

Lissage H_∞ appliqué à la Déconvolution

Eric BLANCO, Philippe NEVEUX, Gérard THOMAS

LAGEP, U.P.R.E.S.-A. CNRS Q 5007

43 Bd du 11 Novembre 1918, CPE-Lyon, Bât 308G, 69622 Villeurbanne cedex, France

blanco@lagep.univ-lyon1.fr, neveux@lagep.univ-lyon1.fr, Gerard.Thomas@ec-lyon.fr

Résumé – Le problème de la déconvolution est traité par une technique de lissage utilisant un double traitement des signaux mesurés. La recherche d'une solution robuste a permis de définir un lisseur optimal H_∞ . Un exemple simple est utilisé afin de comparer ses performances à celles du lisseur H_2 .

Abstract – A double treatment of measurement is used to solve the deconvolution problem. The search for a robust solution leads to an optimal H_∞ smoother. Applied to a simple example, this new tool has showed great achievement with regard to the H_2 smoother.

I. Introduction

Du fait de son importance en instrumentation, le problème de la déconvolution suscite depuis bien des années de nombreux travaux. En particulier, diverses méthodes ont été développées dans le cadre de l'optimisation H_2 , certaines s'appuyant sur des techniques de filtrage de Kalman ou de Wiener [1], d'autres sur des techniques issues de la commande optimale [9]. Certaines techniques de déconvolution utilisant un estimateur de Kalman ont l'inconvénient de déphaser le signal reconstruit par rapport à l'original. Afin de palier à cet inconvénient, le problème de la déconvolution peut être alors considéré sous un aspect lissage H_2 où de nombreux algorithmes ont été définis [2, 3, 7]. A l'instar de U. Shaked [8], nous proposons ici une démarche analogue dans le cadre H_∞ . En effet, des travaux ont été menés sur l'application à la déconvolution du filtrage H_∞ , certains considérant le problème de manière fréquentielle [8], d'autres s'appuyant sur une approche temporelle basée sur la représentation d'état [5, 6]. Cependant, K. M. Nagpal [5] a été un des rares à s'intéresser au problème de déconvolution sous un aspect lissage H_∞ , aboutissant néanmoins à une structure de type H_2 . C'est pourquoi, dans cette étude, nous avons développé, et appliqué à la déconvolution, un algorithme de lissage optimal H_∞ pour les systèmes linéaires continus temps invariant, en se basant sur les travaux de E. Sekko [6] sur le filtrage optimal H_∞ , ainsi que ceux de D.C. Faser et J.E. Potter [2] sur le lissage H_2 .

II. Lisseur optimal H_∞

Considérons le système linéaire continu temps invariant suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \quad (1a)$$

$$y_m(t) = Cx(t) + v(t) \quad (1b)$$

$$z(t) = Lx(t) \quad (1c)$$

$$t \in [0, T]$$

où $x \in \mathfrak{R}^n$, $y_m \in \mathfrak{R}^p$, $z \in \mathfrak{R}^m$, A, B, C, L sont des matrices constantes aux dimensions appropriées et vérifiant les hypothèses:

$$(A,C) \text{ détectable et } (A,B) \text{ contrôlable.} \quad (2a,2b)$$

w et v sont des bruits blancs stationnaires décorrélés, de valeur moyenne nulle et tels que:

$$E[w(t).^t w(t)] = I\delta(t) \quad (3a)$$

$$E[v(t).^t v(t)] = R\delta(t) \quad (3b)$$

Considérons, pour simplifier, le cas de l'horizon fini ($T < \infty$) avec une condition initiale parfaitement connue $x(0)=0$. Le lisseur doit être développé de manière à reconstruire un signal $z(t)$ à partir de la mesure bruitée $y_m(t)$. On abordera, dans cette étude, le problème du lissage H_∞ comme une optimisation quadratique du rapport entre les énergies de l'erreur d'estimation et des bruits dans le pire des cas [5, 6]. L'erreur d'estimation est définie par :

$$e(t) = z(t) - \hat{z}(t) \quad (4)$$

Soit γ , un réel strictement positif, on définit alors un critère de performance J tel que :

$$J = \sup_{w,v \in L_2} \frac{\|e\|_2^2}{\|w\|_2^2 + \|v\|_2^2} < \gamma^2 \quad (5)$$

Dans le domaine H_2 , il existe plusieurs formes de lisseur. Certaines [2, 7], donnent une estimée lissée étant une correction de l'estimée obtenue au même instant par un filtre de Kalman.

Dans [2,3], les auteurs ont défini un lisseur optimal offrant une estimée issue de la combinaison de deux estimées fournies par des filtres linéaires optimaux. Le premier fournit une estimée en t , en utilisant l'ensemble des informations comprises entre 0 et t , pour t allant de 0 à T . Le second fournit

une estimée en t , en utilisant les données entre T et t , pour t allant cette fois de T à 0 . Le résultat ainsi obtenu utilise alors l'ensemble des informations disponibles sur l'intervalle $[0, T]$. En considérant cette fois le problème dans le formalisme H_∞ et en considérant le lemme suivant, on définit les conditions d'existence et l'algorithme du lisseur.

Lemme[4] : La combinaison optimale non biaisée \hat{x} de deux estimées indépendantes, ε (de covariance P_f) et λ (de covariance P_b) est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= (P_f^{-1} + P_b^{-1})^{-1} (P_f^{-1} \varepsilon(t) + P_b^{-1} \lambda(t)) \\ P &= \text{Cov}(x - \hat{x}) = (P_f^{-1} + P_b^{-1})^{-1} \end{aligned} \quad (6a,b)$$

Théorème: Il existe un lisseur optimal H_∞ tel que $J < \gamma^2$ et défini par les équations (6a, 6b) s'il existe deux filtres optimaux H_∞ tels que :

$$\begin{aligned} &\text{Filtre aller} \\ \dot{\varepsilon} &= A\varepsilon + P_f C' (y_m - C\varepsilon) \quad \varepsilon(0) = 0 \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\dot{P}_f = AP_f + P_f A' + BB' - P_f \left(C' R^{-1} C - \frac{LL'}{\gamma^2} \right) P_f \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} &\text{Filtre retour} \\ \dot{\lambda} &= A\lambda - P_b C' (y_m - C\lambda) \quad \lim_{t \rightarrow T} [P_b^{-1} \lambda(t)] = 0 \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\dot{P}_b = AP_b + P_b A' - BB' + P_b \left(C' R^{-1} C - \frac{LL'}{\gamma^2} \right) P_b \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} &\text{Conditions limites du lisseur} \\ \hat{x}(T) &= \varepsilon(T) \quad P(T) = P_f(T) \end{aligned}$$

Remarque : - La condition limite pour la matrice de covariance du filtre *retour* découle de l'absence d'information après la fin de l'intervalle de temps.

- Lorsque $\gamma \rightarrow \infty$, les équations (7c) et (8c) deviennent identiques aux équations de Riccati utilisées pour la synthèse du lisseur optimal H_2 [2, 3].

Preuve : L'estimée \hat{x} obtenue à partir du lemme est au pire égale à une des deux estimés ε ou λ . Considérons alors les relations

$$\|e\|_2^2 \leq \|L(x - \varepsilon)\|_2^2 = \|e_\varepsilon\|_2^2 \quad (9a)$$

$$\|e\|_2^2 \leq \|L(x - \lambda)\|_2^2 = \|e_\lambda\|_2^2 \quad (9b)$$

En sommant ces deux relations et en tenant compte de la définition de (5), on obtient

$$J \leq \sup_{w, v \in L_2} \left[\frac{1}{2} \frac{\|e_\varepsilon\|_2^2}{\|w\|_2^2 + \|v\|_2^2} + \frac{1}{2} \frac{\|e_\lambda\|_2^2}{\|w\|_2^2 + \|v\|_2^2} \right] < \gamma^2 \quad (10)$$

Le problème se décompose alors en deux sous problèmes. On est ainsi amené à étudier deux critères de type H_∞ , J_ε et J_λ

$$J_\varepsilon = \sup_{w, v \in L_2} \frac{\|e_\varepsilon\|_2^2}{\|w\|_2^2 + \|v\|_2^2} < \gamma_\varepsilon^2 \quad J_\lambda = \sup_{w, v \in L_2} \frac{\|e_\lambda\|_2^2}{\|w\|_2^2 + \|v\|_2^2} < \gamma_\lambda^2$$

permettant d'obtenir les relations des deux filtres. On a alors la relation :

$$\gamma = \max(\gamma_\varepsilon, \gamma_\lambda) \quad \text{avec } \gamma, \gamma_\varepsilon, \gamma_\lambda > 0$$

III. Application à la déconvolution

En déconvolution, on cherche à reconstruire le signal d'entrée d'un système. Considérons le procédé suivant (modèle d'un réacteur calorimétrique) et comparons les performances du lisseur optimal H_∞ à celle de son homologue H_2 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1075 & -0.3563 & -1.468 \end{bmatrix} \quad B = [0 \ 0 \ 1]' \\ C = [0.01236 \ 0.0232 \ 0]$$

On applique en entrée un double créneau et l'on récupère une mesure correspondant à la sortie du système entachée d'un bruit de mesure.

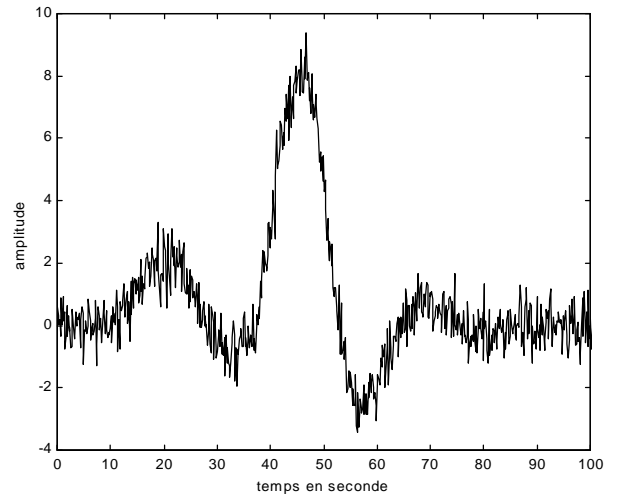


FIG. 1 : Signal y_m mesuré en sortie du système

On considère alors un système d'état augmenté en supposant que le signal à restaurer est la sortie d'un processus générateur. On se ramène ainsi à un problème d'estimation d'état. Le système augmenté satisfait (1a,1b,1c) et s'écrit :

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{bmatrix} x_a + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w$$

$$y_m = [0 \ C] x_a + v \quad z = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x_a$$

Que ce soit pour le filtrage ou le lissage, le manque d'information sur le bruit de mesure amène à considérer une valeur nominale pour la variance du bruit. Celle-ci est néanmoins différente de la valeur réelle de R . L'optimalité du lisseur H_2 étant lié aux caractéristiques des bruits, on illustre

en simulation l'influence que peut avoir le choix de la valeur de R .

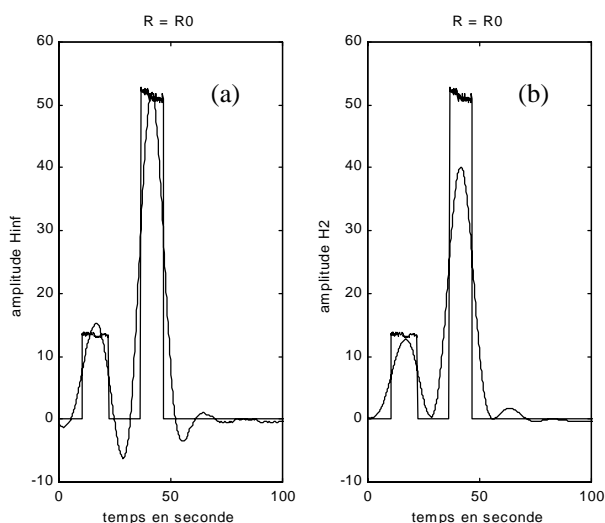


FIG. 2 : lisseur H_∞ (a) et lisseur H_2 (b) pour un bruit de variance réelle $R_{réel}=R0$

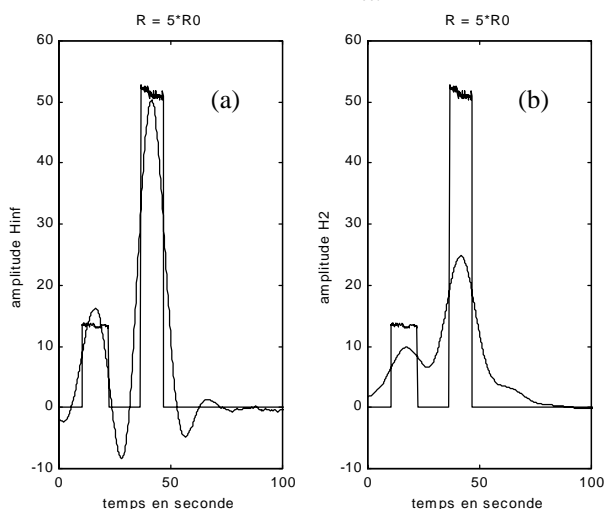


FIG. 3 : lisseur H_∞ (a) et lisseur H_2 (b) pour un bruit de variance $R=5*R0$

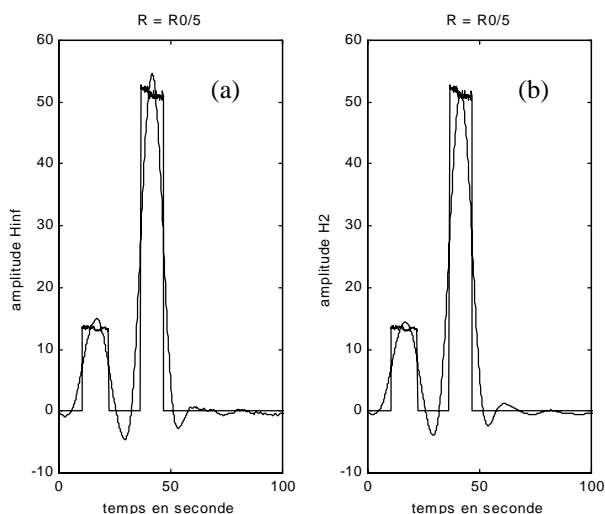


FIG. 4 : lisseur H_∞ (a) et lisseur H_2 (b) pour un bruit de variance $R=R0/5$

Malgré les erreurs qui pourraient être commises sur la caractérisation des signaux (erreurs sur le SNR de ± 7 db pour notre exemple), il apparaît que celles-ci n'auront que peu d'influence sur la qualité de restauration du lisseur H_∞ (colonne a).

Comme en filtrage, la technique H_∞ offre une meilleure dynamique pour le signal restauré (conservation partielle des caractéristiques hautes fréquences du signal à restauré [5, 6, 8]).

VI. Conclusions

L'approche que nous avons utilisée, nous a permis de définir une structure de lisseur optimal H_∞ pour les systèmes linéaires continus. L'application de ce dernier à la déconvolution a permis de mettre en évidence certaines de ces propriétés : conservation des caractéristiques hautes fréquences du signal à restaurer, le lisseur H_2 apparaît comme un lisseur sous optimal du lisseur H_∞ et surtout le lisseur H_∞ apparaît comme plus robuste vis à vis des erreurs sur les caractéristiques du bruit de mesures (Fig. 2, 3, 4).

Références

- [1] C. Chi and J. M. Mendel, *Performance of Minimum-Variance deconvolution Filter*, IEEE Trans. Signal processing, vol. ASSP-32, No. 6, December 1984, pp. 1145-1153.
- [2] D. C. Fraser and J. E. Potter, *The Optimum Linear Smoother as a Combination of Two Optimum Linear Filters*. IEEE trans. on Automat. Contr., vol. 7, No. 8, August 1969, pp.387-390.
- [3] T. Kailath and L. Ljung, *Two filter smoothing formulae by diagonalization of the Hamiltonian equations*, Int. J. Contr., vol. 36, no. 4, pp. 663-673, 1982.
- [4] P. B. Liebelt, *An introduction to Optimal Estimation*, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1967.
- [5] K.M. Nagpal and P. P. Khargonekar, *Filtering and Smoothing in H_∞ setting*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-36, pp. 152-166, 1991.
- [6] E. Sekko, *Quelques applications du Filtrage Optimal à la Déconvolution*, Thèse doctorale, Université Claude Bernard-Lyon1, Lyon, France, 1998.
- [7] H. E. Rauch, F. Tung and C. T. Striebel, *Maximum Likelihood Estimates of Linear Dynamic Systems*, AIAA Journal, vol. 3, No. 8, August 1965, pp. 1445-1450.
- [8] U. Shaked and Y. Theodor, *A Frequency Domain Approach to the Problems of H_∞ Minimum Error State Estimation and Deconvolution*, IEEE Trans. Signal processing, Vol. 40, No. 12, December 92, pp. 3001-3011.
- [9] G. Thomas, *A Positive Optimal deconvolution Procedure*, proceedings of IEEE ICASSP 83, Boston, USA, April 1983, pp 651-654.

