

Evaluation de la composante blanche de signaux accélérométriques et gyrométriques par la méthode de la variance d'Allan

Quantification of the White Noise Component in Accelerometer and Gyrometer Output Signals using the Allan Variance Method

par Fabien PETIT*, Daniel BAUDOIS**, Jean-Paul ISRAËL*

* Laboratoire de Recherches Balistiques et Aérodynamiques F-27200 Vernon

** CEPHAG – ENSIEG, BP 46 F-38402 Saint Martin d'Hères

résumé et mots clés

La méthode dite de la variance d'Allan est un outil couramment utilisé pour discriminer et caractériser différentes composantes de bruits intervenant dans les oscillateurs de précision. Cet article présente une approche théorique des propriétés de la méthode et montre comment elles peuvent être utilisées afin d'adapter l'outil pour l'analyse de signaux de capteurs inertiels. De plus, nous avons déterminé un indice de qualité de l'outil en terme de moyenne et de variance et nous proposons une expression empirique de sa densité de probabilité. Cette étude est enfin étayée par l'évaluation de la composante blanche de signaux accélérométriques et gyrométriques réels.

Variance d'Allan, Analyse de bruits, Gyromètres, Accéléromètres, Densités de probabilité.

abstract and key words

The so-called « Allan variance method » is a well-known tool extensively used in the discrimination and characterization of noise components in precision oscillators. Theoretical properties are discussed in this paper and it is shown how they can be utilized to adapt the tool to the analysis of inertial sensors signals. Furthermore, a figure of merit expressed in terms of mean and variance is presented to quantify the performance of the method, and, an empirical formula for the probability density function is proposed. An example of application is then given where the method is applied to real accelerometer and gyrometer outputs to evaluate their white noise component.

Allan variance, Noise analysis, Gyrometers, Accelerometers, Probability density functions.

1. introduction et objectifs

La méthode dite de la variance d'Allan [1] (ou variance à deux échantillons) a été développée au milieu des années 60 pour permettre la caractérisation, dans le domaine temporel, des fluctuations de fréquence et de phase des oscillateurs de précision (horloge atomique par exemple). Elle est depuis, devenue un procédé d'analyse standard pour l'estimation des différents types de bruits présents dans un signal de type oscillateur [2], [6] et [12]. Dans le domaine inertiel, cette méthode est classiquement utilisée pour

la caractérisation des bruits perturbateurs affectant la sortie des gyromètres laser [3] et [8]. Elle s'est révélée particulièrement efficace pour mesurer la dérive aléatoire de ces mêmes gyromètres; elle est de ce fait très couramment utilisée industriellement.

En fait, l'évaluation du niveau de dérive aléatoire, classiquement décrite en tant que bruit blanc, est un souci constant dans le domaine inertiel tant pour les gyromètres que pour les accéléromètres. En effet, c'est parmi les bruits perturbant les sorties accélérométriques et gyrométriques la partie la plus contraignante à long terme pour l'évaluation des attitudes (position angulaire), des vitesses et des positions d'un porteur. Il s'ensuit que la connaissance de son niveau est nécessaire dans le cadre

de simulation ou de spécification de performances d'une centrale inertielle.

L'article présente l'utilisation de cet outil pour l'analyse de signaux gyrométriques et accélérométriques discrets sans restriction à une technologie particulière. L'approche choisie ici est fondée sur l'analyse d'un signal numérique blanc filtré linéairement par des filtres représentatifs de ceux couramment appliqués aux signaux accélérométriques et gyrométriques. Ces calculs s'appuient sur les propriétés statistiques temporelles de ces signaux. Des calculs ont également été développés pour des composantes déterministes présentes dans ce type de signaux. Les résultats théoriques présentés ont également pour objet de permettre l'amélioration des modèles de bruit accélérométriques et gyrométriques utilisés en simulation au sens large. Il conviendra alors d'associer à ces résultats l'aspect technologique du capteur considéré ainsi que celui de la chaîne de restitution de la mesure.

L'objectif est de permettre la séparation de sources de bruit et plus précisément la partie relative au bruit blanc. Nous montrerons que l'outil répond à cet objectif à partir d'un nombre réduit d'échantillons.

2. définitions et notations

Les définitions qui suivent sont celles présentées dans l'article de J. Barnes et al. [2] qui constitue une référence sur ce sujet.

On considère un signal discret représenté par la suite d'échantillons $\{u(i)\}$ ($i = 1$ à N). Des groupes disjoints de p termes consécutifs ($1 \leq p \leq \frac{N}{2}$) sont formés et on définit successivement :

$$Mu_k(p) \triangleq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p u((k-1)p + i)$$

qui représente la moyenne établie sur un paquet de p termes consécutifs du $(k-1)p + 1^{\text{ème}}$ au $kp^{\text{ème}}$ et la différence première entre deux moyennes (échantillons consécutives).

$$\xi_k(p) \triangleq Mu_{k+1}(p) - Mu_k(p)$$

Ce qui peut être décrit schématiquement par :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} & \cdots & & \\ & Mu_k(p) & Mu_{k+1}(p) & Mu_{k+2}(p) & & & \\ & \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} & & & & \\ & \xi_k(p) & \xi_{k+1}(p) & & & & \end{array}$$

Il faut noter que le calcul de $\xi_k(p)$ par différence de deux moyennes de même nombre d'échantillons permet d'éliminer la composante constante du signal u .

Ces différences forment à leur tour un ensemble de variables aléatoires dont on calcule la moyenne quadratique. La variance

d'Allan théorique (variance à deux échantillons) est alors définie par :

$$\sigma_\xi^2(p) = \frac{1}{2} \langle \xi_k^2(p) \rangle \triangleq \lim_{n_p \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n_p - 1)} \sum_{k=1}^{n_p-1} \xi_k^2(p) \quad (E1)$$

Il s'agit ici d'une limite en moyenne quadratique, n_p correspond au nombre de groupes disjoints qu'il est possible de réaliser à partir de N échantillons; c'est la partie entière de N/p . Dans le cadre de cette étude, cette limite existe pour les signaux qui seront considérés.

La formulation choisie ici, sans recouvrement des groupes $\xi_k(p)$, correspond à celle appelée « tau-overlap estimator » par Yoshimura [11], d'autres formulations ont été proposées [5] et [12] mais elles n'ont pas été reprises dans le présent article.

Le nombre d'échantillons n'étant pas infini, une estimation de cette variance, que nous noterons $\sigma_\xi^2(p, n_p)$, est :

$$\sigma_\xi^2(p, n_p) = \frac{1}{2(n_p - 1)} \sum_{k=1}^{n_p-1} \xi_k^2(p) \quad (E2)$$

Cet estimateur est non biaisé si le processus $\xi_k(p)$ vérifie la relation :

$$\langle \xi_k^2(p) \rangle = E \{ \xi_k^2(p) \} \quad (H1)$$

En effet :

$$E \{ \sigma_\xi^2(p, n_p) \} = \frac{1}{2(n_p - 1)} \sum_{k=1}^{n_p-1} E \{ \xi_k^2(p) \} = \sigma_\xi^2(p)$$

La notation $E\{X\}$ désignant l'espérance mathématique de la variable X .

La variance de cet estimateur a pour expression :

$$\text{Var} \{ \sigma_\xi^2(p, n_p) \} = E \{ [\sigma_\xi^2(p, n_p) - E \{ \sigma_\xi^2(p, n_p) \}]^2 \}$$

Si l'estimateur est non biaisé cette expression conduit à :

$$\begin{aligned} \text{Var} \{ \sigma_\xi^2(p, n_p) \} &= \frac{1}{4(n_p - 1)^2} \sum_{k=1}^{n_p-1} \sum_{l=1}^{n_p-1} E \{ \xi_k^2(p) \xi_l^2(p) \} - (\sigma_\xi^2(p))^2 \end{aligned}$$

Si le processus $\xi_k(p)$ est gaussien, le moment d'ordre 4 intervenant dans cette dernière expression peut s'écrire :

$$\begin{aligned} E \{ \xi_k^2(p) \xi_l^2(p) \} &= E \{ \xi_k^2(p) \} E \{ \xi_l^2(p) \} + 2 [E \{ \xi_k(p) \xi_l(p) \}]^2 \end{aligned}$$

Comme précisé en introduction, les bruits considérés dans cette étude sont des combinaisons linéaires de bruits blancs, par conséquent et compte-tenu de leur expression, les termes $\xi_k(p)$ le sont également. C'est pourquoi, dans la suite de cet exposé, lors de l'évaluation de la variance de l'estimateur $\sigma_\xi^2(p, n_p)$, les bruits blancs qui seront considérés seront supposés gaussiens ce qui assurera au processus $\xi_k(p)$ d'être lui-même gaussien.

Sous cette hypothèse l'expression de la variance de l'estimateur est alors obtenue par l'évaluation de l'expression :

$$\text{Var}\{\sigma_{\xi}^2(p, n_p)\} = \frac{1}{2(n_p - 1)^2} \sum_{k=1}^{n_p-1} \sum_{i=1}^{n_p-1} E\{\xi_k(p) \xi_i(p)\} \quad (\text{E3})$$

Nous nous proposons dans une première étape pour les signaux aléatoires classiquement rencontrés dans le domaine inertiel, de rappeler leur variance d'Allan théorique $\sigma_{\xi}^2(p)$ et d'en caractériser l'estimateur $\sigma_{\xi}^2(p, n_p)$ en terme de biais et de variance statistiques. Dans une deuxième étape nous montrerons que sous certaines hypothèses il est possible de caractériser l'estimateur par sa densité de probabilité. Ce qui permet de chiffrer ses qualités en termes d'enveloppe de confiance. Nous caractériserons également la variance d'Allan associée à des signaux déterministes de type rampe ou sinus fréquemment présents dans les signaux analysés et dont il est nécessaire d'évaluer l'impact sur la variance estimée. Enfin, nous présenterons l'utilisation de l'outil pour l'analyse de quelques acquisitions de signaux accélérométriques et gyrométriques.

Remarque :

En s'appuyant sur l'expression de $\sigma_{\xi}^2(p, n_p)$, il est possible de calculer ces estimées pour p variant de 1 à $N/2$. En fait, dans le cas où le signal possède un caractère aléatoire, la qualité de l'estimateur se détériore fortement pour les valeurs de p supérieures à $N/10$. Ainsi, d'un point de vue pratique les calculs sont effectués jusqu'à cette limite, c'est à dire n_p égal à 10.

3. calculs et caractérisations théoriques

Dans les cas pratiques, le bruit apparaît comme la somme de plusieurs processus comprenant une composante blanche ainsi qu'une composante que l'on peut considérer comme un signal borné différencié (bruit d'activation pour les gyromètres laser, excitation sur pot vibrant, ...). La partie blanche de ce bruit est celle qui influe à plus long terme. C'est celle que nous désirons évaluer. Les calculs théoriques sont menés en assimilant le terme additionnel à un bruit blanc différencié en première approximation. C'est pourquoi nous allons présenter successivement les résultats concernant chacun de ces deux modèles ainsi que ceux relatifs à leur somme. Puis nous montrerons qu'une intégration du signal avant d'effectuer le calcul de variance d'Allan permet de réduire le nombre d'acquisitions nécessaires à l'évaluation de la composante blanche.

3.1. résultats concernant le bruit blanc

Il est supposé centré ergodique jusqu'à l'ordre 2 et stationnaire. Il sera noté η

$$\langle \eta(i) \rangle \triangleq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta(i) = E\{\eta(i)\} = 0 \quad (\text{H2})$$

$$\langle \eta(n) \times \eta(n - i) \rangle = E\{\eta(n) \times \eta(n - i)\} = \sigma^2 \times \delta(i)$$

σ est l'écart type du processus η et δ la notation de kroenecker.

Le terme $\xi_k(p)$ peut s'écrire :

$$\xi_k(p) = \sum_{i=1}^p \left(-\frac{1}{p}\right) \eta((k-1)p + i) + \left(\frac{1}{p}\right) \eta(kp + i)$$

La variance d'Allan théorique associée, compte tenu des hypothèses (H2), vaut :

$$\sigma_{\xi}^2(p) = \frac{\sigma^2}{p} \quad (\text{R3})$$

Il est courant d'utiliser la représentation logarithmique pour tracer l'évolution de $\sigma_{\xi}^2(p)$ en fonction de p . Ici le tracé de $\log(\sigma_{\xi}^2(p))$ en fonction de $\log(p)$ se traduit par une droite de pente -1 .

Qualité de l'estimateur $\sigma_{\xi}^2(p, n_p)$: Moyenne statistique :

$$E\{\sigma_{\xi}^2(p, n_p)\} = \sigma_{\xi}^2(p) \quad \text{l'estimateur est sans biais}$$

Variance statistique :

$$\text{Var}\{\sigma_{\xi}^2(p, n_p)\} = [\sigma_{\xi}^2(p)]^2 \times \frac{3n_p - 4}{(n_p - 1)^2} \xrightarrow[n_p \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\text{R4})$$

L'estimateur est donc convergent.

Remarque :

Compte tenu de la forme de l'expression de la variance, il est possible de définir une variance relative et par suite, un écart type relatif, indépendant de p , que nous noterons $\lambda(n_p)$:

$$\lambda(n_p) = \sqrt{\text{Var} \left\{ \frac{\sigma_{\xi}^2(p, n_p)}{\sigma_{\xi}^2(p)} \right\}} = \frac{\sqrt{3n_p - 4}}{n_p - 1} \quad (\text{R5})$$

Cet écart type relatif traduit une certaine qualité de l'estimateur.

Ainsi, pour $n_p = 50$: $\lambda(50) \approx 25\%$

et pour $n_p = 10$: $\lambda(10) \approx 57\%$.

C'est pourquoi, pour observer la pente -1 sur une décade ($1 \leq p \leq 10$) avec une précision de 25% pour p égal à 10, il faut au minimum 500 points.

3.2. résultats concernant le bruit blanc différencié

Ce processus est défini par : $u(i) = \eta(i) - \eta(i - 1)$ où η est le processus défini précédemment.

Le terme $\xi_k(p)$ s'écrit alors :

$$\xi_k(p) = \frac{1}{p} \left[\eta((k+1)p) - 2\eta(kp) + \eta((k-1)p) \right]$$

La variance d'Allan théorique associée vaut :

$$\sigma_\xi^2(p) = \frac{3\sigma^2}{p^2} \quad (\text{R6})$$

Ici le tracé de $\log(\sigma_\xi^2(p))$ en fonction de $\log(p)$ se traduit par une droite de pente -2 .

Qualité de l'estimateur $\sigma_\xi^2(p, n_p)$:

$$\begin{aligned} E\{\sigma_\xi^2(p, n_p)\} &= \sigma_\xi^2(p) \quad \text{l'estimateur est sans biais} \\ \text{Var}\{\sigma_\xi^2(p, n_p)\} &= [\sigma_\xi^2(p)]^2 \times \frac{35n_p - 53}{9(n_p - 1)^2} \xrightarrow{n_p \rightarrow +\infty} \end{aligned} \quad (\text{R7})$$

L'estimateur est donc convergent.

L'écart type relatif a cette fois pour expression :

$$\lambda(n_p) = \frac{\sqrt{35n_p - 53}}{3(n_p - 1)} \quad (\text{R8})$$

Alors pour n_p égal à 65 : $\lambda(65) \approx 25\%$ et pour n_p égal à 10 : $\lambda(10) \approx 64\%$.

3.3. résultats concernant la somme des deux processus

Ce processus s'écrit :

$$u(i) = \eta_1(i) - \eta_1(i - 1) + \eta_2(i)$$

Le terme $\xi_k(p)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \xi_k(p) &= \frac{1}{p} [\eta_1((k+1)p) - 2\eta_1(kp) + \eta_1((k-1)p)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \left(-\frac{1}{p} \right) \eta_2((k-1)p + i) + \left(\frac{1}{p} \right) \eta_2(kp + i) \end{aligned}$$

On suppose que les deux bruits blancs η_1 et η_2 sont centrés, vérifient les hypothèses (H2) ainsi que la relation suivante :

$$\langle \langle \eta_1(i)\eta_2(j) \rangle \rangle = E\{\eta_1(i)\eta_2(j)\} = 0 \quad \forall i, j \quad (\text{H3})$$

La variance d'Allan s'exprime comme la somme des variances d'Allan respectives, soit :

$$\sigma_\xi^2(p) = \sigma_{\xi_1}^2(p) + \sigma_{\xi_2}^2(p) = \frac{3\sigma_1^2}{p^2} + \frac{\sigma_2^2}{p} \quad (\text{R9})$$

Dans ce cas, l'expression de $\log(\sigma_\xi^2(p))$ est :

$$\log(\sigma_\xi^2(p)) = \log(\sigma_2^2) - 2\log(p) + \log\left(p + \frac{3\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$$

Alors, le tracé de $\log(\sigma_\xi^2(p))$ en fonction de $\log(p)$ fait apparaître une droite de pente -2 tant que p est faible devant $3\sigma_1^2/\sigma_2^2$ puis une droite de pente -1 dès que p est grand devant cette même valeur. Cette valeur, qui correspond au point de rupture de pente, sera notée p_r :

$$p_r = \frac{3\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

En utilisant cette variable on obtient :

$$\sigma_\xi^2(p) = \sigma_{\xi_1}^2(p) \left(1 + \frac{p}{p_r}\right) = \sigma_{\xi_2}^2(p) \left(\frac{p_r}{p} + 1\right)$$

Qualité de l'estimateur :

– Il est sans biais

– Il est convergent, deux expressions de sa variance peuvent être proposées :

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\sigma_\xi^2(p, n_p)\} &= [\sigma_{\xi_1}^2(p)]^2 \times \frac{35n_p - 53}{9(n_p - 1)^2} + [\sigma_{\xi_2}^2(p)]^2 \\ &\quad \times \frac{3n_p - 4}{(n_p - 1)^2} + \frac{4}{3} \times \frac{5n_p - 7}{(n_p - 1)^2} \times \sigma_{\xi_1}^2(p) \times \sigma_{\xi_2}^2(p) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\sigma_\xi^2(p, n_p)\} &= \frac{35n_p - 53 + \left(\frac{3p}{p_r}\right)^2 (3n_p - 4) + \frac{12p}{p_r} (5n_p - 7)}{9(n_p - 1)^2 \left[1 + \frac{p}{p_r}\right]^2} \times [\sigma_\xi^2(p)]^2 \end{aligned} \quad (\text{R10})$$

Pour p égal à p_r , l'expression (R10) de la variance implique :

$$\text{Var}\{\sigma_\xi^2(p_r, np_r)\} = [\sigma_\xi^2(p_r)]^2 \times \frac{122np_r - 173}{36(np_r - 1)^2}$$

Comme il a été précisé au début de ce paragraphe 2, le phénomène recherché est celui correspondant à la composante blanche présente dans le signal. Ce qui conduit à distinguer, sur le graphe logarithmique de la variance d'Allan estimée, la droite de pente -1 relative à ce modèle.

Cette droite est observable quand :

$$\log(\sigma_\xi^2(p)) \approx \log(\sigma_2^2) - \log(p)$$

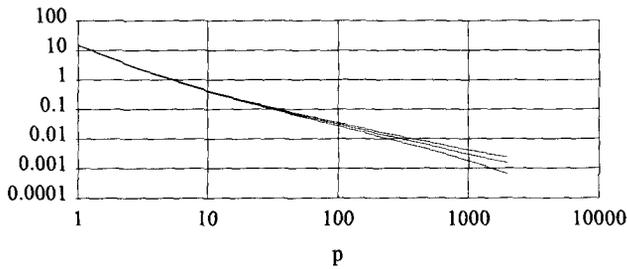


Figure 1. – Courbe de variance d'Allan théorique (échelle logarithmique) ainsi que ses valeurs à plus ou moins un sigma.

Cette approximation est valable dès que p est supérieur à dix fois p_r , on observe alors un début de pente -1 . Si l'on désire observer cette pente sur une décade, cela conduit à calculer la variance pour cent fois p_r .

$$\begin{aligned} \text{pour } p = 100 * p_r \text{ et } n_p = 50 & \quad \lambda(n_p) \approx 25\% \\ \text{pour } p = 10 * p_r \text{ et } n_p = 500 & \quad \lambda(n_p) \approx 8\% \end{aligned}$$

Cette hypothèse conduit à $np_r = 5000$, soit : $\lambda(n_p) \approx 3\%$

Il apparaît qu'un grand nombre d'échantillons ($N = 5000 * p_r$) est nécessaire pour avoir une bonne qualité d'observation de la pente -1 recherchée.

A titre d'exemple, cf fig n° 1 considérons le signal u composé de :

– u_1 un bruit blanc différencié ($\eta_1 = \mathcal{N}(0, 2)$ distribution normale centrée d'écart type égal à deux).

– et u_2 un bruit blanc ($\eta_2 = \mathcal{N}(0, \sqrt{3})$).

Dans ces conditions p_r est égal à 4 et le nombre total d'échantillons nécessaires vaut 20 000.

Une solution possible pour diminuer ce nombre élevé d'échantillons consiste à travailler sur le signal intégré avant de lui appliquer le calcul de la variance.

3.4. résultats concernant le signal obtenu par intégration numérique

L'opération effectuée est une sommation des échantillons $u(i)$ du signal.

$$U(i) = \sum_{n=1}^i u(n)$$

Le processus de type bruit blanc différencié devient blanc et le processus blanc devient blanc sommé.

Ce dernier processus est défini simplement par l'équation :

$$U(i) = \sum_{n=1}^i \eta(n).$$

Le terme $\xi_k(p)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \xi_k(p) = \sum_{i=1}^p \left(\frac{i-1}{p} \right) \eta((k-1)p + i) \\ + \left(\frac{p-i+1}{p} \right) \eta(kp + i) \end{aligned}$$

La variance d'Allan théorique associée est :

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2(p) &= \frac{\sigma^2}{6} \times \left(2p + \frac{1}{p} \right) \\ &\approx \frac{\sigma^2}{3} \times p \quad \text{si } p^2 \text{ est grand devant } 1 \end{aligned} \quad (\text{R11})$$

Le tracé de $\log(\sigma_{\xi}^2(p))$ en fonction de $\log(p)$ fait alors apparaître une droite de pente $+1$.

Qualité de l'estimateur :

Il est sans biais et sa variance peut s'écrire (hypothèse gaussienne pour η)

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\sigma_{\xi}^2(p, n_p)\} &= [\sigma_{\xi}^2(p)]^2 \\ &\times \frac{9n_p - 10}{4(n_p - 1)^2} \times \left[1 - \frac{n_p - 2}{9n_p - 10} \times \frac{12p^2 - 3}{(2p^2 + 1)^2} \right] \xrightarrow{n_p \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned} \quad (\text{R12})$$

L'estimateur est dans ce cas convergent.

Dans le cas de la somme des deux processus, blanc et blanc sommé :

$$u(i) = \eta_1(i) = \sum_{n=1}^i \eta_2(n)$$

En supposant que les processus η_1 et η_2 vérifient l'hypothèse (H3), la variance d'Allan du processus $u(i)$ s'exprime comme la somme des variances respectives :

$$\sigma_{\xi}^2(p) = \sigma_{\xi_1}^2(p) + \sigma_{\xi_2}^2(p) = \frac{\sigma_1^2}{p} + \frac{\sigma_2^2}{6} \times \left(2p + \frac{1}{p} \right) \quad (\text{R13})$$

Dans ce cas, l'expression de $\log(\sigma_{\xi}^2(p))$ est :

$$\log(\sigma_{\xi}^2(p)) = \log\left(\frac{\sigma_2^2}{3}\right) - \log(p) + \log(p^2 + P_r^2)$$

avec

$$P_r = \sqrt{\frac{3\sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{p_r + \frac{1}{2}}$$

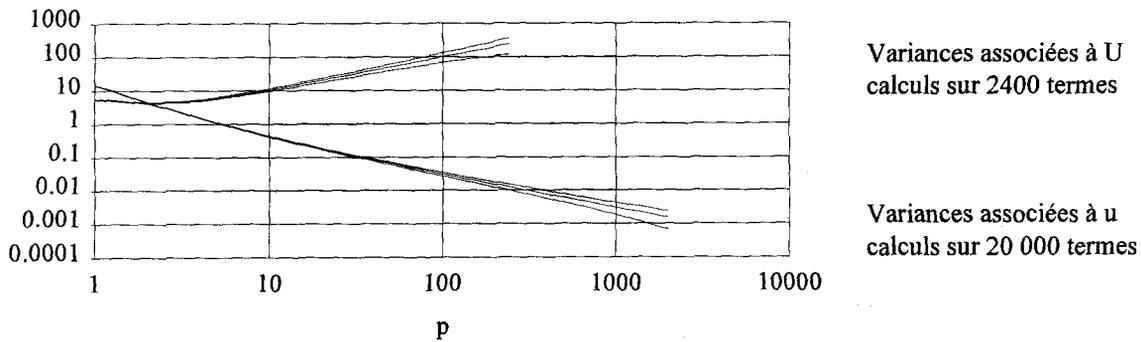


Figure 2. – Variations d'Allan théoriques.

Cette fois le tracé de $\log(\sigma_{\xi}^2(p))$ en fonction de $\log(p)$ fait apparaître une droite de pente -1 tant que p est faible devant P_r et $+1$ au delà. Il est clair que la rupture de pente est ici plus observable, variation de 2 (forme de cuvette), que dans le cas du passage de la pente -2 à la pente -1 , variation de 1.

Qualité de l'estimateur :

- Il est non biaisé.
- Une expression de sa variance, en utilisant la variable P_r peut être :

$$\text{Var}\{\sigma_{\xi}^2(p, n_p)\} = [\sigma_{\xi}^2(p)]^2 \times \left[\frac{2}{(n_p - 1)} + \frac{n_p - 2}{4(n_p - 1)^2} \times \left(\frac{p^2 - 2P_r^2}{p^2 + P_r^2} \right)^2 \right] \xrightarrow{n_p \rightarrow +\infty} 0 \quad (R14)$$

L'estimateur est par conséquent convergent.

Pour $p = 3 * P_r$, la pente $+1$ devient prépondérante alors,

$$\log(\sigma_{\xi}^2(p)) \approx \log\left(\frac{\sigma_2^2}{3}\right) + \log(p)$$

A la décade suivante ($p = 30 * P_r$) et pour $n_p = 40$:

$$\frac{\text{Sig}\{\sigma_{\xi}^2(30P_r, 40)\}}{\sigma_{\xi}^2(30P_r)} \approx 24\%$$

Cette hypothèse conduit à n_p égal à 1 200 pour p égal à P_r . Ainsi pour la même qualité d'observation du phénomène relatif à σ_2 , c'est-à-dire relatif à la composante blanche avant intégration, le nombre d'acquisitions nécessaires vaut cette fois :

$$N_{int} = 1200 \times \sqrt{3 \times \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \frac{1}{2}}$$

au lieu de

$$N = 15000 \times \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

Ce qui conduit à la relation :

$$N_{int} \approx 17 \times \sqrt{N + 2500}$$

Afin d'illustrer l'apport de cette intégration, considérons à nouveau le signal composé de :

- u_1 un bruit blanc différencié ($\eta_1 = \mathcal{N}(0, 2)$ distribution normale centrée d'écart type égal à deux)
- et u_2 un bruit blanc ($\eta_2 = \mathcal{N}(0, \sqrt{3})$).

Soit U le signal obtenu après sommation du signal u . A ce signal est associé $P_r \approx 2$ ce qui conduit à $N_{int} \approx 2400$, soit un nombre d'échantillons total divisé par 8.

Sur le graphe ci-dessus fig n°2, les courbes de variances d'Allan théoriques sont représentées (échelle logarithmique) ainsi que leur valeur à plus un sigma et à moins un sigma.

3.5. synthèse des résultats présentés

Les différents résultats théoriques présentés pour l'ensemble des processus considérés sont regroupés dans le tableau n°1.

Pour les modèles partiels bruit blanc différencié, bruit blanc et bruit blanc sommé, ces résultats sont les mêmes que ceux présentés par P. Lesage et C. Audoin [6]. Les résultats concernant les combinaisons de modèles ont été obtenus par calculs analytiques et validés par des ensembles de simulations numériques pour des processus aléatoires à distribution normale.

4. approximation de la loi de probabilité

Le calcul de l'estimateur $\sigma_{\xi}^2(p, n_p)$, expression (E2) correspond à celui d'une moyenne quadratique d'un ensemble de signaux aléatoires $\xi_k(p)$.

Bruit blanc différencié σ_1	Bruit blanc σ_2	Bruit blanc sommé σ_3
$\sigma_\xi^2(p) = \frac{3\sigma_1^2}{p^2}$ $\lambda(n_p) = \frac{\sqrt{35n_p - 53}}{3(n_p - 1)}$	$\sigma_\xi^2(p) = \frac{\sigma_2^2}{p}$ $\lambda(n_p) = \frac{\sqrt{3n_p - 4}}{n_p - 1}$	$\sigma_\xi^2(p) = \frac{\sigma_3^2}{6} \times (2p + \frac{1}{p})$ $\lambda(n_p) \approx \frac{\sqrt{9n_p - 10}}{2(n_p - 1)}$
$\sigma_\xi^2(p) = \frac{3\sigma_1^2}{p^2} + \frac{\sigma_2^2}{p}$ $\lambda(n_p) = \frac{\sqrt{35n_p - 53 + \left(\frac{3p}{p_r}\right)^2 (3n_p - 4) + \frac{12p}{p_r} (5n_p - 7)}}{3(n_p - 1) \left[1 + \frac{p}{p_r}\right]}$ <p>avec $p_r = \frac{3\sigma_1^2}{\sigma_2}$</p>		$\sigma_\xi^2(p) = \frac{\sigma_2^2}{p} + \frac{\sigma_3^2}{6} \times (2p + \frac{1}{p})$ $\lambda(n_p) = \frac{\sqrt{8(n_p - 1) + (n_p - 2) \times \left(\frac{p^2 - 2p_r^2}{p^2 + P_r^2}\right)^2}}{2(n_p - 1)}$ <p>avec $P_r = \sqrt{\frac{3\sigma_2^2}{\sigma_3^2} + \frac{1}{2}}$</p>

Tableau 1. – Résultats théoriques des variances d'Allan et écart-type relatif de l'estimateur.

D'une façon générale [7], en supposant que les termes $\xi_k(p)$ suivent une loi normale et qu'ils sont indépendants de variance $\sigma_\xi^2(p)$ alors $\sigma_\xi^2(p, np)$ suit une loi de probabilité de type χ^2 de degrés $n_p - 1$ et l'expression de sa densité de probabilité est :

$$P(x) = \left(\frac{(n_p - 1)}{2\sigma_\xi^2(p)}\right)^{\frac{n_p - 1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_p - 1}{2}\right)} x^{\frac{(n_p - 3)}{2}} e^{-\frac{(n_p - 1)x}{2\sigma_\xi^2(p)}}$$

Dans le cas particulier du bruit blanc sommé nous rappelons que le processus $\xi_k(p)$ a pour expression :

$$\xi_k(p) = \sum_{i=1}^p \frac{(i-1)}{p} \eta((k-1)p + i) + \sum_{i=1}^p \frac{(p-i+1)}{p} \eta(kp + i)$$

Si le processus η suit une loi normale alors le processus $\xi_k(p)$ également, puisqu'il est une combinaison linéaire du processus η . En revanche il est clair que les termes $\xi_k(p)$ ne sont pas indépendants. Toutefois, il est possible de penser que les termes $\sigma_\xi^2(p, np)$ suivent une loi proche de celle proposée avec un degré inférieur.

Nous avons obtenu grâce à un ensemble de simulations une expression analytique approchée, semblable à la précédente de par sa forme, assez représentative qui s'écrit :

$$P(x) = \left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi^2(p)}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha-1)} e^{-\frac{\alpha x}{\sigma_\xi^2(p)}} \quad \alpha \text{ est un réel.} \quad (R15)$$

avec :
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du.$$

L'expression est celle d'une loi gamma [7] de paramètres b et c positifs :

$$P(x) = \frac{c^{b+1}}{\Gamma(b+1)} x^b e^{-cx} U(x)$$

$U(x)$ est la fonction échelon.

La moyenne et la variance de cette loi sont respectivement égales à : $E\{x\} = \frac{b+1}{c}$ et $Var\{x\} = \frac{b+1}{c^2}$.

Le maximum est obtenu en : $x = \frac{b}{c}$.

En identifiant : $\alpha = b+1$ et $c = \frac{\alpha}{\sigma_\xi^2(p)}$ on obtient :

– pour la moyenne $M = \int_0^{+\infty} x P(x) dx = \sigma_\xi^2(p)$ expression indépendante de α .

– et pour la variance :

$$V = \int_0^{+\infty} (x - \sigma_\xi^2(p))^2 P(x) dx = \frac{[\sigma_\xi^2(p)]^2}{\alpha}$$

En prenant pour α : $\alpha = \frac{[\sigma_\xi^2(p)]^2}{Var\{\sigma_\xi^2(p, np)\}}$, on retrouve la variance recherchée pour l'estimateur.

Le maximum est alors obtenu pour :

$$x = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \times \sigma_\xi^2(p) \quad (R16)$$

Ce terme α est en général non entier. S'il est supérieur à 25, la loi s'approche d'une loi normale centrée sur $\sigma_\xi^2(p)$ et de variance $Var\{\sigma_\xi^2(p, np)\}$.

Compte tenu des expressions des variances de l'estimateur pour les différents modèles présentés, on obtient pour le terme α :

$$\alpha = \frac{1}{\lambda^2(np)}$$

Evaluation de la composante blanche

Ce qui compte tenu des résultats partiels présentés conduit au tableau suivant :

Bruit blanc différencié	Bruit blanc	Bruit blanc sommé
$\alpha = \frac{9(n_p - 1)^2}{35n_p - 53}$	$\alpha = \frac{(n_p - 1)^2}{3n_p - 4}$	$\alpha \approx \frac{4(n_p - 1)^2}{9n_p - 10}$

Ces expressions sont intéressantes car elles ne font pas intervenir le niveau de bruit considéré. Elles sont conformes aux résultats présentés par Yoshimura [11] et Greenhall [5] en considérant l'estimateur « tau-overlap » pour lequel ces auteurs considèrent qu'il est distribué suivant une loi du χ^2 de degré non nécessairement entier.

Pour les combinaisons de modèles, l'expression du terme est obtenue à partir des résultats présentés dans le tableau n° 1. Elle nécessite alors la connaissance a priori du niveau relatif des deux types de bruit présents dans le signal analysé.

Pour chacun des trois modèles partiels, 10 000 réalisations de 1 000 échantillons chacune ont été simulées et le calcul de la variance d'Allan a été appliqué. Pour différentes valeurs de p , voir fig. 3, un histogramme de répartition des valeurs $\sigma_\xi^2(p, n_p)$ a été calculé (pointillés) et comparé à la loi proposée (trait plein). Pour les modèles bruit blanc et bruit blanc différencié, l'expression analytique est proche de la loi calculée pour des valeurs de n_p supérieures à dix. Pour le modèle bruit blanc sommé la loi reste proche pour des valeurs de n_p supérieures à 4.

5. exploitation des résultats

5.1. modification du modèle du terme additionnel

Initialement, le signal est un bruit blanc auquel s'ajoute un terme que nous avons considéré jusqu'ici comme un bruit blanc différencié. Après intégration, le modèle attendu est composé d'un bruit blanc et d'un bruit blanc intégré. En fait, dans la pratique, il est courant qu'il subsiste sur la variance du signal intégré une composante correspondant au modèle bruit blanc différencié déjà présenté. Ainsi, après l'opération d'intégration, le modèle global obtenu est le suivant :

$$u(i) = u_1(i) + u_2(i) + u_3(i) \\ = \eta_1(i) + \eta_1(i-1) + \eta_2(i) + \sum_{n=1}^i \eta_3(n)$$

En supposant que les trois processus η_1, η_2, η_3 vérifient deux à deux l'hypothèse (H2) et (H3), la variance d'Allan théorique associé vaut :

$$\sigma_\xi^2(p) = \sigma_{\xi_1}^2(p) + \sigma_{\xi_2}^2(p) + \sigma_{\xi_3}^2(p) \\ = \frac{3\sigma_1^2}{p^2} + \frac{\sigma_2^2}{p} + \frac{\sigma_3^2}{6} \times (2p + \frac{1}{p})$$

Le tracé de cette variance sur un diagramme log / log peut faire apparaître 3 droites de pentes respectives $-2, -1$ et $+1$.

L'estimateur $\sigma_\xi^2(p, n_p)$ est non biaisé et une expression de sa variance, sans approximation est :

$$\text{Var}\{\sigma_\xi^2(p, n_p)\} = \frac{2}{n_p - 1} \times [\sigma_\xi^2(p)]^2 + \frac{n_p - 2}{(n_p - 1)^2} \\ \times \left[-\frac{4\sigma_1^2}{p^2} - \frac{\sigma_2^2}{p} + \frac{\sigma_3^2}{6} \left(p - \frac{1}{p}\right) \right]^2 + \frac{n_p - 3}{(n_p - 1)^2} \times \frac{\sigma_1^4}{p^4}$$

Des simulations ont également été réalisées afin d'estimer la loi de probabilité de l'estimateur en présence des trois processus. Elles ont montré que la loi proposée précédemment reste valable :

$$P(x) = \left(\frac{\alpha}{\sigma_\xi^2(p)} \right)^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha-1)} e^{-\frac{\alpha x}{\sigma_\xi^2(p)}}$$

avec

$$\alpha = \frac{[\sigma_\xi^2(p)]^2}{\text{Var}\{\sigma_\xi^2(p, n_p)\}}$$

Les trois graphes qui suivent présentent, fig n°4, les histogrammes calculés sur 10 000 réalisations pour trois valeurs de p ainsi que le tracé de la loi proposée.

Les signaux simulés avec 4 000 échantillons se décomposent comme suit :

- u_1 un bruit blanc différencié ($\eta_1 = \mathcal{N}(0, 3)$ distributions normale centrée d'écart type égal à 3).
- u_2 un bruit blanc ($\eta_2 = \mathcal{N}(0, 2)$).
- et u_3 un bruit blanc sommé ($\eta_3 = \mathcal{N}(0, 0.1)$).

Cas des signaux déterministes périodiques

Il est fréquent en pratique que le signal de sortie d'un capteur contienne une ou des composantes sinusoïdales qui s'ajoutent aux composantes recherchées. Le résultat de calcul de variance d'Allan va alors s'en trouver modifié. Il convient alors d'évaluer l'impact de la présence de ce signal sur le résultat du calcul de variance d'Allan.

Dans le cas d'un signal sinusoïdal pur, il est possible d'exprimer analytiquement la variance d'Allan associée :

$$\text{Soit : } u(i) = a_0 \sin(i \times \omega + \varphi) \quad 1 \leq i \leq N$$

un sinus d'amplitude a_0 , de pulsation ω et de phase φ .

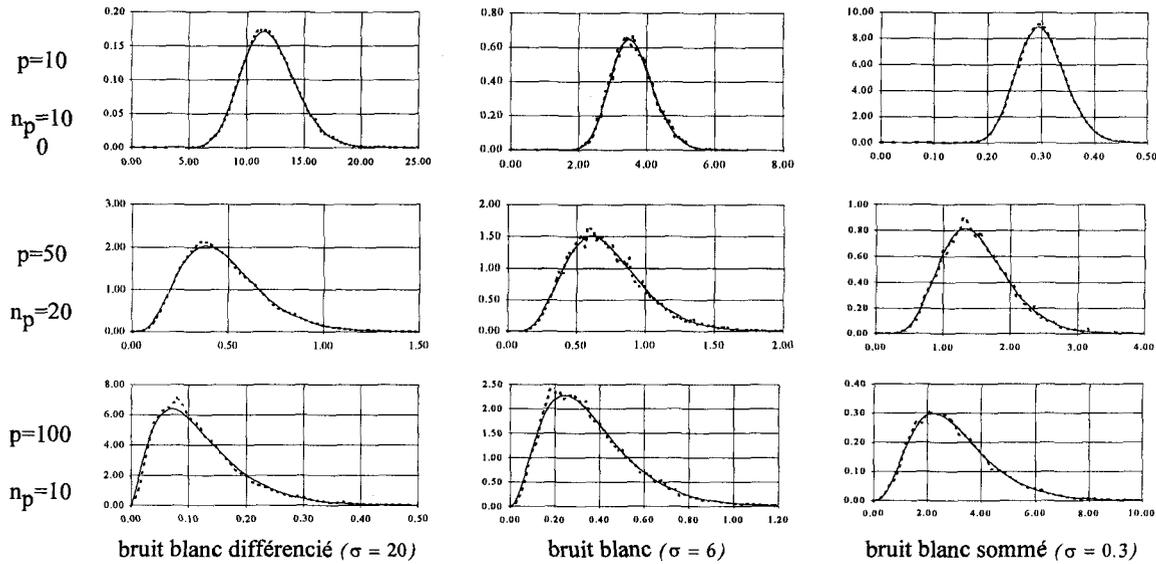


Figure 3. – Densités de probabilité de l'estimateur pour différentes valeurs de p et différents modèles.

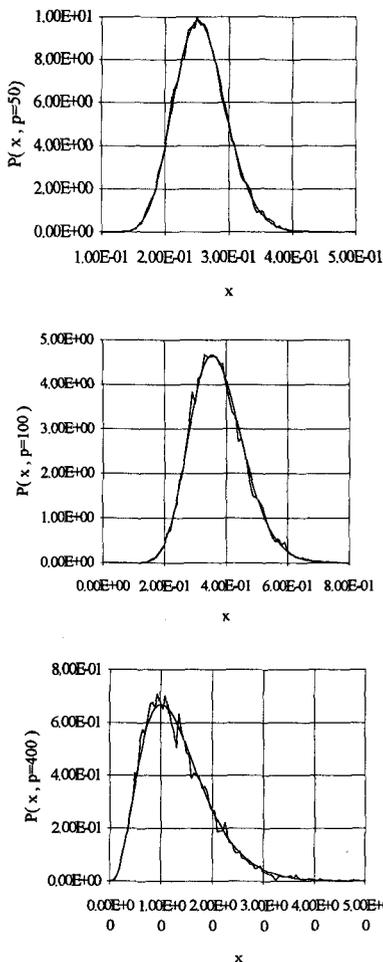


Figure 4. – Densités de probabilité de l'estimateur pour différentes valeurs de p .

$$\text{Alors } \sigma_{\xi}^2(p, n_p) = \left(\frac{a_0 \sin^2(\frac{p\omega}{2})}{p \sin(\frac{\omega}{2})} \right)^2 \times \left[1 + \frac{\sin(p\omega(n_p - 1))}{(n_p - 1) \sin(p\omega)} \cos((1 + pn_p)\omega + 2\varphi) \right] \quad (R17)$$

Si n_p est grand l'expression se réduit à :

$$\sigma_{\xi}^2(p, n_p) = \left(\frac{a_0 \sin^2(\frac{p\omega}{2})}{p \sin(\frac{\omega}{2})} \right)^2 = \sigma_{\xi}^2(p)$$

Cette dernière expression correspond à celle proposé par M. Tehrani [8].

En appliquant l'opération de sommation discrète à ce signal, on obtient :

$$U(i) = \sum_{n=1}^i a_0 \sin(n \times \omega + \varphi) = \frac{a_0}{2 \sin(\frac{\omega}{2})} \times \left[\cos(\frac{\omega}{2} + \varphi) + \sin(i \times \omega + \frac{\omega}{2} + \varphi - \frac{\pi}{2}) \right]$$

Le terme $\cos(\frac{\omega}{2} + \varphi)$ est indépendant de i , cette composante constante sera donc éliminée par le calcul de variance d'Allan (cf. §1). Ainsi, ce signal sommé est équivalent à :

$$U(i) = \frac{a_0}{2 \sin(\frac{\omega}{2})} \times \sin(i \times \omega + \frac{\omega}{2} + \varphi - \frac{\pi}{2}) = A_0 \sin(i \times \omega + \Psi)$$

La variance d'Allan associée vaut alors :

$$\sigma_{\xi}^2(p, n_p) = \left(\frac{a_0 \sin^2(\frac{p\omega}{2})}{2p \sin^2(\frac{\omega}{2})} \right)^2$$

$$\times \left[1 - \frac{\sin(p\omega(n_p - 1))}{(n_p - 1) \sin(p\omega)} \cos((2 + p n_p)\omega + 2\varphi) \right]$$

Ainsi, la variance d'Allan obtenue en présence de composantes sinusoïdales se moyenne généralement, sur une représentation logarithmique, par une droite de pente -2 même après l'opération de sommation. La courbe se superpose alors à celle du modèle bruit blanc différencié.

5.2. estimation des niveaux par une méthode d'identification

Jusqu'à ce point de l'exposé l'exploitation de calculs de variance d'Allan a pris appui sur les tracés en échelle logarithmique, en essayant d'isoler des segments de droite et d'en déduire la valeur de σ du modèle associé. Une autre façon d'aborder l'étude est de considérer l'ensemble de valeurs $\sigma_\xi^2(p, n_p)$ comme le second membre d'un système d'équations à plusieurs inconnues et de résoudre ce système.

L'expression générale recherchée étant :

$$\begin{aligned} \sigma_\xi^2(p) &= \sigma_{\xi_1}^2(p) + \sigma_{\xi_2}^2(p) + \sigma_{\xi_3}^2(p) \\ &= \frac{3\sigma_1^2}{p^2} + \frac{\sigma_2^2}{p} + \frac{\sigma_3^2}{6} \times (2p + \frac{1}{p}) \end{aligned}$$

Le modèle sinusoïdal étant inclus dans le modèle bruit blanc différencié.

La résolution récursive de ce système devrait affiner les estimations pour chaque nouvelle valeur $\sigma_\xi^2(p, n_p)$ prise en compte. Toutefois, l'incertitude sur $\sigma_\xi^2(p, n_p)$ augmentant avec p , il se peut que la prise en compte d'une équation supplémentaire dégrade l'estimée obtenue au pas précédent. Ainsi, il est conseillé d'utiliser une méthode récursive avec tracé des estimées puis de prendre en considération les domaines où les estimées convergent. Cette méthode présente l'avantage de nécessiter moins d'échantillons que l'estimation graphique.

Pour illustrer ce propos considérons le signal composé de :

- u_1 un bruit blanc différencié ($\eta_1 = \mathcal{N}(0, 3)$ distribution normale centrée d'écart type égal à 3).
- u_2 un bruit blanc ($\eta_2 = \mathcal{N}(0, 2)$).
- et u_3 un bruit blanc sommé ($\eta_3 = \mathcal{N}(0, 0.1)$).

Pour observer la pente +1 sur une décade et évaluer graphiquement σ_3 , il faudrait approximativement 40 000 points d'acquisitions.

$$(N_{int} = 1200 \times \sqrt{3 \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_3^2} + \frac{1}{2}})$$

Une simulation a été réalisée en utilisant dix fois moins de points. La variance d'Allan associée a été calculée pour p variant de 1 à 400, son tracé en échelle logarithmique est présenté sur la figure n°5.

Le graphe représenté sur la figure n°5 est difficilement exploitable puisque aucune droite de pente -2 , -1 ou $+1$ n'est discernable sur une décade. L'estimation des trois paramètres σ_1^2 , σ_2^2 et σ_3^2 a été réalisée à l'aide de la méthode des moindres carrés récursifs. Le graphe qui suit, fig n°6, présente les résultats de l'estimation.

Par la méthode de résolution du système d'équations de bons résultats sont obtenus pour les valeurs de p correspondant à la cuvette (passage de la pente -1 à la pente $+1$ sur le graphe de variance en échelle logarithmique) p aux alentours de 40.

A partir des niveaux estimés, il est possible de calculer la variance d'Allan théorique associée ainsi que les écarts-types correspondants. Un critère de validation des niveaux trouvés peut être de tracer sur un même graphe la variance calculée, la variance estimée et les enveloppes à plus et moins un écart-type, ce que présente le graphe de la figure n°7.

Sur ce graphe, on peut remarquer que pour les valeurs de p supérieures à 100, la variance estimée s'écarte de la variance théorique pour s'approcher de la courbe à -1 sigma. Ce constat peut s'expliquer par le fait que la courbe à -1 sigma a pour formulation :

$$\sigma_\xi^2(p) - \sqrt{\text{Var}\{\sigma_\xi^2(p, n_p)\}}$$

De plus pour les points considérés, le modèle prépondérant est celui relatif au bruit blanc sommé pour lequel la variance de l'estimateur est proportionnelle au carré de la variance d'Allan théorique ($R12$) ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \sigma_\xi^2(p) - \sqrt{\text{Var}\{\sigma_\xi^2(p, n_p)\}} \\ = (1 - \lambda(p, n_p)) \sigma_\xi^2(p) = (1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}) \sigma_\xi^2(p) \end{aligned}$$

Or compte-tenu du résultat $R(16)$, l'observation la plus probable est égale à : $(1 - \frac{1}{\alpha}) \sigma_\xi^2(p)$.

Il s'agit alors d'une courbe qui se situe entre la variance théorique et la courbe à -1 sigma et qui s'approche de cette dernière quand le terme α diminue.

6. présentation de résultats expérimentaux

Plusieurs acquisitions de signaux gyrométriques (p, q et r) et accélérométriques (Ax, Ay et Az) sont présentées à titre d'exemple d'utilisation de la méthode. Pour des raisons de confidentialité des données exploitées, les valeurs d'acquisition brutes ont été multipliées par un facteur d'échelle et les fréquences d'échantillonnage ne sont pas reprises. C'est pourquoi les graphes qui suivent sont sans unité, l'ordonnée pour les variances d'Allan est homogène à un angle au carré pour les acquisitions gyrométriques et à une vitesse au carré pour les acquisitions accélérométrique.

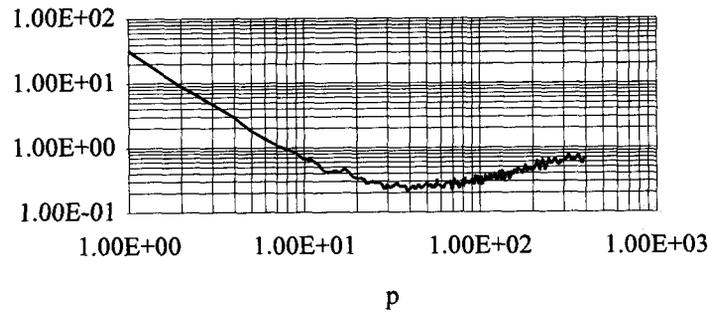


Figure 5. – Calcul de la variance d'Allan sur une simulation.

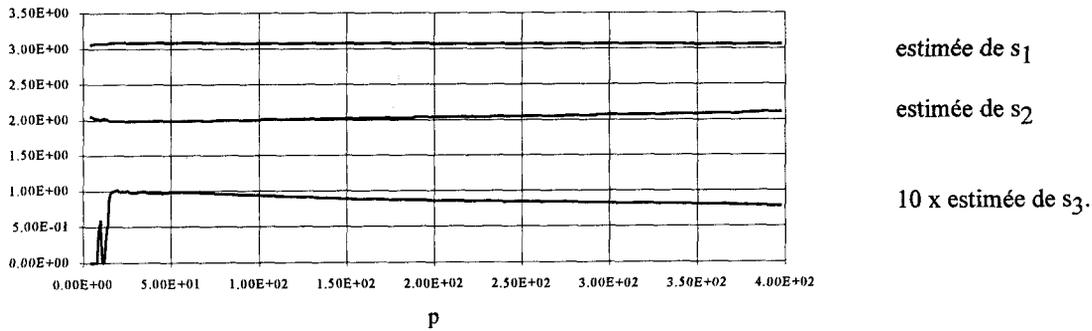


Figure 6. – Estimées.

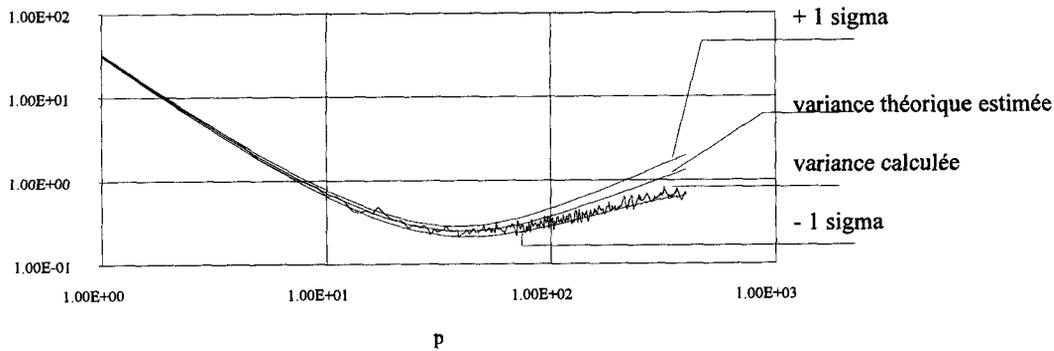


Figure 7. – Variances d'Allan calculée et théorique associée aux estimées.

Le signal de sortie d'une référence inertielle correspond généralement à la somme de trois termes :

- la composante, suivant l'axe de mesure, de la force ou de la rotation appliquée au capteur.
- une erreur de mesure considérée constante : le biais.
- un bruit, dont on désire évaluer la composante blanche.

Nous avons montré que l'intégration du signal avant analyse par variance d'Allan permet d'obtenir de meilleurs résultats pour l'estimation de la composante blanche. Toutefois cette intégration présente l'inconvénient de sommer également la composante constante du signal. Il s'en suit un terme déterministe additif dont le modèle est :

$$U(i) = c \times i \quad \text{signal de type rampe déterministe.}$$

L'application du calcul de variance d'Allan sur ce modèle conduit à :

$$\sigma_{\xi}^2(p, n_p) = \frac{c^2 \times p^2}{2} = \sigma_{\xi}^2(p)$$

Droite de pente +2, en échelle logarithmique, qui peut être prépondérante et ainsi masquer la droite de pente +1 recherchée. La solution choisie consiste à centrer le signal d'origine avant de lui appliquer l'opération de sommation. Ce centrage modifie le résultat théorique, associé au bruit blanc sommé, qui devient :

$$\sigma_{\xi}^2(p) = \frac{\sigma^2}{6} \times \left(\left(2 - \frac{3p}{N} \right) p + \frac{1}{p} \right)$$

Evaluation de la composante blanche

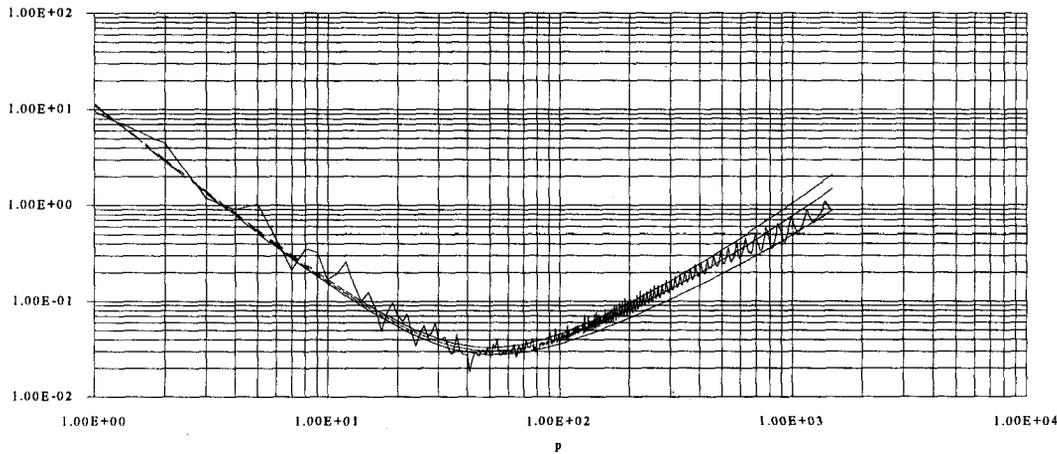
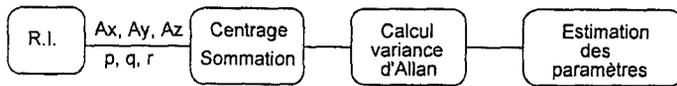


Figure 8. – Variance d'Allan expérimentale et variance théorique associée à l'estimation.

Schéma d'analyse des signaux de sortie de référence inertielle (R.I.) proposé :



Pour les deux autres modèles, le fait de centrer le signal avant de l'intégrer introduit un terme correspondant à une constante aléatoire c_a de faible niveau. Ainsi, l'expression du modèle recherché est :

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2(p) &= \sigma_{\xi_1}^2(p) + \sigma_{\xi_2}^2(p) + \sigma_{\xi_3}^2(p) + \text{parabole} \\ &= \frac{3\sigma_1^2}{p^2} + \frac{\sigma_2^2}{p} + \frac{\sigma_3^2}{6} \times \left(\left(2 - \frac{3p}{N}\right)p + \frac{1}{p} \right) + \frac{c_a^2 p^2}{2} \end{aligned}$$

Deux types d'essais peuvent être différenciés :

- Les essais dits statiques, où la référence inertielle n'est soumise à aucune excitation (hormis la gravité et la rotation terrestre)
- Les essais dynamiques sur pot vibrant.

6.1. essais statistiques

Pour ce type d'essais le signal à mesurer est une constante, toute fluctuation observée sur la mesure correspond à l'erreur de mesure.

Deux résultats sont présentés, le premier correspond à un signal accélérométrique, environ 15 000 échantillons, et le second à un signal gyrométrique, environ 6 000 échantillons. Pour ces deux signaux, nous présentons les courbes de variances d'Allan calculées, la variance théorique obtenue à partir des niveaux estimés et l'enveloppe à plus et moins un sigma, pour des tailles

de regroupement inférieures au nombre total d'échantillons divisé par dix.

Signal accélérométrique : (figure 8)

Deux remarques s'imposent :

– Pour les faibles valeurs de p le modèle bruit blanc différencié ne colle pas parfaitement. La courbe calculée « sort » de l'enveloppe théorique.

– Pour les fortes valeurs de p , une droite de pente +2 apparaît sur le tracé en échelle logarithmique, elle a été prise en compte pour l'estimation. Le modèle associé à cette droite a été présenté précédemment.

Pour les faibles valeurs de p , les phénomènes observés non modélisés peuvent être attribués à la présence d'une composante périodique mise en évidence par d'autres acquisitions sur la même référence inertielle. La présence de la composante en rampe peut s'expliquer par plusieurs raisons. Il peut s'agir du résidu de centrage de la composante périodique avant sommation ou d'un « saut » de biais du capteur au cours de l'acquisition.

Signal gyrométrique : (figure 9)

Pour cette acquisition, le modèle recherché est plus simple que le précédent puisqu'il ne contient que deux processus le bruit blanc et le bruit blanc intégré.

6.2. essai dynamique

Pour ce type d'essais, le capteur mesure une partie des forces excitatrices auquel il est soumis. On recherche dans ce cas le niveau de la composante blanche en présence de cet environnement. Ce niveau est a priori plus élevé que celui obtenu par l'essai statique. Les forces excitatrices n'étant pas parfaitement quantifiables, elles peuvent s'interpréter comme un bruit parasite qui s'ajoute au bruit recherché. Toutefois, l'intégrale de ce bruit

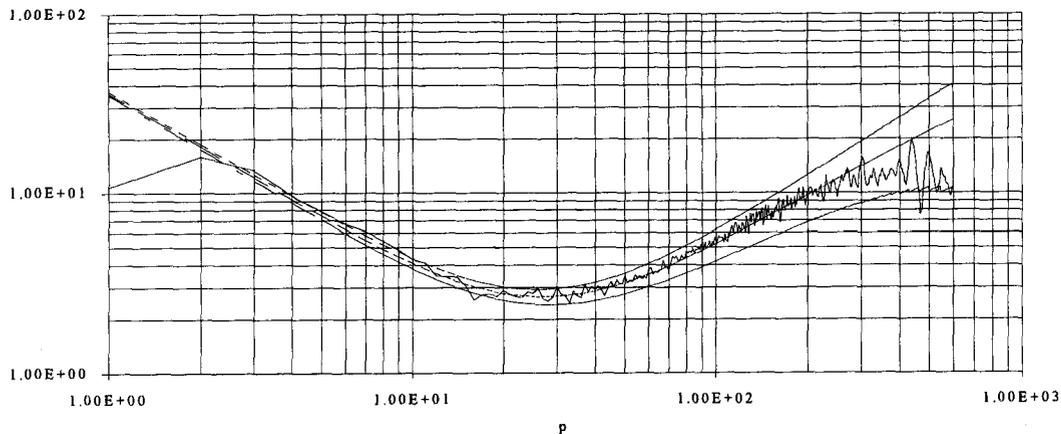


Figure 9. – Variance d'Allan théorique et variance théorique associée à l'estimation.

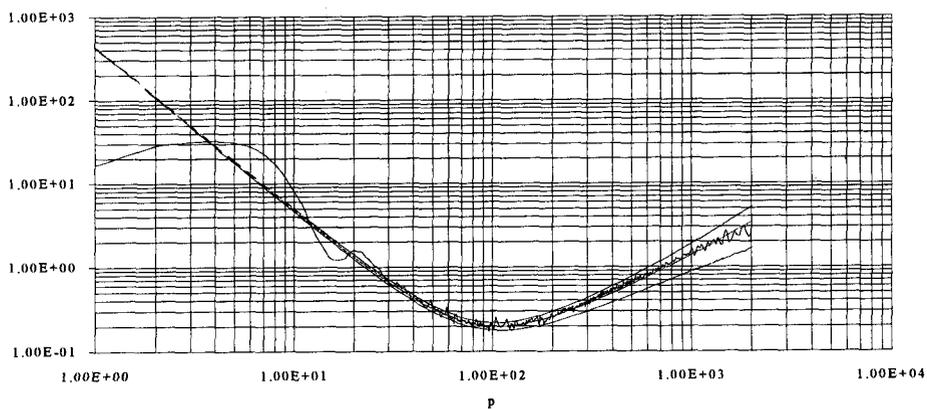


Figure 10. – Variance d'Allan expérimentale et variance théorique associée à l'estimation.

parasite est nécessairement bornée car elle correspond au débattement vibratoire du pot. On comprend alors l'intérêt d'intégrer le signal afin de faire ressortir l'effet du bruit blanc à intégrale non bornée.

L'exemple qui suit correspond à une acquisition accélérométrique suivant l'axe d'excitation du capteur, on dispose d'environ 20 000 échantillons.

Pour les valeurs de p inférieures à cinquante, la courbe observée peut s'interpréter comme l'image de l'excitation appliquée au capteur.

en particulier le niveau de la composante blanche. Nous avons montré qu'une opération d'intégration permet d'atteindre des performances équivalentes en diminuant notablement le nombre d'échantillons utilisés. L'estimateur de la variance d'Allan a été caractérisé en terme de moyenne et de variance et nous avons proposé une expression empirique, guidée par des considérations théoriques et des simulations, de sa densité de probabilité. Les traitements expérimentaux ont permis de montrer la capacité de la méthode à extraire la composante blanche présente dans les signaux étudiés. Toutefois, il est clair que le modèle bruit blanc différencié n'est qu'un modèle approché qu'il conviendrait de mieux expliciter le cas échéant. L'analyse pouvant être alors complétée par d'autres méthodes de calcul de variances [9] et [10].

7. conclusion

Dans cette étude nous avons montré que la variance d'Allan, qui s'appuie sur une analyse temporelle des signaux, permet de mettre en évidence différentes composantes de bruits éventuellement présents dans les signaux accélérométriques et gyrométriques,

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.W. Allan, *Statistics of Atomic Frequency Standards*, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 54, N°2, February 1966, pp. 221-230.
- [2] J.A. Barnes et al., « Characterization of Frequency Stability », *IEEE transactions on instrumentation and measurement*, Vol. IM-20, N°2, May 1971, pp. 105-120.

Evaluation de la composante blanche

- [3] G.W. Erickson, « An Overview of Dynamic and Stochastic Modeling of Gyros », *Proceedings of the 1993 National Technical Meeting*, San Francisco January 20–22, pp. 339–351.
- [4] C.A. Greenhall, « A structure function representation theorem with applications to frequency stability estimation », *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, Vol. IM-32, N°2, June 1983, pp. 364–370.
- [5] C.A. Greenhall, « Recipes for Degrees of Freedom of Frequency Stability Estimators », *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, Vol. IM-40, N°6, December 1991, pp. 994–999.
- [6] P. Lesage and C. Audoin, « Characterization of Frequency Stability : Uncertainty due to the Finite Number of Measurements », *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, Vol. IM-22, N°2, June 1973, pp. 157–161.
- [7] A. Papoulis, *Probability, random variables and stochastic processes*, McGraw Hill, 1965.
- [8] M.M. Tehrani, « Ring laser gyro data analysis with cluster sampling technique », *Proceedings of the SPIE*, Vol. 412, Arlington, VA, USA, 5–7 April 1983, pp. 207–220.
- [9] F. Vernotte, J. Gros Lambert, J.J. Gagnepain, « Oscillator Noise Analysis : Multivariate Measurement », *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, Vol. IM-42, N°2, April 1993, pp. 342–350.
- [10] F. Vernotte, J. Gros Lambert, J.J. Gagnepain, *A New Method of Measurement of the Different Types of Noise Altering the Output Signal of Oscillators*, Vol. IM-42, N°6, December 1993, pp. 968–975.
- [11] K. Yoshimura, « Characterization of Frequency Stability : Uncertainty Due to the Autocorrelation of the Frequency Fluctuations », *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, Vol. IM-27, N°1, March 1978, pp. 1–7.
- [12] K. Yoshimura, « Degrees of freedom of the estimate of the two-sample variance in the continuous sampling method », *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, Vol. IM-38, N°6, December 1989, pp. 1044–1049.

Manuscrit reçu le 22 Novembre 1995.

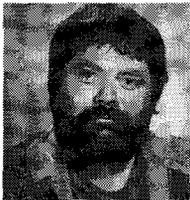
LES AUTEURS

Jean-Paul ISRAËL



Jean-Paul Israël a obtenu le diplôme d'ingénieur de l'école des Mines de Nancy, spécialité automatique, en 1978. Il est responsable d'études de systèmes de navigation à base de centrales inertielle.

Daniel BAUDOIS



Ingénieur électricien, diplômé de l'Ecole Normale Nationale Supérieure des Ingénieurs électriciens de Grenoble (1970) et Maître de Conférences à l'ENSIEG (Institut National Polytechnique de Grenoble), il anime au Cephag un groupe de recherche concernant la réduction du bruit à l'aide d'algorithmes adaptatifs.

Fabien PETIT



Fabien Petit est ingénieur ENSIEG (1990). Il termine actuellement sa thèse de Doctorat, sous la direction de Daniel Baudois, au sein du L.R.B.A. Ses travaux concernent la modélisation des erreurs de capteurs inertiels dits à composants liés à partir d'erreurs de navigation observées.