

Amélioration du traitement d'antenne passif par l'estimation de la matrice spectrale des bruits

Improvement of passive array treatment

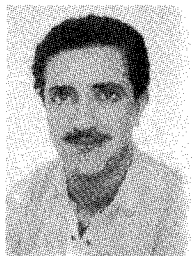
by estimation of the spectral matrix of the noises



Claudine LATOMBE

CEPHAG, UA 346, B.P. n° 46, 38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES.

Claudine Latombe est ancienne élève de l'ENSET, docteur de de 3^e cycle en Informatique (1974), docteur d'État en Traitement de Signal à l'INPG (1982). Elle enseigne à l'INPG depuis 1970; son travail de recherche porte sur les problèmes d'analyse spectrale et les traitements multicateurs.



Idir TAS

CEPHAG-ENSIEG, B.P. n° 46, 38402 SAINT-MARTIN D'HÈRES CEDEX.

Docteur de 3^e cycle en Automatique et Traitement du signal à l'INPG (1987). Ses travaux de recherche intéressent l'analyse spectrale et le traitement d'antenne en écoute passive.

RÉSUMÉ

Le traitement d'antenne s'intéresse à l'estimation des caractéristiques des sources (puissance-direction) et nécessite la connaissance de la matrice spectrale des bruits. On suppose soit qu'elle est connue, soit que les bruits sont non corrélés entre eux et ont même puissance sur tous les capteurs.

Nous présentons ici, une méthode pour estimer la matrice spectrale des bruits, lorsqu'ils sont non corrélés et ont des puissances différentes sur les capteurs. Cette méthode utilise les techniques d'analyse en composantes principales; elle utilise donc les éléments propres de la matrice spectrale des signaux reçus (le nombre de sources est supposé connu).

Nous montrons sur des simulations que l'utilisation de cet algorithme permet d'améliorer les performances des méthodes de traitement d'antenne pour l'estimation des caractéristiques des sources.

MOTS CLÉS

Traitement d'antenne, analyse spectrale, analyse factorielle, analyse en composantes principales.

SUMMARY

Array processing aims to characterize impinging sources from recorded data; a model of the noise spectral matrix is necessary for the treatment. One usually suppose either that this matrix is known or that the noises are uncorrelated and have equal variances on each sensor.

We present here an algorithm to estimate the noise spectral matrix when the noises are uncorrelated and have different variances on each sensor. It needs technics of the principal components analysis; thus it uses the eigensystem of the spectral matrix of the received signals (the number of impinging signals is assumed known).

We show on simulations that, if the spectral matrix of the noises is estimated with this algorithm, the following array processing treatments give improved results.

KEY WORDS

Array processing, spectral analysis, principal component analysis, factor analysis.

1. Introduction

Dans de nombreux domaines comme en acoustique sous-marine, en sismique, en astronomie et en encéphalographie, on s'intéresse à la détection du nombre de sources émettrices et à la caractérisation des signaux utiles et des parasites (bruits ou perturbations). Les techniques utilisées regroupées sous le terme « traitement d'antenne », consistent à construire l'image du milieu à partir des signaux enregistrés sur les dispositifs de réception, appelés « capteurs ».

$\gamma(f)$ étant la matrice spectrale théorique des signaux reçus, elle se décompose sous l'hypothèse de signaux non corrélés avec les bruits additifs, de la manière suivante :

$$\gamma(f) = \gamma_S(f) + \gamma_B(f)$$

$\gamma_S(f)$ est la matrice spectrale des sources seules, et $\gamma_B(f)$ la matrice spectrale des bruits.

La connaissance de $\gamma_B(f)$ permet d'estimer $\gamma_S(f)$, [$\gamma(f)$ étant connue], qui contient l'information sur le milieu de propagation, au niveau de l'antenne, et sur les sources.

La détection du nombre de sources a été étudiée de diverses manières en utilisant les éléments propres de $\gamma(f)$, [1, 13]. Nous nous intéressons ici à l'estimation de $\gamma_B(f)$.

L'hypothèse habituellement faite, est que les bruits sont non corrélés entre eux et ont même puissance sur tous les capteurs; $\gamma_B(f)$ est alors proportionnelle à la matrice identité :

$$\gamma_B(f) = \beta(f) \mathbb{I}_N$$

Connaissant le nombre de sources, la densité spectrale des bruits $\beta(f)$ est estimée au sens du maximum vraisemblance sous l'hypothèse d'une distribution gaussienne des observations.

Cette hypothèse de bruits non corrélés et de même puissance sur tous les capteurs n'est pas toujours réaliste comme le prouvent certains résultats obtenus sur des signaux réels.

Bienvenu et Kopp [1, 2] considèrent, en acoustique sous-marine, que les bruits sont de même puissance

sur les capteurs et corrélés; $\gamma_B(f)$ s'écrit :

$$\gamma_B(f) = \beta(f) \cdot J(f)$$

où $J(f)$ est la matrice de cohérence spatiale des bruits. Ils utilisent des fonctions de Bessel pour modéliser $J(f)$. $J(f)$ étant connu, il est aisé de se ramener au cas de bruits non corrélés et de même puissance sur les capteurs par blanchiment. Cette modélisation n'est cependant pas valable dans d'autres domaines. En encéphalographie, Lumeau et Clergeot [8], utilisant un critère des moindres carrés portant sur les éléments non diagonaux de la matrice de cohérence des observations, proposent un algorithme pour estimer la matrice spectrale des bruits lorsqu'ils sont non corrélés. En pratique, cet algorithme est très lourd à mettre en œuvre et son utilité est peu évidente pour d'autres applications.

Nous présentons ici, un algorithme qui cherche à estimer directement la matrice spectrale des bruits non corrélés mais de puissances différentes [$\gamma_B(f)$]; le nombre de sources est supposé connu. Cet algorithme utilise les éléments propres de la matrice spectrale des signaux reçus et a pour base les méthodes d'analyse factorielle.

L'analyse factorielle est une technique d'analyse statistique multivariable qui essaye de résumer un ensemble de variables en fonction d'un petit nombre de variables (facteurs communs) [6].

Dans la suite, l'analogie entre le traitement d'antenne et l'analyse factorielle est faite avec les signaux reçus dans le domaine fréquentiel (§2); l'algorithme est présenté paragraphe 3 et il est utilisé au paragraphe 4 en traitement d'antenne pour estimer la matrice spectrale des bruits et en déduire les directions et les puissances des sources.

2. Traitement d'antenne et analyse factorielle

2.1. MODÉLISATION EN TRAITEMENT D'ANTENNE

Une antenne composée de N capteurs reçoit en écoute passive N signaux aléatoires notés $r_i(t)$, $i \in [1, N]$. Ces signaux sont un mélange de P signaux transmis et d'un bruit additif. Le milieu de propagation est supposé linéaire et stationnaire. P est supposé connu et $P < N$.

Dans le domaine fréquentiel, les observations sont représentées par le vecteur colonne aléatoire à N composantes :

$$(1) \quad \mathbf{R}(f) = \text{TF} [\mathbf{r}(t)]$$

avec

$$\mathbf{r}(t) = [r_1(t), \dots, r_N(t)]^T$$

TF désigne la transformée de Fourier et T le transposé d'un vecteur. Nous supposons *a priori* que l'observation $\mathbf{R}(f)$ est centrée et obéit au modèle suivant :

$$(2) \quad \mathbf{R}(f) = \sum_{j=1}^P \mathbf{A}^j(f) \cdot \mathbf{S}^j(f) + \mathbf{B}(f)$$

$\mathbf{B}(f)$ est un vecteur aléatoire centré de dimension N représentant les bruits; ses composantes ne sont pas nécessairement décorréliées dans le cas général.

$A^j(f)$ est l'amplitude complexe « apparente » de la source j . Elle est définie à une phase arbitraire près et est aléatoire.

$\mathbf{S}^j(f)$ est un vecteur de dimension N certain, normé, appelé « vecteur source apparent », de la source j :

$$\mathbf{S}^j(f) = [S_1^j(f), \dots, S_N^j(f)]^T$$

Les composantes S_i^j , $i \in [1, N]$, de $\mathbf{S}^j(f)$ dépendent de la position géographique de la source j et du milieu de propagation. Elles sont proportionnelles aux N fonctions de transfert entre la source j et les capteurs. Comme la source j est inaccessible, les phases des composantes du vecteur $\mathbf{S}^j(f)$ ne peuvent être déterminées qu'à une phase arbitraire près.

2.2. MODÉLISATION EN TERMES D'ANALYSE FACTORIELLE : facteurs communs et spécifiques

Le système précédent (2) s'écrit sous une forme matricielle :

$$(3) \quad \mathbf{R}(f) = \mathbf{S}(f) \cdot \mathbf{A}(f) + \mathbf{B}(f)$$

où

$$\mathbf{S}(f) = [\mathbf{S}^1(f), \dots, \mathbf{S}^P(f)]$$

et

$$\mathbf{A}(f) = [\mathbf{A}^1(f), \dots, \mathbf{A}^P(f)]^T$$

$\mathbf{S}(f)$ est une matrice de dimension $(N \times P)$ à coefficients certains dont les colonnes sont les vecteurs sources apparents.

En terme d'analyse factorielle [6], chaque composante $A^j(f)$ du vecteur $\mathbf{A}(f)$ est appelée « facteur commun ». En terme de traitement d'antenne, les facteurs communs représentent les amplitudes complexes *apparentes* des sources. Les facteurs communs sont indéterminés par changement d'échelle et par rotation [6]. Chaque composante $B_i(f)$, $i \in [1, N]$, du bruit est appelée, en terme d'analyse factorielle, « facteur spécifique ».

Si l'observation $\mathbf{R}(f)$ vérifie l'équation fondamentale (3), on dira que $\mathbf{R}(f)$ admet un modèle factoriel

d'ordre P . En traitement d'antenne, ceci signifie qu'il existe P sources.

Le modèle factoriel, équation (3), est indéterminé [N équations complexes à $N(P+1)$ inconnues complexes]. Nous ferons deux hypothèses supplémentaires qui détermineront le modèle [6]. Ces hypothèses sont habituelles en traitement d'antenne.

1° Les facteurs spécifiques sont supposés non corrélés entre eux, ce qui signifie que les bruits sont décorréliés de capteur à capteur. Cette hypothèse est moins restrictive que celle faite habituellement en traitement d'antenne où les bruits sont supposés non corrélés et de même puissance sur tous les capteurs.

Si $\gamma_B(f) = E \{ \mathbf{B}(f) \mathbf{B}^+(f) \}$ et si $\beta_i(f)$ est la puissance du bruit sur la voie i , nous avons alors :

$$\gamma_B(f) = \text{diag} [\beta_1(f), \dots, \beta_N(f)]$$

($^+$ désigne le transposé conjugué et E l'espérance mathématique).

2° Les facteurs communs sont non corrélés entre eux : $\Phi(f) = E \{ \mathbf{A}(f) \cdot \mathbf{A}^+(f) \} = \text{diag} [d_1(f), \dots, d_p(f)]$

où $d_i(f)$ représentent les densités spectrales apparentes des sources.

Cette dernière hypothèse entraîne que $\gamma_S(f)$ est une matrice de rang maximal P .

Sous les hypothèses précédentes, la matrice spectrale de $\mathbf{R}(f)$ s'écrit alors :

$$(4) \quad \gamma(f) = \mathbf{S}(f) \Phi(f) \mathbf{S}^+(f) + \gamma_B(f) = \gamma_S(f) + \gamma_B(f)$$

où $\gamma_B(f)$ est une matrice diagonale.

3. Estimation de la matrice spectrale des bruits

Notre but est de déterminer à partir des mesures $\mathbf{X}(f)$ l'ensemble $(\mathbf{S}(f), \gamma_B(f))$, c'est-à-dire le modèle factoriel d'ordre P admis par l'observation théorique $\mathbf{R}(f)$.

Les paramètres inconnus sont :

- la matrice spectrale $\gamma_B(f)$ des bruits;
- la matrice $\mathbf{S}(f)$ des « vecteurs sources ».

L'ordre P du modèle (nombre de sources) est ici supposé connu; il peut par exemple être estimé par un test utilisant le rapport de vraisemblance généralisé et appelé « test du chideux » [13]; ce test apparaît comme le plus robuste vis-à-vis d'une distribution non uniforme des puissances des bruits.

Nous ne nous intéressons ici qu'à l'estimation de $\gamma_B(f)$, en faisant les hypothèses supplémentaires du paragraphe 2.2. Ceci sera fait en utilisant la décomposition en composantes principales, qui est une technique permettant d'estimer certains paramètres du modèle d'analyse factorielle.

Si $\mathbf{X}(f)$ représente le vecteur des mesures, soit $\hat{\gamma}(f)$ une estimée de leur matrice spectrale. En admettant que $\hat{\gamma}(f)$ est une estimée sans biais de la matrice spectrale théorique, il s'agit de trouver la matrice $\hat{\gamma}_B(f)$ telle que :

$$\hat{\gamma}(f) = \hat{\gamma}_S(f) + \hat{\gamma}_B(f).$$

soit la plus proche possible de $\hat{\gamma}(f)$, $\hat{\gamma}_B(f)$ étant de rang P.

3.1. ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES [7]

$\hat{\lambda}_1(f) \geq \dots \geq \hat{\lambda}_N(f)$ étant les valeurs propres de $\hat{\gamma}(f)$ et $\hat{V}_i(f)$ les vecteurs propres correspondants à $\hat{\lambda}_i(f)$ et $\hat{V}_i(f)$ les vecteurs propres correspondants à $\hat{\lambda}_i(f)$; soit :

$$V(f) = \text{diag} [\hat{\lambda}_1(f), \dots, \hat{\lambda}_N(f)]$$

et

$$U(f) = [\hat{V}_1(f), \dots, \hat{V}_N(f)]$$

La maîtrise $\hat{\gamma}(f)$ a pour décomposition spectrale :

$$\hat{\gamma}(f) = \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i(f) \cdot V_i(f) \cdot V_i^+(f) = U(f) \cdot V(f) \cdot U^+(f)$$

où

$$U(f) \cdot U^+(f) = \sum_{i=1}^N V_i(f) \cdot V_i^+(f) = \mathbb{I}_N$$

car $\hat{\gamma}(f)$ est hermitienne et les $\hat{V}_i(f)$ sont normés. Soit $Y(f)$ le vecteur obtenu à partir de $X(f)$ par la transformation orthogonale $U(f)$:

$$Y(f) = U(f) \cdot X(f)$$

La i -ième composante de $Y(f)$ est appelée la i -ième *composante principale* de l'ensemble des mesures $X(f)$.

Les composantes principales $Y_i(f)$, $i \in [1, N]$ sont non corrélées entre elles et la variance de la i -ième composante est égale à $\hat{\lambda}_i(f)$. Contrairement aux facteurs communs, les composantes principales ne sont pas indéterminées à un facteur d'échelle près [7].

La décomposition spectrale de $\hat{\gamma}(f)$ se réécrit :

$$(5) \quad \begin{cases} \hat{\gamma}(f) = W(f) \cdot W^+(f) \\ \text{ou} \\ W(f) = U(f) \cdot V^{1/2}(f) \quad (1) \end{cases}$$

L'algorithme d'estimation de $\gamma_B(f)$, décrit au paragraphe suivant procède par itération et est initialisé par $\gamma_B(f) = 0$. Il est appliqué à chaque fréquence; l'ordre P du modèle (nombre de sources non corrélées) étant supposé connu.

3.2. ALGORITHME D'ESTIMATION DE $\gamma_B(f)$ (cf. [7])

Il se décompose comme suit :

(1) Estimation et diagonalisation de $\hat{\gamma}(f)$. Rangement des éléments propres de $\hat{\gamma}(f)$ dans une matrice notée $W(f)$ selon la décomposition (5).

(2) Les P premières colonnes de $W(f)$ constituent une matrice notée $W_P(f)$ de dimension $(N \times P)$. A la

(1) On utilise la convention que, si D est une matrice diagonale à éléments positifs d_i , \sqrt{D} est la matrice diagonale qui a pour éléments les racines positives $\sqrt{d_i}$.

première itération, $\gamma_B(f)$ est estimé par :

$$\hat{\gamma}_B^1(f) = \text{diag} [\hat{\gamma}(f) - W_P(f) \cdot W_P^+(f)]$$

(3) Les éléments propres de la matrice $[\hat{\gamma}(f) - \hat{\gamma}_B^1(f)]$ sont calculés. La matrice $W_P(f)$ est réécrite avec les P premiers éléments propres, selon la décomposition (5). La nouvelle estimation de $\gamma_B(f)$ est :

$$\hat{\gamma}_B^2(f) = \text{diag} [\hat{\gamma}(f) - W_P(f) \cdot W_P^+(f)]$$

Les itérations sont poursuivies tant que des améliorations significatives sont apportées.

Test d'arrêt

L'algorithme s'arrête lorsque la distance entre les matrices $\hat{\gamma}_B^i(f)$ et $\hat{\gamma}_B^{i+1}(f)$ estimées est inférieure à une borne fixée *a priori* par l'utilisateur ($10^{-5} \leq \epsilon \leq 10^{-1}$, pour N voisin de 10). Si à l'itération i :

$$\hat{\gamma}_B^i(f) = \text{diag} [\hat{\beta}_1^i(f), \dots, \hat{\beta}_N^i(f)]$$

On utilise la distance normalisée dans R^N :

$$d(\hat{\gamma}_B^i, \hat{\gamma}_B^{i+1}) = \sum_{j=1}^N \frac{|\hat{\beta}_j^{i+1}(f) - \hat{\beta}_j^i(f)|^2}{|\hat{\beta}_j^i(f)|^2}$$

Si les signaux observés peuvent être effectivement modélisés par le modèle factoriel précédent, ce test arrête les itérations au bout d'un nombre raisonnable de pas (cf. [7] et [15]). Si les données ne peuvent être modélisées ainsi, on peut limiter *a priori* le nombre d'itérations.

Remarque : Comme $\hat{\gamma}(f)$ est définie positive, en utilisant le théorème de décomposition spectrale de $\hat{\gamma}(f)$ et la forme particulière des matrices $W_P(f)$, on peut montrer que les matrices $\hat{\gamma}_B^i(f)$ sont définies positives. Par contre, il n'est pas assuré que $\hat{\gamma}(f) - \hat{\gamma}_B(f)$ soit définie positive; ce problème sera d'ailleurs rencontré dans les exemples.

4. Amélioration du traitement d'antenne

4.1. MÉTHODES DE TRAITEMENT D'ANTENNE

Ces méthodes utilisent la matrice spectrale observée à la sortie des N capteurs et supposent que les bruits sont non corrélés entre eux et ont même puissance sur tous les capteurs. On distingue deux grandes catégories :

(a) Les méthodes dites « d'analyse continue au second ordre » (voie préformée, Capon, MEM-AR, Borgiotti-Lagunas). Elles estiment conjointement les puissances et les directions des sources lorsque la forme du vecteur directionnel est connue, sans aucune hypothèse au départ sur le nombre de sources. J. Munier [9, 10] a montré qu'elles dérivent toutes d'un concept de base commun; il les décompose en un produit scalaire suivi d'un estimateur de variance (système FAQI : Filtrage Adapté Quadrature Integration).

(b) Les méthodes dites « paramétriques » qui nécessitent la connaissance du nombre P de sources. Elles sont de deux types :

(i) Celles qui utilisent le « sous-espace source » engendré par les P vecteurs propres de $\hat{\gamma}(f)$ associés au P plus grandes valeurs propres. Elles peuvent être intéressantes lorsque la forme théorique du vecteur directionnel est mal connue; elles ont été utilisées en géophysique pour identifier deux sources [3].

(ii) Celles qui utilisent le sous-espace orthogonal ou « sous-espace bruit » engendré par les (N-P) vecteurs propres associés aux plus petites valeurs propres de $\hat{\gamma}(f)$; elles nécessitent la connaissance de la forme du vecteur directionnel (Pisarenko, Music, haute-résolution, cf. [2]).

Désignons par $S(f, \theta)$ la forme théorique du vecteur directionnel normé des sources. Pour une onde plane venant de l'azimut θ et un réseau de capteurs alignés et équidistants de d :

$$S(f, \theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} [1^{j\varphi(f)} \dots e^{j(N-1)\varphi(f)}]$$

où $\varphi(f) = (2\pi d \sin \theta) / \lambda$, $\lambda = c/f$ est la longueur d'onde et c la vitesse de propagation.

Les méthodes de Capon et MEM-AR calculent les puissances reçues dans la direction θ respectivement par les expressions suivantes :

$$\hat{\mu}(f, \theta) = [S^+(f, \theta) \cdot \hat{\gamma}^{-1}(f) \cdot S(f, \theta)]^{-1}$$

$$\hat{\mu}(f, \theta) = \frac{\mathbf{1}^T \hat{\gamma}^{-1}(f) \mathbf{1}}{|S^+(f, \theta) \cdot \hat{\gamma}^{-1}(f) \cdot \mathbf{1}|^2}$$

où $\mathbf{1} = [1, 0, \dots, 0]^T$ est un vecteur colonne à N composantes. Les directions des sources sont estimées par les positions des maximums de $\hat{\mu}(f, \theta)$ et les puissances de ces sources par les valeurs de ces maximums.

Pour éviter dans ces deux méthodes l'inversion directe de la matrice $\hat{\gamma}(f)$, on utilisera la décomposition spectrale de $\hat{\gamma}(f)$ (déjà calculée) :

$$\hat{\gamma}(f) = U(f) V(f) U^+(f)$$

il vient alors :

$$\hat{\gamma}^{-m}(f) = U(f) \cdot V^{-m}(f) \cdot U^+(f);$$

m entier ($m \geq 1$).

Dans les méthodes haute résolution (Music), les directions des sources sont données par les positions des maximums de la fonction $G(f, \theta)$ suivante (cf. [2]) :

$$G(f, \theta) = \left[\sum_{i=P+1}^N |\hat{V}_i(f) \cdot S(f, \theta)|^2 \right]^{-1}$$

Lorsque les positions des sources sont obtenues, les puissances des sources sont calculées par la formule [2] :

$$\hat{\mu}_j^{HR}(f) = [S^+(f, \hat{\theta}_j) \cdot V_s(f) \Lambda_s^{-1}(f) V_s^+(f) \cdot S(f, \hat{\theta}_j)]^{-1}$$

avec :

$$V_s(f) = [\hat{V}_1(f), \dots, \hat{V}_P(f)]$$

$$\Lambda_s(f) = \text{diag}[\hat{\lambda}_1(f) - \hat{\beta}_P(f), \dots, \hat{\lambda}_P(f) - \hat{\beta}_P(f)]$$

$\hat{\beta}_P(f)$ peut être estimé au sens du maximum de vraisemblance. Les puissances ne nous intéressent pas directement ici, nous nous limiterons à $G(f, \theta)$.

4.2. RÉSULTATS ET COMMENTAIRES

Les méthodes de traitement d'antenne citées ci-dessus sont appliquées dans le cas de sources rapprochées et de rapports signal à bruit (S/B) faibles où elles ne permettent pas de conclure si la matrice spectrale des bruits n'est pas correctement estimée.

A une fréquence donnée, nous simulons deux sources (deux facteurs communs) non corrélées et qui ont des fronts d'onde plans. Cette hypothèse d'ondes planes n'est pas nécessaire pour l'algorithme d'estimation de $\gamma_B(f)$ mais facilite la simulation.

Les rapports S/B en décibels sont définis pour chaque source par :

$$RSB_j = 10 \log [d_j / \sum_{i=1}^N \beta_i] = 10 \log [d_j / \text{trace}(\gamma_B)]$$

d_j : puissance de la source j .

β_i : puissance du bruit sur la voie i .

L'antenne de réception est formée de $N = 10$ capteurs alignés et équidistants d'une demi-longueur d'onde à la fréquence considérée.

4.2.1. Cas de bruits non corrélés et de même puissance

Pour la fréquence étudiée, les deux sources simulées émettent des signaux aléatoires de variances d_i et aux azimuths fixes θ_i :

$$d_1 = 140, \quad \theta_1 = 23^\circ$$

$$d_2 = 180, \quad \theta_2 = 30^\circ$$

Les bruits ont des puissances égales : $\beta_i = 55$, $V_i \in [1, 10]$. Les rapports S/B valent : -6 et -5 dB.

Les trois méthodes (Capon, MEM-AR, haute résolution) ont été appliquées à la matrice simulée $\hat{\gamma}$ et leurs résultats sont présentés figure 1.

Les méthodes de Capon et MEM-AR (courbes a) n'arrivent pas à séparer les deux sources alors que la méthode haute résolution, avec $P=2$, les distinguent aisément.

Munier [9] a montré que les méthodes d'analyse continue au second ordre peuvent être améliorées en les appliquant à la matrice $(\hat{\gamma} - \alpha \hat{\lambda}_N \mathbb{1}_N)$ où $\hat{\lambda}_N$ est la plus petite valeur propre de $\hat{\gamma}$ et α un nombre positif compris entre 0 et 1.

Si $\alpha = 1$, la matrice $(\hat{\gamma} - \hat{\lambda}_N \mathbb{1}_N)$ devient singulière. Nous avons pris $\alpha = 0,95$ et les résultats des méthodes de Capon et MEM-AR appliquées à la matrice $(\hat{\gamma} - 0,95 \hat{\lambda}_N \mathbb{1}_N)$ sont superposés figure 1 (courbe b). Ces méthodes séparent alors les deux sources. La méthode de Capon (courbe b) nous donne en outre les puissances exactes des sources simulées, alors que sur la courbe a elle donne les puissances des sources augmentées de celle des bruits.

4.2.2. Cas de bruits non corrélés et de puissance différentes

Les puissances et les azimuths des sources sont

$$d_1 = 140, \quad \theta_1 = 23^\circ$$

$$d_2 = 180, \quad \theta_2 = 30^\circ$$

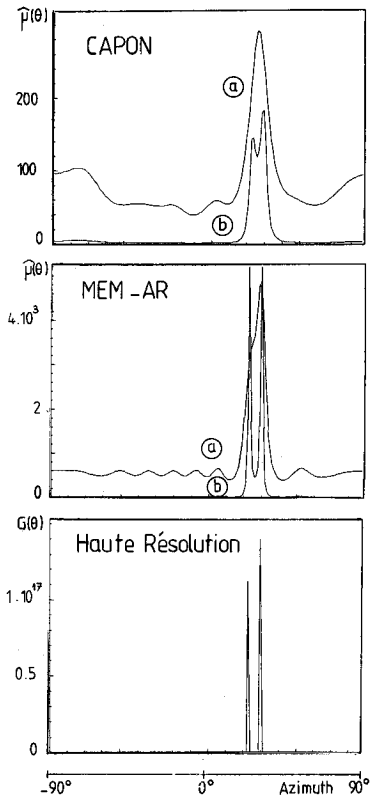


Fig. 1 - Bruits non corrélés et de même puissance. Deux sources non corrélées (-5 et -6 dB) d'azimuts (23° et 30°). Méthodes de traitement d'antenne appliquées : (a) à la matrice $\hat{\gamma}$. (b) à la matrice $\hat{\gamma} - 0,95 \hat{\lambda}_{10} I_N$.

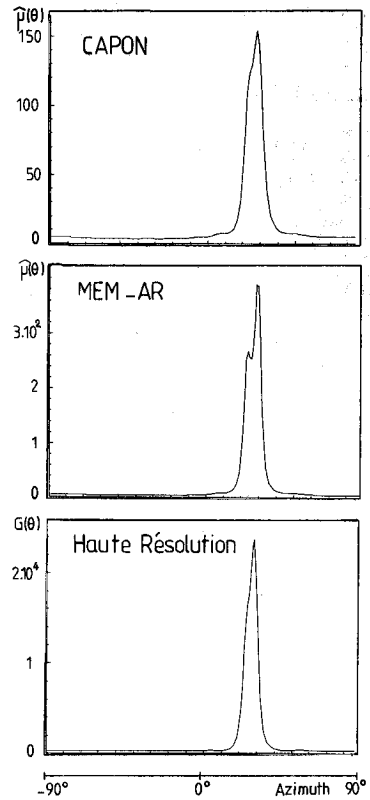


Fig. 3 - Bruits non corrélés et de puissances différentes. Les méthodes de traitement d'antenne sont appliquées à la matrice des signaux normalisés par leurs écarts-types.

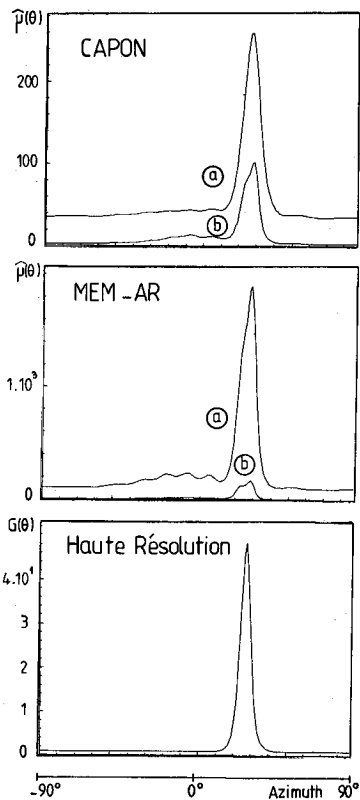


Fig. 2 - Bruits non corrélés et de puissances différentes. Deux sources non corrélées (-5 et -6 dB) d'azimuts (23 et 30°). Méthodes de traitement d'antenne appliquées aux matrices $\hat{\gamma}$ (a) et $\hat{\gamma} - 0,95 \hat{\lambda}_{10} I_N$ (b).

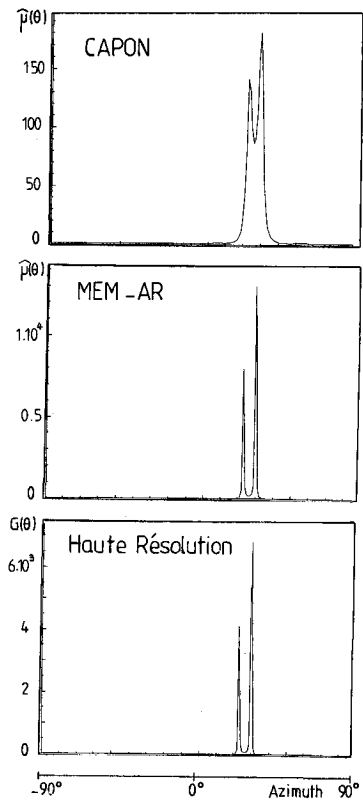


Fig. 4 - Bruits non corrélés et de puissances différentes. Les méthodes de traitement d'antenne sont appliquées à la matrice $\hat{\gamma} - 0,95 \hat{\gamma}_B$.

La matrice spectrale des bruits est :

$$\gamma_B = \text{diag} [10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100]$$

Les rapports S/B sont également de -6 et -5 dB.

Dans ce cas (fig. 2, courbes a) aucune des trois méthodes n'arrive à séparer les deux sources, même en appliquant Capon et MEN-AR à la matrice $(\hat{\gamma} - 0,95 \hat{\lambda}_N \mathbb{1}_N)$ (courbes b).

A partir de la matrice $\hat{\gamma}$ simulée; nous construisons la matrice $\hat{\gamma}$ qui serait la matrice spectrale des signaux reçus normalisés par leur écart-type. Les résultats des trois méthodes appliquées à la matrice $(\hat{\gamma} - 0,95 \hat{\lambda}_N \mathbb{1}_N)$ sont présentés figure 3*. On constate une légère amélioration des méthodes de Capon et MEN-AR.

Si les signaux émis étaient déterministes, la normalisation des signaux reçus par leurs écarts-types permettrait de ramener le cas de bruits non corrélés et de puissances différentes sur les capteurs au cas de bruits non corrélés et de même puissance.

En estimant $\gamma_B(f)$ par l'algorithme décrit au paragraphe 3.3 avec une borne de convergence ϵ fixée à 10^{-3} , nous estimons après 11 itérations :

$$\hat{\gamma}_B(f) = \text{diag} [10,4; 20,0; 30,0; 40,0; 50,0; 60,0; 70,1; 80,3; 90,6; 98,4].$$

Si $\alpha=1$, la matrice $(\hat{\gamma} - \alpha \hat{\gamma}_B)$ peut être non définie positive à cause des erreurs d'estimation de γ_B . Les résultats des trois méthodes de traitement d'antenne, appliquées à $(\hat{\gamma} - \alpha \hat{\gamma}_B)$ avec $\alpha=0,95$, sont présentés figure 4.

Ces méthodes séparent maintenant les deux sources et la méthode de Capon respecte de plus les puissances des sources.

4.2.3. Cas de bruits partiellement corrélés et de puissances différentes

La situation est identique au paragraphe 4.2.2 et de plus, les bruits des voies 1 et 2 sont partiellement (coefficient de corrélation de 0,5).

Les résultats des méthodes appliquées aux matrices et $(\hat{\gamma} - 0,95 \hat{\lambda}_N \mathbb{1}_N)$ sont présentés figure 5 (courbes b).

En estimant la matrice spectrale des bruits, supposée diagonale, on obtient après 11 itérations :

$$\hat{\gamma}_B = \text{diag} [12,7; 22,2; 29,3; 39,5; 49,8; 60,0; 70,2; 80,4; 90,8; 97,2].$$

Les résultats des méthodes de traitement d'antenne, appliquées à $(\hat{\gamma} - 0,95 \hat{\gamma}_B)$ sont présentés figure 6.

Même dans ce cas de bruits partiellement corrélés, l'estimation de la matrice spectrale des bruits améliore considérablement les méthodes de traitement d'antenne.

4.2.4. Conservation du caractère défini positif de la matrice spectrale des observations

Une autre façon de procéder en tenant compte de l'estimation de la matrice spectrale des bruits est d'appliquer les méthodes de traitement d'antenne à la matrice :

$$\hat{\gamma}(f) = \hat{\gamma}_B^{-1/2}(f) \cdot \hat{\gamma}(f) \cdot \hat{\gamma}_B^{-1/2}(f)$$

* (le retour directionnel est aussi normalisé).

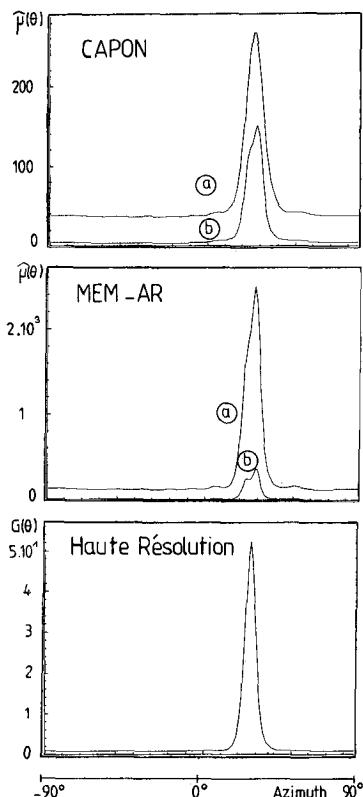


Fig. 5 - Bruits partiellement corrélés et de puissances différentes. Deux sources non corrélées (-5 et -6 dB) d'azimuts (22 et 30°). Méthodes de traitement d'antenne appliquées aux matrices $\hat{\gamma}$ et $\hat{\gamma} - 0,95 \hat{\lambda}_{10} \mathbb{1}_N$ [respectivement (a) et (b)].

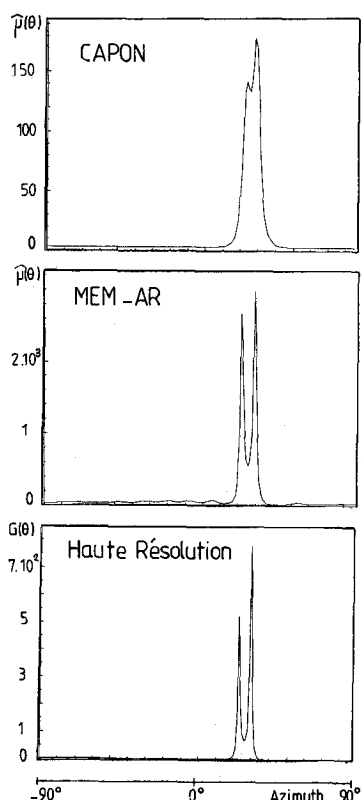


Fig. 6 - Bruits partiellement corrélés et de puissances différentes. Méthodes de traitement d'antenne appliquées à la matrice $\hat{\gamma} - 0,95 \hat{\gamma}_B$.

Où $\hat{\gamma}_B(f)$ est l'estimée de la matrice spectrale des bruits (supposée diagonale).

La matrice $\hat{\gamma}(f)$ étant hermitienne et définie positive, $\hat{\gamma}(f)$ l'est aussi.

Si l'estimée $\hat{\gamma}_B(f)$ est suffisamment proche de $\gamma_B(f)$ alors :

$$\hat{\gamma}(f) = \hat{\gamma}_B^{-1/2}(f) \cdot \hat{\gamma}_S(f) \cdot \hat{\gamma}_B^{-1/2}(f) + I_N$$

Les méthodes précédentes sont appliquées à la matrice $(\hat{\gamma}(f) - \alpha I_N)$ avec $\alpha = 0,95$, en utilisant un vecteur directionnel de la forme $(\hat{\gamma}^{-1/2}_B \cdot S)$.

Pour une situation identique à celle du paragraphe 4.2.2 (bruits non corrélés et de puissances différentes) les résultats sont présentés figure 7.

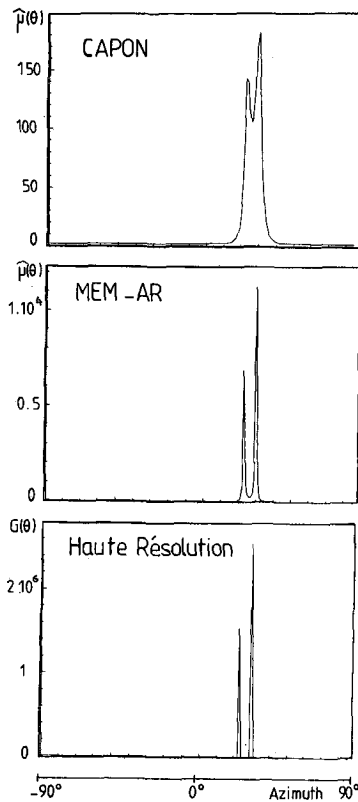


Fig. 7 - Bruits non corrélés et de puissances différentes. Méthodes de traitement d'antenne appliquées à la matrice $\hat{\gamma} - 0,95 I_N$, où $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_B^{-1/2} \hat{\gamma}_S \hat{\gamma}_B^{-1/2}$ (conservation du caractère défini positif).

Les trois méthodes présentées séparent aussi bien les deux sources que sur la figure 4. Pour des raisons de simplicité nous préférons travailler avec la matrice $\hat{\gamma}(f) - 0,95 \hat{\gamma}_B$.

4.2.5. Influence de P

En pratique, P n'est pas connu. Il existe des tests, valables dans le cas asymptotique, pour estimer P. Cependant, comme ils sont lourds à mettre en œuvre, il est courant d'essayer successivement plusieurs valeurs de P (cf. [15]). Nous présentons ici l'influence du choix de P, sur un cas de simulation en reprenant la situation du paragraphe 4.2.2, cas de bruits non corrélés et de puissances différentes. Nous réestimons la matrice spectrale des bruits en supposant une erreur sur le nombre P de sources estimé (P exact est égal à 2).

- $\hat{P} = 1$ (mauvaise estimation, par défaut) :

Pour $\epsilon = 10^{-3}$, l'algorithme s'arrête après quatre itérations.

$$\hat{\gamma}_B = \text{diag}[27,0; 31,5; 36,4; 42,0;$$

$$50,0; 59,4; 71,8; 86,0; 101,3; 116,9;]$$

Les résultats des méthodes de traitement d'antenne appliquées à la matrice $(\hat{\gamma} - \alpha \hat{\gamma}_B)$ sont présentés figure 8. Nous avons pris $\alpha = 0,55$ afin de conserver le caractère défini positif de la matrice $(\hat{\gamma} - \alpha \hat{\gamma}_B)$. Les résultats sont acceptables malgré les erreurs d'estimation de γ_B .

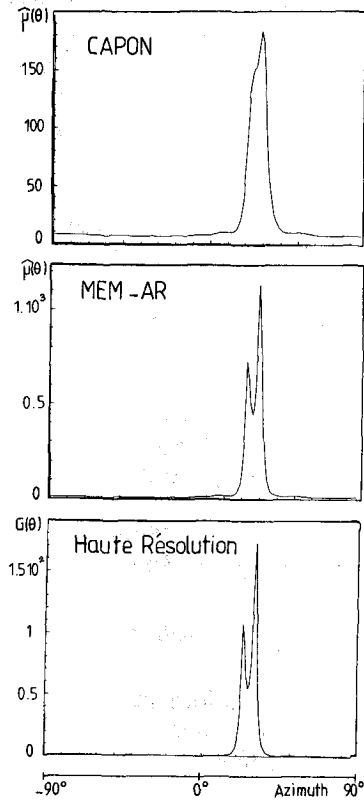


Fig. 8 - Bruits non corrélés et de puissances différentes. Méthodes de traitement d'antenne appliquées à la matrice $\hat{\gamma} - 0,55 \hat{\gamma}_B$. $\hat{\gamma}_B$ estimée en supposant une erreur par défaut du nombre de sources.

- $\hat{P} = 3$ (mauvaise estimation, par excès) :

Pour $\epsilon = 10^{-3}$, l'algorithme s'arrête après 42 itérations (!).

$$\hat{\gamma}_B = \text{diag}[10,6; 20,1; 30,0; 40,0;$$

$$50,0; 60,2; 70,4; 80,9; 87,2; 34,3]$$

On constate que la puissance du bruit sur la voie 10 est très mal estimée : c'est la voie où elle est la plus forte et est comparable à celle des sources.

Les résultats des trois méthodes obtenus sur la matrice $(\hat{\gamma} - 0,55 \hat{\gamma}_B)$ sont présentés figure 9. Seule la méthode MEM-AR arrive « péniblement » à distinguer les deux sources.

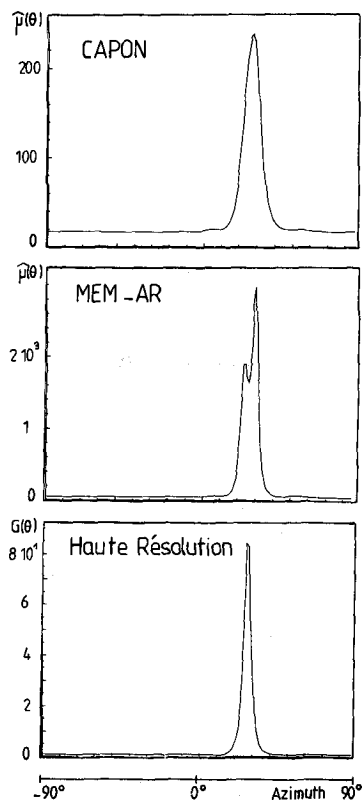


Fig. 9 - Bruits non corrélés et de puissances différentes. Méthodes de traitement d'antenne appliquées à la matrice $\hat{\gamma} - 0,95 \gamma_B$, γ_B estimée en supposant une erreur par excès du nombre de sources.

4.3. DISCUSSION

L'hypothèse habituellement admise en traitement d'antenne est que les bruits sont additifs et non corrélés avec les signaux émis. Si de plus :

(i) Les bruits sont non corrélés entre eux et ont même puissance sur les capteurs; on vérifie aisément que :

$$\hat{\beta}_P(f) = \frac{1}{N - P} \sum_{i=P+1}^N \hat{\lambda}_i(f)$$

$\hat{\lambda}_i(f)$: valeurs propres de $\hat{\gamma}(f)$ rangées par ordre décroissant.

$\hat{\beta}_P(f)$ est l'estimée au sens du M.V de la puissance du bruit [P étant connu et $X(f)$ suit une loi gaussienne]. Si les hypothèses sont bien vérifiées, $\hat{\beta}_P(f)$ est sensiblement égal à $\hat{\lambda}_N(f)$. Ceci justifie la technique proposée par J. Munier pour améliorer les méthodes de traitement d'antenne (la méthode haute résolution ou Music n'est pas améliorée).

(ii) Les bruits sont non corrélés (ou partiellement corrélés) et de puissances différentes; on estime la diagonale de γ_B par l'algorithme d'analyse factorielle décrit au paragraphe 3.3. On peut alors se ramener au cas (i).

(iii) Les bruits sont corrélés et de puissances différentes. Ce cas n'a pas été traité ici; cependant γ_B peut être écrite :

$$\gamma_B = \gamma_B^1 + \sigma^2 \cdot J$$

où γ_B^1 est une matrice diagonale, σ^2 est une constante et J est la matrice des cohérences spatiales des bruits (dont les éléments diagonaux valent 1).

G. Bienvenu [2] propose en acoustique sous-marine de modéliser J par des fonctions de Bessel. Lorsque J est connue γ_B^1 peut alors être estimée par notre algorithme.

5. Conclusion

Les méthodes de traitement d'antenne (formation de voies classiques, haute résolution,...) cherchent à estimer les caractéristiques des sources émettrices, et la connaissance de la matrice spectrale des bruits leur est nécessaire.

Les méthodes de Capon, MEM-AR et haute résolution supposent que la forme du vecteur directionnel est connue. Elles supposent aussi soit que les bruits sont non corrélés entre eux et ont même puissance sur tous les capteurs, soit que la matrice spectrale des bruits est connue. Les méthodes MEM-AR et haute résolution ont un pouvoir de résolution élevé (celui de la méthode haute résolution serait infini pour un temps d'observation très grand), mais les puissances des sources ne sont obtenues qu'après un calcul supplémentaire. La méthode de Capon, dont le pouvoir de résolution est moins bon, respecte cependant les puissances des sources et est plus souple à mettre en œuvre.

Les hypothèses faites sur la matrice spectrale des bruits sont rarement vérifiées. Le cas de bruits non corrélés et de puissances différentes sur les capteurs, que nous avons traité ici, est une approche plus réaliste. La technique d'estimation de la matrice spectrale des bruits que nous avons présentée améliore notablement les méthodes de traitement d'antenne.

Cet algorithme nécessite une bonne estimation du nombre de sources non corrélées. Il est facile à mettre en œuvre et le temps de calcul est relativement faible en comparaison avec d'autres techniques [8].

Manuscrit reçu le 20 juin 1986.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BIENVENU et L. KOPP, *Multiple detection using eigen values when the noise spatial coherence is partially unknown*, NATO ASI, in underwater acoustics, LUNEBERG, 1984.
- [2] G. BIENVENU et L. KOPP, Méthodes haute résolution pour la localisation de sources rayonnantes, *Onde Électrique*, 64, n° 4, 1984, p. 28-37.
- [3] F. GLANGEAUD et C. LATOMBE, Identification of electromagnetic sources, *Analyses Geophysicae*, 1, n° 3, May-June 1983, p. 245-252.
- [4] K. G. JORES KOG Some contributions to maximum likelihood factor analysis, *Psychometrika*, 32, n° 4, déc. 1967.
- [5] J. L. LACOUME, Différentes approches de l'analyse spectrale, *Ann. Télécomm.*, 34, n° 3-4, 1979, p. 142-153.

- [6] D. N. LAWLEY et A. E. MAXWELL, *Factor analysis as a statistical method*, London, Butterworths, 1971.
- [7] L. LEBART, A. MORINEAU et J. P. FENELON, *Traitement de données statistiques*, Dunod, 1979.
- [8] B. LUMEAU et H. CLERGEOT, Séparation de sources dans le cas de signaux bruités à bruits décorrélés, *Actes du GRETSI*, Nice, 1983.
- [9] J. MUNIER et G. Y. DELISLE, De l'analyse spatiale continue à l'analyse paramétrique, *Actes du GRETSI*, Nice, 20-24 mai 1985, p. 307-312.
- [10] J. MUNIER et G. Y. DELISLE, Spatial analysis in passive listening using adaptive techniques, *Proceedings IEEE* (soumis).
- [11] A. PAULRAJ et T. KAILATH, Eigenstructure methods for direction of arrival estimation in the presence of unknown noise fields, *IEEE-ASSP*, 34, n° 1, Feb. 1986.
- [12] R. O. SCHMIDT, Multiple emitter location and signal parameter estimation, *IEEE, Trans.on.Ant-Prop*, 34, n° 3, March 1986, p. 276-280.
- [13] I. TAS et C. LATOMBE, Détection multiple par les valeurs propres de la matrice spectrale, *Traitement du Signal*, 3, n° 2, 1986, p. 79-89.
- [14] I. TAS et C. LATOMBE, Passive array treatment : detection of signals and estimation of the spectral matrix of the noises, *EUSIPCO*, La Hague, 2-5, sept. 1986.
- [15] G. A. F. SEBER, *Multivariate observations*, John Wiley et Sons, 1984.