

Modèle de Prony à pôles dépendant du temps

Prony Model with Time Varying Poles

par Franck MOLINARO, Francis CASTANIÉ*

Laboratoire de Physique de l'Atmosphère – Université de la Réunion
15, avenue René Cassin – BP 7151
F-97715 Saint Denis Messag. cedex 9
* GAPSE/ENSEEIH
2, rue Camichel
F-31071 Toulouse cedex

Résumé

L'article propose un nouveau modèle de Prony à pôles dépendant du temps pour modéliser des signaux non stationnaires. Ce modèle est basé sur une combinaison linéaire d'exponentielles complexes à coefficients variant avec le temps. Il est une extension des techniques d'estimation spectrale appliquée dans le cas stationnaire : l'amplitude et la phase du signal varient avec le temps. Nous présentons et justifions une méthode avec l'algorithme correspondant pour estimer complètement les paramètres du modèle. Le calcul des paramètres dépendant du temps nécessite cinq étapes : l'estimation des paramètres autorégressifs (AR) variant avec le temps, l'estimation des pôles à droite, la modélisation de ces pôles, le calcul des nouveaux pôles et l'estimation avec une méthode des moindres carrés des facteurs d'amplitudes. Pour valider le modèle, une simulation est effectuée sur un signal à deux composantes de loi en fréquence variant linéairement avec le temps.

Mots clés : Signal non stationnaire, modélisation paramétrique, coefficients dépendant du temps, modèle évolutif.

Abstract

This communication proposes a new Prony model with time-varying poles for modelisation of nonstationary signals. This new model is based upon a linear combination of time-varying exponentials. This method leads to an extension of several techniques of stationary spectral estimation to the nonstationary case : amplitude and phase are time-varying. We show and justify a method and the corresponding algorithm to estimate the complete new parameter vector. The determination of the time-varying parameters requires five steps : estimation of the time-varying AR parameters, estimation of the right poles of the linear time-varying system, modelisation of these poles, computation of the new poles, and least-square estimation of the amplitudes. To validate this model, a simulation signal composed of two chirps is chosen.

Key words : Nonstationary signal, parametric model, time-varying coefficients.

1. Introduction

De nombreuses applications physiques du traitement du signal font référence à des signaux non stationnaires : parole, ingénierie biomédicale, sismique, sonar... En première approche, et jusqu'à un passé récent, on s'est accommodé à cette situation en considérant malgré tout le signal stationnaire ou plus exactement stationnaire par morceaux (stationnaire dans une fenêtre plus ou moins large). Dans ce contexte de stationnarité locale, les méthodes paramétriques sont devenues d'un emploi fréquent et usuel. Les plus connues sont les modèles ARMA ou Prony.

Malgré tout, lorsque la stationnarité est manifestement absente, l'utilisateur trouve à sa disposition trois familles d'outils : les modélisations paramétriques adaptatives, les modélisations paramétriques évolutives et les représentations temps-fréquence. Ces dernières méthodes ont fait l'objet d'une étude détaillée à l'occasion de l'opération signaux-tests menée par un sous groupe du GDR « Traitement du Signal et Images » [1] ou de nombreuses

références sont données. Cette même étude montre que les modélisations paramétriques sont aussi utilisées en tant que représentations temps-fréquence des signaux non stationnaires.

Un utilisateur s'attachant à caractériser un signal non stationnaire par un modèle voit son choix se limiter aux deux grandes familles de méthodes adaptatives ou évolutives. L'inconvénient majeur des méthodes adaptatives est de ne pas donner véritablement un modèle du signal mais un instantané caractérisé par un jeu de paramètres à un instant t [2],[3]. Aussi, pour avoir une modélisation globale de son signal, l'utilisateur doit nécessairement adopter une méthode qualifiée d'évolutive ou la non stationnarité du signal est traduite par la variabilité en fonction du temps des paramètres du modèle. C'est dans ce contexte que s'inscrit notre étude.

Les premiers travaux prenant directement en compte la spécificité de non stationnarité du signal dans un modèle sont datés du début des années 70 [4], [5], [6]. Néanmoins le véritable essor des modélisations paramétriques évolutives se situe dans les

années 1980 avec notamment les articles de Grenier [7], [8] et l'introduction du modèle ARMA à coefficients variant avec le temps ou encore ARMA évolutif. A l'origine ce modèle a été introduit pour traiter un signal de parole, il existe plusieurs exemples d'utilisation du modèle dans ce domaine [9], [10].

Dans ce cadre de modélisation évolutive, nous proposons un nouveau modèle de Prony adapté aux signaux non stationnaires appelé Prony évolutif. Ce modèle est une extension du modèle de Prony du cas stationnaire [11], [12] ou les paramètres d'amplitude et de fréquence varient avec le temps. Il a l'avantage d'être particulièrement bien adapté aux signaux multicomposantes variant avec le temps. Initialement, le modèle a été introduit pour un signal physique non stationnaire : le signal de vibration d'un moteur automobile pendant le cliquetis [13]. Cette application physique a eu le mérite de mettre en lumière des manques en matière de modélisation des signaux non stationnaires et nous a incité à chercher un nouveau modèle. Un autre de nos objectifs est de compléter la famille du modèle de Prony. A côté du modèle classique du cas stationnaire [12], du modèle de Prony adaptatif [3], l'utilisateur aura un nouvel outil à sa disposition : le modèle de Prony évolutif.

L'étude commence par présenter le modèle de Prony à pôles dépendant du temps. Ensuite nous démontrons théoriquement comment les pôles du modèle peuvent être obtenus à partir des paramètres AR dépendant du temps. La quatrième partie s'intéresse aux procédures d'estimation des différents paramètres et propose un algorithme de calcul. Pour conclure, nous appliquons cet algorithme dans un cas simple de simulation avec un signal test formé de deux composantes dont les fréquences varient linéairement avec le temps.

2. Présentation du modèle

Avant de présenter le modèle de Prony évolutif, nous allons rappeler les caractéristiques du modèle de Prony classique dans le cas d'un signal stationnaire [12].

2.1. MODÈLE DE PRONY DU CAS STATIONNAIRE

Un signal discret $x(n)$, connu à partir d'un nombre fini de N mesures s'écrit :

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=1}^p B_k [Z_k]^n + e(n) \\ &= \hat{x}(n) + e(n) \end{aligned} \quad (1)$$

avec $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

$e(n)$ est un terme additif représentant les erreurs de modèle et/ou le bruit, p est l'ordre du modèle.

B_k et Z_k sont indépendants du temps et définis par :

$$B_k = A_k e^{j\theta_k} \quad (2)$$

$$Z_k = e^{\alpha_k + j\omega_k} \quad (3)$$

A_k : amplitude du k -ième mode de $\hat{x}(n)$

θ_k : phase en radians

α_k : coefficient d'amortissement

ω_k : pulsation réduite.

On en déduit la fréquence de la composante (en Hz) en posant :

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} \cdot F_e$$

avec F_e fréquence d'échantillonnage.

Pour calculer les paramètres du modèle de Prony il existe de nombreux algorithmes. Une bonne synthèse peut être trouvée dans la référence [14].

2.2. MODÈLE DE PRONY ÉVOLUTIF

Dans le cas d'un signal $x(n)$ non stationnaire, la variable temporelle est introduite dans les pôles du modèle $Z_k(n)$ qui ont une trajectoire variant avec le temps [15] :

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=1}^p B_k [Z_k(n)]^n + e(n) \\ &= \hat{x}(n) + e(n) \end{aligned} \quad (4)$$

avec $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

$e(n)$ est un terme additif représentant le bruit, p est l'ordre du modèle.

B_k et Z_k sont définis par :

$B_k = A_k e^{j\theta_k}$ est indépendant du temps.

$$Z_k(n) = e^{\alpha_k(n) + j\omega_k(n)} \quad (5)$$

$\alpha_k(n)$ et $\omega_k(n)$ sont tous les deux exprimés sous la forme d'une combinaison linéaire de puissances du temps. L'intérêt de cette forme particulière sera explicité dans la suite (au § 3.2).

$$a_k(n) = \sum_{i=0}^{N_a} a_{ki} n^i \quad (6)$$

$$\omega_k(n) = \sum_{i=0}^{N_\omega} \omega_{ki} n^i \quad (7)$$

Notons tout de suite que dans l'expression du modèle évolutif l'amplitude et la phase du signal sont tous les deux variables. On obtient pour l'amplitude $A_k e^{\alpha_k(n)}$ et pour la phase $\theta_k + \omega_k(n)$.

Les paramètres du modèle sont définis par :

A_k : facteur d'amplitude du k -ième mode de $\hat{x}(n)$.

θ_k : phase constante en radians.

$\alpha_k(n)$: amortissement de trajectoire polynomiale en fonction du temps.

$\omega_k(n)$: pulsation de trajectoire polynomiale en fonction du temps.

La valeur de la fréquence, pour la composante k , est donnée à chaque instant n par l'expression :

$$f_k(n) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\omega_k(n)}{dn} \cdot F_e$$

avec F_e fréquence d'échantillonnage.

L'étape délicate pour obtenir les paramètres du modèle est le calcul des pôles variables $Z_k(n)$. Pour résoudre ce problème, nous sommes partis du calcul du modèle de Prony stationnaire. Dans l'algorithme classique [14], les pôles du modèle sont calculés à partir des paramètres autorégressifs constants. Tout naturellement, l'idée de départ a été de chercher à calculer les pôles évolutifs à partir des paramètres autorégressifs variant avec le temps. Ce sont les travaux de Kamen qui nous ont donné une piste allant dans ce sens [16]. Ce mathématicien s'est énormément intéressé aux pôles et zéros des systèmes linéaires variant avec le temps proches des équations du modèle AR évolutif. A partir des résultats théoriques qu'il a obtenus, nous allons montrer, dans la partie suivante comment calculer les pôles $Z_k(n)$ à partir des paramètres autorégressifs $a_k(n)$ du modèle AR évolutif.

3. Obtention des pôles $Z_k(n)$ à partir des $a_k(n)$ du modèle AR évolutif

Dans cette partie nous allons montrer comment les pôles du modèle peuvent être déduits à partir des paramètres autorégressifs variant avec le temps. La démonstration fait appel à plusieurs résultats démontrés par Kamen [16]. Elle utilise la notion de **pôle à droite** que l'on va introduire brièvement, pour plus de détails se reporter à la référence [16].

3.1. DÉFINITION ET CALCUL DES PÔLES DROITE

Préalablement Kamen introduit l'opérateur à gauche \mathcal{Z} possédant les propriétés suivantes :

$$\mathcal{Z}^i \cdot \mathcal{Z}^j = \mathcal{Z}^{i+j} \quad (8)$$

$$\mathcal{Z}^i \cdot x(n) = x(n+i) \quad (9)$$

$$a(n) \cdot \mathcal{Z}^i \cdot x(n) = a(n) \cdot x(n+i) \quad (10)$$

Considérons l'équation linéaire variant avec le temps suivante :

$$A(\mathcal{Z}, n) \cdot x(n) = [1 + \sum_{k=1}^p a_k(n) \cdot \mathcal{Z}^{-k}] \cdot x(n) = 0 \quad (11)$$

$P_k(n)$ est un pôle dépendant du temps de cette équation s'il satisfait la relation :

$$[1 + \sum_{k=1}^p a_k(n) \cdot \mathcal{Z}^{-k}] \cdot x(n) = [\prod_{k=1}^p (1 - P_k(n) \cdot \mathcal{Z}^{-1})] \cdot x(n) \quad (12)$$

Où \prod est une multiplication non commutative. Les pôles sont ordonnés et ne peuvent pas être permutés.

Par définition, $P_p(n)$ est un **pôle à droite** du système s'il existe des coefficients $\beta_{p-1,k}(n)$ tels que :

$$[1 + \sum_{k=1}^p a_k(n) \cdot \mathcal{Z}^{-k}] \cdot x(n) = \left(1 + \sum_{k=1}^{p-1} \beta_{p-1,k}(n) \cdot \mathcal{Z}^{-k}\right) \cdot (1 - P_p(n) \mathcal{Z}^{-1}) \cdot x(n) \quad (13)$$

C'est le pôle « le plus à droite » des p pôles.

Développons les deux membres de l'équation (13) avec les propriétés de l'opérateur à gauche \mathcal{Z} :

$$\begin{aligned} x(n) + \sum_{k=1}^p a_k(n) x(n-k) = \\ x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} \beta_{p-1,k}(n) \cdot x(n-k) - P_p(n) x(n-1) \\ - \sum_{k=1}^{p-1} \beta_{p-1,k}(n) P_p(n-k) x(n-k-1) \end{aligned} \quad (14)$$

Identifions les différents facteurs des échantillons de $x(n)$ dans les deux membres de l'équation :

Pour $x(n-1)$

$$a_1(n) = \beta_{p-1,k}(n) - P_p(n) \quad (15)$$

Pour $x(n-k)$

$$a_k(n) = \beta_{p-1,k}(n) - \beta_{p-1,k-1} P_p(n-k+1) \quad (16)$$

$k = 2, \dots, p-1$

Pour $x(n-p)$

$$a_p(n) = -\beta_{p-1,p-1}(n) P_p(n-p+1) \quad (17)$$

Ce système d'équations peut s'exprimer sous la forme matricielle (18) :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -P_p(n-1) & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -P_p(n-2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -P_p(n-p+1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_p(n) \\ \beta_{p-1,1}(n) \\ \beta_{p-1,2}(n) \\ \vdots \\ \beta_{p-1,p-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(n) \\ a_2(n) \\ a_3(n) \\ \vdots \\ a_p(n) \end{bmatrix} \quad (18)$$

La résolution du système d'équations, dont la démonstration est donnée en annexe 1, nous montre que le pôle à droite $P_p(n)$ peut être obtenu récursivement à partir des paramètres $a_p(n)$ de l'équation de départ et de ses $p - 1$ valeurs initiales :

$$P_p(n) = -a_1(n) - \sum_{j=0}^{p-2} \frac{a_{p-j}(n)}{\prod_{i=1}^{p-j-1} P_p(n-i)} \quad (19)$$

Ce résultat est remarquable car le pôle à droite $P_p(n)$ ne dépend pas des coefficients $\beta_{p-1,k}(n)$ et donc des autres pôles $P_k(n)$. Ceci est valable uniquement pour le pôle le plus à droite, les autres pôles $P_k(n)$ pour $k \neq p$ sont fonction de $P_p(n)$.

3.2. RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE À COEFFICIENTS VARIANT AVEC LE TEMPS

Supposons qu'il existe p pôles à droite $P_{pk}(n)$ pour l'équation (11). C'est-à-dire, supposons qu'il existe p polynômes en \mathcal{Z} notés $D_k(\mathcal{Z}, n)$ tels que :

$$A(\mathcal{Z}, n) = D_k(\mathcal{Z}, n) \cdot (1 - P_{pk}(n)\mathcal{Z}^{-1}) \quad (20)$$

pour $i = 1, \dots, p$.

Si l'on appelle mode associé au pôle à droite $P_{pk}(n)$ la fonction $\Phi_k(n)$ définie par :

$$\Phi_k(n) = P_{pk}(n-1) P_{pk}(n-2) \dots P_{pk}(0) \quad (21)$$

Kamen a démontré que l'équation (11) à coefficients dépendants du temps admet sous certaines conditions une solution fonction des modes associés aux p pôles à droite du système [16] :

Théorème 1 : Si le déterminant de la matrice de Van der Monde $V(0)$ n'est pas nul pour toutes valeurs initiales $x(0), x(1), \dots, x(p-1)$, alors il existe des constantes B_1, B_2, \dots, B_p telles que l'équation à coefficients dépendants du temps :

$$x(n) = \sum_{k=1}^p a_k(n) x(n-k)$$

admet une solution de la forme :

$$x(n) = \sum_{k=1}^p B_k \Phi_k(n)$$

avec $\Phi_k(n) = P_{pk}(n-1) P_{pk}(n-2) \dots P_{pk}(0)$

$V(0)$ est définie par :

$$V(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ P_{p1}(0) & P_{p2}(0) & \dots & P_{pp}(0) \\ P_{p1}(1)P_{p1}(0) & P_{p2}(0)P_{p2}(0) & \dots & P_{pp}(1)P_{pp}(0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{p1}(p-2) \dots P_{p1}(0) & P_{p2}(p-2) \dots P_{p2}(0) & \dots & P_{pp}(p-2) \dots P_{pp}(0) \end{bmatrix}$$

Le théorème de Kamen donne la solution de l'équation (11) en fonction de l'évolution au cours du temps de p pôles à droite de l'équation. Cette solution nécessite un grand volume de calcul, car pour calculer un échantillon $x(n)$ il faut connaître tous les échantillons de chaque pôle à droite.

Sous cette forme la solution est difficilement exploitable, de plus, elle ne correspond pas à une modélisation qui exprimerait $x(n)$ en fonction d'un nombre réduit de paramètres. Dans la suite nous allons chercher une approximation des pôles à droite qui donne une modélisation satisfaisante de la solution.

Plutôt que de calculer p pôles à droite de l'équation (11), on pourrait imaginer utiliser une seule décomposition de l'équation de départ comme dans l'équation (12) et s'intéresser aux p pôles ordonnés. Avec le système (18) ces p pôles sont aisément calculables puisqu'on a un système de p équations à p inconnues. Malheureusement, à notre connaissance, il n'existe pas de solution de l'équation (11) qui dépende des p pôles ordonnés. En outre, leur interprétation physique ne paraît pas immédiate.

Remarquons que si les pôles à droite sont constants, on retombe sur la solution classique du modèle de Prony du cas stationnaire [12] :

$$x(n) = \sum_{k=1}^p B_k P_{pk}^n \quad (22)$$

En s'inspirant de cette remarque, nous avons trouvé une approximation des pôles à droite qui permet de simplifier l'écriture de la solution $x(n)$ et surtout de déduire $x(n)$ à partir d'un nombre limité de paramètres.

Si les pôles à droite s'expriment sous la forme d'exponentielles complexes variant avec le temps, on démontre le théorème suivant :

Théorème 2 : Supposons que les pôles $P_{pk}(n)$ s'écrivent sous la forme :

$$P_{pk}(n) = e^{\alpha'_k(n) + j\omega'_k(n)}$$

avec

$$\alpha'_k(n) = \sum_{l=0}^{N_\alpha} \alpha'_{kl} \quad \text{et} \quad \omega'_k(n) = \sum_{l=0}^{N_\omega} \omega'_{kl} n^l$$

Alors, on a l'égalité :

$$x(n) = \sum_{k=1}^p B_k \Phi_k(n) = \sum_{k=1}^p B_k [Z_k(n)]^n$$

Avec :

$$Z_k(n) = \sum_{i=0}^{N_\alpha} a_{ki} n^i + j \sum_{i=0}^{N_\omega} \omega_{ki} n^i$$

a_{ki} et ω_{ki} s'obtiennent comme combinaisons linéaires respectivement de α'_{kl} et ω'_{kl} .

Démonstration :

Chaque mode s'écrit :

$$\Phi_k(n) = P_{pk}(n-1) P_{pk}(n-2) \dots P_{pk}(0)$$

$$\sum_{i=0}^{N_\alpha} \alpha'_{ki} S_i \quad \sum_{i=0}^{N_\omega} \omega'_{ki} S_i \quad (23)$$

En introduisant les sommes $S_l = \sum_{k=0}^{n-1} k^l$.

Les sommes S_l ont des propriétés particulières, elles vérifient les deux relations suivantes (démontrées en annexe 2) :

$$S_l = n \left(\sum_{k=0}^l S_{lk} n^k \right) \quad (24)$$

$$S_l = \frac{1}{l+1} [n^{l+1} - n - C_{l+1}^{l-1} S_{l-1} - C_{l+1}^{l-2} S_{l-2} - \dots - C_{l+1}^1 S_1] \quad (25)$$

S_l est une fonction de n , de degré $l+1$ et s'exprime en fonction des $l-1$ sommes précédentes. Sachant que $s_{00} = 1$, ces deux équations nous donnent tous les s_{lk} .

Or, en comparant l'expression de $\Phi_k(n)$ (22) avec :

$$[Z_k(n)]^n = e \sum_{i=0}^{N_\alpha} \alpha_{ki} n^i + j n \sum_{i=0}^{N_\omega} \omega_{ki} n^i \quad (26)$$

on en déduit aisément les deux relations suivantes pour avoir l'égalité :

$$\alpha_{ki} = \sum_{l=i}^{N_\alpha} \alpha'_{kl} S_{li} \quad (27)$$

$$\omega_{ki} = \sum_{l=i}^{N_\omega} \omega'_{kl} S_{li} \quad (28)$$

Dans ce cas, l'égalité du théorème 2 est démontrée, on obtient bien :

$$\Phi_k(n) = [Z_k(n)]^n \quad (29)$$

En conclusion du paragraphe, on peut dire que si l'on arrive à approximer les p pôles à droite $P_{pk}(n)$ sous la forme particulière d'exponentielles fonction de combinaison linéaire de puissances du temps, alors le calcul des pôles du modèle $Z_k(n)$ se fait directement.

3.3. OBTENTION DES PARAMÈTRES $a_k(n)$ À PARTIR DES PARAMÈTRES DE LA MODÉLISATION AR ÉVOLUTIVE

Les paramètres $a_k(n)$ de l'équation (11) peuvent être obtenus de différentes façons. Une des solutions serait d'utiliser une modélisation AR adaptative [2] qui nous donnerait des paramètres autorégressifs variant avec le temps. Néanmoins, pour conserver la même philosophie à chaque étape de la méthode, c'est-à-dire d'avoir une modélisation globale, il nous paraît plus approprié d'utiliser une modélisation AR évolutive.

Le modèle AR à coefficients variant avec le temps [7] d'un signal $x(n)$ est donné par l'équation suivante :

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k(n-k) x(n-k) + e(n) \quad (30)$$

p est l'ordre du modèle, $e(n)$ représente l'erreur de modèle ou le bruit.

Les paramètres $a_k(n-k)$ dépendent de n . Ils sont calculés comme combinaisons linéaires de m fonctions $f_i(n)$:

$$a_k(n) = \sum_{j=0}^m a_{kj} f_j(n) \quad (31)$$

m est le degré de la base. Le premier problème est le choix de la base des fonctions $f_i(n)$. Plusieurs sont possibles [8] : les puissances du temps, les séries de Fourier, les polynômes de Legendre...

Remarquons le décalage de l'origine des temps sur les paramètres du modèle. Il va rendre plus aisé le calcul des paramètres variables $a_k(n-k)$. Grâce à ce décalage le problème de l'estimation des paramètres variables avec le temps va se ramener au problème de l'estimation des paramètres constants a_{kj} à partir d'équation de Yule-Walker [8].

En comparant l'équation (11) et l'expression du modèle AR évolutif (30) avec une erreur de modèle nulle, on s'aperçoit que les coefficients a_k sont les mêmes au décalage temporel près.

En conclusion, tous les développements de cette partie montrent comment obtenir les pôles variables $Z_k(n)$ du modèle Prony évolutif à partir des paramètres $a_k(n)$ du modèle AR évolutif.

Dans la partie suivante nous allons détailler l'algorithme d'obtention des paramètres du modèle.

4. Algorithme

Tous les développements de la partie 3 permettent de déduire simplement l'algorithme d'estimation du modèle de Prony évolutif. Cinq étapes sont nécessaires :

- 1) Estimation des $a_k(n)$
- 2) Calcul des pôles à droite $P_{pk}(n)$
- 3) Approximation des pôles à droite
- 4) Calcul des $Z_k(n)$
- 5) Estimation des amplitudes B_k

4.1. ESTIMATION DES PARAMÈTRES AR DÉPENDANTS DU TEMPS

Cette étape est détaillée par Grenier dans [8]. Le point délicat est le choix de la base de fonctions sur laquelle sont décomposés les paramètres autorégressifs $a_k(n)$ dans l'équation (30). Deux autres degrés de liberté sont à fixer par l'utilisateur : l'ordre du modèle et le degré de la base. Pour déterminer l'ordre du modèle, on peut s'aider de la connaissance acquise dans la modélisation AR stationnaire sur fenêtre brève. Une deuxième solution est d'appliquer un critère du type Akaike [17]. Le critère est appliqué pour différents degrés, il nous permet d'obtenir le couple optimum (ordre, degré) pour le signal considéré. Une application est donnée dans [8] sur un signal de parole

Les coefficients $a_k(n)$ étant obtenus, il ne faut pas oublier de faire en plus un décalage temporel pour revenir aux coefficients de l'équation (11).

4.2. ESTIMATION DES PÔLES À DROITE DÉPENDANT DU TEMPS

Chaque pôle à droite $P_{pk}(n)$ est calculé récursivement dans l'équation (19) à partir des coefficients $a_k(n)$, qui sont les paramètres autorégressifs décalés, et de ses $p-1$ valeurs initiales. Si on dispose de connaissances a priori sur le signal, on peut en déduire les valeurs initiales des pôles à droite.

En pratique, on ne connaît pas ces valeurs. Pour initialiser le calcul, sans connaissance sur le signal, le plus simple est de se placer sur une fenêtre fixe au début du signal. La fenêtre étant la plus petite possible, on calcule les p pôles constants du modèle de Prony du cas stationnaire [12] : $P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0p}$. Chaque pôle à droite variable est alors initialisé de la façon suivante :

$$\text{pour } i = 0, \dots, p-1 \quad P_{pk}(i) = P_{0k}$$

Bien évidemment ce résultat est inexact puisque le signal est non stationnaire. Chaque pôle reçoit la valeur moyenne sur les $p-1$ premiers échantillons. Ce qui suppose implicitement un signal stationnaire sur les $p-1$ premiers échantillons. Cette hypothèse est concevable pour un nombre de pôles raisonnable, donc un ordre p réduit (dans notre simulation, l'initialisation est effectuée pour 4 pôles).

Une autre façon d'initialiser les pôles à droite serait pour les $p-1$ premiers échantillons de calculer les p pôles de Prony pour chaque

jeu de p paramètres AR constants déduits des paramètres $a_k(n)$ avec $n = 0, 1, \dots, p-1$. Sur notre simulation, l'amélioration n'est pas significative. Nous pensons que cette méthode est à employer pour un nombre de pôles plus important

Avec la formulation (19) on peut déterminer p pôles à droite $P_{p1}(n), P_{p2}(n), \dots, P_{pp}(n)$. Un avantage de cette factorisation en pôles dépendants du temps est que la valeur de chaque pôle à un instant donné est indépendante des autres pôles.

Une erreur d'estimation d'un pôle ne se répercute pas sur les autres.

4.3. APPROXIMATION DES PÔLES DROITE

Calculons les pôles à droite sous la forme d'exponentielle polynomiale :

$$P_{pk}(n) \approx e^{\alpha'_k(n) + j\omega'_k(n)} \quad (32)$$

avec

$$\alpha'_k(n) = \sum_{l=0}^{N_\alpha} \alpha'_{kl} n^l \quad (33)$$

$$\omega'_k(n) = \sum_{l=0}^{N_\omega} \omega'_{kl} n^l \quad (34)$$

Pour chaque pôle, on estime séparément le module et la phase (voir 4.3.1. et 4.3.2.).

4.3.1. Estimation du module

On fait une estimation classique des moindres carrés polynomiale sur $\log |P_{pk}(n)|$. En effet :

$$\alpha'_k(n) = \sum_{l=0}^{N_\alpha} \alpha'_{kl} n^l = \log |P_{pk}(n)| \quad (35)$$

4.3.2. Estimation de la phase

On multiplie $P_{pk}(n)$ par l'inverse de son module, puis on estime la phase à l'aide des méthodes développées dans [18] ou [19].

On montre dans [19] que :

$$\omega'_{il} = \frac{1}{l!} \operatorname{argmax} |DFT_l[DC_l[P_{pi}(n), k], \omega]| \quad (36)$$

argmax est l'abscisse correspondante au maximum du module.

avec DC_M fonction d'autocorrélation polynomiale définie par :

$$DC_M[x(n), k] = \frac{1}{N - Mk} \sum_{n=Mk+1}^M \prod_{q=0}^M [x(n - qk)]^{C_M^q} \quad (37)$$

$$0 \leq k \leq N_M = \frac{N-1}{M}$$

DFT_M est une transformée de Fourier modifiée définie par :

$$DFT_M[x(n), \omega] = \sum_{n=0}^{N_m} n^{M-1} x(n) \exp\{-j\omega T_e^M n^M\} \quad (38)$$

pour $x(n)$ signal discret de période d'échantillonnage T_e .

L'estimation précédente permet de calculer directement $Z_k(n)$.

$$[Z_k(n)]^n = \Phi_k(n)$$

α_{ki} est calculé comme une combinaison linéaire de α'_{kl} ($l = 0, \dots, N_\alpha$) et ω_{ki} comme une combinaison linéaire de ω'_{kl} ($l = 0, 1, \dots, N_f$) (voir démonstration du théorème 2).

4.4. ESTIMATION DES AMPLITUDES

Les amplitudes B_k sont estimées à l'aide d'une procédure des moindres carrés [20].

$$B = [B_1 \dots B_p]^T + (V^H V)^{-1} V^H X \quad (39)$$

V est une matrice de Van Der Monde, de terme générique :

$$V = [v_{nm}] = [Z_m^n(n)] \quad n = 0, \dots, N-1 \quad m = 1, \dots, p$$

V^H est sa transposée conjuguée.

$X = [x(0) \dots x(N-1)]^T$ est le vecteur signal.

5. Performances sur un signal de simulation

5.1. Contexte de la simulation

Considérons le signal à deux composantes de la forme :

$$x(n) = \cos[2\pi(f_1 n + f_2 n^2)] + \cos[2\pi(f'_1 n + f'_2 n^2)] + \omega(n) \quad (40)$$

$\omega(n)$ est un bruit blanc gaussien. Chaque composante suit une loi de modulation en fréquence linéaire. Notons que les deux composantes du signal sont à phase nulle et amplitude constante égale à 1. Dans cette simulation, seuls les paramètres fréquentiels seront recherchés.

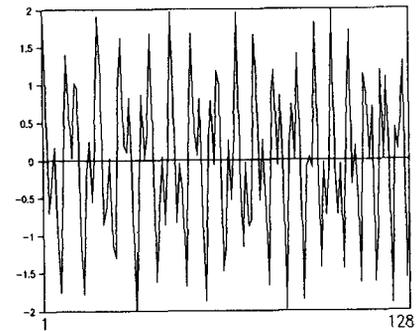
Ayant remarqué que l'algorithme d'estimation des paramètres fréquentiels est sensible à la position relative des deux lois de modulation en fréquence, nous allons évaluer les performances de l'algorithme pour trois signaux différents. Si l'on compare ces signaux, un seul paramètre est modifié, c'est le paramètre f_2 qui concerne la pente de la loi de modulation de la première composante. Dans le premier cas, figure 1, les deux composantes ont leur loi en fréquence nettement distincte. Dans le second cas, figure 2, les lois en fréquence se rapprochent l'une de l'autre (avec

$$f_1 = 0,1$$

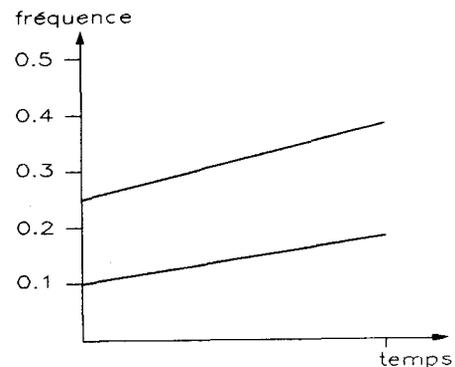
$$f_2 = 0,0003$$

$$f'_1 = 0,25$$

$$f'_2 = 0,0005$$



(a)



(b)

Figure 1. - (a) Signal 1 sans bruit. (b) Variation des fréquences en fonction du temps du signal 1

un écart minimal de 0,022 en fréquence réduite). Enfin, dans le 3ème cas, figure 3, les deux lois de modulation se croisent.

Chaque signal est généré avec différents rapports signal à bruit (S/B). Un signal est formé de 128 points. Pour chaque type de signal, les résultats sont une moyenne sur 100 signaux.

Signal 1 : Les modulations linéaires sont distinctes l'une de l'autre, il n'y a pas de recouvrement en fréquence (les composantes n'ont jamais la même fréquence sur tout le signal).

Signal 2 : Les modulations linéaires ont une zone de fréquence commune.

Signal 3 : Les modulations linéaires se croisent.

L'objet de cette simulation de l'algorithme de Prony évolutif est de retrouver les quatre paramètres fréquentiels pour chaque signal. Chaque fréquence f_i est obtenue à partir des paramètres ω_{ki} de la i ème composante du modèle de la façon suivante :

$$f_i = \frac{i \cdot \omega_{ki}}{2\pi}$$

Les paramètres qui sont pris en considération dans cette situation sont l'erreur relative moyenne ϵ_r et l'écart-type moyen relatif σ_r obtenus sur chaque paramètre fréquentiel :

$$\epsilon_r = \frac{\overline{\hat{f}_i} - f_i}{f_i} \quad \sigma_r = \frac{\overline{\sigma_i}}{f_i}$$

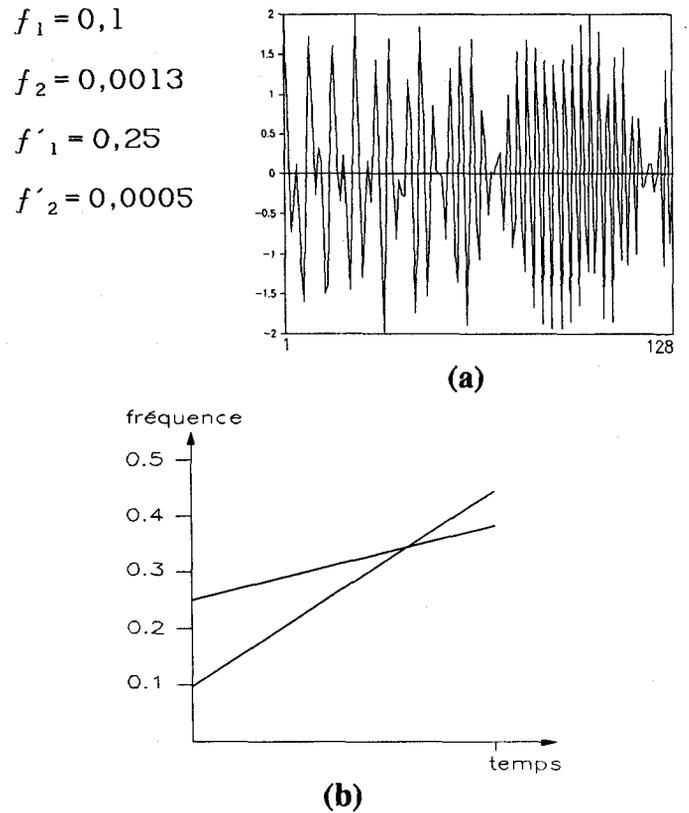
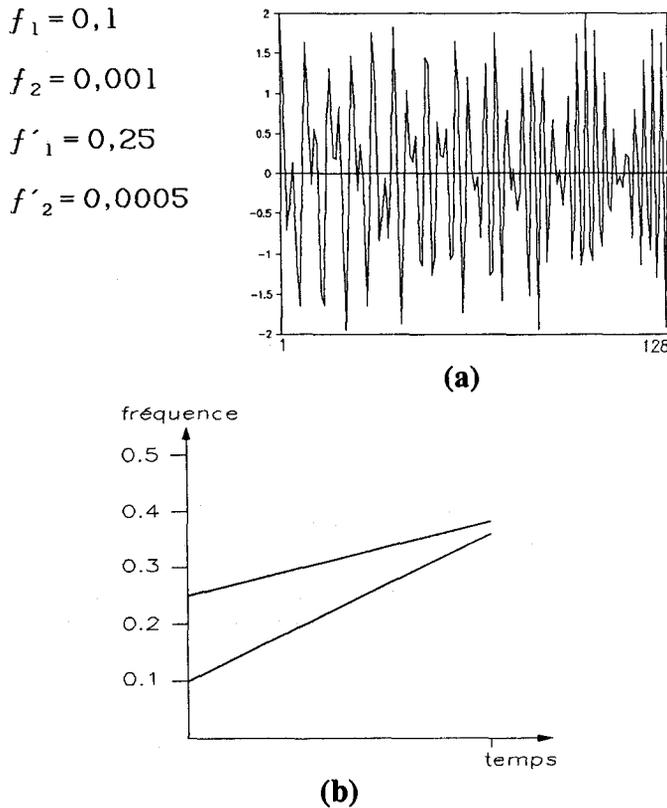


Figure 2. – (a) Signal 2 sans bruit. (b) Variation des fréquences en fonction du temps du signal 2

Figure 3. – (a) Signal 3 sans bruit. (b) Variation des fréquences en fonction du temps du signal 3

5.2. RÉSULTATS

L'algorithme du modèle de Prony évolutif proposé dans cet article possède un grand nombre de degrés de liberté. Pour obtenir des résultats sur un signal formé de deux composantes, on s'est imposé un ordre de 4 pour le modèle AR évolutif. Un ordre plus élevé aurait l'avantage d'être moins sensible au bruit mais il faudrait résoudre le problème du choix des 4 paramètres autorégressifs à conserver pour avoir deux composantes. La détermination d'un critère facilitant ce choix est loin d'être trivial et nécessite une étude approfondie ne rentrant pas dans le cadre de cet article.

Pour le choix de la base de fonctions sur laquelle les paramètres AR sont décomposés, trois bases ont été essayées : les fonctions puissance, les polynômes de Legendre et les fonctions de Fourier. Les deux premières familles donnent les meilleurs résultats. Ces résultats étant très proches, la famille la plus simple des fonctions puissance a été retenue. Un autre paramètre à régler est le degré de la base. Expérimentalement, un degré variant de 1 à 3 donne des résultats comparables. Le choix de la simulation s'est porté sur un degré de 2.

Une des difficultés de l'algorithme du modèle de Prony évolutif, mentionnée au paragraphe 4.2 est l'initialisation des pôles à droite. Pour faire ce calcul, on se place sur une petite fenêtre de 16 points au début du signal, puis on calcule p pôles constants du modèle

de Prony du cas stationnaire. Ce calcul des valeurs initiales est évidemment sensible au bruit car le nombre de points utilisé est faible. Pour avoir des résultats significatifs, on a vérifié sur les fichiers testés que les valeurs initiales calculées n'étaient pas aberrantes.

Pour quatre rapports signal/bruit, l'estimation des paramètres fréquentiels des signaux 1, 2, 3 sont donnés respectivement dans les tableaux 1, 2 et 3. En gras figurent les erreurs relatives moyennes. Pour mieux apprécier la consistance de ces valeurs, l'écart type relatif moyen est donné entre parenthèses.

Tableau 1. – Signal 1. Erreur relative en pourcentage. Entre parenthèses, l'écart type relatif moyen

Signal 1	Erreur en %			
	f_1	f_2	f'_1	f'_2
S/B en dB				
30	0,3 (0,3)	1,9 (0,6)	0,5 (0,1)	0,7 (0,3)
20	1 (1)	3,3 (2,5)	0,5 (0,5)	2,9 (1,3)
15	4,2 (6,7)	3,7 (35,6)	2,9 (1,3)	8,4 (3,6)
10	10,8 (15,9)	18 (41,4)	6,5 (1,9)	15,9 (6,8)

Pour un rapport S/B supérieur à 10 dB, l'erreur d'estimation sur les quatre paramètres du signal 1 est inférieure à 8,4%. Entre 15 et 10 dB, l'erreur augmente considérablement en faisant plus que doubler. Cette augmentation est essentiellement due à la grande sensibilité au bruit de 2 étapes de l'algorithme : le calcul des valeurs initiales des pôles à droite et le calcul des paramètres autrègressifs évolutifs. Pour ce signal, l'erreur est plus importante sur les paramètres f_2 et f'_2 , qui correspondent à la pente de la loi modulation en fréquence que sur les paramètres f_1 et f'_1 .

Tableau 2. – Signal 2. Erreur relative en pourcentage. Entre parenthèses, l'écart type relatif moyen

Signal 2	Erreur en %			
S/B en dB	f_1	f_2	f'_1	f'_2
30	3,2 (1,1)	0,9 (1,1)	0,2 (0,9)	5,6 (5)
20	3 (5,6)	4,2 (3,9)	3,2 (0,7)	24 (3,4)
15	5,1 (15,2)	3,1 (6,4)	5 (1,5)	31,5 (5,9)
10	15,4 (14,8)	2,4 (7)	7,5 (3,2)	40,8 (10,5)

Sur le signal 2, l'estimation est dans la plupart des cas moins bonne que dans le cas précédent. Le rapprochement des modulations en fréquence affecte surtout les résultats de l'estimation de f_2 et f'_2 . Curieusement, par rapport au signal 1, les résultats de f_2 sont meilleurs alors que ceux de f'_2 sont nettement dégradés.

Les composantes très proches en fréquence de ce signal introduisent un biais important dans l'estimation de f'_2 qui croît avec le bruit. Le maximum se situe à 10 dB pour une erreur relative de 40,8% avec un écart type de 10,5%.

L'origine de ce biais est à attribuer à la première étape de l'algorithme concernant le calcul des paramètres $a_k(n)$.

Tableau 3. – Signal 3. Erreur relative en pourcentage. Entre parenthèses, l'écart type relatif moyen

Signal 3	Erreur en %			
S/B en dB	f_1	f_2	f'_1	f'_2
30	3 (3)	10,6 (1,7)	1,1 (0,5)	0,7 (2,5)
20	8 (8,1)	8,7 (3,5)	1 (0,7)	0,9 (2)
15	19,4 (7,5)	11,7 (4)	0,2 (1,8)	2,3 (4,6)
10	31,3 (10,7)	15,9 (7)	1 (5,9)	1,4 (9,6)

Par rapport au signal 1, le croisement des lois linéaires en fréquence perturbe surtout l'estimation de la première composante de paramètres f_1 et f_2 . Les paramètres de la seconde composante

ont pour certains rapports S/B (15 et 10 dB) une erreur moyenne plus faible que pour le signal 1 (avec il est vrai un écart type relatif plus important).

5.3. CONCLUSION DE LA SIMULATION

Cette première simulation nous a permis de vérifier que l'algorithme d'obtention des paramètres fréquentiels du modèle de Prony évolutif fonctionne. Pour de forts rapports S/B (supérieurs à 15 dB), on retrouve les paramètres avec une bonne précision quelque soit le signal.

Cependant, l'algorithme est encore trop sensible au bruit. On note une dégradation importante des résultats pour un rapport S/B de 10 dB. A ce niveau de bruit, les étapes limitatives sont essentiellement l'estimation des paramètres AR évolutifs et le calcul des valeurs initiales des pôles à droite.

L'estimation est rendue plus délicate dans le cas de lois de modulation très proches ou se croisant. Sur le signal 2 apparaît un biais important dans l'estimation du paramètre f'_2 alors que sur le signal 3 c'est la première composante qui est mal estimée. Ce biais est introduit par la première étape de l'algorithme. En effet l'algorithme de calcul des paramètres $a_k(n)$ se trouve très perturbé par le rapprochement des lois de modulation en fréquence.

Un avantage de l'algorithme est d'estimer séparément chaque pôle à droite ce qui explique la différence éventuelle des résultats obtenus sur chaque composante. Par exemple, sur le signal 3 la deuxième composante est beaucoup mieux estimée que la première. Ce calcul des pôles à droite est néanmoins tributaire de la première étape du calcul qui est l'estimation des paramètres AR évolutifs. Dans ce calcul, les $a_k(n)$ ne sont pas indépendants les uns des autres et sont fortement influencés par la composition du signal. C'est la raison pour laquelle on observe des résultats très différents sur la deuxième composante pour les 3 signaux.

En étudiant les différentes étapes de l'algorithme, on se rend compte que l'étape la plus sensible au bruit est le calcul des paramètres du modèle AR évolutif. Le choix a priori d'un ordre de 4 est un facteur limitatif des performances. Pour le signal 1, des essais effectués avec un ordre de 8 montrent que l'estimation des paramètres des deux composantes est grandement améliorée. Les paramètres qu'on n'arrivait pas à estimer pour un ordre de 4 sont obtenus avec une bonne précision. Evidemment, pour un ordre de 8, deux autres composantes apparaissent. L'algorithme calcule des paramètres fréquentiels pour ces deux composantes et on s'aperçoit que dans certains cas, les valeurs calculées sont aberrantes (par exemple, on obtient des valeurs de fréquence supérieures à 0,5) et peuvent donc être facilement éliminées. Dans d'autres cas le choix est plus délicat à faire.

Une autre étape sensible au bruit est le calcul des valeurs initiales des pôles à droite. Cette phase suppose le signal stationnaire sur une très courte fenêtre (16 points dans notre simulation). Jusqu'à 10 dB de rapport S/B , les performances sont encore bonnes.

Par contre pour des rapports S/B inférieurs, les performances se dégraderont rapidement. La sensibilité au bruit des modélisations paramétriques dans le cas stationnaire a été très souvent étudiée, elle peut être par exemple diminuée avec des techniques de décompositions en valeurs singulières (SVD) [21].

L'estimation de la phase polynomiale fait également partie des étapes délicates de l'algorithme. La valeur minimale du rapport S/B , pour une loi de modulation en fréquence linéaire d'un signal de 128 points, est donnée dans [19] : elle se situe autour de -6 dB. Cette valeur est suffisamment basse pour considérer que cette procédure ne limite pas les performances de l'algorithme dans notre simulation.

6. Conclusion

Dans cet article, nous présentons un modèle de Prony à paramètres variant avec le temps appelé modèle de Prony évolutif. Ce modèle est une extension du cas stationnaire particulièrement bien adapté aux signaux multicomposantes non stationnaires.

Nous avons montré théoriquement qu'il est possible de déterminer les paramètres de fréquence et d'amplitude s'ils sont formés de combinaisons linéaires de puissances du temps (avec une base de polynômes, la démonstration est la même).

Un algorithme d'estimation des paramètres du modèle de Prony évolutif est proposé et détaillé. Cet algorithme se compose de 5 étapes dont la première est l'estimation du modèle AR évolutif associé.

Pour le tester, nous avons introduit un signal de simulation simple. Il est formé de deux composantes, d'amplitude constante et de loi en fréquence variant linéairement avec le temps. Nous pouvons dire que l'estimation des paramètres fréquentiels fonctionne pour des rapports S/B allant jusqu'à 10 dB et dans le cas de composantes ayant des lois de modulation en fréquence distinctes. Pour des lois en fréquence qui se rapprochent ou qui se croisent, l'estimation des paramètres devient plus délicate à cause du calcul des paramètres AR évolutifs qui introduit un biais sur certains paramètres.

Avec l'augmentation du niveau de bruit, les performances de l'algorithme sont limitées par deux procédures : le calcul des paramètres du modèle AR évolutif ainsi que le calcul des valeurs initiales des pôles à droite. Une solution pour la première étape est d'augmenter l'ordre du modèle. Il faut alors établir un critère pour trier les composantes fréquentielles et ne conserver que les utiles (un premier critère peut fonctionner en triant les composantes à partir des paramètres fréquentiels obtenus, par élimination des valeurs aberrantes on ne conserve que les composantes « vraies » du signal). Pour le calcul des valeurs initiales, une amélioration peut être apportée en utilisant des techniques plus fines de modélisation paramétrique (du type SVD).

Quelques essais ont été effectués sur un signal formé de composantes d'amplitude variable. Il semblerait que la modélisation AR évolutive ne permette pas d'estimer avec précision les paramètres d'amplitudes, en particulier dans le cas d'amplitude d'ordres de grandeur différents. Les résultats sont cependant corrects pour des amplitudes constantes.

7. Annexes

A.1. CALCUL DES PÔLES DROITE $P_p(n)$

Les équations (15), (16) et (17) s'écrivent aussi sous la forme suivante :

$$\beta_{p-1,1}(n) = a_1 + P_p(n) \quad (\text{A.1})$$

$$\beta_{p-1,k}(n) = a_k(n) + \beta_{p-1,k-1} P_p(n - k + 1) \quad (\text{A.2})$$

$$k = 2, \dots, p - 1$$

$$0 = a_p(n) + \beta_{p-1,p-1}(n) P_p(n - p + 1) \quad (\text{A.3})$$

Multiplions l'équation (A.1) par $P_p(n - 1)$:

$$\beta_{p-1,1}(n) P_p(n - 1) = a_1(n) P_p(n - 1) + P_p(n) P_p(n - 1) \quad (\text{A.4})$$

L'équation (A.2) pour $k = 2$ donne :

$$\beta_{p-1,2}(n) = a_2(n) + \beta_{p-1,1} P_p(n - 1) \quad (\text{A.5})$$

En combinant les équations (A.4) et (A.5), on obtient :

$$\beta_{p-1,2}(n) = a_2(n) + a_1(n) P_p(n - 1) + P_p(n) P_p(n - 1) \quad (\text{A.6})$$

(A.6) multiplié par $P_p(n - 2)$:

$$\beta_{p-1,2}(n) P_p(n - 2) = a_2(n) P_p(n - 2) + \quad (\text{A.7})$$

$$a_1(n) P_p(n - 1) P_p(n - 2) + P_p(n) P_p(n - 1) P_p(n - 2)$$

L'équation (A.2) pour $k = 3$:

$$\beta_{p-1,3}(n) = a_3(n) + \beta_{p-1,2} P_p(n - 2) \quad (\text{A.8})$$

L'équation (A.7) dans (A.2) donne :

$$\beta_{p-1,3}(n) = a_3(n) + a_2(n) P_p(n - 2) + \quad (\text{A.9})$$

$$a_1(n) P_p(n - 1) P_p(n - 2) + P_p(n) P_p(n - 1) P_p(n - 2)$$

Et ainsi de suite, on obtient avec la dernière équation :

$$\begin{aligned} 0 = & a_p(n) + a_{p-1}(n) P_p(n - p + 1) \\ & + a_{p-2}(n) P_p(n - p + 2) P_p(n - p + 1) + \dots \\ & + a_1(n) P_p(n - 1) \dots P_p(n - p + 1) \quad (\text{A.10}) \\ & + P_p(n) P_p(n - 1) \dots P_p(n - p + 1) \end{aligned}$$

Cette dernière équation nous permet d'obtenir l'expression de $P_p(n)$:

$$P_p(n) = -a_1(n) - \sum_{j=0}^{p-2} \frac{a_{p-j}(n)}{\prod_{i=1}^{p-j-1} P_p(n-i)} \quad (\text{A.11})$$

A.2. CALCUL DE $S_j = \sum_{k=1}^{n-1} k^j$

$$(1+1)^j = 1^j + C_j^1 + \dots + C_j^{j-1} + 1^j$$

$$(1+2)^j = 1^j + C_j^1 2 + \dots + C_j^{j-1} 2^{j-1} + 2^j$$

$$\frac{(1+n-1)^j = 1^j + C_j^1(n-1) + \dots + C_j^{j-1}(n-1)^{j-1} + (n-1)^j}{n^j = n-1 + C_j^1 S_1 + C_j^2 S_2 + \dots + C_j^{j-1} S_{j-1} + 1}$$

est le résultat de la somme des $n-1$ lignes.

On en déduit une façon de calculer S_j en fonction des sommes précédentes :

$$S_{j-1} = \frac{1}{j} [n^j - n - C_j^1 S_1 - C_j^2 S_2 - \dots - C_j^{j-2} S_{j-2}]$$

Les trois premières sommes sont données par :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n+1)}{6}$$

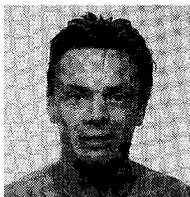
$$S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. FLANDRIN, N. MARTIN AND AL, « Méthodes temps-fréquence », *Traitement du signal*, sup. au vol. 9, n°1, 1992, pp. 79-113.

LES AUTEURS

Franck MOLINARO



Franck Molinaro est maître de conférences à l'université de la Réunion depuis septembre 1992. Pendant sa thèse sur les vibrations du moteur automobile appliquée à la détection du cliquetis (Thèse INP de Toulouse — 1992), il a travaillé sur les représentations temps-fréquence et les modélisations paramétriques. Depuis, il est entré au Laboratoire de Physique de l'Atmosphère de l'Université de la Réunion et travaille sur l'extraction d'informations du signal LIDAR rétrodiffusé par l'atmosphère (ondes de gravité, ozone...).

[2] O. MACCHI, M. BELLANGER, « Le point sur le filtrage adaptatif transverse », *Colloque GRETSI*, 1987, pp. 16-46.

[3] C. LAMBERT-NEBOUT, F. CASTANIÉ, « An adaptive Prony algorithm », *Colloque EUSIPCO*, Florence, 1988, pp. 403-406.

[4] J.M. MENDEL, « A priori and a posteriori identification of time-varying parameters », *2nd Hawai Int. Conf. on Syst. Sciences*, 1969, pp. 207-210.

[5] T.S. RAO, « The fitting of non-stationary time-series models with time dependent parameters », *J. of the Royal Statist. Soc. Series B*, 32, n°2, 1970, pp. 312-322.

[6] L.A. LIPORACE, « Linear estimation of non-stationary signals », *J. Acoust. Soc. Amer.*, 58, n°6, 1975, pp. 1288-1295.

[7] Y. GRENIER, « Time-Dependent ARMA Modeling of Nonstationary Signals », *IEEE Trans. on ASSP*, vol. ASSP-31, n°4, 1983, pp. 899-911.

[8] Y. GRENIER, « Modèles ARMA à coefficients dépendants du temps : estimateurs et applications », *Traitement du signal*, vol. 3, n°4-5, 1986, pp. 216-233.

[9] M.G. HALL, A.V. OPPENHEIM, A.S. WILLSKY, « Time-varying modeling of speech », *Signal Processing*, vol. 5, 1983, pp. 267-285.

[10] K.S. NATHAN, Y.T. LEE, H.F. SILVERMAN, « A time-varying Analysis Method for Rapid Transitions in Speech », *IEEE Trans. on SP*, vol. 39, n°4, 1991, pp. 815-825.

[11] R. PRONY, « Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques », *J. de l'école Polytechnique*, n°1, Floréal et Prairial, an III, 1795.

[12] F. CASTANIÉ, E. DAYMIER, « Prony spectral analysis of stationary processes », *Signal Processing III : Theories and applications*, 1986, pp. 283-286.

[13] F. MOLINARO, « Caractérisation temps-fréquence et modélisation paramétrique du cliquetis moteur », *Thèse de l'INPT*, n°547, 1992.

[14] C. LAMBERT-NEBOUT, « Étude des moyens d'analyse du signal basse fréquence d'un récepteur d'alignement de piste », *Thèse de l'INPT*, n°287, 1989, pp. 49-86.

[15] F. MOLINARO, F. CASTANIÉ, « A time-varying Prony model », *Colloque EUSIPCO*, Bruxelles, 1992.

[16] E.W. KAMEN, « The poles and Zeros of a Linear Time varying system », *Linear algebra and its applications*, n°98, 1988, pp. 263-289.

[17] H. AKAIKE, « Information theory and an extension of the maximum likelihood principle », *2nd Int. Symp. on Inform. Th.*, Tsakhadsor, Arménie, 1971.

[18] S. PELEG, B. PORAT, « Estimation and Classification of Polynomial-Phase Signal », *IEEE Trans. on Inf. Theory*, vol. 37, n°2, 1991, pp. 422 à 430.

[19] Z. FARAJ, F. CASTANIÉ, « Polynomial phase signal estimation », *Colloque EUSIPCO*, Bruxelles, 1992.

[20] S. M. KAY, « Modern spectral estimation : theory and application », *Prentice Hall Signal Processing Series*, pp. 45 à 51, 1988.

[21] R. KUMARESAN, D.W. TUFTS, « Estimating the Parameters of Exponentially Damped Sinusoid and Pole-Zero Modeling in Noise », *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 30, n°6, 1982.

Manuscrit reçu le 18 Septembre 1995.

Francis CASTANIÉ

Francis Castanié est professeur à l'ENSEEIH, École Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique, d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse. Il est actuellement directeur du LEN7, laboratoire d'électronique de l'ENSEEIH. Ses travaux de recherche en traitement du signal couvrent divers domaines : estimation, modélisation paramétrique, transformée en ondelettes...