

# La calibration d'antenne

## Les méthodes d'autocalibration en présence de champ diffus

### *Self-Calibration Methods in the Presence of a Diffuse Field*

par Franck FLORIN

THOMSON-SINTRA A.S.M.  
Route de Ste Anne du Portic - 29601 Brest cedex.

#### Résumé

Dans cet article, on décrit les méthodes d'autocalibration en présence d'un champ diffus, de type réverbération ou clutter. On s'intéresse en particulier aux méthodes dites FADA et du maximum de contraste.

**Mots clés :** Autocalibration, FADA, Contraste, Réverbération, Clutter.

#### Abstract

In this paper, we describe the self-calibration methods in the presence of a diffuse field, like those produced by reverberation or clutter. A special attention is given to DAFT and Maximum of Sharpness methods.

**Key words :** Self-calibration, DAFT, Sharpness, Reverberation, Clutter.

## 1. Introduction

On s'intéresse ici plus particulièrement au cas où le champ à imager est constitué d'un nombre de sources quelconque, qui peut être infini. Ce cas est en particulier celui qui se présente en situation de forte réverbération en imagerie sous-marine ou lors de la présence importante de clutter en radar.

On ne fait aucune hypothèse a priori sur la nature des distorsions, isotropes ou anisotropes.

## 2. Formalisme

Considérons dans la suite le cas d'une antenne à  $M$  capteurs omnidirectionnels de gain normalisé à 1 en amplitude, caractérisée par sa description paramétrique  $\xi_o$ .

Dans ce cas, le vecteur source associé à une onde plane monochromatique d'angle  $\theta_o$  ( $\theta_o$  = gisement et/ou site) s'écrit :

$$\mathbf{a}(\xi_o, \theta_o) = [\exp(i\mathbf{k}(\theta_o)^T \mathbf{r}_m(\xi_o) + i\Psi_m(\xi_o))]_{m=1, \dots, M}$$

avec :

$\mathbf{k}$  = vecteur d'onde

$\mathbf{r}_m$  = vecteur position du  $m$ -ième capteur

$\Psi_m$  = gain en phase du  $m$ -ième capteur

$a_1 = 1$  (première composante de  $\mathbf{a}$ )

(Dans le cas où l'onde n'est pas plane,  $\mathbf{k}$  dépend aussi de  $\mathbf{r}_m(\xi_o)$ ).

Les observations se présentent sous la forme de vecteurs  $\mathbf{x}(\nu)$  ( $\nu$  = fréquence) aléatoires.

Dans le cas d'un champ de réverbération uniforme, insonifié sur un secteur angulaire  $\Delta\theta$ , ces vecteurs possèdent une matrice de covariance  $\Gamma_{\mathbf{R}}(\nu, \xi_o) = E(\mathbf{x}(\nu) \mathbf{x}(\nu)^*)$  ( $\xi_o$  = paramètre configurant l'antenne définie par :

$$\Gamma_{\mathbf{R}}(\nu, \xi_o) = \int_{\Delta\theta} \gamma_{\mathbf{R}}(\theta, \nu) \mathbf{a}(\theta, \nu, \xi_o) \mathbf{a}(\theta, \nu, \xi_o)^* d\theta$$

avec :

$$\mathbf{a}(\theta, \nu, \xi_o) = [\exp(-2i\pi\nu\tau_m(\theta, \xi_o))]_{m=1, \dots, M}$$

$\gamma_{\mathbf{R}}(\theta, \nu)$  = densité angulaire de densité spectrale de puissance de la réverbération.

Si le champ de réverbération est uniforme, on peut écrire :

$$\Gamma_{\mathbf{R}}(\xi_o) = \gamma_{\mathbf{R}} \int_{\Delta\theta} \mathbf{a}(\theta, \xi_o) \mathbf{a}(\theta, \xi_o)^* d\theta$$

(On a volontairement omis la dépendance en  $\nu$  pour simplifier l'écriture).

### 3. Méthode du maximum de vraisemblance

#### 3.1. UNIVERSALITÉ DE LA MÉTHODE

La particularité de certaines méthodes de focalisation (Maximum de contraste [7], [9], [10], [15], [17], Dominant scatterer algorithm [19-22]) est de ne pas tenir compte de la présence de bruit, ce qui explique d'emblée les forts rapports signal sur bruit nécessaires à leurs bons fonctionnements.

En pratique, le bruit peut prendre une importance considérable, comme c'est le cas dans le domaine de l'écoute sonar passive. Le bruit est par nature un phénomène décrit par un formalisme statistique. « Mesurer » la position de la source devient dès lors un problème d'estimation paramétrique dans lequel certains paramètres sont liés à la source (intensité, position, spectre...), d'autres au bruit (intensité, spectre...), au milieu (célérité...) ou à l'antenne (position, direction, distorsions...).

Le point de vue bayésien adopte un formalisme dans lequel les paramètres sont considérés comme des variables aléatoires de densités de probabilité connues a priori, à partir desquelles peut s'exprimer une fonction de coût, fonction des observations, que l'on cherche à minimiser.

En pratique, le manque d'informations a priori sur les paramètres conduit à considérer ceux-ci comme certains mais inconnus.

Dans le cas où la densité de probabilité des observations peut être exprimée en fonction des paramètres du problème (et sous certaines conditions d'existence, de régularité et de dérivabilité) la méthode du maximum de vraisemblance (qui consiste à rechercher les valeurs des paramètres pour lesquels la vraisemblance des paramètres conditionnelle à l'observation est maximale) est la méthode d'estimation « optimale » par le fait qu'elle est asymptotiquement (i.e. lorsque le nombre d'observations indépendantes tend vers l'infini) non biaisée et à variance minimale.

Cette approche classique [16] [23] n'est malheureusement pas toujours possible, par le fait que la forme des densités de probabilité des observations peut ne pas être connue ou calculable.

Dans ce cas, il est souvent possible de se ramener à un modèle « certain » des observations (par « moyennage » par exemple) de sorte que le problème d'identification se résume à un problème du type « moindres carrés ».

Selon les cas, on pourra donc utiliser l'une des trois approches suivantes pour résoudre le problème de l'autofocalisation :

- moindres carrés : peu d'informations sur la nature aléatoire des observations,
- maximum de vraisemblance : bruit important, modélisation paramétrique de la déformation de l'antenne,
- approche bayésienne : bruit important, modélisation paramétrique avec information a priori sur la valeur des paramètres.

#### 3.2. QUELQUES DIFFICULTÉS DE L'APPROCHE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

L'estimation par maximum de vraisemblance des paramètres de l'antenne ( $\xi$ ) en présence de réverbération, de bruit blanc spatialement, et sous hypothèse d'une loi gaussienne nécessite la maximisation en faisant varier  $\xi$  de :

$$L(\xi) = \mathbf{x}^* \Gamma(\xi)^{-1} \mathbf{x} + \text{Ln}(\det(\Gamma(\xi)))$$

avec :  $\Gamma = \Gamma_R + \sigma_B^2 \mathbf{Id}$

Cette fonction est hautement non linéaire en  $\xi$  et, surtout si la présence d'échos ponctuels dans le champ à imager augmente encore le nombre de paramètres, le problème d'estimation très instable car le mauvais conditionnement de  $\Gamma(\xi)$  pose souvent des problèmes numériques importants.

Outre le fait qu'en pratique aucune certitude n'est acquise sur le caractère gaussien des mesures, la stabilisation de la solution en intégrant les observations bande étroite ( $\sum_{\nu} L(\xi, \nu)$ ) n'est pas

nécessairement justifiable du point de vue théorique puisqu'une telle façon de procéder nécessite l'indépendance des diverses contributions fréquentielles, hypothèse qui pourrait ne pas être acquise dans le cas de l'imagerie active.

Augmenter  $M$  (nombre de capteurs) pour augmenter la dimension des observations n'est pas non plus une solution puisque ceci rend  $\Gamma_R$  très mal conditionnée.

Enfin l'intégration temporelle de plusieurs « snapshots »  $\mathbf{x} \mathbf{x}^*$  issus d'une même bande est rendue difficile en pratique par la non stationnarité du phénomène de réverbération.

### 4. Méthode de synchronisation des phases

Contrairement à D. STEINBERG (Voir Chap. 1 §1.6 et [19-22]), E.H. ATTIA [2-5] s'est intéressé au cas où le champ réverbérant à imager ne permet pas la mise en évidence d'un diffuseur dominant.

Dans ce cas, l'algorithme (5) est basé non pas sur la mesure directe des déphasages entre les signaux reçus sur les différents capteurs mais sur la mesure des phases de la fonction d'autocorrélation spatiale du champ, le phénomène de réverbération étant décrit par son aspect statistique.

En effet, sous l'hypothèse de diffuseurs spatialement décorrelés, en champ lointain et dans le « broad-side » de l'antenne, la fonction d'autocorrélation de l'antenne distordue diffère de la fonction d'autocorrélation de l'antenne idéale par sa phase :

$$\Psi_i \simeq (\delta_i - \delta_{i+1}) + \beta_i \quad \forall i = 1, \dots, M - 1$$

avec :

$i$  : indice de capteur

$\Psi_i$  : phase de l'intercorrélacion du champ entre capteurs  $i$  et  $i + 1$ , mesurée en absence de bruit

$\beta_i$  : phase « idéale » de l'intercorrélacion du champ entre capteurs  $i$  et  $i + 1$

$\delta_i$  : déphasage sur le  $i^{\text{ème}}$  capteur dû à la distorsion (dépointage de l'antenne compris).

E.H. ATTIA propose alors de calculer les quantités :

$$\phi_i = \sum_{n=1}^{i-1} \Psi_n$$

et de déphaser les capteurs d'autant.

L'erreur de déphasage des signaux de capteurs après correction vaut alors  $\delta\phi_i \sim \delta_i + \phi_i$  qui prend aussi la forme :

$$\delta\phi_i \simeq \delta_1 + \sum_{n=1}^{i-1} \beta_n$$

Pour un champ de réverbération symétrique, les  $\beta_i$  sont nuls, l'erreur de déphasage est une constante :  $\delta_1$ , ce qui est sans effet.

E.H. ATTIA fait en outre remarquer [5] que, pour une antenne linéaire à capteurs uniformément répartis, le cas de champs non symétriques peut être traité dans la mesure où les  $\beta_i$  sont constants. L'erreur résiduelle sur l'image est alors un décalage qui est sans conséquence pour bon nombre d'applications.

## 5. Méthode du contraste d'image

### 5.1. MÉTHODE PROPOSÉE PAR MULLER ET BUFFINGTON

Cités par de nombreux auteurs, les travaux de MULLER et BUFFINGTON [8] [9] [18] ont été largement exploités par les astronomes, les radaristes et les sonaristes.

A l'origine leur souci était d'utiliser un critère d'optimisation à partir de leurs mesures, c'est-à-dire de l'intensité en chaque point d'image. Ce critère était choisi pour être maximum en l'absence de distorsion.

L'insertion d'un dispositif déphaseur entre l'optique de leur télescope et les sources permet alors, à l'aide de ce critère, de compenser en temps réel les distorsions de phases et de trouver l'« image idéale » lorsque le maximum du critère est atteint.

Ils proposèrent donc un certain nombre de « fonctions de contraste » (sharpness) toutes établies à partir de l'intensité  $I(x, y)$  mesurée en chaque point  $(x, y)$  de l'image.

Toutes les fonctions de contraste sont du type suivant :

$$S_i = \int_{Image} F_i(I(x, y), x, y) dx dy \quad (1)$$

où  $F$  est fonction de  $I$  et éventuellement  $x$  et  $y$ . On donne ici les diverses formes proposées :

$$F_1 = I^2(x, y) \quad (2)$$

$$F_2 = \delta(x - x_o, y - y_o) I(x, y) \quad (3)$$

$\delta$  = distribution de Dirac

$$F_3 = M(x, y) I(x, y), M(x, y) \text{ arbitraire} \quad (4)$$

$$F_4 = \left| \frac{\partial^{m+n} I(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \right|^2 \quad (5)$$

$$F_5 = I^n(x, y), n \geq 2 \quad (6)$$

$$F_6 = -(x^2 + y^2) I(x, y) \quad (7)$$

$$F_7 = -I(x, y) \ln(I(x, y)) \quad (\text{Entropie}) \quad (8)$$

$$F_8 = -|I(x, y) - I_o(x, y)|^n \quad (9)$$

$I_o(x, y)$  = intensité de l'image non distordue.

Seuls  $F_1, F_2$  et  $F_3$  ( $M(x, y)$  = disque),  $F_5, F_7$  ont donné des résultats satisfaisants.  $F_4$  n'a pas été essayé.  $F_8$  est sans intérêt car  $I_o(x, y)$  n'est pas connue en pratique.

MULLER et BUFFINGTON (puis HAMAKER et AL ont mathématiquement prouvé, sous certaines conditions) que  $S_1$  et  $S_4$  vérifiaient la propriété du maximum de contraste ( $S_i$  maximum pour  $I_i(x, y) = I_o(x, y)$  en tout point.  $I_o(x, y)$  = intensité de l'image sans distorsion).

De ce fait,  $S_1$  est la fonction de contraste la plus généralement admise.

### 5.2. L'ALGORITHME DU MAXIMUM DE CONTRASTE AVEC LE FORMALISME SONAR

La méthode du maximum de contraste reprise par KOPP et AIACH [17], BUCKER [7] et FERGUSON [10] dans le cas du sonar passif, consiste à rechercher l'antenne  $\xi$  qui maximise une fonction coût donnée, fonction du champ mesuré. Cette fonction coût est le « contraste d'image », défini comme l'intégrale sur l'image (i.e. sur l'espace des voies) du carré de l'énergie de la formation de voies.

$$S(\xi, \xi_o) = \int_{\Theta} |v(\xi, \xi_o, \theta)|^2 \mu(d\theta)$$

où  $v$  est l'énergie moyenne de la voie  $\theta$ .

Lorsque les sources sont incohérentes, on peut écrire :

$$v(\xi, \xi_o, \theta) = \int_{\Theta_o} \gamma(\theta_o) |a(\xi, \theta)^* a(\xi_o, \theta)|^2 \mu(d\theta_o)$$

où  $\gamma(\theta_o)$  est l'énergie de la source en  $\theta_o$ , et  $\mu$  et  $\Theta_o$  définissent la répartition des sources.  $\mu$  est une mesure qui peut être discrète ou continue.

Le théorème donné par MULLER et BUFFINGTON [18] et redémontré par KOPP et AIACH [17] ainsi que par HAMAKER et AL [15] est le suivant :

$S(\xi, \xi_o)$  est maximum en  $\xi$  pour  $\xi = \xi_o$

Il convient toutefois de préciser que ce théorème ainsi énoncé est faux. (Un contre-exemple est donné plus loin). Pour lui rendre toute sa validité, il suffit de lui ajouter les conditions émises explicitement ou implicitement dans les démonstrations précédemment évoquées :

(H1) un champ uniforme sur l'espace observé génère un bruit blanc spatialement :

$$\forall \mathbf{u} \in J \quad \int_{\Theta} e^{i\mathbf{k}(\theta)^T \mathbf{u}} \mu(d\theta) = \delta(\mathbf{u})$$

avec :

$J$  espace de variation des capteurs de l'antenne (inclus dans  $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2$ , ou  $\mathbf{R}^3$ )

$$\delta(\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \neq 0$$

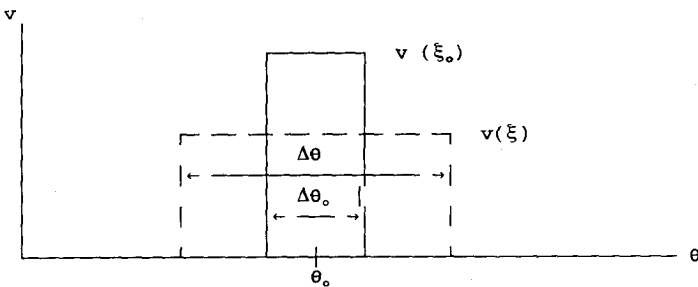
$$\delta(0) = 1$$

(H2) l'antenne est de forme connue ( $\mathbf{r}(\xi) = \mathbf{r}(\xi_o)$ ), les distorsions sont isotropes (voir partie I, chap. 7).

En optique, ces deux hypothèses sont généralement implicites et conduisent à l'hypothèse d'isoplanétisme :  $\Theta (\supset \Theta_o)$  est une région isoplanétique i.e.  $\forall (\theta, \theta_o) \in \Theta^2 \quad K(\theta_o, \theta, \xi_o, \xi)$  ne dépend en  $\theta$  et  $\theta_o$  que de la différence  $\theta - \theta_o$  ou  $\sin \theta - \sin \theta_o$  ou  $\mathbf{k}(\theta) - \mathbf{k}(\theta_o)$ .

### 5.3. JUSTIFICATION INTUITIVE DU THÉORÈME DU MAXIMUM DE CONTRASTE

Si l'on suppose que pour une antenne la défocalisation contribue à un élargissement et un abaissement de niveau du lobe de directivité, comme ce peut être le cas pour de petites déformations, on a le schéma suivant en sortie de formation de voies : cas d'une source en  $\theta_o$  (gisement).



La conservation de l'énergie impose  $v(\xi) \Delta\theta_o = v(\xi_o) \Delta\theta$ .

Comme  $v(\xi) < v(\xi_o)$ , on a donc  $v^2(\xi) \Delta\theta < v^2(\xi_o) \Delta\theta_o$ .

C'est-à-dire  $S(\xi) < S(\xi_o)$  ( $S =$  fonction de contraste).

Mais cette justification ne tient compte, ni des déformations des lobes, ni des remontées des secondaires, qui peuvent par exemple entraîner la non conservation de l'énergie.

### 5.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DU MAXIMUM DE CONTRASTE

Les hypothèses de base de la démonstration sont H1 et H2 du paragraphe 4.2.

Dans ces conditions, on montre que :

$$S(\xi, \xi_o) = \int_{\Theta} \left| \int_{\Theta_o} \gamma(\theta_o) |a(\xi, \theta)^* a(\xi_o, \theta_o)|^2 \mu(d\theta_o) \right|^2 \mu(d\theta)$$

est maximum pour  $\xi = \xi_o$ .

En effet, on a :

$$a(\xi, \theta)^* a(\xi_o, \theta_o) = \sum_{n=1}^M \exp \left[ i(\mathbf{k}(\theta_o) - \mathbf{k}(\theta))^T \mathbf{r}_n(\xi_o) + i(\Psi_n(\xi_o) - \Psi_n(\xi)) \right]$$

d'où :

$$S(\xi, \xi_o) = \int_{\Theta} \mu(d\theta) \left| \int_{\Theta_o} \gamma(\theta_o) \mu(d\theta_o) \sum_{n=1}^M \exp \left[ i(\mathbf{k}(\theta_o) - \mathbf{k}(\theta))^T \mathbf{r}_n(\xi_o) + i(\Psi_n(\xi_o) - \Psi_n(\xi)) \right] \right|^2$$

et en développant les carrés :

$$S(\xi, \xi_o) = \int_{\Theta} \mu(d\theta) \int_{\Theta_o} \int_{\Theta_o} \gamma(\theta_o) \gamma(\theta'_o) \sum_{n,m,k,l} \exp \left[ i F_{n,m,k,l}(\theta, \theta_o, \theta'_o, \xi, \xi_o) \right] \mu(d\theta_o) \mu(d\theta'_o)$$

avec :

$$F_{n,m,k,l}(\theta, \theta_o, \theta'_o, \xi, \xi_o) = (\mathbf{k}(\theta_o) - \mathbf{k}(\theta))^T (\mathbf{r}_n(\xi_o) - \mathbf{r}_m(\xi_o)) + (\mathbf{k}(\theta'_o) - \mathbf{k}(\theta))^T (\mathbf{r}_k(\xi_o) - \mathbf{r}_l(\xi_o)) + \Delta\Psi_{n,m,k,l}(\xi, \xi_o)$$

et :

$$\Delta\Psi_{n,m,k,l}(\xi, \xi_o) = \Psi_n(\xi_o) - \Psi_n(\xi) - \Psi_m(\xi_o) + \Psi_m(\xi) + \Psi_k(\xi_o) - \Psi_k(\xi) - \Psi_l(\xi_o) + \Psi_l(\xi)$$

En intégrant en  $\theta$ , on obtient :

$$S(\xi, \xi_o) = \int_{\Theta_o} \int_{\Theta_o} \gamma(\theta_o) \gamma(\theta'_o) \mu(d\theta_o) \mu(d\theta'_o) \sum_{n,m,k,l} \exp \left[ i\mathbf{k}(\theta_o)^T (\mathbf{r}_n(\xi_o) - \mathbf{r}_m(\xi_o)) + i\mathbf{k}(\theta'_o)^T (\mathbf{r}_k(\xi_o) - \mathbf{r}_l(\xi_o)) \right] \cdot \exp \left[ \Delta\Psi_{n,m,k,l}(\xi, \xi_o) \right] \delta_{n,m,k,l}(\xi_o)$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta_{n,m,k,l}(\xi_o) &= 1 \\ &\text{si } \mathbf{r}_n(\xi_o) - \mathbf{r}_m(\xi_o) + \mathbf{r}_k(\xi_o) - \mathbf{r}_l(\xi_o) = 0 \\ \delta_{n,m,k,l}(\xi_o) &= 0 \\ &\text{si } \mathbf{r}_n(\xi_o) - \mathbf{r}_m(\xi_o) + \mathbf{r}_k(\xi_o) - \mathbf{r}_l(\xi_o) \neq 0 \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} S(\xi, \xi_o) &= \int_{\Theta_o} \int_{\Theta_o} \gamma(\theta_o) \gamma(\theta'_o) \mu(d\theta_o) \mu(d\theta'_o) \\ &\sum_{n,m,k,l} \exp \left[ i(\mathbf{k}(\theta_o) - \mathbf{k}(\theta'_o))^T (\mathbf{r}_n(\xi_o) - \mathbf{r}_m(\xi_o)) \right] \\ &\cdot \exp [\Delta \Psi_{n,m,k,l}(\xi, \xi_o)] \delta_{n,m,k,l}(\xi_o) \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} S(\xi, \xi_o) &= \sum_{n,m,k,l} \left| \int_{\Theta_o} \gamma(\theta_o) \mu(d\theta_o) \exp [i\mathbf{k}(\theta_o)^T (\mathbf{r}_n(\xi_o) \right. \\ &\left. - \mathbf{r}_m(\xi_o)) \right]^2 \exp [i\Delta \Psi_{n,m,k,l}(\xi, \xi_o)] \delta_{n,m,k,l}(\xi_o) \end{aligned}$$

$S(\xi, \xi_o)$  est ainsi un réel somme d'exponentielles complexes de module 1 pondérées par des coefficients positifs.  $S(\xi, \xi_o)$  est maximale si toutes ces exponentielles sont des réels ( $S$  est un réel), c'est-à-dire si  $\Delta \psi_{n,m,k,l} = 0$  avec  $k, l, n, m$  tels que

$$\mathbf{r}_k(\xi_o) - \mathbf{r}_l(\xi_o) = \mathbf{r}_m(\xi_o) - \mathbf{r}_n(\xi_o)$$

En particulier  $S(\xi, \xi_o)$  est maximum si  $\forall n, \psi_n(\xi) = \psi_n(\xi_o)$ .

Remarque :

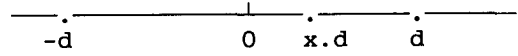
Intrinsèquement, la méthode comporte des ambiguïtés. Ainsi, si l'antenne est linéaire à capteurs uniformément répartis (i.e.  $\mathbf{r}_k(\xi_o) = k \mathbf{r}_l(\xi_o) \forall k$ ), on a alors  $k = l + (m - n)$  et  $S(\xi, \xi_o)$  est maximale si  $\Delta \psi_{n,m,l+(m-n),l} = 0 \forall l, m, n$  autrement dit, en posant  $p = m - n$ , si  $\Delta \psi_{n,n+p,l+p,l} = 0 \forall l, n, p$ . Dans ce cas, en choisissant  $l = n + p$ , on montre que la forme générale du déphasage est du type :

$$\psi_n(\xi) - \psi_n(\xi_o) = a + bn \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes}$$

L'ambiguïté est équivalente à un dépointage de l'antenne qui ne nuit en rien sur la qualité de l'image finale. Seule subsiste une incertitude sur la position absolue des sources.

## 5.5. CONTRE-EXEMPLE DE LA MÉTHODE DU MAXIMUM DE CONTRASTE DANS LE CAS OÙ LES DISTORSIONS NE SONT PAS ISOTROPES

Soit une antenne de trois capteurs aux abscisses :  $-d, x \cdot d, +d$ .



Seule la position du capteur central est variable.

L'antenne est paramétrée par la position normalisée du capteur central  $x$ .

L'antenne réelle est paramétrée par  $x_o$  que l'on cherche à estimer. On fixe  $x_o = \frac{1}{2}$ .

On suppose le signal bande étroite avec pour longueur d'onde  $\lambda$  fixée.

**Les sources sont supposées réparties uniformément à l'infini pour des gisements  $\theta$  compris entre  $-\epsilon$  et  $+\epsilon$ .**

Le vecteur source au gisement  $\theta$  sous hypothèse d'une antenne de paramètre  $x$  vaut :

$$\mathbf{a}(\theta) = \left[ e^{-2i\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta}, e^{2i\pi x \frac{d}{\lambda} \sin \theta}, e^{-2i\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta} \right]$$

**On impose  $\frac{2d}{\lambda} = \frac{1}{\sin \epsilon}$  (antenne bien échantillonnée sans distorsion).**

On pose :  $u = \frac{\sin \theta}{\sin \epsilon}$ , on a :  $\mathbf{a}(u) = [e^{-i\pi u}, e^{i\pi u x}, e^{i\pi u}]$  avec  $u \in [-1, 1]$ .

La matrice de corrélation normalisée s'écrit :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{a}(u) \mathbf{a}(u)^* du \text{ (intégration en } \sin \theta)$$

Si le théorème de MULLER et BUFFINGTON est vérifié, on doit avoir :

$$\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=x_o} = 0$$

Or le calcul montre que pour  $x_o = \frac{1}{2}$ , on a :

$$\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{6400}{27 \pi^2} \neq 0$$

## 5.6. EXEMPLE OÙ LA MÉTHODE DE MAXIMUM DE CONTRASTE S'APPLIQUE ET OÙ LES DISTORSIONS SONT ANISOTROPES

Il s'agit du cas très général où les distorsions sont anisotropes et où le champ est constitué **d'une seule source**. Dans ce cas, il est possible de faire coïncider les distorsions anisotropes avec des distorsions isotropes pour toutes les sources imagées. Si de plus l'antenne réalise la transformation de Fourier du champ, les conditions suffisantes au théorème s'appliquent.

## 5.7. CONCLUSION SUR LA MÉTHODE DU MAXIMUM DE CONTRASTE

Cette méthode a été largement employée y compris dans des cas où les conditions suffisantes à son application n'étaient pas réunies [(10) (7)] et où elle a donné des résultats satisfaisants.

Elle a le mérite de ne faire aucune hypothèse sur la distribution a priori du champ de sources. Elle présente par contre l'inconvénient de ne pas tenir compte du bruit, fut-il blanc spatialement.

Définie en général à bande étroite, elle peut aisément faire l'objet d'une extension large-bande. Pour ce faire, le contraste large-bande peut être défini soit comme la somme des contrastes bande étroite, soit comme l'intégrale du carré de la sortie de formation de voie large bande.

D'une façon générale, il semble que son efficacité soit largement conditionnée par la nature du champ de source, surtout dans les cas de distorsions anisotropes. Intuitivement on est amené à dire que cette méthode marchera d'autant mieux que le champ est ... contrasté!

## 6. La méthode FADA (The DAFT Method)

### 6.1. FONDEMENTS

La méthode est basée sur la structure algébrique de la matrice interspectrale du champ de réverbération mesuré (11-13).

Propriétés :

- Dans le cas général,  $\mathbf{\Gamma}_R$  est une matrice hermitienne définie positive d'ordre  $M$  ( $M$  = nombre de capteurs). Toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

- Toutefois, sur  $M$  valeurs propres de  $\mathbf{\Gamma}_R$ ,  $M - P$  d'entre elles ont des valeurs très faibles (rapport  $10^{-2}$ ) par rapport aux autres et  $P \approx \frac{\Delta\theta}{2\theta_3}$  avec  $\Delta\theta$  = largeur angulaire du secteur insonifié,  $2\theta_3$  = largeur à 3 dB d'une voix classique,  $2\theta_3 \approx \frac{\lambda}{L}$  ( $L$  = longueur d'antenne).

Cette propriété, empirique, est une propriété bien connue des suites sphéroïdales qui peuvent être vues comme les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{\Gamma}_R$  lorsque les sources sont à l'infini, l'antenne étant échantillonnée à  $\frac{\lambda}{2}$  et l'intégration en  $d \sin \theta$  au lieu de  $d\theta$ .

Théorème :

Soit  $\{\mathbf{\Gamma}(\xi)\}$  une famille de matrices carrées d'ordre  $M$  hermitiennes positives, décrite par le paramètre  $\xi$ .

Soit  $\mathbf{\Pi}_K(\xi)$  le projecteur orthogonal sur l'espace associé aux  $K$  valeurs propres les plus grandes de  $\mathbf{\Gamma}(\xi)$ .

Alors quelque soit  $K$  entier inclu dans  $\{1, \dots, M\}$ , la quantité  $Tr(\mathbf{\Pi}_K(\xi)\mathbf{\Gamma}(\xi_o))$  est maximale lorsque  $\mathbf{\Pi}_K(\xi) = \mathbf{\Pi}_K(\xi_o)$  et en particulier lorsque  $\xi = \xi_o$ .

Démonstration :

Soient  $\{(\lambda_{oi}, \mathbf{u}_{oi})\}_{i=1, \dots, M}$  les éléments propres de  $\mathbf{\Gamma}(\xi_o)$  (valeur propre, vecteur propre) rangés dans l'ordre des valeurs propres décroissantes.

Soit  $K \in \{1, \dots, M\}$  fixé.

On a par définition des éléments propres :

$$\mathbf{\Gamma}(\xi_o) = \sum_{i=1}^M \lambda_{oi} \mathbf{u}_{oi} \mathbf{u}_{oi}^*$$

Sachant que  $Tr(AB) = Tr(BA)$

et que  $\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{\Pi}_K(\xi) = \mathbf{\Pi}_K(\xi)$ , on a alors :

$$Tr(\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{\Gamma}(\xi_o)) = \sum_{i=1}^M \lambda_{oi} |\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{u}_{oi}|^2$$

Compte tenu du caractère unitaire et de l'orthogonalité des vecteurs  $\mathbf{u}_{oi}$ , on peut écrire :

$$0 \leq |\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{u}_{oi}|^2 \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^M |\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{u}_{oi}|^2 = K$$

Sachant que les valeurs propres sont rangées dans l'ordre décroissant, on remarque que :

$$\begin{aligned} \forall i \leq K \quad \forall \alpha \leq 0 \quad \lambda_{oi}\alpha &\leq \lambda_{oK}\alpha \\ \forall i > K \quad \forall \alpha \geq 0 \quad \lambda_{oi}\alpha &\leq \lambda_{oK}\alpha \end{aligned}$$

On en déduit les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^M \lambda_{oi} |\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{u}_{oi}|^2 - \sum_{i=1}^K \lambda_{oi} \\ &= \sum_{i=1}^K \lambda_{oi} (|\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{u}_{oi}|^2 - 1) + \sum_{i=K+1}^M \lambda_{oi} |\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{u}_{oi}|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^K \lambda_{oK} (|\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{u}_{oi}|^2 - 1) + \sum_{i=K+1}^M \lambda_{oK} |\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{u}_{oi}|^2 \\ &\leq \lambda_{oK} \sum_{i=1}^M |\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{u}_{oi}|^2 - K \lambda_{oK} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\forall K \in \{1, \dots, M\} \quad Tr(\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{\Gamma}(\xi_o)) \leq \sum_{i=1}^K \lambda_{oi}$$

C'est-à-dire :

$$\forall K \in \{1, \dots, M\} \quad Tr(\mathbf{\Pi}_K(\xi) \mathbf{\Gamma}(\xi_o)) \leq Tr(\mathbf{\Pi}_K(\xi_o) \mathbf{\Gamma}(\xi_o))$$

C.Q.F.D

**Corollaire 1 :**

Si  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_0)$  est une variable aléatoire centrée de matrice de covariance  $\Gamma(\boldsymbol{\xi}_0)$  alors :

$$\forall K = 1, \dots, M \quad E\{\|\Pi_K(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{g}\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_0)\|^2\}$$

est maximum en  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0$ . ( $E\{\}$  désigne l'espérance mathématique).

**Corollaire 2 :**

Si  $\{\mathbf{x}(\nu, \boldsymbol{\xi}_0)\}_{\nu \in B}$  est une famille de variables aléatoires centrées de matrices de covariance respectives  $\{\Gamma(\nu, \boldsymbol{\xi}_0)\}$ , alors

$$\forall K = 1, \dots, M \quad E\left\{\sum_{\nu \in B} \|\Pi_K(\nu, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}(\nu, \boldsymbol{\xi}_0)\|^2\right\}$$

est maximum en  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0$ .

## 6.2. LE PROBLÈME ET LA SOLUTION

**Problème posé :**

Il s'agit de trouver une fonction coût  $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  ( $\mathbf{x}$  = observations =  $\{\mathbf{x}(\nu, \boldsymbol{\xi}_0), \nu \in B\}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  = paramètre décrivant l'antenne), qui soit maximum pour l'antenne réelle  $\boldsymbol{\xi}_0$  dans le cas d'un champ à réverbération dominante.

**Solution proposée :**

Méthode de Focalisation d'Antenne Distordue Autonome (FADA) (The Distorted Array Focusing Technique (DAFT)).

Soit  $P = \frac{\Delta\theta}{2\theta_s}$  le nombre de voies à 3 dB sur le secteur insonifié.

Soit

$$\Gamma'_R(\nu, \boldsymbol{\xi}) = \int_{\Delta\theta} \mathbf{a}(\theta, \nu, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{a}(\theta, \nu, \boldsymbol{\xi})^* d\theta \quad \forall \nu \in B$$

Soit  $\Pi(\nu, \boldsymbol{\xi})$ ,  $\nu \in B$ , le projecteur sur l'espace associé aux vecteurs propres correspondant aux  $P$  valeurs propres les plus grandes de  $\Gamma'_R(\nu, \boldsymbol{\xi})$ .

Alors on choisit

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \arg(\max_{\boldsymbol{\xi}} \sum_{\nu} \|\Pi(\nu, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}(\nu, \boldsymbol{\xi}_0)\|^2)$$

**Interprétation physique :**

– L'opération  $\Pi(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_0)$  consiste à filtrer spatialement le champ  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_0)$  en gardant uniquement les composantes spatiales issues de l'espace insonifié sous hypothèse d'une antenne de mesure de type  $\boldsymbol{\xi}$ . Lorsque  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0$ , comme par l'hypothèse  $\mathbf{x}$  est physiquement issu de l'espace insonifié, toute l'énergie est conservée et la projection est maximale.

La méthode FADA peut donc être vue comme la recherche du filtre spatial (fonction de la forme d'antenne) qui maximise l'énergie à sa sortie pour des observations  $\mathbf{x}$  données.

– La méthode FADA exploite la corrélation spatiale du champ de réverbération : à une zone d'insonification donnée, de largeur  $\Delta \sin \theta$ , correspond sur l'antenne une distance de corrélation spatiale du champ :  $d_c = \lambda / \Delta \sin \theta$ . Lorsque l'antenne est suréchantillonnée, c'est-à-dire lorsque la distance inter-capturs  $d$  est inférieure à  $d_c$ , la corrélation spatiale du champ peut être mesurée. Cette corrélation dépend de la largeur du secteur insonifié (que l'on connaît) et de la forme d'antenne (que l'on cherche). Le principe de l'algorithme consiste à chercher la forme d'antenne qui « correspond le mieux » aux corrélations mesurées.

**Remarques :**

– Cette solution apparaît comme relativement robuste aux changements de configuration de champ et en particulier à la présence de sources ponctuelles (voir l'évaluation comparative de la méthode dans (12) et (13)).

En effet, la non uniformité du champ change peu le projecteur associé aux directions principales « non nulles ». De plus, dans le cas où le champ est formé de sources ponctuelles isolées, le projecteur idéal théorique devient celui associé aux directions des sources. Or ce projecteur est quasi invariant par projection  $\Pi(\boldsymbol{\xi})$  de sorte que la propriété est conservée.

– Le théorème reste vrai en présence de bruit blanc puisque les  $P$  vecteurs propres principaux de  $\Gamma_R + \sigma_B^2 \mathbf{Id}$  sont les mêmes que ceux de  $\Gamma_R$ .

– Il est clair que l'on pourrait aussi minimiser  $\Pi^\perp(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_0)$  où  $\Pi^\perp$  est le projecteur associé aux  $M - P$  valeurs propres minimales.

– Notons que l'indépendance ou même la décorrélation des observations d'une fréquence à l'autre peut ne pas être nécessairement acquise.

– Aucune hypothèse n'est faite a priori sur la loi ou la densité de probabilité des observations.

## 7. Conclusion

Les méthodes de calibration en présence de champ diffus sont basées sur la connaissance disponible sur ce champ et sur les mesures, à savoir un modèle de matrice inter-spectrale et/ou des hypothèses sur la nature des distorsions mesurées.

La méthode la plus générale envisagée à ce jour est la méthode FADA puisque elle ne fait aucune hypothèse restrictive sur la nature des distorsions ou sur l'indépendance fréquentielle des observations, et qu'elle intègre la présence du bruit.

Elle présente l'inconvénient, tout comme les méthodes du contraste d'image ou du maximum de vraisemblance de nécessiter la recherche du maximum d'une fonction de multiples variables, non unimodale, ce qui pose de nombreux problèmes d'algorithmique. Notons toutefois que, pour se dégager des maxima locaux qui constituent la difficulté majeure de la méthode FADA, il est possible d'une part de définir un critère d'arrêt fiable (cf [13]),

d'autre part de définir autant de fonctions de coûts que de projecteurs. Par exemple les  $P$  premiers projecteurs,  $K = 1, \dots, P$  permettent de définir conformément au corollaire 2,  $P$  fonctions coûts distinctes. Ces différentes fonctions coûts ont leur maximum absolu au même point mais n'ont pas les mêmes maxima relatifs de sorte qu'en maximisant successivement les différentes fonctions coûts, il est possible d'échapper aux maxima locaux.

Pour plus de précisions sur les performances comparées des méthodes FADA, du maximum de contraste et de Weiss et Friedlander [14], le lecteur pourra se référer à [12] ou [13].

## Remerciements

L'auteur de ce chapitre tient à exprimer toute sa gratitude à la DRET pour son soutien et l'intérêt qu'elle porte au problème de l'autocalibration des systèmes d'imagerie acoustique.

## 7.1. BIBLIOGRAPHIE

- [1] THOMSON-SINTRA Activités Sous-Marines, Rapports d'études.
- [2] E.H. ATTIA, « Phase synchronizing large antenna arrays using the spatial correlation properties of radar clutter », presented at National Radio Science Meeting (URSI), Boulder, CO, Jan. 1984. + Idem, Idem, ph. D. Disertation, Dept. of Electrical Engineering, University of Pennsylvania, Phyladelphia, PA, 19104, Dec. 1984.
- [3] E.H. ATTIA, « Self-cohering airborne distributed array », Interspec Final Rep. on contract F19628-84-C-0080 for Rome Air Development center (Hanscom), MA, Dec. 1985.
- [4] E.H. ATTIA, « Self cohering airborne distributed arrays using the robust minimum variance algorithm », *IEEE AP-S and URSI International Symp. Digest* (Philadelphia, PA), Vol. 2, June 1986, pp. 603-606.
- [5] E.H. ATTIA, B.D. STEINBERG, « Self-Cohering Large Antenna Arrays Using the Spatial Correlation Properties of Radar Clutter », *IEEE Trans. on Antennas and Propagat.*, Vol. 37, N° 1, pp. 30-38, Jan.1989.
- [6] M. BORN and E. WOLF, « Principles of optics », 6ème Edition, Pergamon Press, 1986.
- [7] H.P. BUCKER, « Beamforming a towed line array of unknown shape », *Jour. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 63, n°5, May 1978, pp. 1451-1454.
- [8] A. BUFFINGTON, F.S. CRAWFORD, R.A. MULLER, A.J. SCHWEMIN and R.C. SMITS, « Correction of atmospheric distortion with an image - sharpening telescope », *Jour. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 67, n°3, pp. 298-303, March 1977.
- [9] A.BUFFINGTON, F.S. CRAWFORD, R.A. MULLER and C.D. ORTH, « First observatory results with an image - sharpening telescope », *Jour. Acoust. Soc. Am.*, vol. 67, n°3, pp. 304-305, Mar. 1977.
- [10] B.G. FERGUSON, « Sharpness applied to the adaptive beamforming of acoustic data from a towed array of unknown shape », *Jour. Acoust. Soc. Am.*, vol. 88, n°6, pp. 2695-2701, Dec. 1990.
- [11] F. FLORIN, G. KERVERN, D. BARDET, « Autofocalisation d'une antenne d'imagerie sous-marine », *Proceedings GRETSI 91*, Sept.1991.
- [12] F. FLORIN, « A Distorted Array Focusing Technique for Sonar Imaging », NATO ASI on ocean exploration, Funchal, Madère, Juillet-Août, 1992, pp. 473-478.
- [13] F. FLORIN, « Contributions aux traitements d'antennes passif et actif », Thèse de l'Université de Rennes I, 1994 à paraître.
- [14] A.J. WEISS, B. FRIEDLANDER, « Array shape calibration using eigenstructure methods », *Signal Processing*, vol. 22, n°3, pp.251-258.
- [15] J.P. HAMAKER, J.D. O'SULLIVAN, AND J.E. NOORDAM, « Image sharpness, Fourier optics, and redundant-spacing interferometry », *Jour. Acoust. Soc. Am.*, vol. 67, n°8, pp. 1122-1123, August 1977.
- [16] R.J. KENEFIC, « Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a Plane Wave Tone at an Equispaced Linear Array », *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 36, n° 1, pp. 128-130, Jan. 88.
- [17] L. KOPP, M. AIACH, « Traitement spatial avec des antennes déformées », in *Proc. of GRETSI 81*, pp. 365-370, Nice, June 1981.
- [18] R.A. MULLER and A. BUFFINGTON, « Real-time correction of atmospherically degraded telescope images through image sharpening », *Jour. of the Optical Society of America*, vol.64, n°9, pp. 1200-1210, Sept. 1974.
- [19] B.D. STEINBERG, « Design approach for a high resolution microwave imaging radio-camera », *J. Franklin Inst.*, Dec. 1973.
- [20] B.D. STEINBERG, « Radar Imaging from a Distorted Array : the Radio Camera Algorithm and Experiments », *IEEE Trans. on Antennas and Propagat.*, vol. AP-29, n°5 pp. 740-748, Sept 1981.
- [21] B.D. STEINBERG, « Microwave imaging with large antenna arrays : Radio camera principles and techniques », New York, Wiley, 1983.
- [22] B.D. STEINBERG, « Microwave Imaging of Aircraft », *Proc. IEEE*, vol. 76, n° 12, pp. 1578-1592, Dec. 1988.
- [23] I. ZISKIND, M. WAX, « Maximum likelihood localization of Multiple Sources by Alternating Projection », *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 36, n°10, pp. 1553-1560, Oct. 88.