

# La haute résolution : sa réalité et ses limites

The high resolution concept: its reality and its limits



Christian DELHOTE

ONERA (Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales), 29, avenue de la Division-Leclerc, BP n° 72, 92322 CHÂTILLON CEDEX

Ingénieur de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, mon principal centre d'intérêt depuis 1978 comme chercheur à l'ONERA est le traitement du signal et son application au radar (problème de détection et d'estimation). Une attention plus particulière est portée à la modélisation paramétrique de signaux stationnaires et non stationnaires avec comme application : la reconnaissance de formes, le filtrage adaptatif (blanchiment), le traitement d'antennes et les méthodes d'analyse spectrale haute résolution.

## RÉSUMÉ

Depuis quelques années, des méthodes dites à « haute résolution » sont apparues en traitement de signal. Elles permettent de séparer des signaux que le traitement classique ne sépare pas. En analyse spectrale de signaux temporels, elles distinguent des sinusoides dont l'écart en fréquence est inférieur à la résolution classique obtenue par transformée de Fourier. Devant la diversité des méthodes existantes, il est apparu intéressant d'évaluer les limites théoriques absolues des performances en haute résolution. Pour cela, à l'aide des bornes de Cramer-Rao, les erreurs minimales d'estimation des fréquences sont calculées pour deux sinusoides. La formule littérale ainsi obtenue, permet d'évaluer l'influence des différents paramètres (rapport signal sur bruit, déphasage relatif). A partir des erreurs d'estimation, un critère intuitif de résolution est introduit, chiffrant les limites des gains en haute résolution. Ces résultats sont ensuite confrontés à trois méthodes d'analyse spectrale : deux sont fondées sur une modélisation autorégressive, la troisième sur le traitement adapté à deux sinusoides. Puis une généralisation de tous les calculs précédents est faite pour des formes de signaux quelconques ne correspondant pas forcément à des sinusoides.

## MOTS CLÉS

Haute résolution, analyse spectrale, bornes de Cramer-Rao, modèle autoregressif, traitement du signal, radar.

## SUMMARY

*Since a few years, high resolution methods appeared in the field of signal processing. They allow to separate two signals in cases where classical processing fails. In spectral analysis, they distinguish the sinusoidal components separated by less than the Fourier transform resolution. A computation of theoretical and practical limits is realized. For this, the frequency estimation error for two sinuoids is first derived from the Cramer-Rao bounds. From the exact formula thus obtained, the influence of different parameters is analyzed (phase difference, signal to noise ratio). On the basis of this estimation error, an intuitive criteria is introduced and used to derive the theoretical limits of high resolution. Then, these results are compared with those obtained by three spectral analysis methods: the first two ones are based on an autoregressive modelisation, the last one on the filter matched to two sinusoids. Finally, the computations are generalized to any kind of signal.*

## KEY WORDS

*High resolution, spectral analysis, Cramer-Rao bounds, signal processing, autoregressive modelisation, radar.*

## TABLE DES MATIÈRES

### 1. Introduction

### 2. Calcul des erreurs d'estimation

- 2.1. Préliminaire
- 2.2. Matrice d'information de Fisher
- 2.3. Erreur d'estimation

### 3. Résolution

- 3.1. Critère
- 3.2. Comportement asymptotique

### 4. Simulation

### 5. Généralisation

- 5.1. Fonction d'appareil
- 5.2. Cas général

### 6. Conclusion

### Bibliographie

### Annexes :

#### 1. Traitement adapté au sens du maximum de vraisemblance à $p$ sinusoides

#### 2. Calcul des bornes de Cramer-Rao pour la fonction d'appareil

#### 3. Généralisation

## 1. Introduction

Dans le domaine du traitement de signal sont apparues depuis quelques années, des méthodes d'analyse dites à haute résolution. Le propos de cet article est d'évaluer les limites théoriques et de situer les performances des méthodes précédentes par comparaison aux limites théoriques.

Nous allons nous intéresser dans un premier temps à l'analyse spectrale de signaux temporels et plus particulièrement à l'analyse de sinusoides sur une durée limitée. Le cas de sinusoides bruitées est fort intéressant pour les radaristes car il correspond au problème de l'analyse de la vitesse de cibles ou au problème équivalent de l'analyse angulaire par une antenne réseau.

De plus, en radar, les durées d'analyse sont limitées soit pour des raisons techniques (durée de passage du lobe d'antenne sur la cible), soit pour des raisons de principe (signaux à durée de stationnarité limitée). Dans la suite, nous ferons l'hypothèse de disposer seulement du signal bruité (bruit « blanc à bande limitée ») échantillonné à la fréquence de Shannon.

L'analyse spectrale classique est réalisée par transformée de Fourier discrète. La résolution fréquentielle de cette transformée est  $1/T$  ( $T$  durée d'analyse), c'est-à-dire qu'elle ne sépare pas deux sinusoides dont l'écart en fréquence est inférieur à  $1/T$ .

Pour un bruit additif blanc gaussien, la transformée de Fourier est le traitement adapté au sens du maximum de vraisemblance à l'estimation de la fréquence d'une seule sinusoides [1]. La notion de résolution en  $1/T$  n'est donc pas une notion absolue [11], elle décrit simplement le comportement du traitement adapté à une seule sinusoides lorsqu'il est utilisé pour traiter plusieurs sinusoides. Dès lors on conçoit qu'il soit possible de parvenir à une meilleure résolution en fréquence en utilisant des méthodes appropriées. Ces dernières années, diverses méthodes possédant des propriétés de haute résolution intéressantes sont apparues [2 à 7]. Elles font toutes l'hypothèse d'un modèle *a priori* pour le signal :

- modélisation par des signaux du type sinusoides : traitement adapté à  $p$  sinusoides, Pisarenko, Prony et leurs variantes;
- modèles plus généraux relevant de la théorie d'identification de processus :

- modèle autorégressif (AR) (équivalent à la théorie du maximum d'entropie pour des signaux monodimensionnels);

- modèle autorégressif à moyenne ajustée (ARMA).

Les paramètres des modèles sont calculés à partir des mesures et le spectre estimé sera alors le spectre du modèle.

Deux exemples de ces méthodes sont donnés par les figures 1 et 2. Le signal analysé sur une durée finie  $T$  est une somme de deux sinusoides séparées par un intervalle fréquentiel de  $1/5 T$ . Le rapport signal sur bruit est de 50 dB.

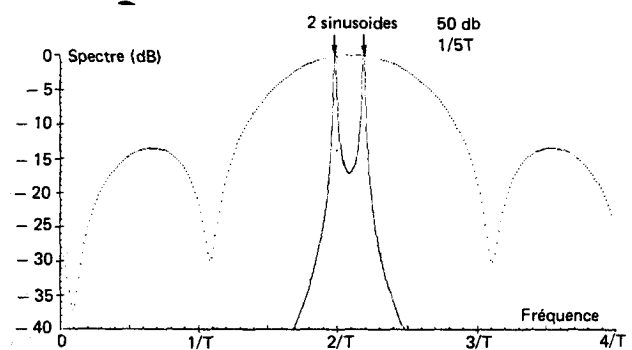


Fig. 1. — Comparaison de deux méthodes d'analyse spectrale. Transformée de Fourier-Modèle AR.

Pour évaluer les limites théoriques, nous allons calculer l'erreur minimale d'estimation des fréquences pour un signal composé de plusieurs sinusoides et examiner le comportement de cette erreur lorsque les fréquences des sinusoides se rapprochent. Le calcul de cette erreur minimale est généralement réalisé numériquement [7 à 10]. On propose ici la formule exacte des bornes de Cramer-Rao pour le cas de deux sinusoides. A partir des calculs précédents, une définition

simple de la résolution, analogue à [10, 11], sera donnée, ce qui permettra d'estimer la limite des gains en résolution par rapport au traitement classique par transformée de Fourier ainsi que l'influence du déphasage relatif et du rapport signal sur bruit. Puis, des simulations d'analyse spectrale par des modèles AR et par le traitement adapté à deux sinusoides seront réalisées afin de comparer leurs performances aux performances limites.

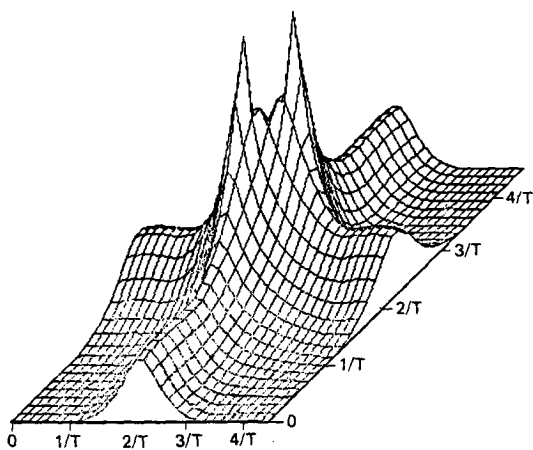


Fig. 2. — Traitement adapté à deux sinusoides.

Enfin, la généralisation des calculs précédents à des signaux quelconques sera faite en montrant que les résultats obtenus ne dépendent pas de la forme particulière du signal étudié (sinusoides). Cette généralisation nous permettra de sortir du cadre de l'analyse spectrale, et de traiter des problèmes haute résolution de la plupart des systèmes classiques de mesures pour lesquels le résultat de l'expérience est en général la convolution du signal d'origine (formé par plusieurs « sources ») par une fonction d'appareil. Ce cas a été traité par [11] et une formule littérale, sous forme de développement limité (écart faible entre les signaux) avait été donnée pour deux signaux de même amplitude et sans déphasage. Ces résultats sont ici étendus à des écarts, amplitudes et déphasages quelconques.

## 2. Calcul des erreurs d'estimation

### 2.1. PRÉLIMINAIRE

Pour le problème haute résolution envisagé ici, le signal reçu est la somme de sinusoides et d'un bruit gaussien de densité spectrale de puissance constante ( $N_0$ ) dans la bande  $(-B/2, B/2)$ .

Le signal est observé pendant une durée limitée  $T$  :

$$y(t) = \sum_{k=1}^p a_k e^{j\omega_k t} e^{j\phi_k} + e(t),$$

$e(t)$  est un bruit complexe avec partie réelle et imaginaire de même variance et décorrelées. Les amplitudes et phases des sinusoides sont déterministes.

Comme nous l'avons vu en introduction, nous supposons disposer seulement du signal échantillonné à la fréquence de Shannon.

Le problème de l'estimation est de déterminer les amplitudes, phases et fréquences des sinusoides à partir des échantillons du signal. Or, à cause du bruit, ces paramètres ne pourront être connus qu'à une certaine erreur près. On montre, en théorie de l'estimation, que cette erreur est supérieure à une certaine quantité quel que soit l'estimateur non biaisé utilisé.

Plusieurs bornes de l'erreur d'estimation plus ou moins fines, ont ainsi été décrites [12]. La plus facile à calculer est celle de Cramer-Rao, elle nécessite l'inversion d'une matrice appelée matrice d'information de Fisher.

### 2.2. MATRICE D'INFORMATION DE FISHER

Dans notre cas, cette matrice est une matrice  $3p \times 3p$  définie par :

$$J_{kl} = -E \left( \frac{\partial^2 \ln p_r}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l} \right),$$

$p_r$  est la densité de probabilité des échantillons.

$\alpha_i$  sont les paramètres (amplitude, phase et fréquence de chaque sinusoides, le nombre  $p$  de sinusoides étant supposé connu).

Sous les hypothèses faites en 2.1 les échantillons de bruit sont non corrélés et il vient :

$$J_{kl} = \frac{2}{\sigma^2} \text{Reel} \left( \sum_{n=1}^N u_{n,k} u_{n,l}^* \right).$$

Les  $u_{n,k}$  correspondent aux dérivées partielles du signal par rapport aux différents paramètres [11].

$\sigma^2$  : variance du bruit  $\sigma^2 = N_0 B$ .

$N$  : nombre d'échantillons.

L'indice  $3i-2$  est affecté à l'amplitude de la sinusoides  $i$ , l'indice  $3i-1$  à sa phase et l'indice  $i$  à sa fréquence :

$$\begin{aligned} u_{n, 3i-2} &= e^{j\phi_i} e^{j\omega_i t_n}, \\ i=1, p, \quad u_{n, 3i-1} &= j a_i e^{j\phi_i} e^{j\omega_i t_n}, \\ u_{n, 3i} &= j t_n a_i e^{j\phi_i} e^{j\omega_i t_n}, \end{aligned}$$

$t_n$  sont les instants d'échantillonnage.

L'erreur minimal d'estimation des fréquences et la covariance sont alors données par :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\omega}_i) &= (\underline{J}^{-1})_{3i, 3i}, \\ c(\hat{\omega}_i, \hat{\omega}_j) &= (\underline{J}^{-1})_{3i, 3j}. \end{aligned}$$

Il reste donc à inverser la matrice  $\underline{J}$ ; le calcul dans le cas d'une sinusoides est classique [1, 8, 13], nous avons réalisé le calcul exact pour le cas de deux sinusoides; pour un nombre plus grand, l'inversion est effectuée par calculateur.

pour un nombre plus grand, l'inversion est effectuée par ordinateur.

2.3. ERREUR D'ESTIMATION

2.3.1. Une sinusoïde [1, 8, 13]

$$\text{Var}(\hat{\omega}) = \frac{1}{2(E/N_0) T_2^2}$$

$E/N_0$  est le rapport signal sur bruit énergétique :

$$\frac{E}{N_0} = \frac{a^2}{\sigma^2} N,$$

$T_2$  est la durée quadratique moyenne :

$$T_2^2 = \sum_n (t_n - \bar{t})^2 / N, \text{ où } \bar{t} \text{ est le temps moyen } \sum_n t_n / N.$$

D'où pour  $t_n = n\Delta t + t_0$  (on fera  $\Delta t = 1$  dans la suite) :

$$\text{Var}(\hat{\omega}) = \frac{6\sigma^2}{a^2 N(N^2 - 1)}$$

2.3.2. Deux sinusoïdes

Après quelques calculs, il vient :

$$(1) \text{Var}(\hat{\omega}_i) = \frac{1}{2(E/N_{0i}) T_2^2} \frac{1}{A^2 - B^2 \cos^2 \psi} (1 - u^2) A$$

$$(2) \quad c(\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) = \frac{1}{2[(E/N_{01})(E/N_{02})]^{1/2} T_2^2} \times \frac{(1 - u^2) B \cos \psi}{A^2 - B^2 \cos^2 \psi}$$

$(E/N_{0i})$  est le rapport signal sur bruit de la  $i$ -ième sinusoïde  $\psi$  est la différence de phase des deux sinusoïdes au temps  $\bar{t}$ , et dans la suite le terme différence de phase correspondra à  $\psi$  :

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2 + (\omega_1 - \omega_2) \bar{t}$$

$u, A, B$  sont des fonctions dépendant seulement de la différence de fréquence des deux sinusoïdes :  $\omega = \omega_1 - \omega_2$ .

Posant :  $c(\omega) = \sum_n e^{j\omega(t_n - \bar{t})}$  :

$$(3) \quad u = \frac{c(\omega)}{c(0)}, \quad v = \frac{c'(\omega)}{[-c''(0)c(0)]^{1/2}}, \quad z = \frac{c''(\omega)}{c''(0)},$$

$$A = 1 - u^2 - v^2, \quad B = uv^2 - z(1 - u^2),$$

soit, en posant  $x = \omega T/2$  :

$$u = \frac{\sin x}{N \sin(x/N)}, \quad v = \left( \frac{3N^2}{N^2 - 1} \right)^{1/2} \frac{du}{dx},$$

$$z = - \left( \frac{3N^2}{N^2 - 1} \right) \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Pour  $N$  assez grand, les formules se simplifient :

$$u = \sin c(x), \quad v = \sqrt{3} (\cos x - \sin cx)/x,$$

$$z = 3 [x \sin x + 2(\cos x - \sin cx)]/x^2.$$

Ce calcul appelle plusieurs remarques :

– l'erreur d'estimation de la fréquence d'une sinusoïde est indépendante du rapport signal sur bruit de l'autre;

– la dépendance en phase et en fréquence de l'erreur n'intervient que par la différence de phase  $\psi$  et la différence de fréquence des deux sinusoïdes;

– si les sinusoïdes sont séparées fréquentiellement de plus de  $1/T$  alors  $u, v, z$  tendent vers zéro et l'erreur est identique à celle obtenue pour une seule sinusoïde;

– l'erreur d'estimation est maximale pour des sinusoïdes en phase ou en opposition de phase, minimale pour des sinusoïdes en quadrature : ( $\psi = 90^\circ, 270^\circ$ ).

Ces remarques avaient déjà été notées par [8].

Des formules (1) et (2) on en déduit :

$$\text{Var}(\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2), \quad \text{Var}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)$$

et le coefficient de corrélation :

$$\rho = \frac{c(\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)}{[\text{Var}(\hat{\omega}_1) \text{Var}(\hat{\omega}_2)]^{1/2}}$$

Posant :

$$\frac{2}{\tilde{a}^2} = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}, \quad \frac{\tilde{E}}{N_0} = \frac{\tilde{a}^2}{\sigma^2} N, \quad m = \frac{\tilde{a}^2}{a_1^2 a_2^2}$$

$$\varepsilon = \pm 1,$$

il vient :

$$(4) \quad \rho = (B/A) \cos \psi,$$

$$(5) \text{Var}(\hat{\omega}_1 + \varepsilon \hat{\omega}_2) = \frac{1}{2(\tilde{E}/N_0) T_2^2} \frac{2}{A^2 - B^2 \cos^2 \psi} (1 - u^2) (A + \varepsilon m B \cos \psi)$$

Le calcul de  $\text{Var}(\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2)$  se déduit de celui de  $\text{Var}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)$  en changeant  $\psi$  en  $\pi + \psi$ . Dans la suite nous ne traiterons que  $\text{Var}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)$ . La dépendance en  $\psi$  de  $\text{Var}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)$  est moins simple que celle de  $\text{Var}(\hat{\omega}_i)$ .

Lorsque les fréquences des deux sinusoïdes sont proches  $|f_1 - f_2|T \ll 1$ , un développement limité en fonction de  $\omega = \omega_1 - \omega_2$  peut être réalisé et aboutit au comportement asymptotique :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi \neq k\pi : \text{Var}(\hat{\omega}_i) = \frac{1}{2(E/N_{0i})} \frac{1}{\gamma_4^4} \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{4}{\omega^2}, \\ \psi = k\pi : \text{Var}(\hat{\omega}_i) = \frac{1}{2(E/N_{0i})} \frac{1}{\gamma_6^6} \frac{36}{\omega^4}, \end{array} \right.$$

$\gamma_{2M}$  est une quantité homogène à un temps :

$$\gamma_4^4 = \frac{\sum_n (t_n - \bar{t})^4}{N} - \left[ \frac{\sum_n (t_n - \bar{t})^2}{N} \right]^2 = \frac{(N^2 - 4)(N^2 - 1)}{180}$$

$$\gamma_6^6 = \frac{\sum_n (t_n - \bar{t})^6}{N} - \frac{[\sum_n (t_n - \bar{t})^4]^2}{N \sum_n (t_n - \bar{t})^2} = \frac{(N^2 - 9)(N^2 - 4)(N^2 - 1)}{2800}$$

pour N assez grand :

$$\gamma_4^4 = T^4/180, \quad \gamma_6^6 = T^6/2800$$

La dépendance de l'erreur de l'estimation en  $\omega^{-2}$  et  $\omega^{-4}$  avait été constatée numériquement par [8]. On note également une dépendance en  $\sin^{-2}(\psi)$ .

Le développement limité de  $\text{Var}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)$  est lui un peu plus complexe.

$-m \neq 1$  ( $a_1 \neq a_2$ ) :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi \neq k\pi : \text{Var}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2) \\ \quad = \frac{1}{(\tilde{E}/N_0)} \frac{1}{\gamma_4^4} \frac{1 - m \cos \psi}{\sin^2 \psi} \frac{4}{\omega^2}, \\ \psi = k\pi : \text{Var}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2) \\ \quad = \frac{1}{(\tilde{E}/N_0)} \frac{1}{\gamma_6^6} (1 - m(-1)^k) \frac{36}{\omega^4}. \end{array} \right.$$

$-m = 1$  ( $a_1 = a_2$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi \neq \pi + 2k\pi : \text{Var}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2) \\ \quad = \frac{1}{(\tilde{E}/N_0)} \frac{1}{\gamma_4^4} \frac{1 + \cos \psi}{\omega^2}, \\ \psi = \pi + 2k\pi : \text{Var}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2) \\ \quad = \frac{1}{(\tilde{E}/N_0)} \frac{2 \cdot 36}{\gamma_6^6 \omega^4}. \end{array} \right.$$

### 3. Résolution

#### 3.1. CRITÈRE

Les calculs du paragraphe 2.3 indiquent que pour des sinusoïdes séparées en fréquence de plus de  $1/T$ , l'erreur d'estimation est sensiblement identique à celle de sinusoïdes seules. Lorsque les fréquences se rapprochent, l'erreur d'estimation augmente, il y a interférence de plus en plus forte entre elles. Une définition raisonnable de la résolution consiste alors à adopter comme limite de résolution l'écart de fréquences pour lequel la somme des écarts-types de l'estimation des fréquences est de l'ordre de grandeur de l'écart en fréquence [10]. Ce raisonnement est schématisé par la figure 3 qui représente l'évolution des erreurs d'estimation lorsque les fréquences se rapprochent.

Posant  $\sigma_i = [\text{Var} \hat{f}_i]^{1/2}$ , le critère est  $(\sigma_1 + \sigma_2)^2 = |f_1 - f_2|^2$  ( $C_1$ ). Il existe d'autres définitions de résolution; par exemple [11] choisit  $\text{Var}(\hat{f}_1 - \hat{f}_2) = |f_1 - f_2|^2$  ( $C_2$ ). Comme  $\text{Var}(\hat{f}_1 - \hat{f}_2) \leq (\sigma_1 + \sigma_2)^2$  le critère ( $C_1$ ) est plus strict que le critère ( $C_2$ ). En effet, il impose que non seulement l'écart entre les fréquences ne soit pas trop grand mais aussi que chaque fréquence ne s'éloigne

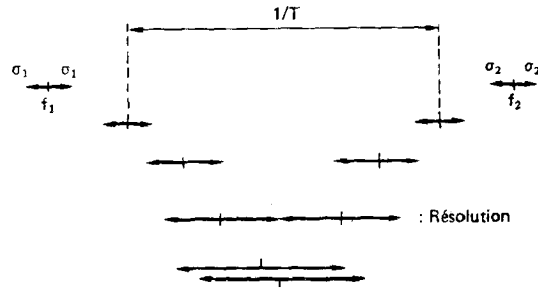


Fig. 3. — Évolution des erreurs d'estimation et critère de résolution.

pas trop de la valeur réelle. C'est donc un critère à la fois de résolution et de précision. La comparaison des formules (1) et (5) et surtout des formules (6) et (7) montrent que du point de vue ordre de grandeur des performances et dépendance en fonction du rapport signal sur bruit, les deux critères sont analogues. La seule différence importante réside dans l'influence du déphasage, le sens des variations pouvant même être parfois inversé. La discussion de la variation en fonction du déphasage de la résolution définie par ( $C_2$ ) est réalisable mais plus complexe, on choisira le critère ( $C_1$ ) par souci de simplicité.

$(\omega_1 - \omega_2)$  limite doit être solution de :

$$(\text{Var} \hat{\omega}_1)^{1/2} + (\text{Var} \hat{\omega}_2)^{1/2} = |\omega_1 - \omega_2|.$$

Définissant un rapport signal sur bruit moyen par :

$$2 \left( \frac{E}{N_0} \right)_m^{-1/2} = \left( \frac{E}{N_0} \right)_1^{-1/2} + \left( \frac{E}{N_0} \right)_2^{-1/2},$$

et compte tenu des formules du paragraphe 2.3.2,  $(\omega_1 - \omega_2)$  doit être solution de :

$$(8) \quad \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right)^2 = \frac{1}{2(E/N_0)_m T^2} \frac{(1 - u^2)(1 - u^2 - v^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2 - \cos^2 \psi [z(1 - u^2) - uv^2]^2},$$

le gain en résolution est alors défini par  $1/T |f_1 - f_2|$ .

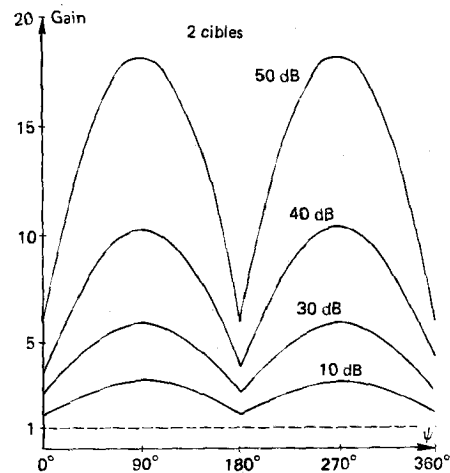


Fig. 4. — Gain en résolution en fonction du déphasage pour différents rapports signal sur bruit moyens.

La figure 4 représente le gain en résolution en fonction du déphasage pour différents rapports signal sur bruit. La figure 5 représente le gain en résolution en fonction du rapport signal sur bruit pour différents déphasages.

Avec cette définition particulière de la résolution, le gain est maximal pour des sinusoïdes en quadrature ( $\psi = 90^\circ, 270^\circ$ ) minimal pour des sinusoïdes en phase ou en opposition de phase.

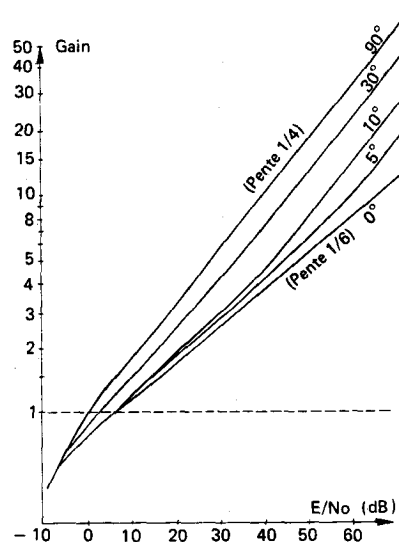


Fig. 5. — Gain en résolution en fonction du rapport signal sur bruit moyen, pour différents déphasages.

### 3. 2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Pour des rapports signal sur bruit élevés, la solution de l'équation (8) vérifiera alors  $T |f_1 - f_2| \ll 1$ . Pour la résoudre, le développement limité du paragraphe 2. 3. 2 pourra être utilisé. Il vient alors :

$$(9) \quad \begin{aligned} \psi \neq k\pi : \quad \text{gain} &= \pi 2^{1/4} \left( \frac{\gamma_4}{T} \right) |\sin \psi|^{1/2} \left( \frac{E}{N_0} \right)_m^{1/4}, \\ \psi = k\pi : \quad \text{gain} &= \pi \frac{2^{1/2}}{3^{1/3}} \left( \frac{\gamma_6}{T} \right) \left( \frac{E}{N_0} \right)_m^{1/6}. \end{aligned}$$

Pour N assez grand :

$$\begin{aligned} \psi \neq k\pi : \quad \text{gain} &= \frac{\pi}{(90)^{1/4}} |\sin \psi|^{1/2} \left( \frac{E}{N_0} \right)_m^{1/4} \\ &\approx 1.02 |\sin \psi|^{1/2} \left( \frac{E}{N_0} \right)_m^{1/4}, \\ \psi = k\pi : \quad \text{gain} &= \frac{\pi}{(3150)^{1/6}} \left( \frac{E}{N_0} \right)_m^{1/6} \\ &\approx .82 \left( \frac{E}{N_0} \right)_m^{1/6}. \end{aligned}$$

Le comportement asymptotique en  $|\sin \psi|^{1/2} (E/N_0)_m^{1/4}$  ou  $(E/N_0)_m^{1/6}$  est bien observé sur la figure 5.

## 4. SIMULATION

Trois méthodes d'analyse spectrale ont été testées. Deux sont basées sur une modélisation autorégressive : Burg et « Forward and backward linear predictor » [14, 15]. La troisième est basée sur le traitement adapté à deux sinusoïdes (annexe 1) [1, 7].

Les tests ont porté sur l'analyse de deux sinusoïdes de rapport signal sur bruit élevé 50 dB, pour différents déphasages et pour seulement trois réalisations du bruit.

Il ne s'agit donc pas ici d'une étude quantitative de l'erreur d'estimation des méthodes précédentes mais plutôt d'une simple appréciation qualitative.

Des études plus poussées sur ce point ont été réalisées notamment par [7, 8]. Pour les modèles autorégressifs, les fréquences sont estimées en cherchant les maxima du spectre AR. A chaque réalisation du bruit, l'ordre du modèle est ajusté de façon à avoir un gain maximal en résolution. En général, un ordre élevé est nécessaire. La figure 6 représente le résultat des simulations. Le comportement du filtre adapté est satisfaisant [7]. Comme le rapport signal sur bruit est élevé, les modèles AR se comportent bien, ce qui ne serait plus le cas si le rapport signal sur bruit était plus faible. On peut même dans ce cas les améliorer par des variantes [7, 8].

La grande dispersion des résultats et le fait que les gains atteignent et dépassent même parfois les bornes de Cramer-Rao, sont bien sûr dus au nombre faible de simulations réalisées.

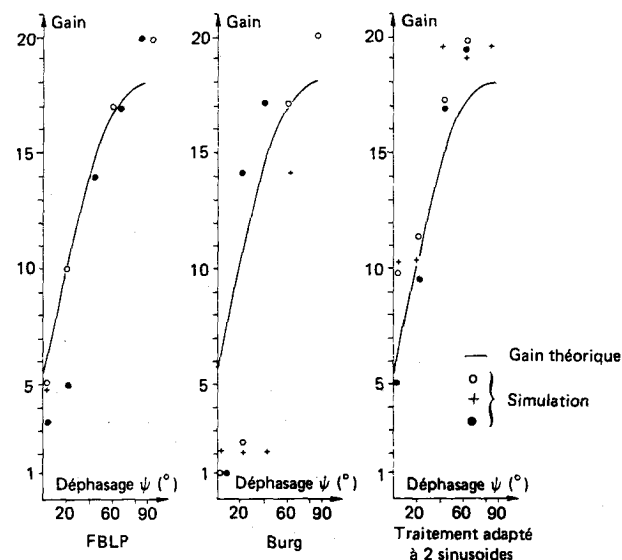


Fig. 6. — Comparaison des gains théoriques avec les gains en résolution obtenus par simulation à l'aide de différentes méthodes d'analyse spectrale pour deux sinusoïdes à 50 dB.

## 5. Généralisation

La forme des équations des paragraphes 2, 3 n'est pas spécifiquement liée au signal formé de sinusoïdes.

## RECHERCHES

Le calcul des bornes de Cramer-Rao a pu être réalisé dans un cadre plus général.

### 5.1. FONCTION D'APPAREIL

Pour la plupart des systèmes de mesures physiques, le résultat de l'expérience est la convolution du signal d'origine (formé par plusieurs sources) avec une fonction d'appareil (S).

Le signal mesuré est alors :

$$y(t) = \sum_{k=1}^p a_k e^{j\phi_k} S(t - \tau_k) + \text{bruit.}$$

Soit si on raisonne dans le domaine fréquentiel :

$$y(\omega) = \sum_{k=1}^p a_k e^{j\phi_k} e^{j\omega\tau_k} S(\omega) + e(\omega)$$

Ce problème est donc dual de celui de l'analyse spectrale avec une fonction de pondération S(ω) en plus.

Ce cas a été traité par [11] et une formule littérale sous forme de développement limité ( $|\tau_1 - \tau_2|$  faible) avait été donnée pour deux signaux de même amplitude et sans déphasage. Ces résultats sont étendus à des écarts, amplitudes et déphasages quelconques.

Les formules (1) à (9) obtenues précédemment restent formellement analogues, elles sont reproduites en annexe 2. Il existe cependant un paramètre de plus qui est la fonction d'appareil et on va examiner son influence.

Si on est maître de cette fonction, c'est le cas, par exemple, de la mesure de la distance en radar où S(t) est alors la fonction émise, il peut être intéressant de connaître la fonction permettant de minimiser les erreurs d'estimation à rapport signal sur bruit constant.

Dans le cas d'un seul signal (p = 1), d'après l'annexe 2, on cherche la fonction qui maximise B<sub>2</sub>. L'optimisation aboutit à la solution :

$$|S(\omega_1)|^2 = |S(\omega_N)|^2 = e/2,$$

les autres valeurs sont nulles. La variance obtenue est alors trois fois plus faible que celle de la fonction constante mais au prix, bien sûr, d'une totale ambiguïté.

Dans le cas de deux signaux, l'optimisation à partir des formules générales de l'annexe 2 est plus complexe.

Si on se limite au cas où le développement limité est valable, on obtient une solution dépendant du déphasage.

Lorsque ψ est différent de kπ, la recherche de la fonction maximisant γ<sub>4</sub> aboutit à :

$$|S(\omega_1)|^2 = |S(\omega_N)|^2 = \frac{e}{4}, \quad |S(\omega_{N/2})|^2 = \frac{e}{2},$$

les autres valeurs sont nulles.

La variance obtenue est 2,8 fois plus petite que celle de la fonction constante.

Lorsque ψ est égal à kπ, la recherche de la fonction maximisant γ<sub>6</sub> aboutit à :

$$|S(\omega_1)|^2 = |S(\omega_N)|^2 = \frac{e}{6},$$

$$|S(\omega_{N/4})|^2 = |S(\omega_{3N/4})|^2 = \frac{e}{3},$$

les autres valeurs sont nulles.

La variance obtenue est alors 2,7 fois plus petite que celle de la fonction constante.

Enfin, pour terminer, la figure 7 représente l'influence de la fonction d'appareil sur le gain en résolution. Le gain est calculé en fonction du déphasage pour un rapport signal sur bruit de 50 dB et pour cinq fonctions d'appareil. Conformément aux calculs précédents, la fonction 5 est optimale pour un déphasage de 90° (mais mauvaise pour 0°) et la fonction 3 est optimale pour un déphasage de 0°. On peut noter le bon comportement de la fonction 4. L'influence de la fonction d'appareil ne semble pas extrêmement importante pour les performances en résolution.

### 5.2. CAS GÉNÉRAL

Lorsque le signal reçu est de la forme :

$$y(t) = \sum_{k=1}^p a_k e^{j\phi_k} S(t, \theta_k) + e(t),$$

ou a<sub>k</sub> et φ<sub>k</sub> sont des amplitudes et phases à estimer et S(t, θ<sub>k</sub>) est une fonction connue dépendant des paramètres θ<sub>k</sub> à estimer, l'ensemble des formules (1) à (9) gardent comme au paragraphe 5.1 une forme analogue et sont reproduites en annexe 3.

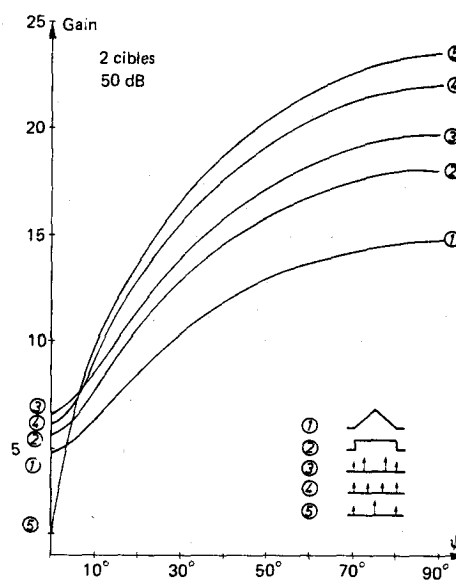


Fig. 7. — Influence de la fonction d'appareil sur le gain en résolution.

## 6. Conclusion

Depuis quelques années, des méthodes d'analyse à haute résolution sont apparues en traitement du signal dans des domaines aussi variés que l'optique, l'acoustique, la radioastronomie, la géophysique, le radar, le sonar, les télécommunications... Leur existence est due au fait que la notion habituelle de résolution n'est pas une notion intrinsèque de limite de séparation. Elle décrit simplement les limitations du traitement classique adapté à un seul signal, lorsqu'il est utilisé pour traiter plusieurs signaux. Nous nous sommes attachés à qualifier les limites théoriques. Pour cela, un calcul littéral de l'erreur minimale d'estimation a été réalisé pour deux signaux. Un critère simple de résolution a alors permis, d'évaluer les performances limites en haute résolution, ainsi que l'influence des divers paramètres :

- déphasage relatif et rapport signal sur bruit;
- gain maximal pour des signaux en quadrature;
- gain minimal pour des signaux en phase ou en opposition de phase;
- comportement asymptotique en :

$$|\sin \psi|^{1/2} \left( \frac{E}{N_0} \right)_m^{1/4} \quad \text{pour } \psi \neq k\pi,$$

$$\left( \frac{E}{N_0} \right)_m^{1/6} \quad \text{pour } \psi = k\pi.$$

Dans le cadre particulier de l'analyse spectrale, diverses méthodes ont été testées et leurs performances semblent correspondre assez bien aux limites théoriques obtenues.

Tous les calculs précédents ont été réalisés pour des signaux monodimensionnels, il resterait à l'étendre au problème bidimensionnel de l'imagerie.

Manuscrit reçu le 27 septembre 1984, version révisée le 1<sup>er</sup> avril 1985.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. CLERGEOT et M. BOUVET, Analyse de signaux à composantes quasi sinusoïdales. *Annale des Télécommunications*, 39, n° 11-12, 1984.
- [2] Special issue on spectral estimation, *Proc. IEEE*, 70, n° 9, septembre 1982.
- [3] S. M. KAY et S. L. MARPLE Jr., Spectrum analysis a modern perspective, *Proc. IEEE*, 69, n° 11, novembre 1981.
- [4] S. S. HAYKIN, *Non linear methods of spectral analysis*, New York Springer Verlag, 1979.
- [5] M. GRANGER, Les théories modernes de l'analyse spectrale et leur application au radar, *Colloque international sur le radar*, Paris, mai 1984.
- [6] C. DELHOTE, *Processus aléatoires stationnaires*, Note technique ONERA, 1982-4.
- [7] D. W. TUFTS et R. KUMARESAN, Estimation of frequencies of multiple sinusoids: making linear prediction perform like maximum likelihood, dans [2].
- [8] S. W. LANG et J. M. MCCLELLAN, Frequency estimation with maximum entropy spectral estimation, *IEE, ASSP* 28, n° 6, décembre 1980.
- [9] D. C. RIFE et R. R. BOORSTYN, Multiple tone parameter estimation from discrete time observations, *Bell Syst. Techn. J.*, novembre 1976.
- [10] BUCCIARELLI *et al.*, La super résolution : un outil pour résoudre les problèmes de cibles multiples dans les radars de poursuite, *Colloque international sur le radar*, Paris, mai 1984.
- [11] J. MUNIER, *Pouvoir séparateur en estimation non linéaire en présence de bruit faible*, GRETSI, 1977.
- [12] H. L. VAN TREES, *Détection, estimation and modulation theory*, Wiley, 1971.
- [13] D. C. RIFE et R. R. BOORSTYN, Simple tone parameter estimation from discrete time observations, *IEEE, IT* 20, septembre 1974.
- [14] J. P. BURG, Maximum entropy spectral analysis, *Proc. 37. Meeting society of exploration geophysicist*, octobre 1967.
- [15] S. L. MARPLE, A new autoregressive spectrum analysis algorithm, *IEEE, ASSP* 28, août 1980.

## Annexes

### 1. Traitement adapté au sens du maximum de vraisemblance à $p$ sinusoïdes

Le signal est supposé être la somme de  $p$  sinusoïdes :

$$y(t) = \sum_{i=1}^p a_i e^{j\omega_i t} e^{j\phi_i} + e(t), \quad t \in [-T/2, T/2].$$

Sous les hypothèses réalisées au paragraphe 2, l'estimation par le maximum de vraisemblance des amplitudes, phases et fréquences des sinusoïdes aboutit aux équations des moindres carrés :

$$p, a_i, \phi_i, \omega_i, \quad \text{Minimise } \sum_{n=1}^N \left| y_n - \sum_{i=1}^p a_i e^{j\phi_i} e^{j\omega_i t_n} \right|^2.$$

Dans la minimisation, les paramètres amplitude et phase peuvent être éliminés par calcul :

$$p, \omega_i, \quad \text{Maximise } \underline{z}^{*T} \underline{\Omega}^{-1} \underline{z},$$

avec :

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \text{TF}(\omega_1) \\ \vdots \\ \text{TF}(\omega_p) \end{bmatrix},$$

TF ( $\omega_i$ ) désigne la transformée de Fourier discrète des  $y_1, \dots, y_N$  pour la fréquence  $\omega_i$

$$\underline{\Omega} = (\Omega_{kl}),$$

$$\Omega_{kl} = \frac{\sin \{(\omega_k - \omega_l) T/2\}}{N \sin \{(\omega_k - \omega_l) T/2N\}}.$$



Dans le cas de deux sinusoides, la matrice  $\underline{\Omega}$  s'inverse facilement :

$$\omega_1, \omega_2, \text{ Maximise } \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2h \operatorname{R\acute{e}el}(z_1 z_2^*)}{1-h^2},$$

$$z_1 = \text{TF}(\omega_1), \quad z_2 = \text{TF}(\omega_2),$$

$$h = \frac{\sin\{(\omega_1 - \omega_2)T/2\}}{N \sin\{(\omega_1 - \omega_2)T/2N\}}.$$

## 2. Calcul des bornes de Cramer-Rao pour la fonction d'appareil

Le signal reçu est de la forme :

$$y(\omega) = \sum_{k=1}^p a_k e^{j\phi_k} e^{j\omega\tau_k} S(\omega) + e(\omega).$$

On suppose disposer seulement du signal fréquentiel échantillonné aux fréquences  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Pour simplifier, on posera  $S_n = S(\omega_n)$ . Le bruit  $e(\omega)$  est supposé blanc ( $N_0$ ), d'écart type  $\sigma^2$ .

Un signal ( $p=1$ ) :

$$\operatorname{Var}(\hat{\tau}) = \frac{1}{2(E/N_0)} \frac{1}{B_2^2}, \quad \frac{E}{N_0} = \frac{a^2}{\sigma^2} \sum_n |S_n|^2,$$

$$B_2^2 = \frac{\sum_n (\omega_n - \bar{\omega})^2 |S_n|^2}{\sum_n |S_n|^2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\sum_n \omega_n |S_n|^2}{\sum_n |S_n|^2}.$$

Deux signaux ( $p=2$ ) :

$$\operatorname{Var}(\hat{\tau}_i) = \frac{1}{2(E/N_0)_i} \frac{1}{B_2^2} \frac{(1-|u|^2)A}{A^2 - [\operatorname{R\acute{e}el}(e^{j\omega} B)]^2},$$

$$C(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2) = \frac{1}{2[(E/N_0)_1 (E/N_0)_2]^{1/2} B_2^2} \times \frac{(1-|u|^2) \operatorname{R\acute{e}el}(e^{j\omega} B)}{A^2 - [\operatorname{R\acute{e}el}(e^{j\omega} B)]^2},$$

$$\tau = \tau_1 - \tau_2, \quad \psi = \phi_1 - \phi_2 + \omega\tau,$$

$$C(\tau) = \sum_n |S_n|^2 e^{j(\omega_n - \bar{\omega})\tau}, \quad u = \frac{C(\tau)}{C(0)},$$

$$v = \frac{C'(\tau)}{[-C''(0)C(0)]^{1/2}}, \quad z = \frac{C''(\tau)}{C''(0)},$$

$$A = 1 - |u|^2 - |v|^2, \quad B = u^* v^2 - z(1 - |u|^2).$$

On remarque que si la fonction  $|S(\omega)|^2$  est symétrique autour de  $\bar{\omega}$ , alors  $u, v$  et  $z$  sont réels et on retrouve les formules (1) et (2) du paragraphe 2.3.2.

Le calcul de  $\operatorname{Var}(\tau_1 + \varepsilon\tau_2)$  se réalise de manière identique.

De même, un développement limité est réalisable et on retrouve des formules (6) et (7) du paragraphe 2.3.2.

$$\psi \neq k\pi, \quad \operatorname{Var}(\hat{\tau}_i) = \frac{1}{2(E/N_0)_i} \frac{1}{\gamma_4^2} \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{4}{\tau^2},$$

$$\psi = k\pi, \quad \operatorname{Var}(\hat{\tau}_i) = \frac{1}{2(E/N_0)_i} \frac{1}{\gamma_6^2} \frac{36}{\tau^4},$$

avec  $\gamma_{2M}$  homogène  une bande :

$$\gamma_4^4 = \frac{\sum_n (\omega_n - \bar{\omega})^4 |S_n|^2}{\sum_n |S_n|^2} - \left[ \frac{\sum_n (\omega_n - \bar{\omega})^2 |S_n|^2}{\sum_n |S_n|^2} \right]^2$$

$$- \frac{[\sum_n (\omega_n - \bar{\omega})^3 |S_n|^2]^2}{\sum_n |S_n|^2 \sum_n (\omega_n - \bar{\omega})^2 |S_n|^2},$$

$$\gamma_6^6 = \frac{\sum_n (\omega_n - \bar{\omega})^6 |S_n|^2}{\sum_n |S_n|^2} - \left[ \frac{\sum_n (\omega_n - \bar{\omega})^3 |S_n|^2}{\sum_n |S_n|^2} \right]^2$$

$$- \frac{[\sum_n (\omega_n - \bar{\omega})^4 |S_n|^2]^2}{\sum_n |S_n|^2 \sum_n (\omega_n - \bar{\omega})^2 |S_n|^2}.$$

Notant la dérivée  $n$ -ième de  $C$  par  $C^{(n)}$ , les formules précédentes se réécrivent :

$$\gamma_4^4 = \frac{C^{(4)}(0)}{C(0)} - \left| \frac{C^{(2)}(0)}{C(0)} \right|^2 + \frac{|C^{(3)}(0)|^2}{C(0)C^{(2)}(0)},$$

$$\gamma_6^6 = -\frac{C^{(6)}(0)}{C(0)} - \left| \frac{C^{(3)}(0)}{C(0)} \right|^2 + \frac{|C^{(4)}(0)|^2}{C(0)C^{(2)}(0)}.$$

## 3. Généralisation

Le signal reçu est de la forme :

$$y(t) = \sum_{k=1}^p a_k e^{j\phi_k} S(t, \theta_k) + e(t).$$

Nous supposons disposer seulement du signal échantillonné  Shannon. Pour simplifier les formules, posons :  $S_i(\theta_k) = S(t_i, \theta_k)$ . Nous ferons l'hypothèse dans la suite que la dépendance en  $\theta_k$  et  $\theta_l$  est

$\sum_{i=1}^N S_i(\theta_k) S_i^*(\theta_l)$  ne transparait que par  $(\theta_k - \theta_l)$ .

Posons :

$$\bar{v} = -j \frac{\sum_i S_i(\partial S_i^*/\partial \theta)}{\sum_i |S_i|^2}, \quad s(t, \theta) = e^{-j\bar{v}\theta} S(t, \theta).$$

Le calcul de la matrice de Fisher s'effectue de manière analogue au paragraphe 2. 2. Nous donnerons le résultat du calcul de l'erreur d'estimation du paramètre  $\theta$  pour 1 et 2 signaux ( $p=1$  ou 2).

3. 1. UN SIGNAL

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{2(E/N_0)} \frac{1}{v_2^2},$$

$$\frac{E}{N_0} = \frac{a^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N |S_i|^2, \quad v_2^2 = \frac{\sum_i |\partial s_i / \partial \theta|^2}{\sum_i |s_i|^2}.$$

3. 2. DEUX SIGNAUX

$$\text{Var}(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{2(E/N_0)_i} \frac{1}{v_2^2} \frac{(1-|u|^2)A}{A^2 - [\text{Réal}(e^{j\psi} B)]^2},$$

$$C(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{1}{2[(E/N_0)_1 (E/N_0)_2]^{1/2} v_2^2} \times \frac{(1-|u|^2) \text{Réal}(e^{j\psi} B)}{A^2 - [\text{Réal}(e^{j\psi} B)]^2},$$

ou :

$$\theta = \theta_1 - \theta_2, \quad \psi = \varphi_1 - \varphi_2 + \bar{v}^0,$$

$$C(\theta) = \sum_i s_i(\theta_1) s_i^*(\theta_2),$$

$$u = C(\theta)/C(0), \quad v = C'(\theta)/[-C''(0)C(0)]^{1/2},$$

$$z = C''(\theta)/C''(0),$$

$$A = 1 - |u|^2 - |v|^2,$$

$$B = u^* v^2 - z(1 - |u|^2).$$

Lorsque  $\theta$  est petit, on obtient des formules analogues au paragraphe 2. 3. 2 :

$$\psi \neq k\pi, \quad \text{Var}(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{2(E/N_0)_i} \frac{1}{\gamma_4^2} \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{1}{\theta^2},$$

$$\psi = k\pi, \quad \text{Var}(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{2(E/N_0)_i} \frac{1}{\gamma_6^2} \frac{1}{36} \frac{1}{\theta^4},$$

$\gamma_{2M}$  est une quantité homogène à  $v$  ou  $v_2$ .  $\gamma_4$  et  $\gamma_6$  sont données par des formules identiques à celles de l'annexe 2 :

$$\gamma_4^4 = \frac{C^{(4)}(0)}{C(0)} - \left| \frac{C^{(2)}(0)}{C(0)} \right|^2 + \frac{|C^{(3)}(0)|^2}{C(0)C^{(2)}(0)},$$

$$\gamma_6^6 = -\frac{C^{(6)}(0)}{C(0)} - \left| \frac{C^{(3)}(0)}{C(0)} \right|^2 + \frac{|C^{(4)}(0)|^2}{C(0)C^{(2)}(0)}.$$

Le critère intuitif de résolution devient alors :

$$|\theta_1 - \theta_2| \geq [\text{Var} \hat{\theta}_1]^{1/2} + [\text{Var} \hat{\theta}_2]^{1/2}.$$

Pour un rapport signal sur bruit élevé, la valeur limite  $|\theta_1 - \theta_2|_l$  solution de l'équation précédente est petite. Nous pouvons donc utiliser le développement limité des variances. On obtient asymptotiquement :

$$\psi \neq k\pi, \quad \frac{1}{|\theta_1 - \theta_2|_l} = \frac{\gamma_4}{2^{3/4}} |\text{Sin} \psi|^{1/2} \left( \frac{E}{N_0} \right)_m^{1/4},$$

$$\psi = k\pi, \quad \frac{1}{|\theta_1 - \theta_2|_l} = \frac{\gamma_6}{2^{1/2} 3^{1/3}} \left( \frac{E}{N_0} \right)_m^{1/6}.$$

Le comportement asymptotique est analogue à celui obtenu pour le cas des sinusoides.