

# Modélisation par processus ponctuels cascades pour la restauration d'images

Guillaume Stawinski<sup>(1)</sup> et Patrick Duvaut<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup>LETI (CEA - Technologies Avancées) CEA SACLAY DEIN/SPE B451  
91191 Gif sur Yvette FRANCE  
Email : stawinski@serin.cea.fr

<sup>(2)</sup>ETIS UCP- ENSEA URA CNRS 2235  
95014 Cergy Pontoise FRANCE

## RÉSUMÉ

Dans cette communication, nous présentons un nouvel algorithme pour la déconvolution en imagerie Gamma. Celui-ci repose sur une nouvelle modélisation d'une caméra Gamma par processus ponctuels cascades. Cette modélisation permet de tenir compte de l'intensificateur d'images, qui est un des éléments d'une caméra Gamma dégradant le plus fortement le rapport signal sur bruit. Ce modèle permet ensuite de développer deux algorithmes de type EM : la version classique de l'EM et sa version SAGE, qui assure une convergence plus rapide. Notre nouveau modèle et le modèle classique sont ensuite comparés et testés avec des algorithmes EM de type SAGE sur des images synthétiques et réelles composées de sources radioactives.

## ABSTRACT

In this paper, we introduce a new algorithm to solve the problem of deconvolution in Gamma Imaging. This method is based on a more accurate model of a Gamma camera, which uses cascaded point processes to model the statistical fluctuations of the image intensifier. This new model is used to develop two EM type algorithms : the basic one and the SAGE EM algorithm, whose convergence rate is better. The basic model and the new model are compared and tested with SAGE algorithms on synthetic and real data.

## 1 Modélisation par processus ponctuels cascades

Dans de nombreux domaines, les caméras gammas sont utilisées pour détecter et compter le nombre de photons gammas en différents points de l'espace. Actuellement, pour représenter les transformations statistiques subies par les photons gammas dans la caméra, on utilise le modèle classique suivant

$$y_n \sim \text{Poisson} \left( \sum_k h_{n,k} \lambda_k \right) \quad (1)$$

où  $y_n$  représente l'observation au pixel  $n$ ,  $h_{n,k}$  les coefficients de la réponse impulsionnelle, et  $\lambda_k$  le taux de photons Gammas émis au pixel  $k$ , que l'on veut estimer. Ce modèle traduit physiquement une convolution, et la statistique naturelle du rayonnement suit une loi de Poisson. De nombreux articles utilisent ce modèle avec un algorithme EM pour résoudre le problème de déconvolution [1][2][4].

Si ce modèle a le mérite d'être relativement simple, il ne tient cependant pas compte de nombreuses transformations statistiques des particules dans la caméra, et il est légitime de penser qu'une modélisation plus précise donnera de meilleurs résultats. Afin d'obtenir cette modélisation, présentons de façon sommaire les différentes étapes de la formation d'un signal dans une caméra Gamma.

Parmi les éléments d'une caméra Gamma, nous distinguons le collimateur et le détecteur Gamma. Le collimateur met en forme le flux de photons Gamma pour former une image et le détecteur Gamma enregistre cette image.

Le collimateur joue dans une caméra Gamma le même rôle que l'objectif dans le système d'imagerie optique, car il n'existe pas de matériau réfringent pour les rayonnements  $X$  ou  $\gamma$ . Le collimateur n'a qu'un effet spatial convolutif sur les données.

Le détecteur Gamma se compose d'un scintillateur, d'un intensificateur d'images et d'une matrice CCD. Le scintillateur a pour but de convertir le flux de photons Gamma en photons visibles de luminescence. L'intensificateur d'images est souvent composé de galettes de micro-canaux. Celles-ci multiplient les électrons et permettent de détecter le signal en l'amplifiant. Il comporte en outre une photocathode à l'entrée, qui convertit les photons de luminescence en électrons, et un écran lumiphore à la sortie qui convertit les électrons, accélérés par une haute tension, en photons visibles. Enfin, la matrice CCD permet la lecture du signal.

Des études expérimentales [3] montrent qu'un des éléments dégradant le plus le rapport signal sur bruit est l'intensificateur d'images. C'est pourquoi, il apparaît nécessaire d'en modéliser les fluctuations statistiques et de les incorporer dans notre modèle (1) afin de restaurer l'image.

Prescott [8] a montré que si l'on injecte un seul électron à la sortie de la photocathode de l'intensificateur, le nombre d'électrons observés à la sortie de l'intensificateur, suit une loi exponentielle qui a pour paramètre le gain de l'intensificateur  $g$ . De plus, le nombre d'électrons sortant de la photocathode de l'intensificateur suit une loi de Poisson. Le modèle par processus ponctuels cascades s'impose alors

$$x_n \sim \text{Poisson} \left( \sum_k h_{n,k} \lambda_k \right) \quad (2)$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{x_n} G_i \quad (3)$$

où les  $(G_i)$  sont des variables aléatoires identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre  $g$ , et  $x_n$  le nombre d'électrons sortant de la photocathode de l'intensificateur.

Nous avons établi qu'en fait, ce modèle est très proche du modèle établi par Saleh [7] pour un photomultiplicateur. En effet, considérons la variable aléatoire  $(y_n)_{n \in N}$ . Si l'on calcule sa transformée de Poisson Mandel [5][6], alors, en faisant tendre le gain de l'intensificateur vers l'infini, on retrouve le fait que la transformée de Poisson de  $(y_n)_{n \in N}$  suit un processus de Galton Watson avec une population de Poisson initiale, ce qui correspond au modèle de Saleh [7] pour un photomultiplicateur.

Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter l'algorithme EM correspondant à ce nouveau modèle.

## 2 L'Algorithme EM

Rappelons que nous cherchons à estimer le taux de photons Gamma  $\lambda_k$  émis au pixel  $k$  pour tout  $k$ . On note  $\lambda = \{\lambda_k; k = 1, \dots, N\}$  ces différents taux et  $Y = \{y_k; k = 1, \dots, N\}$ , les observations. On cherche à estimer  $\lambda$  au sens du maximum de vraisemblance :

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} p(Y|\lambda) \quad (4)$$

Une maximisation directe de cette fonction est très complexe. C'est pourquoi nous utilisons des algorithmes basés sur l'introduction de données manquantes : l'algorithme EM classique et une version SAGE (Space Alternating Generalized Expectation) [4]. Ces algorithmes alternent des étapes de calculs d'espérances et des maximisations. Ces algorithmes convergent vers un maximum local. En pratique, on estime en fait un estimateur du maximum de vraisemblance pénalisé par un terme quadratique, ce terme étant affecté d'un coefficient de régularisation  $\beta$  [4]. Afin d'alléger quelque peu les équations, nous ne présenterons dans les équations suivantes que l'estimation du maximum de vraisemblance.

### 2.1 Version EM classique

Soit  $N_{nk}$  le nombre de photons gammas émis par le  $k^{\text{ème}}$  pixel arrivant sur le  $n^{\text{ème}}$  pixel de la photocathode de l'intensificateur. Ces variables suivent la loi

$$N_{nk} \sim \text{Poisson}(h_{n,k} \lambda_k) \quad (5)$$

où les  $h_{n,k}$  sont les coefficients de la réponse impulsionnelle caractérisant le système. On prend alors pour espace de données complètes :

$$E^1 = \{ \{N_{nk}\}_{k=1}^N \}_{n=1}^N \quad (6)$$

L'espace des données complètes étant défini, l'étape  $E$ , consiste principalement à calculer  $E(X_n/Y, \lambda^{(p)})$ , ( $\lambda^{(p)}$  désignent les valeurs des différents pixels estimées après  $p$  itérations), pour en déduire  $E(N_{nk}/Y, \lambda^{(p)})$ . Il vient :

$$E(X_n/Y, \lambda^{(p)}) = \sqrt{K_n} \frac{I_0(2\sqrt{K_n})}{I_1(2\sqrt{K_n})} \quad (7)$$

$$E(N_{nk}/Y, \lambda^{(p)}) = \frac{h_{n,k} \lambda_k^{(p)}}{\sum_k h_{n,k} \lambda_k^{(p)}} E(X_n/Y, \lambda^{(p)}) \quad (8)$$

où  $I_n(x)$  désigne les fonctions de Bessel modifiées d'ordre  $n$ , et avec  $K_n = \frac{y_n}{g} \times \sum_k h_{n,k} \lambda_k^{(p)}$ . La fonction à maximiser par rapport à  $\lambda$  s'écrit alors

$$Q(\lambda, \lambda^{(p)}) = E(\log f(X^1, Y, \lambda)/Y, \lambda^{(p)}) \quad (9)$$

$$Q(\lambda, \lambda^{(p)}) = \sum_k \sum_n (-h_{n,k} \lambda_k + h_{n,k} \frac{y_n}{g} \frac{\lambda_k^{(p)}}{\sqrt{K_n}} \frac{I_0(2\sqrt{K_n})}{I_1(2\sqrt{K_n})} \ln(\lambda_k)) + Cte \quad (10)$$

soit, si l'on pose

$$\varepsilon_k(\lambda^{(p)}) = \sum_n h_{n,k} \frac{y_n}{g} \frac{1}{\sqrt{K_n}} \frac{I_0(2\sqrt{K_n})}{I_1(2\sqrt{K_n})} \quad (11)$$

$$Q(\lambda, \lambda^{(p)}) = \sum_k \left( -\sum_n h_{n,k} \lambda_k + \varepsilon_k(\lambda^{(p)}) \lambda_k^{(p)} \ln(\lambda_k) \right) + Cte \quad (12)$$

L'étape de maximisation est alors directe. Elle consiste simplement à maximiser (10) par rapport à  $\lambda$ . Cette maximisation peut se faire de manière analytique, et l'on obtient

$$\lambda_k^{(p+1)} = \frac{\lambda_k^{(p)}}{\sum_n h_{n,k}} \varepsilon_k(\lambda^{(p)}) \quad (13)$$

### 2.2 Version SAGE

La différence principale entre le SAGE et l'EM est que l'on modifie les valeurs des pixels une à une et non pas simultanément. La raison principale de mettre à jour les valeurs des pixels un à un, est que l'on peut considérer une suite d'espaces de données complets différents selon le pixel considéré. Ces espaces de données complètes différents permettront de mieux quantifier la contribution des autres pixels pour l'itération d'un pixel donné. Les espaces de données complètes sont donc moins informatifs pour la version SAGE, ce qui assure une convergence théorique asymptotique plus rapide. Ceci est vérifié en pratique.

Définissons donc le nouvel espace de données complètes, que l'on va considérer. Pour se faire, plaçons nous à l'itération  $p$  de l'algorithme et au pixel  $k$ . Introduisons les variables aléatoires suivantes :

$$Z_{nk}^{(p)} \sim \text{Poisson} \left\{ h_{n,k} \left( \lambda_k + z_k^{(p)} \right) \right\} \quad (14)$$

$$B_{nk}^{(p)} \sim \text{Poisson} \left\{ -h_{n,k} z_k^{(p)} + \sum_{j \neq k} h_{n,j} \lambda_j^{(p)} \right\} \quad (15)$$

où les  $z_k^{(p)}$  sont des paramètres positifs vérifiant :

$$h_{n,k} z_k^{(p)} \leq \sum_{j \neq k} h_{n,j} \lambda_j^{(p)} \quad (16)$$

(16) provient du fait que le paramètre de la loi de Poisson dans (15) ne doit pas être négatif. On choisit [4] :

$$z_k^{(p)} = \min_{n: h_{nk} \neq 0} \left\{ \left( \sum_{j \neq k} h_{n,j} \lambda_j^{(p)} \right) / h_{n,k} \right\} \quad (17)$$

Notre nouvel espace de données complètes est donc

$$E_k^{(p)} \sim \left\{ Z_{nk}^{(p)}, B_{nk}^{(p)} \right\}_{n=1}^N \quad (18)$$

Contrairement à l'algorithme correspondant à l'EM classique, l'espace de données complètes dépend du pixel  $k$  considéré.

En procédant de la même manière que pour l'EM classique, la fonction de maximisation s'écrit :

$$Q(\lambda_k, \lambda^{(p)}) = - \sum_n h_{n,k} (\lambda_k + z_k^{(p)}) + \varepsilon_k(\lambda^{(p)}) (\lambda_k^{(p)} + z_k^{(p)}) \ln (\lambda_k + z_k^{(p)}) \quad (19)$$

où  $\varepsilon_k(\lambda^{(p)})$  est défini comme précédemment.

La maximisation peut se faire également de manière analytique, en ajoutant la condition supplémentaire de non-négativité. Il vient

$$\lambda_k^{(p+1)} = \left[ \left( \lambda_k^{(p)} + z_k^{(p)} \right) \varepsilon_k(\lambda^{(p)}) / \sum_n h_{n,k} - z_k^{(p)} \right]_+ \quad (20)$$

où  $[a]_+ = \sup(a, 0)$ .

La version SAGE étant plus performante, nous ne présentons dans la partie suivante, que des résultats de simulation pour cette version.

### 3 Résultats obtenus

Nous avons appliqué la version SAGE de notre algorithme aux images d'une caméra portable Gamma développée par le CEA. Cette image représente deux sources de Cobalt proches l'une de l'autre. Ci-dessous, nous présentons l'image brute et l'image restaurée (voir figures). On constate que l'algorithme avec le modèle de l'intensificateur permet de séparer les deux sources, et d'augmenter ainsi la résolution de la caméra.

Nous avons ensuite comparé les performances de la version SAGE de l'algorithme EM correspondant au modèle classique (algorithme 2), et celle de l'algorithme correspondant à notre nouveau modèle (algorithme 1). Pour ce faire, nous avons généré des images synthétiques correspondant au modèle classique, et au modèle par processus ponctuels cascades. Les sources radioactives sont représentées dans ces images par des gaussiennes. Pour évaluer les performances des deux algorithmes, nous avons retenu deux critères principaux : le rapport signal à bruit (SNR) d'une part, la largeur à mi-hauteur de la gaussienne (FWHM) après restauration, d'autre part.

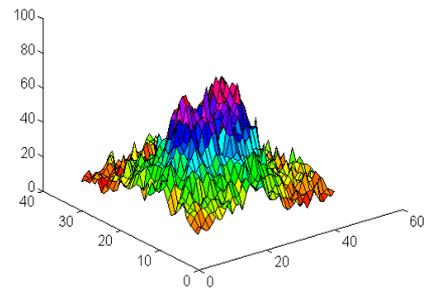


FIG. 1 — image brute

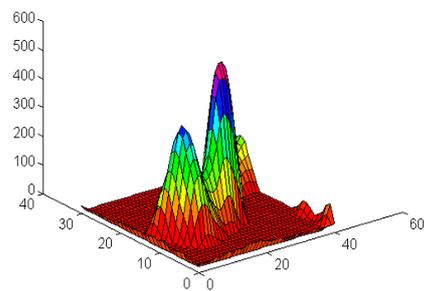


FIG. 2 — image restaurée

Tout d'abord, les résultats varient fortement en fonction de la réalisation de l'image synthétique, et du paramètre  $\beta$  de la pénalisation quadratique. Lorsque  $\beta$  augmente, plus le rapport signal à bruit augmente et en contrepartie moins la résolution est bonne. Ceci est illustré par les résultats du tableau 1, qui représentent l'évolution du rapport signal à bruit (SNR) et de la largeur à mi-hauteur par rapport au paramètre de régularisation  $\beta$ , après 40 itérations de l'algorithme 1.

Tableau 1

Critères \ $\beta$	$5.10^{-5}$	$5.10^{-6}$	$5.10^{-7}$
SNR (dB)	23,3	17,3	14,3
FWHM	11,8	8,8	8,6

Les tableaux 2 et 3 comparent les performances des deux algorithmes au point de vue résolution et rapport signal à bruit : le rapport signal à bruit est meilleur pour le nouveau modèle, tandis que la résolution de notre nouvel algorithme est un peu inférieure.

Tableau 2

SNR \ $\beta$	$5.10^{-5}$	$5.10^{-6}$	$5.10^{-7}$
Algorithme 1	23,3	17,3	14,3
Algorithme 2	21,6	16,3	12,7

Tableau 3

FWHM\β	$5.10^{-5}$	$5.10^{-6}$	$5.10^{-7}$
Algorithme 1	11,8	8,8	8,6
Algorithme 2	10,6	8,8	8,4

Enfin, on peut également signaler l'influence du nombre d'itérations : à partir d'un certain nombre d'itérations, le rapport signal à bruit et la résolution ne s'améliorent plus. Malheureusement, ce seuil est très variable et dépend de beaucoup de paramètres.

## 4 Conclusions et perspectives

Nous avons présenté une nouvelle modélisation par processus ponctuels cascades et avons développé une version SAGE de l'algorithme EM pour ce modèle. Cet algorithme fournit d'excellents résultats, ses performances sont meilleures pour le rapport signal à bruit que celles de l'algorithme correspondant au modèle classique avec toutefois une résolution légèrement inférieure. Il est vraisemblable qu'il est possible d'améliorer ces résultats en s'appuyant sur des méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov, car ces méthodes ont pour particularité de converger vers un maximum global, contrairement aux algorithmes EM qui ne convergent que vers un maximum local. Ceci fera l'objet d'une prochaine publication.

## 5 Remerciements

Les auteurs remercient Jean-Christophe Trama (CEA-LETI), Eric Barat (CEA-LETI), et plus particulièrement Arnaud Doucet (CEA-LETI) pour leur collaboration à ce papier.

## Références

- [1] L.A Shepp et Y.Vardi, "Maximum likelihood reconstruction for emission tomography", *IEEE Trans. Medical Imaging*, Vol MI.1, N° .2, pp.113-121, Oct. 1982.
- [2] K. Lange et R.Carson, "EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography", *J. Comp. Assis. Tomo.*, Vol. 8, N°2, pp. 306-316, Avr. 1984.
- [3] O. Gal, J.-C. Gaucher, C. Izac, F. Lainé, A. Nguyen, *Cartogam : dossier de motivation et d'orientation technique*, rapport interne du CEA/LETI/DEIN/SPE, 1995.
- [4] J.A Fessler et A.O Hero, "Space-Alternating generalized EM algorithms for penalized maximum likelihood image reconstruction", *Comm. and Sign.Proc. Lab.*, Dept of EECS, Univ. of Michigan, Ann Arbor, MI, Tech. Rep 286, Fév. 1994.
- [5] B.Saleh, *Photoelectron Statistics with application to Spectroscopy and Optical communication*, Springer-Verlag, 1978.

- [6] L.Mandel, "Fluctuations of photon beams : the distribution of the photoelectron", *Proc. Phys. Soc. (London)*, Vol. 74, pp. 233-243, 1959.
- [7] Matsuo, M. Teich et B. Saleh, "Poisson branching point processes", *J. Math. Phy.*, 25, (7), Juillet 1984, pp 2174-2185
- [8] J.R. Prescott, "A statistical model for photomultiplier single-electron statistics", *Nuclear Instrument and Methods*, 39 , 1966, pp. 173-179.