La formule d'échantillonnage et A. L. Cauchy

The Sampling Formula and A. L. Cauchy

par Bernard LACAZE

TeSA, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse Cedex, France.
Fax : (33) 05.61.58.82.37

résumé et mots clés

A. L. Cauchy apparaît dans beaucoup de bibliographies concernant l'échantillonnage périodique des fonctions ou des processus à spectre borné. On y associe la formule de Shannon à un article de Cauchy intitulé *Mémoire sur diverses formules d'analyse* paru en 1841 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.
Ce qui suit tend à démontrer que c'est dans un autre article de Cauchy que l'on trouve le matériel à l'origine de la formule d'échantillonnage habituelle. On montrera qu'un troisième de ses articles, concernant le calcul des résidus, permet d'envisager d'autres formules d'interpolation, y compris à prises d'échantillons non périodiques.

Échantillonnage, interpolation, formule de Shannon, processus stationnaires.

abstract and key words

The works of A. L. Cauchy appear in many referencies about band-limited function periodic sampling. The usual Shannon formula is generally associated with the famous paper of A. L. Cauchy untitled *"Mémoire sur diverses formules d'analyse"*, published in 1841 in the *"comptes rendus de l'Académie des Sciences"*. This paper shows that the sampling formula may come from another reference by A. L. Cauchy. Moreover, other interpolation formulas (even in the non-periodic case) can be derived from a third paper on complex integral calculus.

Periodic sampling, interpolation, Shannon formula, stationary processes.

1. introduction

Dans le cadre des fonctions ordinaires f (c'est-à-dire des applications de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{C}$), la **formule d'échantillonnage** s'écrit :

$$f(t) = \sum \frac{\sin \pi (t-n)}{\pi (t-n)} f(n) \qquad (1)$$

où la somme est étendue à l'ensemble des entiers relatifs $\mathcal{Z}$. Il s'agit là d'un échantillonnage à pas unité, et il suffit d'effectuer une dilatation sur t pour changer de pas.

La formule (1) s'applique lorsque f a son « spectre » contenu dans $(-\pi, \pi)$, c'est-à-dire s'écrit sous la forme :

$$f(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (2)$$

où F est de carré intégrable. On sait que, dans ce cas, la fonction de la variable complexe obtenue en prolongeant la formule précédente est une fonction entière de type exponentiel π. On peut donc trouver une constante positive a telle que $|f(z)| < ae^{\pi|z|}$ pour $|z|$ suffisamment grand (voir par exemple [22], p. 103). On verra, dans le paragraphe 4, l'importance de cette propriété. Evidemment, on a reconnu dans (f, F) un couple de transformées de Fourier, dans le cas particulier où $F(\omega)$ s'annule à l'extérieur de $(-\pi, \pi)$.

2. le rôle de $e^{i\omega t}$

2.1. une série de Fourier associée

Fixons t, et considérons $g_t(\omega)$, la fonction de la variable réelle ω définie par :

$$\begin{cases} g_t(\omega) = e^{i\omega t}, \omega \in]-\pi, \pi[\\ g_t(\omega + 2\pi) = g_t(\omega) \end{cases}$$

$g_t(\omega)$ est définie pour toute valeur de ω (si l'on se donne une valeur en $-\pi$ par exemple). Par construction, c'est une fonction périodique de ω, de période 2π, qui coïncide avec $e^{i\omega t}$ sur $]-\pi, \pi[$. Sauf pour les valeurs entières de t, ce n'est pas le cas ailleurs.

Développons g_t en série de Fourier, par rapport à ω. Les coefficients de la série dépendent de t. On obtient :

$$g_t(\omega) \sim \sum \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} e^{in\omega}$$

les deux membres de l'égalité précédente étant égaux, sauf peut-être aux points ω multiples impairs de π, où la fonction $g_t(\omega)$ n'est pas en général continue (voir n'importe quel ouvrage d'analyse exposant la théorie de Dirichlet des séries de Fourier, par exemple [23], t.3). En particulier :

$$e^{i\omega t} = \sum \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} e^{in\omega}, \omega \in]-\pi, \pi[\qquad (3)$$

en insistant sur le fait que l'égalité précédente est en général fausse pour $\omega \notin]-\pi, \pi[$. Par exemple :

$$e^{i(\omega-2\pi)t} = \sum \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} e^{in\omega}, \omega \in]\pi, 3\pi[\qquad (4)$$

La formule (3) est déjà un cas particulier de la formule d'échantillonnage, dans la mesure où elle exprime la fonction (de t) $e^{i\omega t}$ en fonction de ses « échantillons » $e^{i\omega n}$.

Notons que $e^{i\alpha t}$, comme fonction de t vérifie :

$$e^{i\alpha t} = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega t} d\Gamma(\omega - \alpha)$$

pourvu que $-\pi < \alpha < \pi$. $\Gamma(\omega)$ est la fonction échelon, et l'intégrale (de Riemann-Stieltjes) précédente est à rapprocher de l'intégrale (2). D'ailleurs, avec la notation habituelle, elle peut s'écrire d'une manière plus proche, en utilisant la « fonction » de Dirac $\partial(\omega)$:

$$e^{i\alpha t} = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega t} \partial(\omega - \alpha)\, d\omega$$

2.2. d'où la formule d'échantillonnage

Portons maintenant (3) dans (2), et intervertissons (sans états d'âme) les signes $\sum$ et $\int$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\pi}^{+\pi} F(\omega) \left(\sum \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} e^{in\omega} \right) d\omega \\ &= \sum \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\omega)\, e^{in\omega} d\omega \\ &= \sum \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} f(n) \end{aligned}$$

d'où (1). C'est la formule d'échantillonnage pour les fonctions, que l'on attribue à Shannon [11], Gabor, Kotelnikov, Nyquist... Une démonstration correcte fait appel à l'inégalité de Schwarz et au théorème de la convergence dominée.

On voit donc que cette formule d'échantillonnage est complètement déterminée par son cas particulier (3). Elle n'est valable que dans la mesure où les bornes d'intégration dans (2) sont $-\pi$ et π, puisque, à l'extérieur de $(-\pi, \pi)$, le second membre de (3) n'est pas en général égal à $e^{i\omega t}$ comme le montre (4).

3. les écrits de A. L. Cauchy

3.1. une fausse référence

Les spécialistes les plus réputés de l'échantillonnage comme A. J. Jerri [18] ou S. P. Lloyd [14], se réfèrent à l'article suivant de A. L. Cauchy [1], paru dans les CRAS en 1841 et intitulé :

« *Mémoire sur diverses formules d'analyse* »

Antérieurement aux deux auteurs précédents, H. S. Black [9] trouve dans l'article de Cauchy la phrase suivante (reprise in extenso dans [10]) :

« *If a signal is a magnitude-time function, and if time is divided into equal parts forming subintervals such that each subdivision comprises an interval T seconds long where T is less than half the period of the highest significant frequency of the signal; and if one instantaneous sample is taken from each subinterval in any manner; then a knowledge of the instantaneous magnitude of each sample plus a knowledge of the instant within each subinterval at which the sample is taken contains all of the information of the original signal* ».

Cette (longue) phrase contient la plus grande part de ce que la conscience collective attribue à l'échantillonnage d'une fonction à « spectre borné » : si l'intervalle entre échantillons successifs est borné par une constante, et si le taux moyen d'échantillonnage est inférieur à une quantité liée à la « fréquence maximale » de la fonction étudiée, cette dernière est « reconstructible ».

Cauchy a aussi beaucoup publié en sciences physiques. Mais je doute qu'il ait eu une perception aussi précise du « contenu spectral » d'une « fonction physique ».

Quoiqu'il en soit, la lecture attentive de ce premier article [1] montre deux choses :

1) il ne contient pas la phrase citée par H. S. Black (dommage!)

2) il ne contient aucune formule qui ait un rapport proche ou lointain de (3) ou de son extension (1).

Ces deux faits sont notés dans l'article de J. R. Higgins [19], qui attribue la paternité de la formule (1) à E. Borel [8], avec la différence que la fonction $F(\omega)$ de (2) vérifie les conditions de Dirichlet (des séries de Fourier). A l'appui de cette thèse, la phrase suivante :

« *Si l'on connait les valeurs de* $f(z)$ *pour* $z = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$ (*.....) la fonction* $f(z)$ *est connue sans ambiguité* ».

L'article de E. Borel date de 1897.A cette époque, il travaillait sur les fonctions entières, et notamment celles de la forme (2). L'article de Cauchy [1] a paru en 1841. Mais qu'y trouve-t-on [1]?

Cauchy considère la formule d'interpolation de Lagrange pour les polynômes :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)\,\phi(x)}{(x - x_k)\,\phi'(x_k)} \qquad (5)$$

où f est un polynôme de degré $n - 1$ et :

$$\phi(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

(les x_k sont distincts). Il étend la formule (qui comporte toujours un nombre fini de termes) dans deux directions parfaitement déterminées par les titres de paragraphes suivants :

1) « *Formules d'interpolation qui déterminent la valeur générale d'une fonction entière d'une variable* x".

2) « *Formules d'interpolation qui déterminent la valeur générale d'une fonction entière des sinus et cosinus d'un même arc* ».

La confusion vient (vraisemblablement) de ce que, pour Cauchy, une fonction entière est un polynôme de degré bien défini, et non, comme aujourd'hui, une fonction développable en série dans un domaine du plan, comme e^z, $\sin z$... Par exemple, on trouve dans [1] l'art de développer un polynôme de degré n de $\sin x$, $\cos x$ en fonction linéaire de $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x..., \cos nx$.

3.2. la formule d'interpolation de Lagrange

Dans [1], Cauchy évoque deux fois les travaux de J. L. Lagrange. La première fois, pour renvoyer à la formule (5), et la deuxième pour se référer à des travaux de l'« époque turinoise », où Lagrange développe lui aussi des puissances de lignes trigonométriques en fonction linéaire de sinus ou de cosinus.

Telle qu'elle est écrite dans (5), la formule d'interpolation de Lagrange est une formule d'échantillonnage. Pour son auteur, il s'agissait d'ajuster un polynôme à un nuage de points, comme l'avait fait précédemment Isaac Newton, à l'aide de différences finies. L'avantage de la formule de Newton est la récursivité : une nouvelle observation ne fait qu'ajouter un terme dans la formule sans modifier les autres. De son côté, la formule de Lagrange est symétrique, et présente les données de manière linéaire. A ce sujet, on pourra consulter directement [5], ou bien [7]; la formule en question se trouve dans la *cinquième leçon à l'Ecole Normale* du 22 germinal an III (11 avril 1795). On trouvera aussi dans l'annexe 10 de [7] un historique de l'interpolation.

Un fait curieux. Je n'ai pas trouvé la formule de Lagrange dans l'édition de ses œuvres complètes à une date antérieure à 1795 (tome VII, à partir de la page 283 dans la cinquième leçon de l'Ecole Normale déjà citée, intitulée « *Sur l'usage des courbes dans la solution des Problèmes* »*)*. Par contre, et cela est noté à juste titre par J. R. Higgins dans [20], elle est développée dans un article du mathématicien anglais E. Waring [6], daté de 1779, c'est-à-dire 16 ans avant les cours à l'Ecole Normale dont il est question au-dessus!

La formule (5) a pour but d'ajuster un nombre fini de points à un polynôme, alors que la formule d'échantillonnage (1) concerne un nombre infini de points, et d'autres fonctions qu'un polynôme. On peut passer de (5) à (1) en prenant pour fonction ϕ un produit infini à la place d'un polynôme, celui correspondant au développement :

$$\sin \pi t = \pi t \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)$$

Mais il y a un monde entre le produit infini précédent et un polynôme, et Lagrange n'avait (semble-t-il) pas conscience de l'extension possible de la formule qu'on lui attibue généralement, même si l'expression précédente peut être déduite de formules déjà connues à son époque.

En conclusion (provisoire), même si l'on considère que la formule d'interpolation de Lagrange (utilisée dans [1]) s'étend à des sommes infinies [25], en utilisant des produits infinis dans (5), on peut considérer néanmoins que cet article de Cauchy [1] n'est pas la bonne source.

3.3. une source intermédiaire

Comme remarqué dans le paragraphe 2, la formule d'échantillonnage est intimement liée au développement en série de Fourier (3) de $e^{i\omega t}$ sur $(-\pi, \pi)$. Je ne saurais dire si Joseph Fourier lui-même a produit la formule (3), car la fonction en question, bien qu'élémentaire, n'est pas développée sur sa période naturelle $(2\pi/t)$.

Mais A. L. Cauchy (son contemporain) la propose sous la (double) forme suivante :

$$\left(\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}\right)\cos a+\left(\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-2}\right)\cos 2a+ \left(\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s-3}\right)\cos 3a+\ldots=\pi\frac{\cos\alpha s}{\sin\pi s}-\frac{1}{s} \tag{6}$$

et :

$$\left(\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}\right)\sin a+\left(\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-2}\right)\sin 2a+ \left(\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s-3}\right)\sin 3a+\ldots=\pi\frac{\sin\alpha s}{\sin\pi s} \tag{7}$$

avec $a=\alpha-\pi$ et la limitation $|\alpha|<\pi$. Insistons sur ce dernier point, qui fait que les bornes dans (2) doivent être $\pm\pi$.

(6) et (7) sont les parties réelle et imaginaire de (3). Les formules précédentes se trouvent notamment dans l'article intitulé [2] :

« *Usage du calcul des résidus pour la sommation ou la transformation des séries...* ».

Les formules citées portent les numéros 61 et 62. On pourrait donc attribuer la formule d'échantillonnage (ou ses prémices) à Cauchy, s'il n'écrivait, la ligne suivante :

« *Les formules (61) et (62) coïncident avec deux équations données par Euler, dans le tome II des Opuscules analytiques...* »

3.4. d'où L. Euler?

Dans le *Leonhardi Euleri Opera Omnia,* le tome II des *Opuscula analytica* comprend trois articles. C'est le premier qui nous intéresse [4]. Il est daté de 1785 (Cauchy naît quatre ans plus tard) et il est intitulé :

« *De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices* ».

Qu'y trouve -t-on?

Des développements en série de la forme :

$$\frac{1}{\sin.\phi} = +\frac{1}{\phi}-\frac{1}{\phi-\pi}-\frac{1}{\phi+\pi}+\frac{1}{\phi-2\pi}+\frac{1}{\phi+2\pi} -\frac{1}{\phi-3\pi}-\frac{1}{\phi+3\pi}+etc.$$

et un ensemble de formules de même sorte. Mais nulle part l'idée d'un échantillonnage comme dans (6) et (7), où apparaissent les valeurs des lignes trigonométriques en des points qui sont en progression arithmétique. Comme déjà indiqué dans le paragraphe 3.2, on trouve aussi le développement de la cotangente, qui amène, par intégration, à celui du sinus en produit infini.

On trouve plus intéressant dans le tome I des *Opuscula analytica.* Il s'agit d'un article daté de 1783, intitulé :

« *de exumio usu methodi interpolationum in serierum doctrina* »

Le titre lui-même est explicite. L. Euler écrit par exemple :

Si ϕ denotet angulum quemcunque, erit

$$\frac{\pi\cos\cdot m\pi}{\sin\cdot m\pi} = \frac{\cos\cdot m\phi}{m}-\frac{\cos\cdot(1-m)\,\phi}{1-m}+\frac{\cos\cdot(1+m)\,\phi}{1+m} -\frac{\cos.(2-m)\,\phi}{2-m}+etc.$$

Le paramètre m est lui-même quelconque, à condition de ne pas être entier. En faisant $m\phi=\pi/2$, L. Euler en déduit (j'ai conservé l'écriture de l'époque) :

$$-\frac{\pi\cos m\pi}{\sin m\pi}=\frac{\sin.\frac{\pi}{2m}}{1-mm}+\frac{2\sin.\frac{2\pi}{2m}}{4-mm}+\frac{3\sin.\frac{3\pi}{2m}}{9-mm}+\frac{4\sin.\frac{4\pi}{2m}}{16-mm}+etc$$

qui exprime $\text{cotg}m\pi$ en fonction des échantillons de $\sin(x\pi/2m)$.

Bien que la bonne formule ne soit pas loin, l'objectif d'exprimer une fonction par ses propres échantillons n'apparaît pas. On doit en déduire que la piste Euler pourtant donnée par Cauchy lui-même, n'est pas la bonne, et attribuer au second la formule de base (3).

4. retour (définitif) à A. L. Cauchy

4.1. une autre source

Comme l'indique son titre, les formules démontrées dans [2] le sont à l'aide du *calcul des résidus* dont Cauchy est l'inventeur. Par exemple, on peut obtenir (3) en intégrant la fonction :

$$h(z)=\frac{e^{i\omega z}}{(z-t)\sin\pi z} \tag{8}$$

sur un contour ad hoc, $e^{i\omega t}/\sin\pi t$ et $(-1)^n\,e^{i\omega n}/(n-t)$ apparaissant comme les résidus de $h(z)$ aux points t (non entier) et n. A cause du comportement à l'infini de $e^{i\omega z}/\sin\pi z$, la limite de l'intégrale est nulle pour $-\pi<\omega<\pi$.

Cauchy étend ce procédé dans [3], un article intitulé :

« *Méthode pour développer des fonctions d'une ou de plusieurs variables en séries composées de fonctions de même espèce* ».

Voilà clairement indiquée l'idée de la formule d'échantillonnage : on exprimera $f(\mathbf{x}, y)$ à l'aide d'une série prenant en compte les valeurs de $f(\mathbf{x}, y_n)$ ou de fonctions qui sont liées à f, les y_n étant les instants d'échantillonnage.

Plus précisément, Cauchy énonce un théorème où apparaît la formule :

$$f(\mathbf{x},s) = G(s) \sum \frac{1}{s-r} \frac{f(\mathbf{x},r)}{((G(r)))} \tag{9}$$

où $\mathbf{x} = x, y$...est un ensemble de paramètres. La somme dans le second membre de (9) est définie comme la valeur principale (au sens de Cauchy) de la somme des résidus aux valeurs de r qui annulent $G(r)$. Par exemple, pour (3), on prendra :

$$f(x,s) = e^{ixs}, G(r) = \sin \pi r$$

qui amène à (3), à condition que $|x| < \pi$, de façon que $f(x,r)/G(r)$ ait un comportement acceptable pour les grandes valeurs de $|r|$.

La formule (9) est un passage à la limite dans la formule des résidus (voir par exemple [24]) appliquée à :

$$\int_{\Gamma_n} \frac{f(\mathbf{x},z)}{(z-t)\,G(z)} dz = \frac{f(\mathbf{x},t)}{G(t)} + \sum_{k \in A_n} Rés_g(a_k) \to_{n\to\infty} 0 \tag{10}$$

où g est la fonction à intégrer, $\{a_k, k \in A_n\}$ l'ensemble des 0 de $G(z)$ à l'intérieur du contour fermé (orienté) Γ_n, et $Rés_g(a_k)$ le résidu correspondant. Dans le cas où $G(z)$ ne possède que des pôles simples, (9) se réduit à :

$$\frac{f(\mathbf{x},t)}{G(t)} = \sum_k \frac{f(\mathbf{x},a_k)}{(t-a_k)\,G'(a_k)}$$

c'est-à-dire à la généralisation de la formule d'interpolation de Lagrange. C'est une formule d'échantillonnage dans le sens où elle donne $f(\mathbf{x},t)$ en fonction (linéaire) de ses échantillons $f(\mathbf{x}, a_k)$.

La formule précédente peut s'appliquer pour toute famille de fonctions $f(\mathbf{x},t)$ dont la transformée de Fourier $F(\mathbf{x},\omega)$ est nulle à l'extérieur de l'intervalle $]-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon[$, avec $G(r) = \sin \pi r$. Dans ce cas, à chaque valeur de $\mathbf{x}$, on peut associer un a tel que :

$$|f(\mathbf{x},r)| < ae^{(\pi-\varepsilon)|r|}$$

pour les grandes valeurs de $|r|$. En conséquence, l'intégrale de la fonction

$$\frac{f(\mathbf{x},z)}{(z-t)\sin \pi z}$$

sur un contour adéquat (voir au-dessous) peut être rendue arbitrairement petite, et donc vérifier (10). Dans ce cas, la formule (1) se généralise sous la forme :

$$f(\mathbf{x},t) = \sum \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} f(\mathbf{x},n) \tag{11}$$

D'autres exemples sont donnés par Cauchy dans cet article [3]. Mais ils ne concernent pas uniquement des valeurs périodiques de l'échantillonnage comme c'est le cas pour la formule (3) : la méthode peut théoriquement s'appliquer à un échantillonnage quelconque.

Par exemple, on trouve dans [3] la formule suivante ($-a < x < a$) :

$$\cos sx = (\sin as + s\cos as) \sum \frac{\cos rx}{(s-r)\,[(a+r)\cos ar - ar \sin ar]}$$

où la somme est étendue aux valeurs de r qui sont racines de l'équation :

$$\sin ar + r\cos ar = 0$$

Les solutions de cette équation sont toutes réelles, mais ne sont évidemment pas en progression arithmétique. On a donc un développement de $\cos sx$ comme combinaison linéaire des $\cos r_j x$, les r_j n'étant plus périodiques.

Ce qui montre que A. L. Cauchy peut être considéré non seulement comme le pionnier de l'échantillonnage ordinaire, mais aussi de l'échantillonnage non périodique !

4.2. et d'autres formules d'interpolation...

Cauchy prévoit le cas où les pôles dans l'intégrale (10) sont multiples. Considérons par exemple :

$$h(z) = \frac{e^{i\omega z}}{(z-t)\sin^2(\pi z)}$$

Dans ce cas, $h(z)$ a des pôles doubles aux points entiers. Intégrons $h(z)$ sur le carré Γ_n centré à l'origine du plan, de côtés parallèles aux axes de coordonnées, et passant par le point $(n+1/2, 0)$. On vérifiera que, pour $-2\pi < \omega < 2\pi$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} h(z)\,dz = 0$$

cette limite étant reliée au comportement à l'infini de $e^{i\omega z}/\sin^2(\pi z)$. Le théorème des résidus donne alors :

$$e^{i\omega t} = \frac{\sin^2 \pi t}{\pi^2} \sum \frac{1}{(t-n)^2} \left[e^{i\omega n} + (t-n)\, i\omega e^{i\omega n}\right], \tag{12}$$

$-2\pi < \omega < 2\pi$

Supposons maintenant que :

$$f(t) = \int_{-2\pi}^{2\pi} F(\omega)\,e^{i\omega t} d\omega, f'(t) = \int_{-2\pi}^{2\pi} F(\omega)\, i\omega e^{i\omega t} d\omega$$

En reportant (12) dans (3) comme cela a été fait §2, on arrive à :

$$f(t) = \frac{\sin^2 \pi t}{\pi^2} \sum \frac{1}{(t-n)^2} \left[f(n) + (t-n)\,f'(n)\right] \tag{13}$$

formule que l'on trouvera notamment dans [16] et [17]. Du fait du comportement à l'infini de $h(z)$, la formule d'échantillonnage associée s'applique pour des fonctions à spectre dans $(-2\pi, 2\pi)$, à la place de $(-\pi, \pi)$. (13) peut se généraliser en remplaçant $\sin^2 \pi z$ par une autre fonction. Par exemple, on fera intervenir $f''(t)$ en prenant $\sin^3 \pi z$, et la formule s'appliquera pour des spectres nuls à l'extérieur de $(-3\pi, 3\pi)$. Mais d'autres types d'échantillonnage peuvent être étudiés à l'aide du calcul des résidus.

L'intervention de (ou des) dérivées de la fonction à développer dans la formule d'échantillonnage est donc liée à l'ordre de multiplicité des pôles dans la fonction de la variable complexe qui est intégrée. Cauchy prévoit cette situation dans l'article [3].

5. l'échantillonnage des fonctions aléatoires stationnaires

5.1. le cadre

En ce qui concerne l'échantillonnage périodique des fonctions aléatoires stationnaires, la formule d'échantillonnage est démontrée pour la première fois par A. V. Balakrishnan dans [15], et, en toute généralité, par S. P. Lloyd dans [14].

Le cadre est le suivant. $Z = \{Z(t), t \in \mathcal{R}\}$, est une famille de variables aléatoires réelles ou complexes, de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation continue telle que :

$$K_Z(\tau) = E[Z(t) Z^*(t-\tau)] = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega\tau} dS_Z(\omega) \qquad (14)$$

$S_Z(\omega)$ est positive bornée et non décroissante. C'est le « spectre de puissance » de Z. Si $S_Z(\omega)$ est continue en $\pm\pi$, on a le pendant « aléatoire » de la formule (1) :

$$Z(t) = \sum \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} Z(n) \qquad (15)$$

où le sens à donner à l'égalité $A = B$ est ($E[-]$ désigne l'espérance mathématique) :

$$A = B \Leftrightarrow E\left[|A-B|^2\right] = 0$$

Pour démontrer (15), on ne dispose plus de la formule (2), mais on peut utiliser (14) comme intermédiaire, voir [15], ou [13] th.16.

5.2. le rôle de $e^{i\omega t}$

L'outil le plus important de l'analyse linéaire des f.a stationnaires est l'« isométrie fondamentale » notée I_Z, entre les espaces de Hilbert $H(Z)$ et $H'(S_Z)$ définis de la manière suivante.

$H(Z)$ est l'ensemble des v.a de la forme :

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{kn} Z(t_{kn})$$

le mode de convergence étant défini par le produit scalaire :

$$\langle A, B \rangle_{H(Z)} = E[AB^*]$$

$H'(S_Z)$ est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{kn} e^{i\omega t_{kn}}$$

avec le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H'(S_Z)} = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega) g^*(\omega) dS_Z(\omega)$$

L'isométrie I_Z est définie par la correspondance :

$$Z(t) \underset{I_Z}{\leftrightarrow} e^{i\omega t}$$

Alors, décomposer linéairement $Z(t)$ en fonction de ses échantillons $Z(n)$ est exactement la même chose que d'exprimer linéairement $e^{i\omega t}$ en fonction des $e^{i\omega n}$ sur l'ensemble des valeurs de ω convenable. D'ailleurs, cet ensemble n'est pas obligatoirement un intervalle [14]. Dans le cas où (14) est vérifiée, on a donc aussi :

$$Z(t) = \sum \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} Z(n)$$

D'autre part, remarquons que, dans l'isométrie, on a la correspondance :

$$Z'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[Z(t+h) - Z(t)] \underset{I_Z}{\leftrightarrow} \lim_{h\to 0} \frac{e^{i\omega t}}{h}\left(e^{i\omega h} - 1\right)$$

$$= i\omega e^{i\omega t}$$

ce qui fait que (12) et/ou (13) impliquent :

$$Z(t) = \frac{\sin^2 \pi t}{\pi^2} \sum \frac{1}{(t-n)^2}[Z(n) + (t-n) Z'(n)]$$

lorsque les bornes dans l'intégrale (14) sont $\pm 2\pi$ à la place de $\pm\pi$.

En somme, la solution du problème est à peu près la même pour les processus aléatoires que pour les fonctions ordinaires, puisqu'il s'agit de développer la même fonction $e^{i\omega t}$, la différence résidant dans le mode de convergence utilisé. Les formules valables dans un cas le seront en général dans l'autre.

6. conclusion

C'est d'une manière mystérieuse que A. L. Cauchy apparaît dans les bibliographies consacrées à l'échantillonnage. On le trouve par exemple dans les articles ou les ouvrages de S. P. Lloyd [14], A. J. Jerri [18], H. S. Black [9], J. L. Yen [10], et pas dans ceux de E. T. Whittaker [12], J. M. Whittaker [13], C. E. Shannon [11], et A. V. Balakrishnan [15]. L'article de Cauchy [1] que les premiers de ces auteurs citent n'a pas de rapport avec le sujet, puisqu'il ne s'agit que de diverses formules complètement liées à la formule d'interpolation de Lagrange où le nombre de points est fixé et fini. Et, si l'on considère la formule d'échantillonnage comme l'extension à une infinité de points de la formule d'interpolation de Lagrange (c'est le cas dans l'ouvrage de J. R. Higgins [20]), c'est directement à J. L. Lagrange [5] (ou à E. Waring [6]) qu'il faut se référer, ou à une source concernant les fonctions entières (au sens moderne du terme), et non pas à cet article de A. L. Cauchy.

D'un autre côté, on démontre généralement la formule en question par un développement en série de Fourier élémentaire. C'est le cas dans C. E. Shannon [11], A. J. Jerri [18], ou A. V. Balakrishnan [15]. Une exception notable : dans l'ouvrage de J. M. Whittaker [13], c'est le calcul des résidus qui est utilisé.

C'est cette piste qui ramène à A. L. Cauchy. Et le fait que toute formule d'échantillonnage revient à développer $e^{i\omega t}$ en fonction de ses échantillons $e^{i\omega t_n}$, sur un ensemble convenable de valeurs de ω. J'espère avoir montré que les deux articles de Cauchy [2] et [3] contiennent tout le matériel nécessaire pour construire la formule d'échantillonnage classique (1), et diverses autres, comme (13)... Nul doute qu'une lecture plus approfondie de ses cours et exercices permettrait d'exhumer d'autres formules de la même sorte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. L. Cauchy, *Mémoire sur diverses formules d'analyse,* CRAS, Vol.12, 1841, pp. 283-298.

[2] A. L. Cauchy, *Usage du calcul des résidus pour la sommation ou la transformation des séries dont le terme général est une fonction paire du nombre qui représente le rang de ce terme,* Oeuvres de Cauchy, série II, tome VII, pp. 346-362.

[3] A. L. Cauchy, *Méthode pour développer des fonctions d'une ou de plusieurs variables en séries composées de fonctions de même espèce,* Oeuvres de Cauchy, série II, tome VII, pp. 366-392.

[4] L. Euler, *De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices,* Leonhardi Euleri Opera Omnia, series prima, t.XV, pp. 621-660, ou Opuscula analytica 2, 1785, p. 102-137.

[5] *Séances des Ecoles normales recueillies par les sténographes et revues par les professeurs,* Paris, L. Reynier, 1795.

[6] E. Waring, *Problems concerning Interpolations,* Philosophical Trans. of the Royal Society of London, Vol. 69, p. 59-67.

[7] B. Belhoste, A. D. Dalmedico, J. Dhombres, R. Laurent, J. Sakarovitch, R. Taton, *L'Ecole Normale de l'an III, leçons de mathématiques,* Dunod, 1992.

[8] E. Borel, *Sur l'interpolation*, CRAS, t. 124, 1987, pp. 673-676.

[9] H. S. Black, *Modulation Theory,* Van Nostrand, 1953, pp. 41-58.

[10] J. L. Yen, *On Nonuniform Sampling of Bandwith-Limited Signals,* IRE Trans. on Circ. Th., 1956, CT-3, n°12, pp. 251-257.

[11] C. E. Shannon, *Communication in the Presence of Noise,* Proc.IRE, 1949, Vol. 37, pp. 10-21.

[12] E. T. Whittaker, *On the Functions which are represented by the Expansions of the Interpolation-Theory,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1915, Sect. A, Vol. 35, pp. 181-194.

[13] J. M. Whittaker, *Interpolatory Function Theory*, 1935, Cambridge Uni. Press.

[14] S. P. Lloyd, *A Sampling Theorem for Stationary (Wide Sense) Stochastic Processes,* Trans. Am. Math. Soc., 1959, Vol. 92, pp. 1-12.

[15] A. V. Balakrishnan, *A Note on the Sampling Principle for Continuous Signals,* IRE Trans. on Inf. Th., june 1957, pp. 143-146.

[16] D. A. Linden, N. M. Abramson, *A Generalization of the Sampling Theorem,* Inf. and Control, 1960, 3, pp. 26-31.

[17] M. D. Rawn, *A Stable Nonuniform Sampling Expansion Involving Derivatives,* IEEE Trans. on IT, Vol. 35, n°6, nov. 1989, pp. 1223-1227.

[18] A. J. Jerri, *The Shannon Sampling Theorem- Its Various Extensions and Applications : A Tutorial Review*, Proc. of the IEEE, Vol. *65, n°*11, nov. 1977, pp. 1565-1596.

[19] J. R. Higgins, *Five Short Stories about the Cardinal Series,* Bull. Am. Math. Soc., Vol. 12, n°1,1985, pp. 45-89.

[20] J. R. Higgins, *Sampling Theory in Fourier Analysis and Signal Analysis. Foundations,* Oxford Sc. Pub, 1996.

[21] R. J. Marks II, *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Springer-Verlag, 1991.

[22] R. P. Boas, *Entire Functions,* Academic Press, 1954.

[23] V. Smirnov, *Cours de Mathématiques supérieures*, Mir, 1969.

[24] G. Valiron, *Théorie des fonctions*, Masson, 1955.

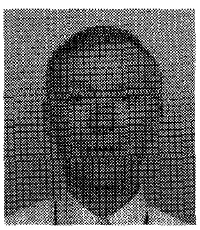
[25] B. Ja. Levin, *Zeros of Entire Functions,* Am. Math. Soc., 1964.

[26] H. Cramer, M. R. Leadbetter, *Stationary and Related Stochastic Processes,* Wiley, 1967.

Manuscrit reçu le 2 avril 1998.

L' AUTEUR

Bernard LACAZE



Docteur de 3ème cycle en électronique (1966). Docteur ès Sciences Mathématiques (1971). Professeur des Universités depuis 1975, en poste à l'INSA de Toulouse. Activités de recherche en théorie du signal et en mécanique statistique des gaz.