

Performances statistiques d’algorithmes d’estimation de DOA en présence de sources temporellement corrélées

Jean Pierre DELMAS, Yann MEURISSE

Département Signal et Image,
Institut National des Télécommunications, 9 rue Charles Fourier, 91011 Evry Cedex
delmas@int-evry.fr, meurisse@int-evry.fr

Résumé – Cet article est consacré aux performances asymptotiques d’algorithmes haute résolution, du second ordre, utilisés en imagerie d’antenne bande étroite lorsque la traditionnelle hypothèse d’indépendance des snapshots successifs n’est pas valide. Nous établissons que le résultat classique de normalité asymptotique reste vrai pour une grande classe de modèles de corrélation temporelle de sources et pour la plupart des algorithmes d’imagerie d’antenne haute résolution. Nous montrons que la matrice de covariance asymptotique des angles estimés ne dépend pas de la distribution et du modèle de corrélation temporelle des sources pour la plupart de ces algorithmes classiques. Par contre, nous montrons que les techniques de Toeplitzation et d’augmentation y sont très sensibles.

Abstract – This paper is focused on the asymptotic performance analysis of direction of arrival (DOA) finding algorithms when the classical assumption of independence of the snapshots is not valid. It is established that the classical asymptotic normality results remain valid for a wide class of statistical models for temporally correlated source signals for most high-resolution covariance-based DOA estimators. Hence, under mild assumptions, closed-form expressions of the asymptotic covariance matrices of these DOA estimators do not vary with the dependence model of the source signals. On the other hand, for uniform linear or rectangular array, it is shown that the Toeplitzation and the augmentation techniques are very sensitive to this independence assumption.

1 Introduction

Motivé par la popularité des algorithmes du second ordre d’estimation de directions d’arrivée (DOA), de nombreux articles ont été consacrés à l’étude de leurs performances statistiques asymptotiques. Parmi eux, Sharman *et al.* [1] présentèrent une analyse préliminaire de l’algorithme MUSIC, Kaveh et Barabell [2] firent une analyse asymptotique des algorithmes MUSIC et Min Norm, Stoica et Nehorai [3] connectèrent ces performances à la borne de Cramer-Rao et Pillai et Kwon [4] étendirent ces résultats à des sources spatialement corrélées ou cohérentes. Enfin, Cardoso et Moulines [5] montrèrent que ces propriétés asymptotiques ne dépendent pas de la loi de probabilité des sources. Toutes ces contributions s’appuient sur l’hypothèse d’indépendance des snapshots successifs. Cette hypothèse est justifiée lorsque ces méthodes reposent sur la matrice interspectrale empirique obtenue en moyennant n périodogrammes successifs $\mathbf{x}_k(f)\mathbf{x}_k^H(f)$ avec

$$\mathbf{x}_k(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{x}_{kL+l} e^{-i2\pi lf}, k = 1, \dots, n,$$

où \mathbf{x}_t représente le signal observé au temps t , car les snapshots $\mathbf{x}_k(f)$ sont asymptotiquement indépendants et gaussiens centrés circulaires lorsque $L \rightarrow \infty$ [7, théorème 7.2.5]. Par contre, lorsque ces algorithmes reposent sur la matrice de covariance spatiale estimée par moyennage de n dyadics temporels successifs $\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^H$, cette traditionnelle hypothèse d’indépendance n’est plus justifiée. Or cette situation est fréquemment rencontrée dans les applications

en radar passif et en télécommunication. Il est donc important de déterminer dans quelle mesure, les performances de ces algorithmes sont affectées par cette hypothèse de non indépendance.

Le but de cette contribution est d’étudier les performances des algorithmes d’estimation de DOA en présence de sources corrélées temporellement. Notre analyse inclut le cas général de sources non gaussiennes et corrélées spatialement. Sous les hypothèses classiques d’indépendance et de distribution gaussienne des snapshots, les analyses de performances reposent sur des calculs de perturbation induits par la loi de Wishart complexe de la matrice de covariance spatiale empirique $\mathbf{R}_x(n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^H$ ou sur un théorème de continuité (voir par exemple [8, théorème, p. 122]) exploitant la loi asymptotique gaussienne de $\mathbf{R}_x(n)$ issue du théorème central limite classique. Avec nos hypothèses, nous adopterons l’approche fonctionnelle de [6] dans laquelle les lois asymptotiques gaussiennes des diverses estimées de DOA sont déduites de la distribution asymptotique gaussienne de $\mathbf{R}_x(n)$ pour différents modèles de corrélation temporelle de sources. Cela nous permet de donner des expressions analytiques des matrices de covariance asymptotique de la plupart des algorithmes du second ordre de DOA dans ces diverses conditions.

Après avoir introduit les notations classiques de l’imagerie d’antenne bande étroite et précisé le modèle de corrélation temporelle de sources, un théorème central limite portant sur $\mathbf{R}_x(n)$ est donné. Nous en déduisons par une

approche fonctionnelle, la gaussianité asymptotique de la plupart des estimées au second ordre de DOA. Le cas de réseaux d'antennes présentant un centre de symétrie et de réseaux linéaires ou plans réguliers utilisant les techniques de "Toeplitzation" et d'"augmentation" sont considérés. Enfin des résultats de simulation examinent les paramètres qui influencent les performances statistiques de ces techniques et montrent que notre analyse asymptotique est valide pour de faibles nombres d'observations et de faibles valeurs de SNR.

2 Matrice de covariance spatiale

Considérons un réseau d'antennes composé de M capteurs recevant K sources stationnaires centrées de moment d'ordre 4 fini. Avec les hypothèses classiques d'imagerie d'antenne bande étroite, l'observation est :

$$(\mathbf{x}_t)_{t=1,\dots,n} = \sum_{k=1}^K u_{t,k} \mathbf{e}(\Theta_k) + \mathbf{v}_t,$$

de matrice de covariance spatiale $\mathbf{R}_x = \mathbf{E}(\Theta) \mathbf{R}_u \mathbf{E}^H(\Theta) + \sigma_v^2 \mathbf{C}$, où \mathbf{R}_u et $\sigma_v^2 \mathbf{C}$ désignent respectivement les matrices de covariance spatiale des sources et du bruit. Nous considérons deux modèles de corrélation temporelle de sources :

1) $u_{t,k}$ est ARMA centré, la matrice interspectrale des K sources est $\mathbf{S}_u(f)$ et leur matrice des cumulants d'ordre quatre \mathbf{Q}_u est définie par

$$[\mathbf{Q}_u]_{i+K(j-1), k+K(l-1)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{-1/2}^{+1/2} \rho_{i,j,l,k}(f, f', -f') df df'$$

où $\rho_{k_1, k_2, k_3, k_4}(f, f', f'')$ désigne le polyspectre :

$$\sum_{\tau, \tau', \tau''} \text{Cum}(u_{0, k_1}, u_{\tau, k_2}^*, u_{\tau', k_3}, u_{\tau'', k_4}^*) e^{i2\pi(f\tau + f'\tau' + f''\tau'')}.$$

2) $u_{t,k} = \sum_{l=1}^{L_k} a_{k,l} e^{i\alpha_{k,l}} e^{i2\pi f_{k,l} t}$ où $(f_{k,l})_{k=1,\dots,K, l=1,\dots,L_k}$ sont fixées et *distinctes* dans $]-1/2, +1/2[$, $a_{k,l}$ sont des réels fixes positifs et $\alpha_{k,l}$ sont des v.a. uniformément distribués dans $[0, 2\pi]$ et indépendantes entre elles. Avec ces modèles, le théorème suivant est établi :

Théorème 1 $\sqrt{n} (\text{Vec}(\mathbf{R}_x(n)) - \text{Vec}(\mathbf{R}_x))$ converge en loi vers une loi gaussienne complexe non circulaire centrée de matrice de covariance \mathbf{C}_{R_x} :^{1 2 3}

$$\sqrt{n} (\text{Vec}(\mathbf{R}_x(n)) - \text{Vec}(\mathbf{R}_x)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{R_x}, \mathbf{C}_{R_x} \mathbf{K}).$$

1. \mathbf{K} désigne la matrice de permutation qui transforme $\text{Vec}(\mathbf{A})$ en $\text{Vec}(\mathbf{A}^T)$ pour toute matrice carré \mathbf{A} et $\mathbf{A} \otimes_c \mathbf{B}$ représente le produit de Kronecker $b_{i,j}^* \mathbf{A}$.

2. Nous rappelons qu'une v.a. p -dimensionnelle \mathbf{z} centrée complexe a une distribution Gaussienne non circulaire caractérisée par par une matrice $p \times p$ définie positive Σ_1 et une matrice complexe symétrique Σ_2 , notée $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_1, \Sigma_2)$, si la v.a. réelle $2p$ -dimensionnelle associée est une v.a. Gaussienne scalaire, c'est à dire si pour tout p -vecteur complexe \mathbf{w} , la v.a. réelle $\mathbf{w}^H \mathbf{z} + (\mathbf{w}^H \mathbf{z})^H$ a une distribution gaussienne centrée de variance $2\mathbf{w}^H \Sigma_1 \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \Sigma_2 \mathbf{w}^* + \mathbf{w}^T \Sigma_2^* \mathbf{w}$ où $\mathbf{E}(\mathbf{z}\mathbf{z}^H) = \Sigma_1$ et $\mathbf{E}(\mathbf{z}\mathbf{z}^T) = \Sigma_2$.

3. $\text{Cov}(\text{Vec}(\mathbf{R}_x(n)))$ désigne $\mathbf{E}(\text{Vec}(\mathbf{R}_x(n) - \mathbf{R}_x) \text{Vec}^H(\mathbf{R}_x(n) - \mathbf{R}_x))$ et puisque $\mathbf{E}(\text{Vec}(\mathbf{R}_x(n) - \mathbf{R}_x) \text{Vec}^T(\mathbf{R}_x(n) - \mathbf{R}_x)) = \mathbf{E}(\text{Vec}(\mathbf{R}_x(n) - \mathbf{R}_x) \text{Vec}^H(\mathbf{R}_x(n) - \mathbf{R}_x)) \mathbf{K}$, la loi gaussienne complexe non circulaire de $\text{Vec}(\mathbf{R}_x(n))$ est caractérisée par \mathbf{C}_{R_x} seulement.

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Cov}(\text{Vec}(\mathbf{R}_x(n))) = \mathbf{C}_{R_x}$$

où \mathbf{C}_{R_x} s'écrit :

$$\begin{aligned} & \epsilon (\mathbf{E}(\Theta) \otimes_c \mathbf{E}(\Theta)) \left(\int_{-1/2}^{+1/2} \mathbf{S}_u(f) \otimes_c \mathbf{S}_u(f) df + \mathbf{Q}_u \right) \\ & (\mathbf{E}^H(\Theta) \otimes_c \mathbf{E}^H(\Theta)) + \sigma_v^4 \mathbf{C} \otimes_c \mathbf{C} + \\ & (\mathbf{E}(\Theta) \mathbf{R}_u \mathbf{E}^H(\Theta) \otimes_c \sigma_v^2 \mathbf{C}) + (\sigma_v^2 \mathbf{C} \otimes_c \mathbf{E}(\Theta) \mathbf{R}_u \mathbf{E}^H(\Theta)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

avec $\epsilon = 1$ dans le cas de signaux sources ARMA et $\epsilon = 0$ dans le cas de signaux sources harmoniques.

Indication de preuve (par manque de place) : Dans le cas ARMA, la démonstration repose sur une adaptation de résultats classiques (ex [9, corollaire 2 du théorème 3, chap. 3]) et dans le cas harmonique, ce théorème est directement issu de la vérification de la condition de Lyapounov [10, p. 371] portant sur un théorème central limite associé à une somme de v.a. indépendantes non uniformément distribuées. Notons que ce théorème exclut des fréquences égales $f_{k,l}$ dans deux directions différentes.

Alors que $\mathbf{R}_x(n)$ est très sensible à la distribution et au modèle de corrélation temporelle des sources ($\mathbf{R}_x(n)$ est non bornée à puissances de sources ARMA imposées), nous montrons dans la section suivante que les estimées $\Theta(n)$ n'y sont en général pas sensibles.

3 Distribution asymptotiques des estimées de DOA

3.1 Approche fonctionnelle

Nous adoptons une analyse fonctionnelle [6] qui consiste à considérer tout algorithme du second ordre d'estimation de DOA comme une relation fonctionnelle $\Theta(n) = \text{alg}(\mathbf{R}_x(n))$. Comme $\Theta = \text{alg}(\mathbf{R}_x)$, ces algorithmes $\text{alg}(\cdot)$ constituent diverses extensions de l'application $\mathbf{R}_x \rightarrow \Theta$ générées par $\mathbf{R}_x(n)$. Nous allons considérer des algorithmes tels que la fonctionnelle $\text{alg}(\cdot)$ est différentiable dans un voisinage de \mathbf{R}_x (dont $\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}}$ représente la matrice de la différentielle associée au point \mathbf{R}_x)

$$\text{alg}(\mathbf{R}_x + \delta \mathbf{R}) = \Theta + \mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}} \text{Vec}(\delta \mathbf{R}) + o(\delta \mathbf{R}) \quad (3.1)$$

et vérifiant l'une des deux conditions suivantes. Pour tout Θ et pour toute matrice définie positive \mathbf{R}_u (condition 1) ou pour tout Θ et pour toute matrice diagonale définie positive \mathbf{R}_u (condition 2) :

$$\text{alg}(\mathbf{E}(\Theta) \mathbf{R}_u \mathbf{E}^H(\Theta) + \sigma_v^2 \mathbf{C}) = \Theta. \quad (3.2)$$

La condition 1 est vérifiée par la plupart des algorithmes qui s'appliquent à des sources spatialement corrélées ou non (MUSIC, ESPRIT, TAM...), tandis que la condition 2, plus faible ne s'applique qu'aux algorithmes qui exigent des sources spatialement non corrélées. Grâce à la différentiabilité de l'application $\text{alg}(\cdot)$ (3.1), il est immédiat de montrer que ces conditions 1 et 2 (3.2) impliquent les contraintes respectives suivantes sur $\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}}$:

$$\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}} (\mathbf{E}(\Theta) \otimes_c \mathbf{E}(\Theta)) = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}} (\mathbf{e}(\Theta_k) \otimes_c \mathbf{e}(\Theta_k)) = \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (3.4)$$

3.2 Antenne de géométrie quelconque

La première contrainte (3.3) nous permet de démontrer en utilisant un théorème classique de continuité (ex [8, théorème, p. 122]) appliqué à $\text{alg}(\mathbf{R}_x(n))$, le théorème suivant qui généralise un résultat présenté dans [5].

Théorème 2 *Pour des sources gaussiennes ou non gaussiennes, ARMA ou harmoniques, les estimées des algorithmes de DOA du second ordre qui n'exigent pas des sources spatialement non corrélées sont asymptotiquement gaussiennes :*

$$\sqrt{n} (\Theta(n) - \Theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_\Theta) \quad (3.5)$$

avec \mathbf{C}_Θ donné par

$$\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}} (\mathbf{E}(\Theta) \mathbf{R}_u \mathbf{E}^H(\Theta) \otimes_c \sigma_v^2 \mathbf{C} + \sigma_v^2 \mathbf{C} \otimes_c \mathbf{E}(\Theta) \mathbf{R}_u \mathbf{E}^H(\Theta) + \sigma_v^4 \mathbf{C} \otimes_c \mathbf{C}) \left(\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}} \right)^H \quad (3.6)$$

3.3 Antenne de géométrie particulière

Nous étudions ici la sensibilité des algorithmes du second ordre d'estimation de DOA à diverses transformations notée $\text{trans}(\cdot)$ de $\mathbf{R}_x(n)$ appropriées à des géométries d'antenne particulières. En considérant l'application composée $\text{alg}[\text{trans}(\cdot)]$ des applications $\text{alg}(\cdot)$ et $\text{trans}(\cdot)$ comme un nouvel algorithme $\text{alg}^{\text{trans}}(\cdot)$, nous établissons les résultats suivants.

- Pour les antennes centrosymétriques avec \mathbf{C} centrosymétrique, l'application $\text{alg}^{\text{ch}}(\cdot) = \text{alg}[\text{ch}(\cdot)]$ (où $\text{ch}(\cdot)$ désigne le moyennage centrosymétrique appliqué à $\mathbf{R}_x(n)$) vérifie la condition 1 de la section 3.1. Par suite le théorème 2 s'applique pour ces algorithmes $\text{alg}^{\text{ch}}(\cdot)$ avec

$$\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}^{\text{ch}}} = \mathbf{D}_{\Theta, \text{ch}(\mathbf{R}_x)}^{\text{alg}} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{I} + (\mathbf{J} \otimes_c \mathbf{J}) \mathbf{K}) \right)$$

$$\text{où } \text{ch}(\mathbf{R}_x) = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_x + \mathbf{J} \mathbf{R}_x^* \mathbf{J}).$$

- Pour les réseaux d'antennes linéaires ou rectangulaires réguliers avec $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ et des sources spatialement non corrélées, l'application $\text{alg}^{\text{to}}(\cdot) = \text{alg}[\text{to}(\cdot)]$ (où $\text{to}(\cdot)$ désigne la Toeplitzation ou block Toeplitzation de $\mathbf{R}_x(n)$) vérifie la condition 2 mais pas la condition 1 de la section 3.1. Par suite, le théorème 2 ne peut plus s'appliquer. (3.5) subsiste mais \mathbf{C}_Θ est maintenant sensible à la distribution et à la corrélation temporelle des sources. Par application du théorème de continuité (ex [8, théorème, p. 122]) appliqué à $\text{alg}[\text{to}(\mathbf{R}_x(n))]$:

$$\mathbf{C}_\Theta = \mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}} \mathbf{A}_{\text{to}} \mathbf{C}_{R_x} \mathbf{A}_{\text{to}} \left(\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}} \right)^H, \quad (3.7)$$

où \mathbf{A}_{to} désigne la matrice de projection de Toeplitzation ($\text{Vec}(\text{to}(\mathbf{R}_x(n))) = \mathbf{A}_{\text{to}} \text{Vec}(\mathbf{R}_x(n))$). En examinant la structure de (3.7), nous pouvons démontrer les résultats suivants :

- La Toeplitzation n'est pas sensible à la distribution des sources lorsque les sources sont indépendantes.

- La Toeplitzation n'est insensible à la corrélation temporelle des sources que dans le cas d'une source. Dans le cas de plusieurs sources, nous pouvons démontrer que le phénomène de "saturation" observé dans [11] pour des sources blanches s'atténue progressivement lorsque leurs spectres se recouvrent de moins en moins et disparaît lorsque leurs spectres sont disjoints. De plus, dans ce dernier cas, \mathbf{C}_Θ a la même expression pour des sources ARMA ou harmoniques.

- Pour les réseaux d'antennes lacunaires linéaires ou plans, les techniques d'augmentation classiques [12] ne vérifient aucune des conditions 1 et 2 de la section 3.1 car $\text{alg}^{\text{au}}(\cdot)$ n'est pas définie sur $\mathbf{R}_x(n)$ mais sur certains de ses termes seulement. (3.5) subsiste et là aussi \mathbf{C}_Θ est sensible à la distribution et à la corrélation temporelle des sources :

$$\mathbf{C}_\Theta = \mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}} \mathbf{A}_{\text{au}} \mathbf{C}_{R_x} \mathbf{A}_{\text{au}} \left(\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_x}^{\text{alg}} \right)^H,$$

où \mathbf{R}_x désigne la matrice de covariance spatiale du réseau complet et où \mathbf{A}_{au} est la matrice de l'opérateur d'augmentation ($\text{Vec}(\text{au}(\mathbf{R}_x(n))) = \mathbf{A}_{\text{au}} \text{Vec}(\mathbf{R}_x(n))$). Les simulations montrent ci dessous que ces techniques sont peu sensibles à la distribution et très sensible à la corrélation temporelle des sources.

4 Simulations

Nous considérons un scénario à deux sources de même puissance σ^2 , le rapport SNR est défini par $\frac{2\sigma^2}{\sigma_v^2}$, les DOA sont estimées par l'algorithme MUSIC et le nombre des réalisations de Monte Carlo est de 500. Les sources ARMA sont générées par un filtre de Butterworth (10.10) excité par un signal blanc gaussien. Ces simulations attestent l'adéquation de notre analyse asymptotique pour de faible nombre d'observations et de valeurs de SNR (ex $n = 100$ pour $SNR = 5dB$). Elles montrent que le paramètre essentiel de corrélation temporelle des sources auquel les techniques de Toeplitzation et d'augmentation sont sensibles est le recouvrement spectral des différentes sources. Cette sensibilité étant par ailleurs fonction du nombre de capteurs.

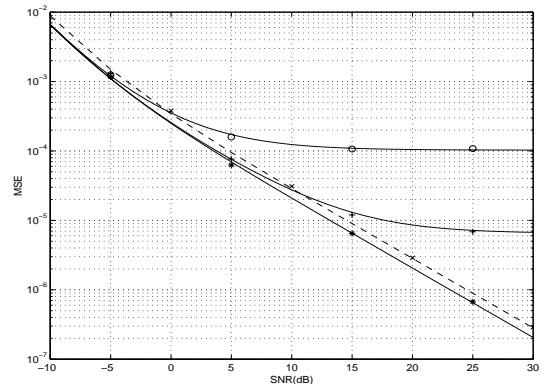


Fig.1 MSE théorique et estimée de $\theta_k(n)$ en fonction du SNR, pour respectivement des signaux blancs (\circ), colorés ARMA ($+$) et harmoniques ($*$) pour un réseau linéaire régulier de

10 capteurs, $n = 100$ avec Toeplitzation (—) et Toeplitzation (- - -).

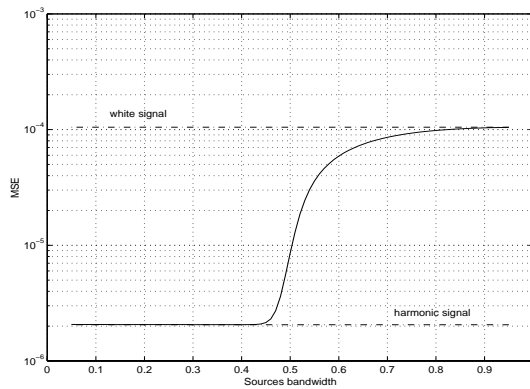


Fig.2 MSE théorique et estimée de $\theta_k(n)$ en fonction de la largeur de bande de signaux ARMA centrés sur $\pm 0,25$ pour un réseau linéaire régulier de 10 capteurs, $SNR = 20dB$ après Toeplitzation.

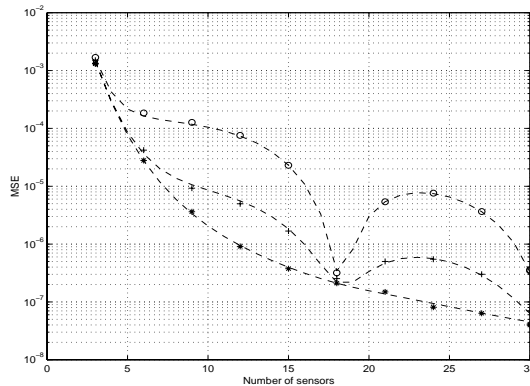


Fig.3 MSE théorique et estimée de $\theta_k(n)$ en fonction du nombre de capteurs pour un réseau linéaire régulier, $SNR = 20dB$, $n = 100$ pour des signaux blancs (o), colorés ARMA (+) et harmoniques (*) après Toeplitzation.

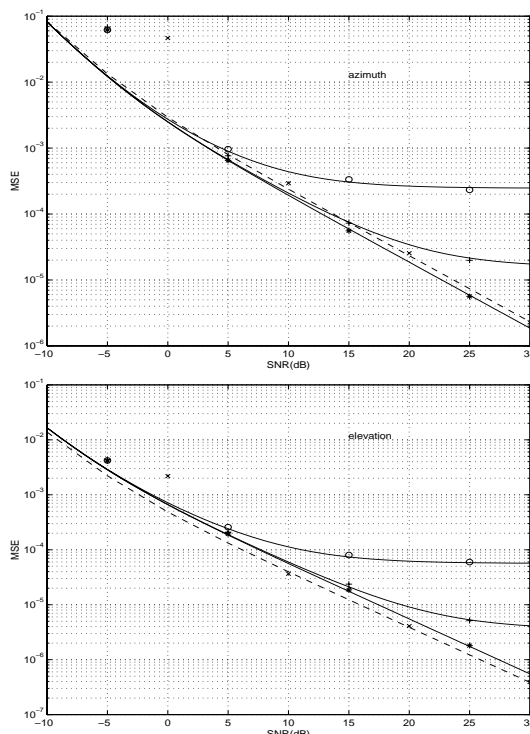


Fig.4 MSE théorique et estimée des azimuth et élévation $\theta_k(n)$ et $\phi_k(n)$ en fonction du SNR, pour des signaux respectivement blancs (de distribution soit gaussienne soit de Bernoulli) (o), colorés ARMA (+) et harmoniques (*) pour un réseau Greene et Wood de 12 capteurs [13], pour $n = 100$, utilisant la technique d'augmentation (—) ou non (- - -).

Références

- [1] K. Sharman, T.S. Durrani, M. Wax and T. Kailath, "Asymptotic performance of eigenstructure spectral analysis methods," in *Proc. ICASSP, San Diego*, pp. 45.5.1-45.5.4, March 1984.
- [2] M. Kaveh, A.J. Barabell, "The statistical performance of the MUSIC and the Minimum-Norm algorithms in resolving plane-waves in noise," *IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Processing*, vol. 34, no. 2, pp. 331-340, April 1986.
- [3] P. Stoica, A. Nehorai, "MUSIC, Maximum likelihood, and Cramer-Rao Bound," *IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Processing*, vol. 37, no. 5, pp. 720-741, May 1989.
- [4] S.U. Pillai, B.H. Kwon, "Performance analysis of MUSIC-type high resolution estimators for direction finding in correlated and coherent scenes," *IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Processing*, vol. 37, no. 8, pp. 1176-1189, Aug. 1989.
- [5] J.F. Cardoso, E. Moulines, "A robustness property of DOA estimators based on covariance," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 11, pp. 3285-3287, Nov. 1994.
- [6] J.F. Cardoso, E. Moulines, "Asymptotic performance analysis of direction-finding algorithms based on fourth-order cumulants," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no. 1, pp. 214-224, Jan. 1995.
- [7] D.R. Brillinger, *Times series, data analysis and theory*, Expanded Edition, Holden-Day, Inc., 1980.
- [8] R.J. Serfling, *Approximation theorems of mathematical statistics*, John Wiley and Sons, 1980.
- [9] M. Rosenblatt, *Stationary sequences and random fields*, Birkhäuser, 1985.
- [10] P. Billingsley, *Probability and measure*, Second Edition, John Wiley and Sons, 1986.
- [11] A. Gorokhov, Y. Abramovich and J.F. Böhme, "Unified analysis of DOA estimation algorithms for covariance matrix transforms," *Signal Processing*, Vol. 55, pp. 107-115, 1996.
- [12] S.U. Pillai, F. Haber, "Statistical analysis of a high resolution spatial spectrum estimator utilizing an augmented covariance matrix," *IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Processing*, vol. 35, no. 11, pp. 1517-1523, Nov. 1987.
- [13] C.R. Greene, R.C. Wood, "Sparse array performance," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 63, pp. 1866-1872, 1978.