

Généralisation du filtre adapté au cas multi-cibles en présence de brouilleurs pour une localisation radar.

Nicolas BERTAUX^{1,2}, Pascal LARZABAL¹, Claude ADNET², Eric CHAUMETTE²

¹LESIR-ENS Cachan. 61 avenue du président Wilson. 94235 Cachan Cedex.,

²THOMSON-CSF AirSys. 7-9 avenue des Mathurins. 92220 Bagneux.

nicolas.beraux@lesir.ens-cachan

Résumé – Nous étudions dans cet article le cas de l'estimation des paramètres de cibles (avions), qui renvoient l'impulsion émise par le radar avec un retard et une atténuation complexe (SER), ceci en présence de brouilleurs à bruit. Pour cela nous mettons en oeuvre deux estimateurs du maximum de vraisemblance qui traitent respectivement les deux cas suivants : la présence d'un seul brouilleur à bruit blanc, dont on cherche les caractéristiques (puissance, position) et la présence de plusieurs brouilleurs à bruit, corrélés temporellement, dont on connaît la matrice interspectrale (blanchiment). Nous établissons les bornes de Cramer-Rao des différents problèmes proposés et étudions les performances obtenues à l'aide de simulations.

Abstract – We proposed in this paper an extension to jammers presence of the parameterized maximum likelihood (PML) we have recently introduced. Two maximum likelihood methods have been investigated. The first one concerns white noise for the jammers, and the second one correlated noise. For each scenario we propose an implementation for a steepest descent second order algorithm. Corresponding Cramer-Rao Bound have been provided. Simulations exhibit performances gains.

1 Introduction

La technique la plus couramment utilisée en traitement radar consiste en une Formation de Faisceau par le Calcul (FFC) suivie d'un Filtrage Adapté (FA) à l'impulsion d'émission. Cet estimateur est optimal dans le cas de la présence d'une unique source, voire de sources éloignées de plusieurs largeurs de lobe spatial et temporel.

L'objet de cet article est de généraliser, à la présence de brouilleurs, l'estimateur du maximum de vraisemblance présenté dans [1]. Nous distinguerons le cas de brouilleurs blancs temporellement puis corrélés temporellement.

2 Cas sans brouilleur

2.1 Modélisation paramétrique du signal reçu

Les signaux reçus par les réseaux s'expriment comme une superposition des versions atténuées et retardées du signal transmis. En notant α_m le scalaire complexe modélisant la SER (Surface Equivalente Radar) de la cible m , le signal $\mathbf{x}_m(t)$, rétrodiffusé par la cible d'indice m sur le réseau s'écrit :

$$\mathbf{x}_m(t) = \mathbf{a}(\theta_m) \cdot \alpha_m \cdot s(t - \tau_m) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

où $\mathbf{a}(\theta_m)$ est le vecteur $(N \times T)$ directionnel de la cible indexée m , $s(t)$ l'impulsion émise et $\mathbf{n}(t)$ le vecteur $(N \times 1)$ de bruit additionnel supposé blanc, gaussien, circulaire, à moyenne nulle et de puissance σ^2 .

Soit \mathbf{X} la matrice $(N \times T)$ des observations définie par : $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_T)]$, $\bar{\mathbf{X}}$ le vecteur $(N \cdot T \times 1)$ issu

de la concaténation des colonnes de \mathbf{X} : $\bar{\mathbf{X}} = \text{vec}(\mathbf{X})$, soit $\bar{\mathbf{N}}$ et $\bar{\mathbf{N}}$ les termes relatifs au bruit, et soit $\mathbf{s}(\tau_m)$ le vecteur de dimension $(T \times 1)$ correspondant à l'impulsion retardée de τ_m : $\mathbf{s}(\tau_m) = [s(t_1 - \tau_m), \dots, s(t_T - \tau_m)]^T$. Alors les signaux arrivant sur le réseau vérifient :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \alpha_m \cdot \mathbf{a}(\theta_m) \cdot s(t - \tau_m) + \mathbf{n}(t), \quad (2)$$

et s'écrivent sous forme matricielle :

$$\bar{\mathbf{X}} = \sum_{m=1}^M \alpha_m \cdot (\mathbf{s}(\tau_m) \otimes \mathbf{a}(\theta_m)) + \bar{\mathbf{N}}, \quad (3)$$

où \otimes dénote le produit de Kronecker. Notons $\Psi(\theta, \tau)$ la matrice complexe $(T \cdot N \times M)$ des vecteurs "retard-direction" définie de la manière suivante :

$$\Psi(\theta, \tau) = [[\mathbf{s}(\tau_1) \otimes \mathbf{a}(\theta_1)], \dots, [\mathbf{s}(\tau_M) \otimes \mathbf{a}(\theta_M)]] \quad (4)$$

où θ est le vecteur réel $(M \times 1)$ des directions d'arrivées et τ le vecteur réel $(M \times 1)$ des retards. Finalement les signaux arrivant sur l'antenne s'écrivent :

$$\bar{\mathbf{X}} = \Psi(\theta, \tau)\alpha + \bar{\mathbf{N}}. \quad (5)$$

où α est le vecteur complexe $(N \times 1)$ des coefficients de réflexion des cibles. Dans la suite du papier nous poserons $\mathbf{p}^T = [\theta^T, \tau^T]^T$ le vecteur des paramètres d'intérêt des cibles.

2.2 Logvraisemblance et estimateur associé

La vraisemblance des observations s'obtient de manière très similaire à celle du MVD [4]. Celle-ci s'écrit :

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{X}}|\mathbf{p},\alpha,\sigma^2) = cte - TN \log(\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} |\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha|^2. \quad (6)$$

La forme de la log-vraisemblance (6) permet une détermination analytique, pour tout \mathbf{p} des estimateurs de la puissance de bruit σ^2 ainsi que du vecteur des coefficients de réflexion α . Ces estimateurs s'obtiennent en annulant les dérivées respectivement par rapport à σ^2 et à α . Ils ont pour expression :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{NT} |\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha|^2 \quad (7)$$

et

$$\hat{\alpha} = (\Psi^H(\mathbf{p})\Psi(\mathbf{p}))^{-1} \Psi^H(\mathbf{p})\bar{\mathbf{X}} = \Psi^\#(\mathbf{p})\bar{\mathbf{X}}. \quad (8)$$

En injectant les expressions (7) et (8) dans la logvraisemblance (6), on obtient l'estimation $\hat{\mathbf{p}}$:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg \min_{\mathbf{p}} \{ \bar{\mathbf{X}}^H \Pi_{\Psi}^\perp(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{X}} \}, \quad (9)$$

où $\Pi_{\Psi}^\perp(\mathbf{p})$ le projecteur orthogonal sur l'image de $\Psi(\mathbf{p})$.

La minimisation de cette fonctionnelle multidimensionnelle est effectuée à l'aide d'un algorithme de descente du second ordre de type Gauss-Newton. L'originalité de l'approche présentée est de fournir une approximation au premier ordre en RSB du hessien [1] de la procédure de Newton, ne faisant intervenir que les dérivées premières, garantissant une structure définie positive et généralisant les procédures de la littérature courante. En effet, il y a plusieurs raisons à cela. Le hessien a une expression très lourde et, pouvant être défini négatif, il peut nuire à la convergence de l'algorithme. De plus, à fort RSB, le hessien tend vers son espérance [1] et, au voisinage de la solution, l'algorithme s'écrit au premier ordre en $\frac{1}{RSB}$ sous la forme :

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k - \zeta [\mathbf{H}(E\{L(\mathbf{p})\})]^{-1} \cdot \frac{\partial L(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \quad (10)$$

où le coefficient réel ζ permet d'assurer la décroissance du critère (9). En effet $\mathbf{H}(E\{L(\mathbf{p}_k)\})$ étant toujours défini non-négatif, il existe alors un coefficient $0 < \zeta \leq 1$ tel que $L(\mathbf{p}_{k+1}) \leq L(\mathbf{p}_k)$. On fixe ζ à 1 tant que $L(\mathbf{p}_{k+1}) \leq L(\mathbf{p}_k)$, dans de cas contraire on diminue ζ jusqu'à ce que l'inégalité soit respectée. Les expressions matricielles du gradient et hessien sont données par :

$$\frac{\partial L(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = -2\Re \left\{ \left[\begin{array}{c} \hat{\alpha}^* \\ \hat{\alpha} \end{array} \right] \odot (\mathbf{D}^H \Pi_{\Psi}^\perp(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{X}}) \right\} \quad (11)$$

$$\mathbf{H}(E\{L(\mathbf{p})\}) = 2\Re \left\{ \text{diag} \left(\left[\begin{array}{c} \hat{\alpha}^* \\ \hat{\alpha} \end{array} \right] \mathbf{D}^H \right) \Pi_{\Psi}^\perp(\mathbf{p}) \mathbf{D} \text{diag} \left(\left[\begin{array}{c} \hat{\alpha} \\ \hat{\alpha} \end{array} \right] \right) \right\} \quad (12)$$

où $\hat{\alpha}(\mathbf{p}) = \Psi^\#(\mathbf{p})\bar{\mathbf{X}}$.

2.3 Performances statistiques

Les calculs des bornes de Cramer-Rao (BCR) permettent de déterminer les limites inférieures de la variance d'estimation de tout estimateur non biaisé. Ces limites sont : $\text{var}(\hat{\mathbf{q}}) \geq \mathbf{BCR} = \mathbf{J}_{\mathbf{q}}^{-1}$ où $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ est la matrice d'information de Fisher : $\mathbf{J}_{\mathbf{q}} = E \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^H \right\}$, et où \mathbf{q} est le vecteur complexe des paramètres concaténés à estimer : $\mathbf{q} = [\sigma^2, \alpha^T, \alpha^H, \mathbf{p}^T]^T$, où \mathbf{p} est le vecteur des paramètres de localisation. α , α^* et σ^2 jouent ici le rôle de paramètres de nuisance. Le choix de la notation complexe pour le calcul de la matrice de Fisher [5], a été motivé par le fait qu'elle permet d'obtenir aisément une forme réduite du bloc $[\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^{-1}]_{\mathbf{p}}$ des paramètres de localisation.

La matrice $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ a la forme bloc suivante [1] :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} J_{\sigma^2} & \mathbf{J}_{\sigma^2 \alpha} & \mathbf{J}_{\sigma^2 \alpha^*} & \mathbf{J}_{\sigma^2 \mathbf{p}} \\ [\mathbf{J}_{\sigma^2 \alpha}]^H & \mathbf{J}_{\alpha} & \mathbf{J}_{\alpha \alpha^*} & \mathbf{J}_{\alpha \mathbf{p}} \\ [\mathbf{J}_{\sigma^2 \alpha^*}]^H & [\mathbf{J}_{\alpha \alpha^*}]^H & \mathbf{J}_{\alpha^*} & \mathbf{J}_{\alpha^* \mathbf{p}} \\ [\mathbf{J}_{\sigma^2 \mathbf{p}}]^H & [\mathbf{J}_{\alpha \mathbf{p}}]^H & [\mathbf{J}_{\alpha^* \mathbf{p}}]^H & \mathbf{J}_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\sigma^2} & \mathbf{0}_{1 \times N} & \mathbf{0}_{1 \times N} & \mathbf{0}_{1 \times 2N} \\ \mathbf{0}_{N \times 1} & \mathbf{J}_{\alpha} & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{J}_{\alpha \mathbf{p}} \\ \mathbf{0}_{N \times 1} & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{J}_{\alpha^*} & \mathbf{J}_{\alpha^* \mathbf{p}} \\ \mathbf{0}_{2N \times 1} & [\mathbf{J}_{\alpha \mathbf{p}}]^H & [\mathbf{J}_{\alpha^* \mathbf{p}}]^H & \mathbf{J}_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Une inversion par bloc de la matrice de Fisher (13) permet d'écrire le bloc $[\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^{-1}]_{\mathbf{p}}$ de manière simple :

$$[\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^{-1}]_{\mathbf{p}} = \sigma^2 [\mathbf{H}(E\{L(\mathbf{p})\})]^{-1}, \quad (14)$$

où $\mathbf{H}(E\{L(\mathbf{p})\})$ est donnée par (12).

Un développement limité fournit une expression approchée de la variance théorique de l'estimateur. Cette variance une fois établie, montre que l'estimateur introduit est efficace à fort RSB [1]. L'estimateur proposé s'interprète comme la généralisation, au cas multi-cibles, de l'estimateur Formation de Faisceaux par le Calcul suivie d'un Filtre Adapté à l'impulsion émise.

3 Prise en compte de brouilleurs à bruit

3.1 Brouilleur à bruit blanc

Nous ne présenterons ici, par manque de place, que l'estimateur du MV associé à ce problème. Les signaux arrivant sur l'antenne sont la somme des signaux réémis par les cibles et du signal du brouilleur dans la direction θ_b . Ils s'expriment :

$$\bar{\mathbf{X}} = \sum_{m=1}^M \alpha_m \cdot (\mathbf{s}(\tau_m) \otimes \mathbf{a}(\theta_m)) + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}(\theta_b) + \bar{\mathbf{N}}, \quad (15)$$

où est le vecteur complexe de bruit (blanc) de puissance σ_b^2 .

La logvraisemblance prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{X}}|\mathbf{p},\alpha,\sigma^2) = cte - (N-1)T \log(\sigma^2) - T \log(N\sigma_b^2 + \sigma^2) - (\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha)^H \mathbf{R}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha) \quad (16)$$

où

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}_T \otimes \frac{1}{\sigma^2} \left[\mathbf{I}_N - \frac{\sigma_b^2}{\sigma^2 + N\sigma_b^2} \mathbf{a}(\theta_b) \mathbf{a}^H(\theta_b) \right]. \quad (17)$$

et où θ_b et σ_b^2 sont les paramètres du brouilleur à estimer. Nous pouvons déterminer les estimateurs de la puissance du brouilleur σ_b^2 et de la puissance du bruit thermique σ^2 . Nous obtenons

$$N\widehat{\sigma b^2} = \frac{1}{T} (\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha)^H [\mathbf{I}_T \otimes \Pi_{\mathbf{a}(\theta_b)}] (\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha) - \sigma^2 \quad (18)$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{(N-1)T} (\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha)^H [\mathbf{I}_T \otimes \Pi_{\mathbf{a}(\theta_b)}^\perp] (\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha) \quad (19)$$

et donc, pour le cas d'un brouilleur à bruit blanc, dont on recherche la direction et la puissance, la logvraisemblance associée s'écrit :

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{X}}|\mathbf{p}, \alpha, \theta_b) = cte - (N-1) \log(N\widehat{\sigma b^2} - \widehat{\sigma^2}) - \log(\widehat{\sigma^2}). \quad (20)$$

Cette dernière expression donne des calculs fastidieux. Dans le cas qui nous intéresse, où la puissance du brouilleur est grande devant celle du bruit, nous choisirons de négliger dans (20) le terme en puissance de bruit seul. L'expression (20) se simplifie alors nettement, et en enlevant le logarithme, nous obtenons le critère à minimiser :

$$C(\mathbf{p}, \alpha, \theta_b) = (\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha)^H [\mathbf{I}_T \otimes \Pi_{\mathbf{a}(\theta_b)}^\perp] (\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha), \quad (21)$$

où il s'avère possible d'éliminer le vecteur des coefficients complexes modélisant les SER des cibles. Au final, on obtient le critère :

$$C'(\mathbf{p}, \alpha, \theta_b) = \bar{\mathbf{X}}^H \Pi_{\Psi/\Pi_{\mathbf{a}(\theta_b)}^\perp}^\perp \bar{\Pi}_{\mathbf{a}(\theta_b)}^\perp \Pi_{\Psi/\Pi_{\mathbf{a}(\theta_b)}^\perp}^\perp \bar{\mathbf{X}}, \quad (22)$$

où

$$\bar{\Pi}_{\mathbf{a}(\theta_b)}^\perp = \mathbf{I}_T \otimes \Pi_{\mathbf{a}(\theta_b)}^\perp \quad (23)$$

et

$$\Pi_{\Psi/\Pi_{\mathbf{a}(\theta_b)}^\perp}^\perp = \mathbf{I} - \Psi(\mathbf{p}) \left(\Psi(\mathbf{p})^H \bar{\Pi}_{\mathbf{a}(\theta_b)}^\perp \Psi(\mathbf{p}) \right)^{-1} \Psi(\mathbf{p})^H \bar{\Pi}_{\mathbf{a}(\theta_b)}^\perp \quad (24)$$

Les calculs associés à la mise en oeuvre de cet estimateur, gradient, hessien, sont raisonnables mais ne seront pas reportés ici par manque de place.

3.2 Brouilleurs à bruit corrélé

Dans le cas de brouilleurs quelconques, c'est-à-dire en présence de plusieurs brouilleurs à bruit corrélé temporellement, il devient très délicat de traiter le cas d'une matrice d'autocorrélation paramétrée. Il est plus judicieux de travailler avec une Matrice Inter-Spectrale (MIS) connue. En effet, en radar, une estimée de la MIS $\widehat{\Gamma}$, peut aisément être déterminée pendant les périodes de repos de l'émetteur. La logvraisemblance s'écrit dans le domaine fréquentiel de manière classique :

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{X}}|\mathbf{p}, \alpha, \sigma^2) = cte - \log(|\widehat{\Gamma}|) - (\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha)^H \widehat{\Gamma}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \Psi(\mathbf{p})\alpha). \quad (25)$$

La MIS théorique étant bloc diagonale, on fera l'approximation d'une MIS estimée elle aussi bloc diagonale.

L'estimée au sens du maximum de vraisemblance des paramètres $\widehat{\mathbf{p}}$ s'écrit alors :

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg \min_{\mathbf{p}} \left\{ \bar{\mathbf{X}}^H \Gamma^{-1} \Pi_{\Psi/\widehat{\Gamma}^{-1}}^\perp (\mathbf{p}) \bar{\mathbf{X}} \right\}, \quad (26)$$

où est le projecteur orthogonal sur Ψ dans la métrique $\widehat{\Gamma}^{-1}$:

$$\Pi_{\Psi/\widehat{\Gamma}^{-1}}^\perp = \mathbf{I} - \Psi \left(\Psi^H \widehat{\Gamma}^{-1} \Psi \right)^{-1} \Psi^H \widehat{\Gamma}^{-1} \quad (27)$$

La mise en oeuvre de cet estimateur est similaire au cas sans brouilleur. Dans l'optique d'une minimisation à l'aide d'un algorithme du second ordre, le calcul du gradient donne :

$$\frac{\partial L(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = -2\Re \left\{ \left[\begin{array}{c} \widehat{\alpha}^* \\ \widehat{\alpha}^* \end{array} \right] \odot \left(\mathbf{D}^H \Pi_{\Psi/\widehat{\Gamma}^{-1}}^\perp \widehat{\Gamma}^{-1}(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{X}} \right) \right\}, \quad (28)$$

et le hessien de l'espérance du critère à pour expression :

$$\mathbf{H}(E\{L(\mathbf{p})\}) = 2\Re \left\{ \text{diag} \left(\left[\begin{array}{c} \widehat{\alpha}^* \\ \widehat{\alpha}^* \end{array} \right] \cdot \mathbf{D}^H \right) \widehat{\Gamma}^{-1} \Pi_{\Psi/\widehat{\Gamma}^{-1}}^\perp (\mathbf{p}) \cdot \mathbf{D} \cdot \text{diag} \left(\left[\begin{array}{c} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\alpha} \end{array} \right] \right) \right\} \quad (29)$$

3.3 Etude des performances statistiques

Le calcul de la matrice de Fischer permet d'obtenir l'écriture des Bornes de Cramer-Rao relatives aux paramètres d'intérêts seuls \mathbf{p} . La démonstration est similaire à celle proposée dans le cas sans brouilleur [1]. On obtient alors le resultat simple :

$$\mathbf{BCR}(\mathbf{p}) = [\mathbf{H}(E\{L(\mathbf{p})\})]^{-1} \quad (30)$$

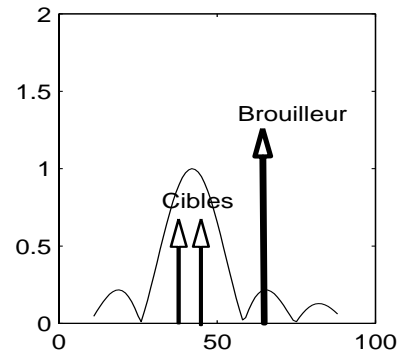
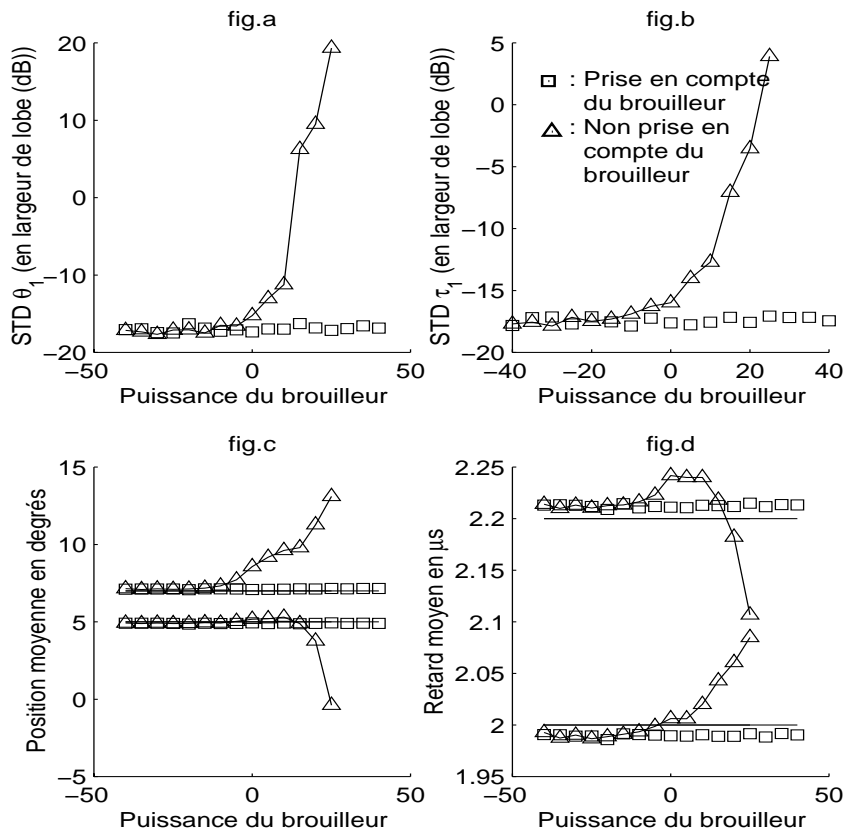
où le hessien est défini par l'expression (29).

4 Simulations

La simulation proposée permet de mettre en valeur l'intérêt d'introduire la connaissance de la MIS dans l'estimation des paramètres de DOA et de distance. Deux cibles, situées à l'intérieur du même lobe d'antenne, sont recherchées en présence d'un brouilleur corrélé temporellement situé dans le premier lobe secondaire. On voit clairement, sur les variances d'estimation et sur les positions moyennes estimées, le gain apporté par l'introduction de la MIS. Ce gain est à rapprocher au cas d'un blanchiment des signaux dans les traitements classiques. Dans la gamme étudiée, quelle que soit la puissance du brouilleur, l'estimation des paramètres de localisation garde des performances constantes que ce soit au niveau de la variance ou du biais.

Conclusion

Nous avons étendu au cas de brouilleurs à bruit, l'estimateur du maximum de vraisemblance avec connaissance des signaux reçus introduit dans [1]. Deux situations ont été étudiées. Tout d'abord le cas d'un seul brouilleur à bruit blanc dont on rechercherait, en plus des paramètres d'intérêts des cibles, la position et la puissance. Ce cas a



Largeur de lobe
 Angulaire : 4.5 degrés
 Temporel : 4.4 μ s

Puissance du bruit : 0dB

Cibles
 Puissance : -10 dB
 Position : 5.00 et 7.00 degrés
 Retard : 2.00 et 2.20 μ s

Brouilleur
 Puissance : [-40 , 40] dB
 Position : 16 degrés

nécessité quelques approximations pour pouvoir effectuer les calculs. Les gains en performances de ce dernier restent encore à étudier. Le second cas, plus général, consiste à traiter la présence de plusieurs brouilleurs à bruit corrélés. Pour cela, une estimation de la matrice inter-spectrale a été effectuée pendant les périodes de repos de l'émetteur. Les gains de ce dernier estimateur sont évidents, au vu des premières simulations effectuées.

Références

- [1] N. Bertaux, P. Larzabal, C. Adnet et E. Chaumette, "Maximum de Vraisemblance Paramétrée (PML) : Application à la localisation spatio-temporelle radar", A paraître dans la revue Traitement du Signal.
- [2] M. Cedervall and R. Moses, "Efficient maximum likelihood DOA estimation for signals with known waveforms in presence of multipath", IEEE Trans.SP, Vol.45, No.3, pp.808-810, March 1997.
- [3] M. Wax and A. Leshem "Joint Estimation of Delays and Directions of Arrival of Multiple Reflections of a Known Signal" IEEE Trans.SP, Vol.45, No.10, pp.2477-2484, October 1997.
- [4] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, Maximum likelihood, and Cramer-Rao bound: Further results and comparisons", IEEE Trans.ASSP, Vol.38, No.12, pp.2140-2150, December 1990.
- [5] A. van den Bos, "A Cramer-Rao Lower Bound for Complex Parameters", IEEE Trans. SP, Vol.42, No. 42, pp. 2859, October 1994.