement de la sortie de l'égaliseur qui est entachée d'erreurs. A la première itération, ce jeu de N décisions est utilisé pour estimer le filtre DFE bilatéral optimal au sens des Moindres Carrés. A partir des coefficients obtenus et des décisions associées, on calcule la sortie du filtre DFE, ce qui donne un nouveau jeu de décisions. La clé de l'algorithme consiste à remplacer dans un premier temps les décisions par les sorties de l'égaliseur ramenées sur le cercle unité. Ce procédé permet d'améliorer d'une itération sur l'autre le taux d'erreur. La sortie du filtre à l'itération $(n + 1)$ s'exprime

$$w_t^{(n+1)} = \sum_{l=-m}^{+m} \alpha_l y_{t-l} - \sum_{i=1}^L a_i d_{t-i}^{(n)} - \sum_{j=1}^L b_j d_{t+j}^{(n)} \quad (11)$$

avec $d_t^{(n)} = \zeta(w_t^{(n)}) \stackrel{\text{def}}{=} e^{j \arg(w_t^{(n)})}$, $m = \lfloor \frac{L}{2} \rfloor + 1$ où L est la longueur estimée du canal. On note

$$\begin{aligned} H &= [\alpha_{-m}, \dots, \alpha_{+m}]^T & Y_t &= [y_{t-m}, \dots, y_{t+m}]^T \\ A &= [a_1, \dots, a_L]^T & D_t^- &= [d_{t-1}, \dots, d_{t-L}]^T \\ B &= [b_1, \dots, b_L]^T & D_t^+ &= [d_{t+1}, \dots, d_{t+L}]^T \end{aligned} \quad (12)$$

L'algorithme complet prend la forme suivante

Initialisation $n = 0$: $H_0 = A_0 = B_0 = 0$, $d_t^{(0)} = \zeta(z_t)$, où z_t est la sortie d'un égaliseur quelconque

1. Calcul des coefficients H_{n+1} , A_{n+1} , B_{n+1} qui minimisent

$$\sum_{t=0}^{N-1} \left| H^T Y_t - A^T D_t^{-(n)} - B^T D_t^{+(n)} - \hat{c}_t^{(n)} \right|^2 \quad (13)$$

où $\hat{c}_t^{(n)}$ est la décision associée à la sortie $w_t^{(n)}$

2. Calcul de la sortie du filtre et du signal de référence

$$\begin{aligned} w_t^{(n+1)} &= H_{n+1}^T Y_t - A_{n+1}^T D_t^{-(n)} - B_{n+1}^T D_t^{+(n)} \\ d_t^{(n+1)} &= \zeta(w_t^{(n+1)}) \end{aligned} \quad (14)$$

3. calcul du critère $\Sigma^{(n+1)} = \sum_{t=0}^{N-1} \left| w_t^{(n+1)} - \hat{c}_t^{(n+1)} \right|^2$, sortie si $\Sigma^{(n+1)} > \Sigma^{(n)}$, sinon retour 1

Une fois parvenu à l'équilibre, l'algorithme est exécuté une seconde fois en prenant pour non-linéarité l'opérateur de quantification $\zeta(w_t^{(n)}) = \hat{c}_t^{(n)}$. La première phase permet en fait de corriger l'IES résiduelle en sortie du filtre égaliseur. Si le canal est fortement résonnant, il n'est pas rare de diminuer le nombre d'erreurs d'un facteur 2 à 5 en une dizaine d'itérations. La seconde étape s'apparente plus au

filtre DFE traditionnel. Le gain sur le taux d'erreur n'exécède pas 10 à 30% pour quelques itérations.

L'algorithme peut être interprété comme la minimisation par relaxation de la fonction de coût (13) sur les coefficients H , A , B et le jeu de données $\{d_t\}$. L'étape 2 apparaît en effet comme un moyen très simple de minimiser la fonctionnelle sur les coefficients $\{d_t\}$ par une opération du type $x_{n+1} = f(x_n)$. Le filtrage des données fait descendre le critère jusqu'à un palier autour duquel il fluctue légèrement en raison de la minimisation simplifiée. Il est important de noter que cet algorithme fonctionne uniquement si le rapport EQM/P_c en sortie de l'égaliseur affiche une valeur suffisante de l'ordre de 0.2 pour la QPSK et 0.15 pour la 8PSK.

4 Conclusion

L'originalité de l'algorithme d'égalisation par blocs présenté dans cet article consiste à exploiter une double structure récursive dont la mise en oeuvre est assurée par filtrage du bloc de données dans les deux sens. L'égaliseur récursif bilatéral dispose ainsi d'une capacité élevée de correction pour un nombre de paramètres qui ne dépend que de la longueur du canal. Sa complexité le destine surtout aux canaux fortement distordus et à fort étalement Doppler tel que le canal HF. L'usage de blocs de taille réduite est susceptible d'introduire des minima locaux. Comme la taille critique dépend du canal, des simulations adaptées à chaque contexte sont nécessaires. Il reste aussi à étudier plus finement l'impact du phénomène de compensation pôles-zéros, surtout dans l'objectif d'une mise en oeuvre sur des machines de traitement numérique du signal.

Références

- [1] D. N. Godard, "Self-recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communication systems," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-28, pp. 1867-1875, Nov. 1980
- [2] B. Agee, "The least-squares CMA: a new technique for rapid correction of Constant Modulus Signals," *In IEEE Proc. Int. Conf. on Images, Computers, Automatic, Speech and Signal Processing - ICASSP'86*, pp. 953-956, Tokyo, Japan, 1986
- [3] J. Labat, O. Macchi and C. Laot, "Une structure universelle pour l'égalisation autodidacte adaptative," *In Proc. 17^{ième} colloque du Grets, Grenoble, France, 1997*
- [4] A. Bouttier, "A truly recursive blind equalization algorithm," *In IEEE Proc. Int. Conf. on Images, Computers, Automatic, Speech and Signal Processing - ICASSP'98*, pp. 3381-3389, Seattle, Washington, USA, 1998
- [5] C. Laot, thèse de doctorat "Egalisation autodidacte et turbo égalisation. application aux canaux sélectifs en fréquence" soutenu le 4 juillet 1997, Université de Rennes I, numéro d'ordre 1822