

Élimination de raies spectrales par la méthode de Prony étendue

Elimination of pure frequencies by extended Prony method



Richard GRISEL

LACIS, UER Scientifique et Technique, Université de Rouen, BP n° 67, 76130 MONT-SAINT-AIGNAN

Richard Grisel est assistant en EEA à l'IUT de Rouen. Il s'intéresse à la mise en œuvre de chaînes de traitement du signal, depuis l'acquisition des signaux jusqu'à leur traitement informatique. Les principaux axes développés sont la mise en œuvre pratique de méthodes mathématiques pour le traitement du signal, la détection de sources dans la mer à partir de bruits marins, la réalisation électronique d'interfaces pour l'acquisition des signaux.



Denis DE BRUCQ

LACIS, UER Scientifique et Technique, Université de Rouen, BP n° 67, 76130 MONT-SAINT-AIGNAN

Denis de Brucq est professeur à l'Université de Rouen en théorie du signal. Ses travaux personnels développent des modèles probabilistes communs pour divers signaux d'origine extérieure au laboratoire : bruit marin, électro-encéphalogramme, charaçons.



Richard LECORDIER

LACIS, UER Scientifique et Technique, Université de Rouen, BP n° 67, 76130 MONT-SAINT-AIGNAN

Richard Lecordier centre sa recherche sur l'architecture des systèmes de traitement du signal.

RÉSUMÉ

Nous expliquons dans un premier temps pourquoi il est nécessaire de séparer sur un signal les parties purement déterministes et les parties purement non déterministes.

Après présentation de la méthode de Prony nous donnons des exemples d'applications sur des signaux avec traitement par microordinateur.

MOTS CLÉS

Méthode de Prony, modèle ARMA, analyse spectrale.

SUMMARY

At first we deal with the reasons why it is necessary to separate, within a signal, the purely deterministic parts from the non deterministic parts.

Then we present the Prony's method and give application examples for computed processing signals.

KEY WORDS

Prony's method, ARMA model, spectral analysis.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

1. Signal analysé

2. Méthode de Prony et modèle ARMA

3. Résultats de l'Étude

Conclusion

Bibliographie

Introduction

Le but du présent article est la présentation et la mise en application d'une méthode permettant de faire la discrimination, sur le spectre d'un signal, entre la partie continue et la partie discontinue. La partie continue correspond à la partie purement non déterministe du signal, la partie discontinue correspond à la partie purement déterministe du signal sous la forme de raies pures sur le spectre du signal analysé (cf. [1], t. II, partie F).

Les techniques d'identification AR ou ARMA pour déterminer le spectre, très performantes pour un signal purement non déterministe, sont non performantes dans le cas contraire (cf. [3]). Il faut donc éliminer la partie purement déterministe du spectre. En raison de l'élargissement fréquentiel dû à la fenêtre temporelle limitée, la partie purement déterministe est partiellement masquée. La partie purement non déterministe ne doit pas être modifiée par cette élimination et c'est ce point qui n'est pas réalisé par des filtrages étroits, passe-bande, centrés sur les raies à supprimer.

L'intérêt immédiat peut être l'élimination sur un signal aléatoire de parasites fréquentiels dus à des perturbations du secteur, 50 Hz ou harmoniques du 50 Hz.

La méthode de séparation sera la méthode de Prony étendue, la discrétisation des signaux et le traitement seront assurés par un microordinateur.

1. Signal analysé

Dans le cadre de travaux annexes nous disposons au laboratoire d'enregistrements magnétiques qui ont été faits à l'INRA et qui correspondent à l'essai de détection, par l'intermédiaire de capteurs acoustiques, de charançons dans les silos à blé.

Après une analyse spectrale préliminaire il s'est avéré que la bande utile du signal se trouvait entre 0 et 500 Hz, compte tenu du fait que les enregistrements sont relus à une vitesse huit fois inférieure à la vitesse d'enregistrement.

Il a donc été décidé d'échantillonner le signal à la fréquence de 2000 Hz de façon à supprimer les éventuels recouvrements sur le spectre du signal.

Le principe retenu a été de faire piloter les acquisitions par le microordinateur en utilisant une carte d'interface analogique-digital et de ranger sur disquettes les échantillons obtenus de façon à pouvoir disposer d'une mémoire de « données » pour les microordinateurs, celles-ci pouvant être éventuellement utilisées pour mettre au point d'autres logiciels.

Le nombre d'échantillons a été pris égal à 1024.

2. Méthode de Prony et modèle ARMA

Le signal observé (Y) est la somme d'un processus purement déterministe (X) et d'un bruit blanc (W) :

$$(1) \quad (Y) = (X) + (W).$$

Le processus purement déterministe peut être représenté (théorème de Wold) par une équation aux différences causale sans second membre d'ordre fini ou infini. Nous nous limitons, comme on le fait habituellement, à une équation d'ordre fini p qui s'écrit :

$$(2) \quad X_n + a_1 X_{n-1} + \dots + a_p X_{n-p} = 0,$$

conduisant pour (Y) à :

$$(3) \quad \sum_{i=1}^p a_i Y_{n-i} = \sum_{i=1}^p a_i W_{n-i}.$$

(Y) est dans un processus autorégressif à moyenne mobile (ARMA) dans lequel les parties AR et MA ont les mêmes coefficients (cf. [6]).

L'équation (2) nous montre que (X) est de la forme :

$$(4) \quad X_n = \sum_{m=1}^p B_m z_m^n,$$

avec :

$$(5) \quad \begin{cases} B_m = A_m \exp(i\theta_m), \\ z_m = \exp\{(\alpha_m + 2i\pi f_m)\Delta t\}, \end{cases}$$

où les valeurs de z_m sont les racines de l'équation caractéristique de (2).

En multipliant à gauche l'équation (3) par Y_{n-j} ($0 \leq j \leq n-p$) et en prenant l'espérance mathématique on obtient :

$$(6) \quad A \Gamma_{YY} = \sigma_W^2 A,$$

avec $A = (1, a_1, \dots, a_p)$ vecteur paramètre du proces-

APPLICATIONS

sus ARMA; Γ_{YY} = matrice des covariances du processus (Y_n); σ_w^2 = variance du bruit de fond.

Si Γ_{YY} est au moins d'ordre $(p+1, p+1)$ alors la valeur propre σ_w^2 est la valeur propre minimale de Γ_{YY} .

En effet :

Soit σ^2 une valeur propre associée à A .

$$A \Gamma_{YY} = A E(XX^t) + \sigma_w^2 A,$$

d'où :

$$A \Gamma_{YY} = A \Gamma_{XX} + \sigma_w^2 A = \sigma^2 A.$$

Γ_{XX} étant symétrique positive, on a $\sigma^2 \geq \sigma_w^2$ et σ_w^2 est atteinte dès que $A \Gamma_{XX} = 0$. Comme :

$$X_n + a_1 X_{n-1} + \dots + a_p X_{n-p} = 0,$$

l'espace vectoriel $V(X_n, \dots, X_{n-p})$ est de dimension p , donc le rang de Γ_{XX} est égal à p .

Si p n'est pas connu, on calcule σ_w^2 pour des ordres successifs et on choisit l'ordre p pour lequel σ_w^2 est voisine de celle dans l'ordre $p+1$.

Le vecteur A associé à la valeur propre σ_w^2 nous donne les paramètres $a_i, i=1 \dots p$.

L'hypothèse (W) bruit blanc se traduit à l'ordre $p+1$ par la propriété suivante : les vecteurs $(1, a_1, \dots, a_p, 0)$ et $(0, 1, a_1, \dots, a_p)$ sont vecteurs propres de la valeur propre σ_w^2 . Pour blanchir éventuellement le bruit W une augmentation du pas d'échantillonnage peut être tentée.

On effectue tout d'abord une analyse FFT du signal recueilli de façon à avoir son spectre d'origine.

On effectue ensuite la recherche des raies spectrales par la méthode de Prony de façon à avoir les coefficients correspondant à la partie purement déterministe du signal.

On fait ensuite la différence entre le signal d'origine et la partie déterministe du signal calculée d'après les coefficients.

On calcule enfin une FFT sur les échantillons ainsi obtenus de façon à vérifier la disparition des raies éventuelles.

Les échantillons traités comprennent 1024 valeurs numériques d'où une précision de l'ordre de 3% sur les divers termes de la matrice Γ des covariances. D'ailleurs l'observation Y est normalisée préalablement à tout traitement ainsi Y est approximativement de moyenne nulle et de variance égale à 1 car l'estimation statistique de la moyenne et des coefficients de la matrice Γ sont connus à 0,03 près environ.

La recherche des racines du polynôme en z associé à (2) puis l'écriture de l'équation :

$$X_n = \hat{Y}_n = \sum_{m=1}^p B_m z_m^n,$$

nous donnent la valeur des coefficients $B_k, k=1 \dots p$ en écrivant l'expression de résolution par les moindres

carrés sous la forme :

$$\hat{Y} = \Phi B_p,$$

avec :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & & z_p \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \\ \Delta \\ \mathbf{B} = (B_1, \dots, B_p), \end{bmatrix},$$

d'où :

$$B_t = [\Phi^* \Phi]^{-1} \cdot \Phi^* \cdot Y,$$

avec $\Phi^* = \Phi$ transposée, complexe conjuguée.

3. Résultats de l'étude

Une fois que les échantillons ont été mis en mémoire sur disquette, il est possible de travailler sur ces échantillons et de mettre au point les programmes de traitement.

La simulation a été effectuée sur deux signaux sinusoïdaux provenant d'un générateur basse fréquence, auxquels se sont ajoutés les bruits de fond des appareils. L'ordre p qui résulte de la précision des mesures est effectivement de 4 et lorsque la composante continue de Y n'a pas été suffisamment éliminée, $E(Y) \neq 0$, cet ordre monte à 5.

Dans le cas d'une observation réelle, il n'est pas possible de disposer du signal pur charançon : les larves se trouvent à l'intérieur des grains de blé et le blé ainsi que le capteur filtrent le signal de départ à détecter.

La résonance fort aiguë du capteur conduit à détecter des raies très voisines. Ainsi un modèle d'ordre 12 effectue cette élimination comme nous le constatons sur les figures 2a et 2b où les échelles sont égales. La résonance du capteur se trouvant vers 250 Hz, nous n'avons pas cherché à éliminer les éventuelles raies à basses fréquences 40-100 Hz en augmentant la taille de l'échantillon de 1024 à 8192 par exemple et conduisant à une précision de l'ordre de 1%; en ce cas des ordres supérieurs deviendraient significatifs et la technique éliminerait des raies de puissance plus faibles.

Conclusion

Les résultats obtenus montrent que l'objectif d'élimination de la partie déterministe, c'est-à-dire des raies fréquentielles, est réalisé. Ainsi il est possible à partir d'un système informatique relativement courant d'élaborer et de tester sur des signaux réels des techniques de traitement du signal, moyennant néanmoins pour la méthode présentée ici un temps de calcul assez long.

Ce dernier problème peut être résolu une fois les tests préliminaires effectués en passant sur un ordinateur plus performant.

manuscrit reçu le 25 juin 1984.

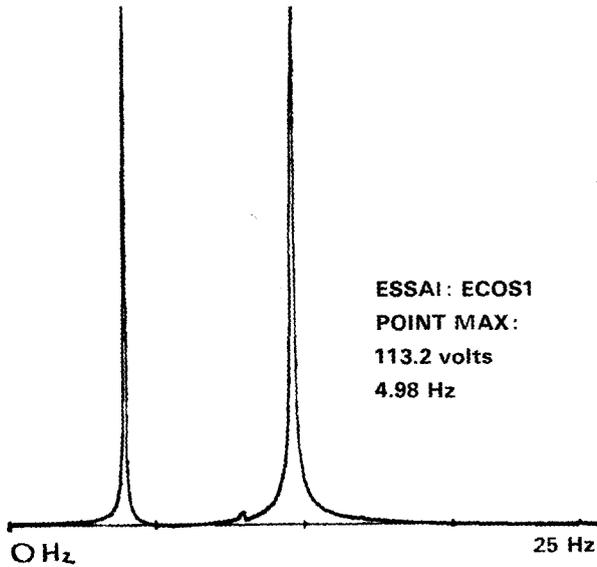


Fig. 1 a. — Spectre du signal test avant traitement.

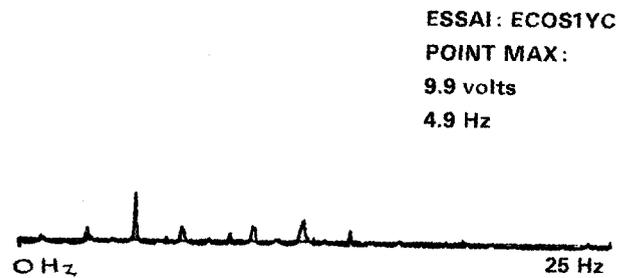


Fig. 1 b. — Spectre du signal test après traitement.

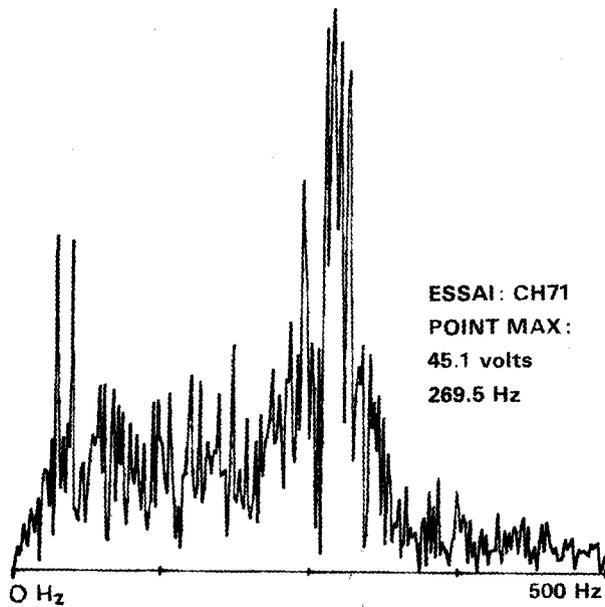


Fig. 2 a. — Spectre du signal provenant du capteur acoustique avant traitement.

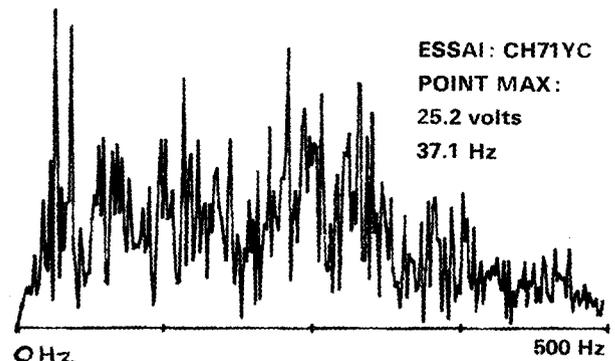


Fig. 2 b. — Spectre du signal provenant du capteur acoustique après traitement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. DE BRUCCO, *Cours de DEA, option traitement du signal*, 1982-1983, Université de Rouen.
- [2] H. P. BUCKER, Comparison of FFT and Prony algorithm for bearing estimation of narrow-band signals in realistic ocean environment, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 61, mars 1977, p. 756-762.
- [3] F. CASTANIE et P. SOULE, Comparaison expérimentale des méthodes paramétriques d'analyse spectrale appliquée aux signaux de télémétrie spatiale, *Neuvième colloque GRETSI sur le traitement du signal*, Nice, 16 au 20 mai 1983, p. 899-903.
- [4] O. L. FROST, Power Spectrum Estimation, in *Proc. 1976 Nato Advanced Study Institute on Signal Processing with emphasis on underwater acoustics*, Portovenere, La Spezia, Italy, 30 août-11 septembre 1976.
- [5] L. B. JACKSON et F. K. SOONG, Observations on linear estimation in *Rec. 1978 IEEE Int. conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, ASSP-25, décembre 1977, p. 510-519.
- [6] S. M. KAY et S. L. MARPLE, Spectrum Analysis-A Modern Perspective, *Proceeding of the IEEE*, 69, n° 11, novembre 1981, p. 1380-1419.
- [7] V. F. PISARENKO, On the estimation of spectra by means of non linear functions of the covariance matrix, *Geophysical J. Royal Astronomical Soc.*, 33, 1973, p. 347-366.
- [8] M. L. VAN BLARICUM, A review of Prony's method technics for parameter estimation, in *Proc. Rome Air Development Center Spectrum Estimation Workshop, Griffis Air Force Base*, 24-26 May 1978, p. 125-139.
- [9] S. ZOHAR, The solution of Toeplitz set of linear equation, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 21, April 1974, p. 272-276.