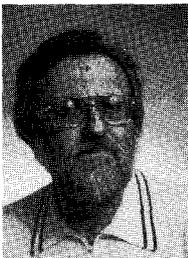


Les analyseurs de spectre à FFT*

et les analyseurs de spectre à corrélation

Correlator spectrum analyser versus FFT

spectrum analyser



Jacques MAX

CEA-IRDI, LETI-CENG, 85X, 38401 GRENOBLE CEDEX

Licence d'enseignement Mathématiques, ingénieur ESE, DEA d'automatique, auteur de l'ouvrage *Méthodes et techniques de traitement du Signal*, ingénieur au Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA), travaille sur la Précision des algorithmes de traitement du signal et de filtrage numérique; méthodes simples de calcul et réalisation de filtres



Marc DIOT

XCOM, ZAC Le Pré Millié, MONTBONNOT-SAINT-MARTIN, BP 29, 38330 SAINT-ISMIER

Diplômé Universitaire de Technologie : Électronique/Automatique. Maître ès-Sciences et Techniques : Télécommunications. Diplômé d'Études Approfondies : Traitement du signal/automatique. Ingénieur en Microélectronique Appliquée. Thèse de Doctorat en cours : Traitement du signal et optique. Activités Professionnelles : Conception théorique de circuits intégrés spécifiques au traitement d'images/codages d'images; Conception d'appareillage permettant le suivi du déplacement de masses magnétiques dans l'espace.



Roland BIGRET

22, rue Jean-Varnet, 93700 DRANCY

Ingénieur Conservatoire National des Arts et Métiers. Recherches et développements mécaniques des turbomachines.

RÉSUMÉ

Les deux principales méthodes non paramétriques de mesure de densités spectrales sont la méthode du périodogramme (analyseurs à FFT) et la méthode du corrélogramme (analyseurs à corrélation). Ces deux méthodes ont conduit à des appareils spécifiques.

Nous montrons que, contrairement à l'opinion répandue, ces deux méthodes ne sont pas équivalentes. Nous comparons donc ces deux méthodes et en déduisons la supériorité de la méthode par corrélation du point de vue de la précision de l'estimation, de la résolution et de l'étendue spectrale des signaux que l'on peut traiter.

MOTS CLÉS

Analyse spectrale, périodogramme, corrélogramme, estimation, variance, biais, signaux aléatoires, signaux périodiques.

* Les auteurs ont délibérément choisi d'écrire, non pas TFR (Transformée de Fourier Rapide) mais FFT (Fast Fourier Transform) car cette abréviation est, de loin, la plus connue et la plus utilisée.

SUMMARY

There are two main ways for non parametric digital spectral analysis. Spectral analysis by means of FFT (so called periodogram method) and spectral analysis by mean of Fourier transform of correlation function (so called correlogram method).

We show that, in opposite to the general opinion, these two methods are not equivalent.

In this paper, we compare both methods and we infer superiority of correlogram method (accuracy, resolution, flexibility, bandwidth).

KEY WORDS

Spectral analysis, periodogram, correlogram, estimation, variance, bias, random signals, periodic signals.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction
2. Analyse spectrale des signaux aléatoires par la méthode du périodogramme moyenné (analyseur à FFT)
3. Analyse spectrale des signaux aléatoires par la méthode du corrélogramme
4. Analyse spectrale de signaux presque périodiques par la méthode du périodogramme moyenné
5. Analyse spectrale de signaux presque périodiques par la méthode du corrélogramme
6. Analyse spectrale d'un mélange de signal (presque) périodique et de bruit
7. Conclusion

1. Introduction

Les deux principales méthodes non paramétriques de mesure de densités spectrales ont conduit à deux types d'appareillages.

■ Les analyseurs de spectre à FFT qui sont aujourd'hui universellement utilisés permettent le traitement en temps réel de signaux jusqu'à 50 ou 100 kHz de largeur de bande.

■ Les analyseurs à corrélation qui ne sont guère utilisés que pour les rares cas où l'on souhaite traiter des signaux à large bande (jusqu'à 100 MHz avec la technologie d'aujourd'hui) [1].

Ces deux méthodes sont jusqu'ici tenues pour avoir des performances [2] équivalentes. Cependant, plusieurs expérimentateurs [3, 4, 5] ont constaté que ces

deux méthodes n'ont pas les mêmes performances, qu'il s'agisse d'analyse spectrale de signaux aléatoires stationnaires ou de signaux périodiques (quasi périodiques). Il y a donc un paradoxe entre les résultats théoriques considérés jusqu'ici et les résultats expérimentaux. Nous allons montrer que, en réalité, les deux méthodes, telles qu'elles sont utilisées ne sont pas équivalentes, et que cela tient à ce que les hypothèses théoriques ne sont pas vérifiées, à cause des contraintes imposées par la technologie dans la réalisation d'appareillages spécifiques.

En effet, les analyseurs à FFT comportent un algorithme câblé de FFT qui ne peut fonctionner qu'avec un nombre de mots fixe (parfois variable en quelques pas). Ce nombre de mots est une puissance de 2 pour les algorithmes de Coley-Tukey et ceux qui en dérivent ou bien un produit de puissances entières de nombres premiers (algorithmes de Vinograd).

Les analyseurs de spectres à FFT nécessitent donc un sectionnement du signal numérisé en blocs de 2^p mots (avec p entier compris entre 5 et 12 dans la plupart des cas) ou bien encore de 800 mots dans le cas de l'analyseur 1200 Enertec-Schlumberger qui utilise l'algorithme de Vinograd.

De plus, les algorithmes de FFT réalisent la transformée de Fourier discrète qui entraîne un échantillonnage en fréquence de la transformée de Fourier, et donc de la densité spectrale, pas toujours conforme au théorème de Shannon.

2. Analyse spectrale de signaux aléatoires par la méthode du périodogramme moyenné (analyseurs de spectres à FFT)**2.1. PRINCIPE**

Les signaux temporels analogiques (à temps continu) sont préalablement échantillonnés et numérisés. La fréquence d'échantillonnage F_e du signal temporel est supposée vérifier le théorème d'échantillonnage de Shannon, c'est-à-dire $F_e \geq 2B$, B étant la limite supérieure de l'étendue spectrale du signal, c'est-à-dire que la partie du spectre du signal extérieure à l'intervalle de fréquence $(-B, B)$ ne contient plus d'énergie significative. Cette condition peut être considérée comme

APPLICATIONS

remplie par la quasi-totalité des analyseurs de spectre du commerce car ils comportent des filtres analogiques anti-repliement qui ont pour effet de limiter l'étendue spectrale du signal à la demi-fréquence d'échantillonnage. De plus, pour éviter tout risque de repliement du spectre, les derniers points du spectre ne sont pas donnés. Nous négligerons les erreurs dues à la quantification du signal temporel car tous ces appareils codent le signal avec un nombre important de digits binaires (bits).

Le signal échantillonné et numérisé est donc « découpé » en sections de N mots; on pondère éventuellement chaque section selon une loi choisie à l'avance (fenêtres de pondération voir § 2.5; 3.1.1); on calcule la transformée de Fourier discrète (par FFT) de chaque section. On en prend, pour l'autospectre, le module carré et on en fait la moyenne sur les n sections contenues dans le signal considéré (le nombre M total de mots composant le signal est alors $M = nN$).

Il est convenu d'appeler cette moyenne de spectres partiels, le spectre (ou densité spectrale du signal).

2.2. PASSAGE DU SIGNAL CONTINU (A TEMPS CONTINU) AU SIGNAL DISCRET (A TEMPS DISCRET) ET PASSAGE DU SPECTRE CONTINU (A FRÉQUENCE CONTINUE) AU SPECTRE ÉCHANTILLONNÉ EN FRÉQUENCE

On sait que si les signaux temporels sont échantillonnés à une fréquence F_e conforme au théorème de Shannon, tous les calculs sur ces signaux peuvent être effectués indifféremment sur les signaux continus ou sur les signaux échantillonnés. De plus on montre aisément [7] que la transformée de Fourier discrète n'est autre que la transformée de Fourier continue d'une section de N mots du signal échantillonné, elle même échantillonnée avec un pas en fréquence qui est égal à $\Delta v = F_e/N$.

On pourra donc (car cela est plus simple à formaliser), faire les calculs qui suivent en supposant que l'on opère sur le signal temporel continu, découpé en sections de durée $\theta = N/F_e = NT_e$, réaliser la transformée de Fourier (à fréquence continue) de cette section, en calculer le module carré, en faire la moyenne sur les n sections, puis échantillonner ce spectre avec le pas en fréquence propre à la transformée de Fourier discrète, soit $\Delta v = F_e/N$.

2.3. SPECTRE OBTENU

Le spectre continu obtenu est alors (si $\theta = NT_e$)

$$(1) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\theta} |X_k(v, \theta)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_{x_k x_k}(v, \theta)$$

avec :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_k(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } k\theta < t < (k+1)\theta \\ 0 & \text{en dehors} \end{cases} \\ \text{et} \\ X_k(v, \theta) = \text{TF} \{ x_k(t, \theta) \} \\ S_{x_k x_k}(v, \theta) = \frac{1}{\theta} |X_k(v, \theta)|^2 \end{array} \right.$$

$S_{xx}(v)$ étant la densité spectrale du signal, dont la définition est : transformée de Fourier de la fonction de corrélation (th. de Wiener-Kinchine)

$$(3) \quad S_{xx}(v) = \text{TF} \{ C_{xx}(\tau) \}$$

On démontre aisément [7] que

$$(4) \quad E \left\{ \frac{1}{\theta} |X_k(v, \theta)|^2 \right\} = S_{xx}(v, \theta) \\ = S_{xx}(v) * \left(\frac{\sin \pi v \theta}{\pi v \theta} \right)^2 \theta$$

Cette espérance mathématique étant égale, rappelons-le à :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\theta} |X_k(v, \theta)|^2$$

Il y a donc deux types d'erreurs, par rapport au véritable spectre défini par (3).

Une première erreur due à la convolution de $S_{xx}(v)$ par $(\sin \pi v \theta / \pi v \theta)^2$ qui réalise en fait un filtrage du spectre (que certains auteurs appellent biais).

Une seconde erreur qui est une erreur d'estimation puisqu'on ne peut calculer la moyenne des spectres partiels que sur un nombre fini d'estimations :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\theta} |X_k(v, \theta)|^2$$

2.4. ERREUR DITE « DE BIAIS »

Cette erreur est inhérente à toute mesure de densité. La notion de densité est une notion limite, comme la notion de dérivée ou la notion de vitesse instantanée. La densité d'un corps est le rapport entre la masse d'un certain volume et ce volume lorsque ce volume tend vers zéro. Ce que l'on peut mesurer c'est la densité moyenne dans un élément de volume ΔV non nul. Il en est de même pour la densité spectrale, on ne pourra que « mesurer » la densité spectrale moyenne dans une étendue spectrale Δv autour de v_0 fréquence analysée.

Cette erreur de biais qui provient, rappelons-le, de la convolution par $\theta |\sin \pi v \theta / \pi v \theta|^2$, c'est-à-dire qui provient du filtrage du spectre par un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle (dans le domaine fréquentiel) est égale à $\theta |\sin \pi v \theta / \pi v \theta|^2$.

Si l'on passe dans le domaine temporel, nous avons vu que :

$$(5) \quad S_{xx}(v, \theta) = S_{xx}(v) * \theta \left| \frac{\sin \pi v \theta}{\pi v \theta} \right|^2$$

devient :

$$(6) \quad C_{xx}(\tau, \theta) = C_{xx}(\tau) \cdot \bigwedge_0(\tau) \quad (\text{fig. 1})$$

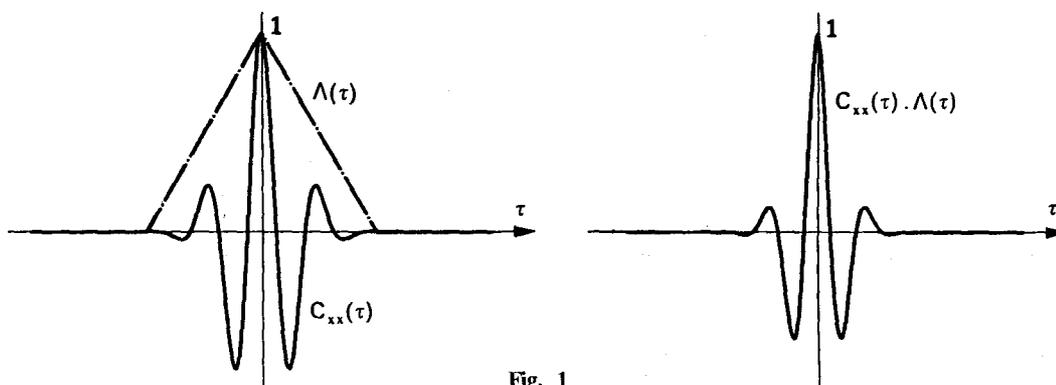


Fig. 1

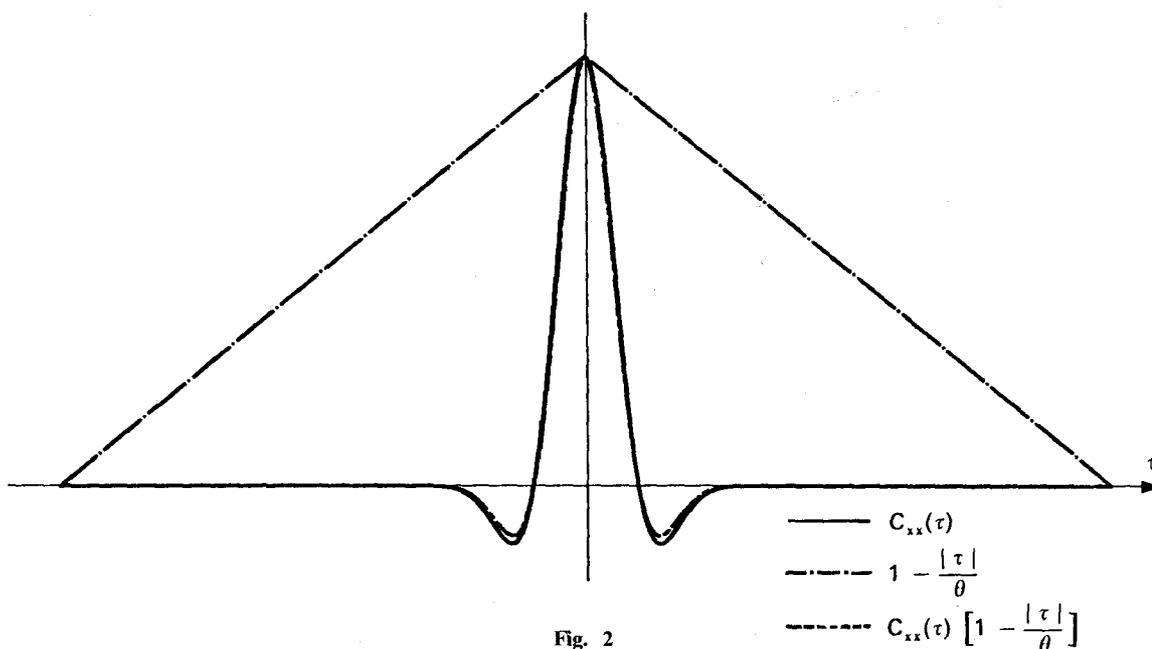


Fig. 2

avec :

$$\Lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\theta} & \text{pour } |\tau| \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour que cette erreur de biais soit négligeable, il faut que :

$$(7) \quad C_{xx}(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta}\right) \neq C_{xx}(\tau)$$

là où $C_{xx}(\tau)$ est significatif (fig. 2).

Si donc τ_c est le rayon de corrélation⁽¹⁾ du signal $x(t)$, tel que : pour $|\tau| > \tau_c$ on ait $C_{xx}(\tau) \neq 0$, on doit

⁽¹⁾ Rappelons que l'on appelle rayon de corrélation, le décalage τ_c tel que, pour $|\tau| \geq \tau_c$, la fonction de corrélation soit négligeable, c'est-à-dire inférieure, en valeur absolue, à l'écart-type de l'erreur d'estimation, égale on le sait à

$$\frac{C_{xx}(0)}{\sqrt{BT}}$$

B étendue spectrale du signal, T durée d'intégration.

avoir :

$$1 - \frac{\tau_c}{\theta} \neq 1$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\tau_c}{\theta} \neq 0$$

C'est-à-dire encore :

$$\tau_c \ll \theta$$

La longueur $\theta = NT_e$ de la section doit être grande devant le rayon de corrélation du signal; ceci interdit d'utiliser des sections trop courtes.

N. B. : Ce qui vient d'être dit permet de préciser l'hypothèse classique [2, 8, 9, 10] qui est que le spectre du signal analysé varie peu sur la bande passante de l'estimateur, ou que le spectre est plat devant la largeur de bande du filtre équivalent [11].

APPLICATIONS

2. 5. VARIANCE DE L'ESTIMATION

Nous désignerons par \hat{S} l'estimation de la grandeur aléatoire S , par \hat{C} , celle de C .

Il est bien connu [2, 7, 10] que la variance du spectre obtenu par cette méthode est

$$(8) \quad \frac{\text{Var } \hat{S}_{xx}(v, \theta)}{|\hat{S}_{xx}(v, \theta)|^2} = \frac{1}{n}$$

n étant, rappelons-le, le nombre de sections contenues dans le signal global ⁽²⁾.

Si T est la durée totale du signal et θ la durée d'une section, nous prendrons :

$$n = \text{partie entière de } \frac{T}{\theta}$$

Si T_e est la période d'échantillonnage ($T_e = 1/F_e$) et si l'on pose :

$$\theta = NT_e \quad \text{et} \quad T = MT_e$$

(M nombre total de mots du signal) il vient :

$$(9) \quad \frac{\text{Var } \hat{S}_{xx}(v, \theta)}{|\hat{S}_{xx}(v, \theta)|^2} = \frac{N}{M}$$

2. 6. FENÊTRES DE PONDÉRATION

Il existe encore un grand nombre de fenêtres de pondération [7, 21] que l'on peut utiliser pour réduire l'effet des lobes secondaires du filtre en $|\sin \pi v \theta / \pi v \theta|^2$.

On « pondère » donc chaque section du signal temporel, avant que ne lui soit appliquée la TFD, par une fonction « fenêtre ». Cela est en général, plus simple (sauf cas particulier, par exemple, la fenêtre Flat-Top) que d'opérer une convolution dans le domaine fréquentiel.

Dans les analyseurs à FFT, la fenêtre doit être choisie, *a priori*, avant de commencer l'analyse spectrale. Si la fenêtre utilisée n'est pas la fenêtre optimale (optimale en fonction de critères définis par l'expérimentateur), il n'est pas possible de revenir en arrière (sauf si le signal temporel a été préalablement enregistré, ce qui n'est en général pas le cas, surtout si le signal est long (signal à produit BT grand)).

Il n'existe pas de fenêtre intrinsèquement optimale, cela dépend, et de ce que cherche l'observateur, et de la forme du spectre du signal analysé.

Il faut remarquer que, avec la plupart des analyseurs à FFT du commerce, le choix des fenêtres possibles est très restreint (deux ou trois).

⁽²⁾ Certains auteurs qui donnent ce résultat font l'hypothèse [20] que les spectres de chaque section du signal sont indépendants, ce qui n'est pas aisé à vérifier expérimentalement. Une autre manière de conduire le calcul [18] amène au même résultat avec la seule hypothèse que le rayon de corrélation du signal soit inférieur à la durée de quelques sections du signal (nombre petit devant n). Cette condition est évidemment réalisée si la condition (7) l'est.

2. 7. COMPROMIS VARIANCE-FILTRAGE (OU BIAIS) DANS LE CAS DES ANALYSEURS A FFT

Le signal temporel étant échantillonné à la fréquence F_e , est découpé en n sections de N mots ($nN = M$) et on obtient une densité spectrale qui est une estimation de la vraie densité spectrale filtrée par :

$$\left| \frac{\sin \pi v (N/F_e)}{\pi v (N/F_e)} \right|^2$$

avec une variance égale à N/M .

L'effet de filtrage sera d'autant plus grand que la variance sera plus faible.

Une faible variance obtenue en diminuant N se traduira par un biais important.

De plus, si l'on a le choix entre plusieurs valeurs de N (128; 256; 512; 1024; 2048) ce choix doit être fait *a priori*, avant de commencer l'analyse, et l'on ne peut plus y revenir.

Remarquons aussi que si l'on augmente F_e (suréchantillonnage) la variance diminue puisque θ diminue, mais l'effet de filtrage augmente.

2. 8. RECOUVREMENT (OVERLAPPING)

Si la fréquence est assez faible pour permettre le calcul du spectre de chaque section pendant un temps inférieur à la durée de la section, certains appareils pratiquent le recouvrement, c'est-à-dire que les sections successives ont une partie commune. Il y a donc davantage de spectres partiels pour une même durée de signal.

Le recouvrement va diminuer la variance, donc améliorer le résultat, mais il est difficile de prévoir l'amélioration qui va en résulter.

Il est donc tout à fait recommandé de l'employer, mais sans espérer chaque fois une énorme amélioration sur la variance du résultat (de l'ordre de 1,64 d'après Welch [2]), mais le calcul rigoureux montre que cet effet dépend essentiellement de la fonction d'autocorrélation du signal.

3. Analyse spectrale de signaux aléatoires par la méthode du corrélogramme

3. 1. PRINCIPE

Cette méthode résulte du théorème de Wiener-Kinchine :

La densité spectrale est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation.

3. 2. FONCTION DE CORRÉLATION

Par définition, la fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire réel stationnaire est :

$$(10) \quad C_{xx}(\tau) = E \{ x(t) x(t-\tau) \}$$

qui, si le signal est ergodique, équivaut à :

$$(11) \quad C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau) dt$$

Nous prendrons, dans la suite des calculs, pour estimateur de la fonction d'autocorrélation :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \hat{C}_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau) dt \\ |\tau| &\ll \tau_m \end{aligned} \right.$$

τ_m retard maximal de corrélation réalisable avec un appareillage donné, avec, bien sûr :

$$\tau_m \ll T$$

Il eût été plus rigoureux de prendre comme estimateur :

$$(13) \quad \frac{1}{T-|\tau_m|} \int_{|\tau_m|}^T x(t)x(t-\tau) dt$$

car cet estimateur est celui qui est effectivement réalisé par les corrélateurs en temps réel [7]. Toutefois, la différence entre les estimateurs donnés par (12) et (13) est tout à fait négligeable.

Les corrélateurs opéreront le plus souvent sur des signaux préalablement échantillonnés, on écrira cet estimateur :

$$(14) \quad \hat{C}(lT_e) = \frac{1}{M - N_m} \sum_{k=N_m}^M x(kT_e)y(kT_e - lT_e)$$

avec

$$T = MT_e; \quad \tau_m = N_m T_e$$

et, bien sûr

$$N_m \ll M$$

3.3. REMARQUE IMPORTANTE — SECTIONNEMENT

La corrélation (auto ou inter) réalisée de cette manière ne nécessite pas le sectionnement du signal.

3.4. ÉCHANTILLONNAGE DE LA FONCTION DE CORRÉLATION

La fonction de corrélation est calculée pour des retards variant avec un pas incrémental $\Delta\tau = T_e$. La fonction de corrélation est échantillonnée au même pas que le signal temporel.

3.5. CODAGE DES SIGNAUX EN VUE DU CALCUL DE LEUR FONCTION DE CORRÉLATION

Des études, déjà anciennes pour certaines, [12, 13], ont montré qu'un codage à très peu de bits suffisait à obtenir la fonction de corrélation avec une grande

précision, et que, si nécessaire, l'adjonction aux signaux à corréler de bruits auxiliaires diminuait considérablement l'erreur introduite par le codage grossier des signaux [7, 14, 15] et cela d'autant plus que le produit BT (B largeur de bande, T durée des signaux traités) est plus grand. Il a d'ailleurs été démontré depuis [7] que cette erreur diminuait très vite lorsque l'on s'éloignait du maximum de la fonction de corrélation. A titre d'exemple, pour un signal codé à 4 bits, sans adjonction de bruits auxiliaires, l'erreur qui est de 4% au maximum de la fonction de corrélation n'est plus que de 0,02% lorsque la fonction de corrélation a décliné de 5%.

Ceci présente un intérêt capital lorsque l'on a à faire l'analyse spectrale de signaux à large bande (plusieurs centaines de kilohertz à plusieurs dizaines de mégahertz) pour lesquels il n'est pas possible d'envisager d'utiliser des calculateurs et pour l'analyse desquels une réduction du nombre des bits de codage diminue considérablement le volume et le coût des appareillages [1, 16]. Ces derniers, pour de telles fréquences, ne peuvent être, en raison de la technologie actuelle, que câblés (avec, bien sûr, utilisation, chaque fois que cela sera possible de circuits intégrés existants).

Il est clair que, dans ce cas, il n'est pas judicieux de vouloir effectuer ce calcul avec un ordinateur ou un microprocesseur.

3.6. DYNAMIQUE DES SIGNAUX TEMPORELS ET DYNAMIQUE DU SPECTRE

Contrairement à l'idée courante, il n'y a aucun rapport entre la dynamique du codage des signaux temporels et la dynamique du spectre.

Pour avoir une bonne dynamique sur le spectre, il faut avoir une bonne dynamique sur la fonction de corrélation qui doit, elle, être codée à 12 ou 16 bits, mais pour avoir une telle précision sur la fonction de corrélation, il suffit de peu de bits (donc faible dynamique) au codage des signaux temporels (et ceci d'autant plus que le produit BT est plus grand).

3.7. TRONCATURE DE LA FONCTION DE CORRÉLATION

On ne peut, en pratique, calculer les valeurs de la fonction de corrélation pour des retards allant de -l'infini à +l'infini. La valeur absolue maximale réalisable pour le décalage des deux signaux est forcément limitée, soit τ_m cette limite.

On obtiendra donc $C(\tau)$ pour $|\tau| < \tau_m$.

Ce que l'on aura sera donc :

$$(15) \quad C_{xx}(\tau, \tau_m) = C_{xx}(\tau) \cdot \prod_{-\tau_m, \tau_m}(\tau)$$

$$(16) \quad \prod_{-\tau_m, \tau_m}(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau| < \tau_m \\ 1/2, & |\tau| = \tau_m \\ 0, & |\tau| > \tau_m \end{cases}$$

APPLICATIONS

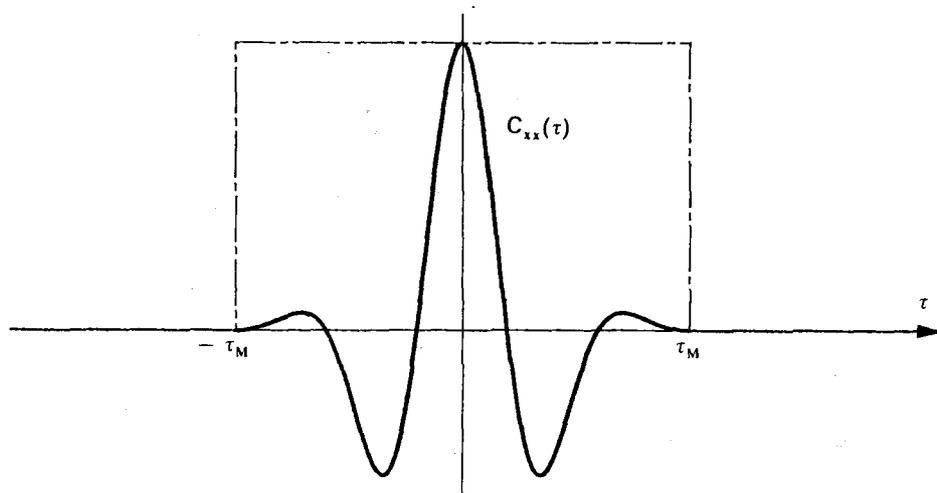


Fig. 3

3. 8. FILTRAGE DE LA DENSITÉ SPECTRALE — ERREUR DE BIAIS

Par définition, la densité spectrale est transformée de Fourier de la fonction de corrélation. On aura donc :

$$(17) \quad S_{xx}(\nu, \tau_m) = \text{TF} \{ C_{xx}(\tau, \tau_m) \}$$

ou, d'après (15)

$$(18) \quad S_{xx}(\nu, \tau_m) = \text{TF} \{ C_{xx}(\tau) \} * \text{TF} \left\{ \prod_{-\tau_m, \tau_m} (\tau) \right\}$$

C'est-à-dire :

$$(19) \quad S_{xx}(\nu, \tau_m) = S_{xx}(\nu) * 2\tau_m \frac{\sin 2\pi\nu\tau_m}{2\pi\nu\tau_m}$$

On obtient donc, par la méthode du corrélogramme, la véritable densité spectrale filtrée par un filtre de réponse impulsionnelle (dans le domaine fréquentiel) :

$$\frac{\sin 2\pi\nu\tau_m}{2\pi\nu\tau_m}$$

Cette erreur de biais (ou plutôt effet de filtrage) est d'autant plus faible que τ_m sera plus grand, c'est-à-dire que le corrélateur couvrira une plus grande plage de retards.

Pour que cette erreur de biais soit négligeable, il faut que l'on ait :

$$(20) \quad S_{xx}(\nu) * \frac{\sin 2\pi\nu\tau_m}{2\pi\nu\tau_m} 2\tau_m \neq S_{xx}(\nu)$$

ou, par transformation de Fourier :

$$(21) \quad C_{xx}(\tau) \prod_{-\tau_m, \tau_m} (\tau) \neq C_{xx}(\tau)$$

Pour que cette condition soit remplie, il faut que, pour $|\tau| \geq \tau_m$, $C_{xx}(\tau)$ soit $\neq 0$ (fig. 3).

On voit que cette condition est bien moins restrictive que la condition (7) établie en 2.4 et qui était :

$$C_{xx}(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_m} \right) \neq C_{xx}(\tau)$$

3. 9. CAS DES CORRÉLATEURS NUMÉRIQUES

Si l'on opère en numérique, l'estimation de la fonction de corrélation est définie par (14) que l'on peut écrire :

$$(22) \quad \hat{C}_{xx}(lT_e) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(kT_e)y(kT_e - lT_e)$$

d'où :

$$(23) \quad \hat{C}_{xx}(\tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{C}_{xx}(lT_e) \delta(\tau - lT_e)$$

[$\hat{C}_{xx}(\tau)$ fonction de corrélation échantillonnée].
Mais l ne varie que de $-N_m$ à N_m et

$$(24) \quad \hat{C}_{xx}(\tau, N_m T_e) = \sum_{l=-N_m}^{N_m} \hat{C}_{xx}(lT_e) \delta(\tau - lT_e)$$

que l'on peut écrire :

$$(25) \quad \hat{C}_{xx}(\tau, N_m T_e) = \hat{C}_{xx}(\tau) \sum_{l=-N_m}^{N_m} \delta(\tau - lT_e)$$

Le spectre sera obtenu par transformation de Fourier

$$(26) \quad \hat{S}_{xx}(\nu, NT_e) = \hat{S}_{xx}(\nu) * \text{TF} \left\{ \sum_{l=-N_m}^{N_m} \delta(\tau - lT_e) \right\}$$

du fait que la fonction porte vaut 1/2 à ses deux extrémités, la somme

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=-N_m}^{N_m} \delta(t-k T_e) \\ \text{doit s'écrire :} \\ \sum_{k=-N_m+1}^{N_m-1} \delta(t-k T_e) \\ + \frac{1}{2} [\delta(t-N_m T_e) + \delta(t+N_m T_e)] \end{array} \right.$$

Il est bien connu [17] que la transformée de Fourier de cette somme est :

$$\frac{\text{Sin}(2 \pi \nu N_m T_e)}{N_m T_e \text{tg}(2 \pi \nu T_e)}$$

qui est équivalent à

$$\frac{\text{Sin}(2 \pi \nu N_m T_e)}{(2 \pi \nu N_m T_e)}$$

ou encore à

$$\frac{\text{Sin}(2 \pi \nu N_m T_e)}{N_m \text{Sin}(2 \pi \nu T_e)}$$

dès que N_m est de l'ordre de quelques dizaines, et, bien sûr, lorsque la fréquence ν est, en valeur absolue, inférieure à $F_e/2$ (ce qui correspond à un signal correctement échantillonné, dans le cas contraire l'analyse spectrale n'a plus de sens à cause du repliement de spectre), d'où, pour le spectre :

$$(28) S_{xx}(\nu, N_m T_e) = S_{xx}(\nu) * 2 N_m T_e \frac{\text{sin } 2 \pi \nu N_m T_e}{\text{tg } 2 \pi \nu N_m T_e}$$

qui est équivalent à :

$$S_{xx}(\nu) * 2 N_m T_e \frac{\text{sin } 2 \pi \nu N_m T_e}{2 \pi \nu N_m T_e}$$

Ceci montre que l'on peut raisonner indifféremment en analogique (temps continu) ou en échantillonné (temps discret), (comme cela a été vu en 2. 2).

3. 10. VARIANCE DE LA DENSITÉ SPECTRALE

Nous venons de voir que ce que l'on obtient n'est pas $C(\tau, \tau_m)$ mais une estimation $\hat{C}(\tau, \tau_m)$ sur une durée T . Si le signal est échantillonné à la fréquence F_e ,

$$T = M T_e = \frac{M}{F_e}$$

En toute rigueur, la durée à prendre en compte est $T - \tau_m$ mais en prenant T on commet une erreur négligeable car on a toujours $T \gg \tau_m$.

Le spectre obtenu sera donc une estimation de $S(\nu, \tau_m)$ que nous noterons :

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} \hat{S}(\nu, \tau_m) = \text{TF} \{ \hat{C}(\tau, \tau_m) \} \\ \hat{S}(\nu, \tau_m) = \text{TF} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t-\tau) dt \right\} \\ \text{pour } |\tau| < \tau_m \end{array} \right.$$

Le calcul de la variance de $\hat{S}(\nu, \tau_m)$ est long et pénible, il aboutit à [18] :

$$(30) \frac{\text{Var } \hat{S}(\nu, \tau_m)}{|S(\nu, \tau_m)|^2} \# \frac{2 \tau_m}{T}$$

ou, si $\tau_m = N_m T_e$

$$\frac{\text{Var } \hat{S}(\nu, N_m T_e)}{|S(\nu, N_m T_e)|^2} \# \frac{2 N_m}{M}$$

3. 11. FENÊTRES DE PONDÉRATION

La relation (19) formalise la convolution de $S_{xx}(\nu)$ par $\text{sin } 2 \pi \nu \tau_m / 2 \pi \nu \tau_m$. Cette convolution va introduire des lobes secondaires qui seront plus importants que ceux introduits par la convolution de $S(\nu)$ par $|\text{sin } \pi \nu \theta / \pi \nu \theta|^2$, vue au paragraphe 2. 4.

Ces lobes sont aussi plus « désagréables » parce que certains sont négatifs et vont introduire sur la densité spectrale des parties négatives ce qui pourra choquer certains, mais l'expérimentateur averti sait en tirer des informations (par exemple mauvais centrage du signal).

Pour atténuer ces lobes et faire disparaître les parties négatives, on utilisera des fenêtres de pondérations, appliquées à la fonction de corrélation et non au signal.

Le choix des fenêtres est très grand, et il n'est pas limité, on peut toujours créer une nouvelle fenêtre si cela s'avère nécessaire [7, 21].

3. 11. 1. Fenêtre de Bartlett (ou triangulaire)

Cette fenêtre est définie par :

$$(31) g(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_m} & \text{pour } |\tau| \leq \tau_m \\ 0 & \text{pour } |\tau| \geq \tau_m \end{cases}$$

Ceci nous ramène au spectre obtenu par la méthode du périodogramme moyenné, puisque cette fenêtre $g(t)$ correspond à un filtre :

$$(32) G(\nu) = \left| \frac{\text{sin } \pi \nu \tau_m}{\pi \nu \tau_m} \right|^2 \tau_m$$

La « largeur à mi-hauteur » du filtre passe de $1/2 \tau_m$ à $1/\tau_m$, mais, dans ce cas, il n'y a plus de lobes négatifs.

APPLICATIONS

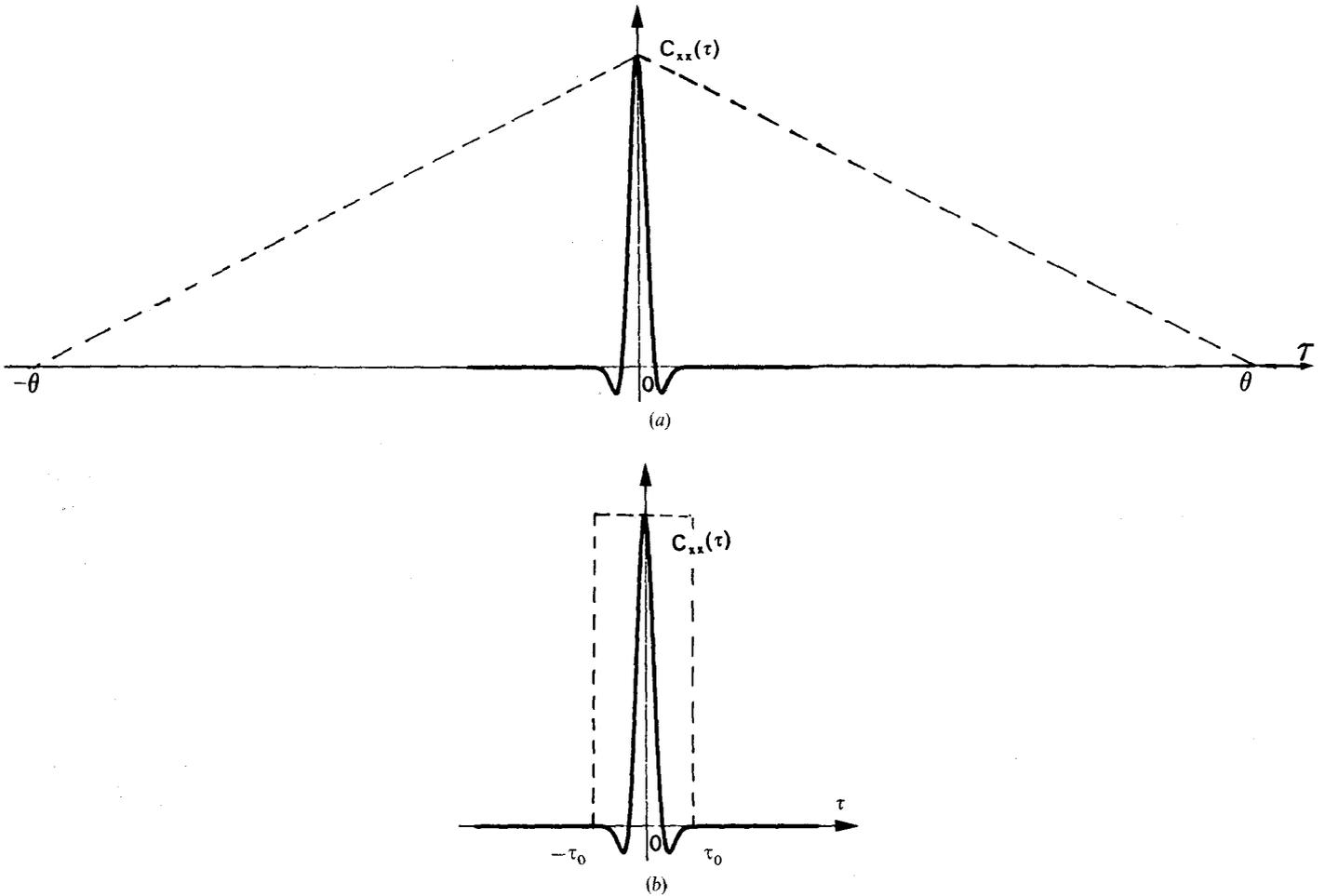


Fig. 4

Une telle fenêtre se comporte sur le spectre comme un filtre passe-bas, donc pourra rendre le résultat plus « joli » en atténuant les aspérités du graphe.

3. 11. 2. Autres fenêtres de pondération

On peut utiliser une multitude de fenêtres [7, 21] et, pourquoi pas, des fenêtres correspondant à des filtres passe-haut (ou plutôt passe-bande).

Il n'existe pas de fenêtre de pondération optimale car cela va dépendre d'une part de ce que recherche l'expérimentateur, et également, bien sûr, de la forme du spectre du signal traité.

3. 12. COMPROMIS VARIANCE-FILTRAGE

Nous venons de voir que la variance était $2\tau_m/T$ ou $2N_m/M$.

Par ailleurs, pour que l'effet de filtrage (biais) soit négligeable il faut que $C(\tau)$ soit sensiblement nul pour $|\tau| \geq \tau_m$.

Dans la plupart des cas $C(\tau)$ sera sensiblement nul pour $|\tau| \geq \tau_0$ avec $\tau_0 < \tau_m$, c'est-à-dire que le rayon de corrélation des signaux analysés est inférieur au retard maximal du corrélateur, fixé, lui, par construction.

Cela signifie que la partie de la fonction de corrélation correspondant à $\tau_0 < |\tau| < \tau_m$ ne sera pas significative, ce ne sera que de l'erreur d'estimation.

Dans ce cas, il ne faudra pas tenir compte de cette partie de la fonction de corrélation à laquelle on va attribuer une valeur nulle.

Cela signifie que l'on peut tronquer la fonction de corrélation à $\pm\tau_0$ sans dommage avant d'effectuer la transformation de Fourier.

Cette troncature n'amènera pas d'erreur de biais (filtrage).

On ne gardera donc que les $\pm N_0$ premiers points de la fonction de corrélation. La variance sera donc $2\tau_0/T$ ou $2N_0 T_e/T$ au lieu de $2\tau_m/T$ [ou $2(N_m T_e/T)$] et ceci avec un effet de filtrage négligeable.

Une telle opération n'est pas possible avec la méthode du périodogramme moyenné, car nous avons vu que, pour que l'effet de filtrage soit négligeable, il fallait que la durée de la section soit *très supérieure* au rayon de corrélation du signal (fig. 4 a).

Dans le cas du corrélogramme, il suffit que la section que l'on conserve de la fonction de corrélation soit *égale ou supérieure* au rayon de corrélation du signal (fig. 4 b).

De plus, le choix de la section utile est fait *a posteriori* après obtention de la fonction de corrélation.

Là où les analyseurs à FFT opèrent (en général) sur 2048 points, il suffira le plus souvent, de prendre $N_0 = 40$ d'où une réduction de la variance d'un rapport $2048/80 = 25$.

Cette réduction de la variance signifie que si l'on utilise la méthode du corrélogramme, pour une qualité de spectre égale, il faudra une durée de signal beaucoup plus faible.

Remarque : On pourrait améliorer un peu l'estimateur par FFT en réalisant un recouvrement des tranches successives au prix d'une augmentation du volume de calcul (cf. § 2.8).

3.13. ÉCHANTILLONNAGE DE LA DENSITÉ SPECTRALE

La densité spectrale est obtenue par transformation de Fourier de la fonction de corrélation (elle-même échantillonnée)

$$(33) \quad \begin{cases} S(v, N_0 T_e) = \text{TF} \{ C(\tau, N_0 T_e) \} \\ S(v, N_0 T_e) = \sum_{k=-N_0}^{N_0} C(k T_e) e^{-2\pi j v k T_e} \end{cases}$$

On considère ici le cas des autospectres; la fonction d'autocorrélation étant paire, on aura :

$$(34) \quad S_{xx}(v, N_0 T_e) = C_{xx}(0) + 2 \sum_{k=1}^{N_0} C_{xx}(k T_e) \cos 2\pi v k T_e$$

Puisque l'on opère en numérique, la fréquence v devra être échantillonnée, soit Δv le pas d'échantillonnage, on aura :

$$(35) \quad v = l \Delta v$$

d'où

$$(36) \quad S_{xx}(l \Delta v, N_0 T_e) = C_{xx}(0) + 2 \sum_{k=1}^{N_0} C_{xx}(k T_e) \cos 2\pi l \Delta v k T_e$$

ici on est maître du choix de Δv .

En effet, l'opération (36) que l'on réalise après acquisition de la fonction de corrélation (ou éventuellement de temps en temps en cours de route pour avoir un aperçu du résultat) n'a pas besoin d'être rapide.

On peut donc et opérer sur un nombre N_0 entier et avec un pas Δv quelconque.

On pourra donc choisir Δv assez petit, non seulement pour que le spectre soit bien échantillonné, mais encore pour avoir une bonne visualisation.

Par cette méthode, échantillonnage temporel et échantillonnage fréquentiel sont indépendants l'un de l'autre.

4. Analyse spectrale de signaux périodiques par la méthode du périodogramme moyenne

4.1. SIGNAL PÉRIODIQUE OU « PRESQUE PÉRIODIQUE »

On ne peut analyser un signal périodique puisque celui-ci a une durée infinie par définition. Ce que l'on peut analyser c'est un « morceau » plus ou moins long de signal périodique, que nous appelons signal « presque périodique ». Un signal périodique pouvant être décomposé en une somme de signaux monochromatiques (à fréquence pure), nous considérerons un signal monochromatique.

4.2. DENSITÉ SPECTRALE FOURNIE PAR LE PÉRIODOGRAMME MOYENNÉ

Soit

$$(37) \quad x(t) = A \cos(2\pi v_0 t - \alpha)$$

le signal périodique.

Comme on l'a vu en 2.3, ce signal est sectionné en un nombre n de sections de durée θ .

Une section s'écrira (en supposant les sections jointives) :

$$(38) \quad x_k(t, \theta) = \begin{cases} x(t), & k\theta \leq t \leq (k+1)\theta \\ 0, & t < k\theta; \quad t > (k+1)\theta \end{cases}$$

S'il y a recouvrement partiel des sections successives, cela ne change pas les résultats

La densité spectrale sera :

$$(39) \quad \hat{S}_{xx}(v, \theta) = \frac{1}{n\theta} \sum_{k=0}^{n-1} |\text{TF} \{ X_k(t, \theta) \}|^2$$

Les calculs classiques conduisent à

$$(40) \quad \hat{S}_{xx}(v, \theta) = \frac{A^2 \theta}{4} \left[\left| \frac{\sin \pi(v - v_0) \theta}{\pi(v - v_0) \theta} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi(v + v_0) \theta}{\pi(v + v_0) \theta} \right|^2 \right] + \frac{A^2 \theta}{2} \cos [2\alpha - 2\pi v_0 \theta (2-n)] \times \frac{\sin \pi v_0 n \theta}{n \sin \pi v_0 \theta} \cdot \frac{\sin \pi(v - v_0) \theta}{\pi(v - v_0) \theta} \times \frac{\sin \pi(v + v_0) \theta}{\pi(v + v_0) \theta}$$

Dans la plupart des cas, on peut considérer le dernier terme comme négligeable, et il reste pour la densité spectrale :

$$(41) \quad \frac{A^2 \theta}{4} \left[\left| \frac{\sin \pi(v - v_0) \theta}{\pi(v - v_0) \theta} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi(v + v_0) \theta}{\pi(v + v_0) \theta} \right|^2 \right] = \hat{S}_{xx}(v, \theta)$$

APPLICATIONS

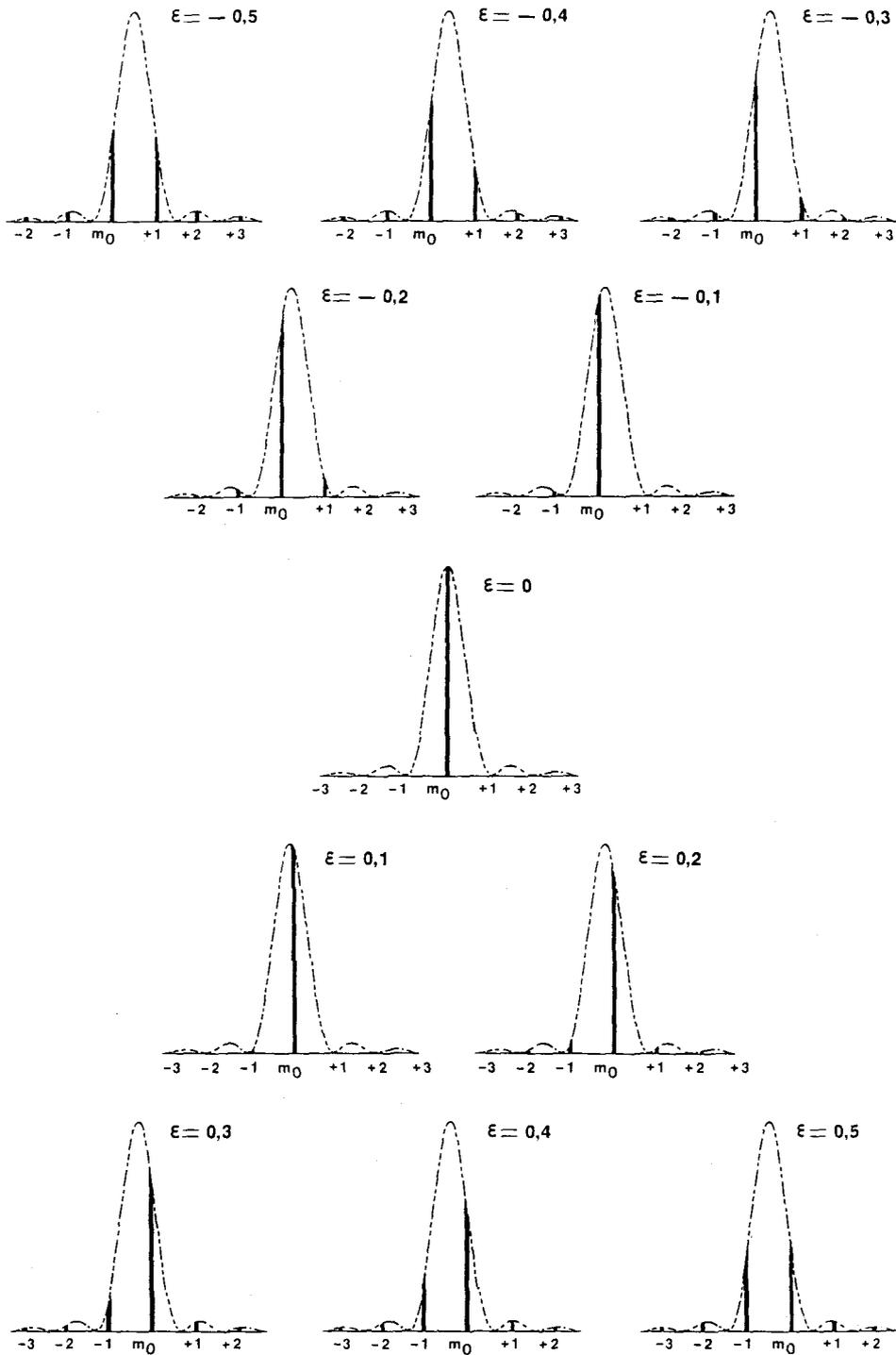


Fig. 5

Si l'on avait conduit les calculs à partir des signaux échantillonnés l'on eût obtenu, au lieu de (41) la relation :

$$(41 \text{ bis}) \quad S_{xx}(n, NT_e) = \frac{A^2}{4} NT_e \left\{ \left| \frac{\sin \pi (v - v_0) NT_e}{N \operatorname{tg} \pi (v - v_0) T_e} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi (v + v_0) NY_e}{N \operatorname{tg} \pi (v + v_0) T_e} \right|^2 \right\}$$

Nous avons vu au paragraphe 3.9 que (41) et (41 bis) étaient équivalents.

Si, de plus, la valeur de v_0 n'est pas trop près de l'origine des fréquences, c'est-à-dire si $v_0 \geq 10 F_e/N$, on peut écrire :

$$(42) \quad S_{xx}(v, NT_e) = \frac{A^2}{4} NT_e \left| \frac{\sin \pi (v - v_0) NT_e}{N \operatorname{tg} \pi (v - v_0) T_e} \right|$$

4.3. ÉCHANTILLONNAGE EN FRÉQUENCE DU SPECTRE

Pour savoir comment échantillonner la densité spectrale, il nous faut revenir à (41) qui peut s'écrire :

$$(43) \quad S_{xx}(v, \theta) = \frac{A^2}{2} \left(\frac{\sin \pi v \theta}{\pi v \theta} \right)^2 \theta \left[\frac{1}{2} \delta(v - v_0) + \frac{1}{2} \delta(v + v_0) \right]$$

et par TF :

$$(44) \quad \operatorname{TF} \{ S_{xx} \} = C_{xx}(\tau, \theta) = \frac{A^2}{2} \wedge(\tau) \cos 2 \pi v \tau_0$$

Cette relation montre que le support de la TF de la densité spectrale est 2θ .

Donc le théorème de Shannon nous dit que le pas d'échantillonnage en fréquence doit être $\Delta F \leq 1/2\theta$.

Mais comme $\theta = NT_e$, cela donne :

$$(45) \quad \begin{cases} \Delta F < \frac{1}{2NT_e} \\ \Delta F < \frac{F_e}{2N} \end{cases}$$

or par définition la TFD fournit

$$\Delta v = \frac{F_e}{N}$$

Donc, dans le cas de signaux presque périodiques, la TFD/FFT fournit toujours une densité spectrale sous-échantillonnée.

Revenons à la relation approchée (42) et faisons $\theta = NT_e$ et $v_0 = l(F_e/N) + \varepsilon(F_e/N)$, ε variant de $-0,5$ à $+0,5$.

(42) devient :

$$(46) \quad S_{xx}(v, NT_e) = \frac{A^2}{4} NT_e \left| \frac{\sin [\pi (v - l F_e/N - \varepsilon F_e/N) NT_e]}{N \operatorname{tg} [\pi (v - l F_e/N - \varepsilon F_e/N) T_e]} \right|^2$$

Du fait que la TFD est échantillonnée au pas F_e/N , on a : $v = m(F_e/N)$ et (45) devient :

$$(47) \quad S_{xx} \left(m \frac{F_e}{N}, NT_e \right) = \frac{A^2}{2} NT_e \left| \frac{\sin \{ \pi (m - l - \varepsilon) \}}{N \operatorname{tg} \{ (\pi/N) (m - l - \varepsilon) \}} \right|^2$$

Cette relation montre que le seul cas où l'on retrouve la « raie » à $l(F_e/N) = v_0$ est le cas où $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire où v_0 est un multiple de F_e/N , c'est-à-dire que la section de durée NT_e contient un nombre entier de périodes du signal à la fréquence v_0 .

Dans le cas où ε est différent de zéro $S_{xx}(m F_e/N, NT_e)$ existe pour toutes les valeurs de m , on n'a donc plus une « raie » unique à la fréquence $v = v_0$ puisque n ne peut prendre la valeur v_0 .

Ceci interdit de déterminer *et l'amplitude A et la fréquence v_0* du signal analysé, qui est, on le sait, une section d'un signal monochromatique.

La figure 5 montre ce que l'on obtient pour différentes valeurs de ε .

L'utilisation d'une fenêtre particulière (qui n'est plus à proprement parler une fenêtre puisque c'est un filtrage numérique de la transformée de Fourier discrète de chaque section du signal) permet de retrouver à mieux que le pour cent l'amplitude du signal, mais au prix d'une imprécision sur la fréquence (fenêtre Flat-Top Schlumberger; fenêtre P-301 Hewlett-Packard).

4.4. FENÊTRE FLAT-TOP

Si l'on cherche une bonne précision sur A, au dépend d'une imprécision sur v_0 , on peut, par filtrage de $S_{xx}(m F_e/N, NT_e)$ arriver à ce résultat.

Ce filtrage s'effectue par convolution des TFD de chaque section par un filtre numérique de réponse impulsionnelle courte. Dans le cas de l'analyseur de spectre Enertec 1200, les coefficients du filtre sont :

- +0,015458
- 0,017964
- +0,597986
- 0,934516
- 1
- 0,934516
- +0,597986
- 0,017964
- +0,015458

La « durée » de la réponse impulsionnelle est donc $9 F_e/N$, c'est-à-dire que les 9 premiers points du

APPLICATIONS

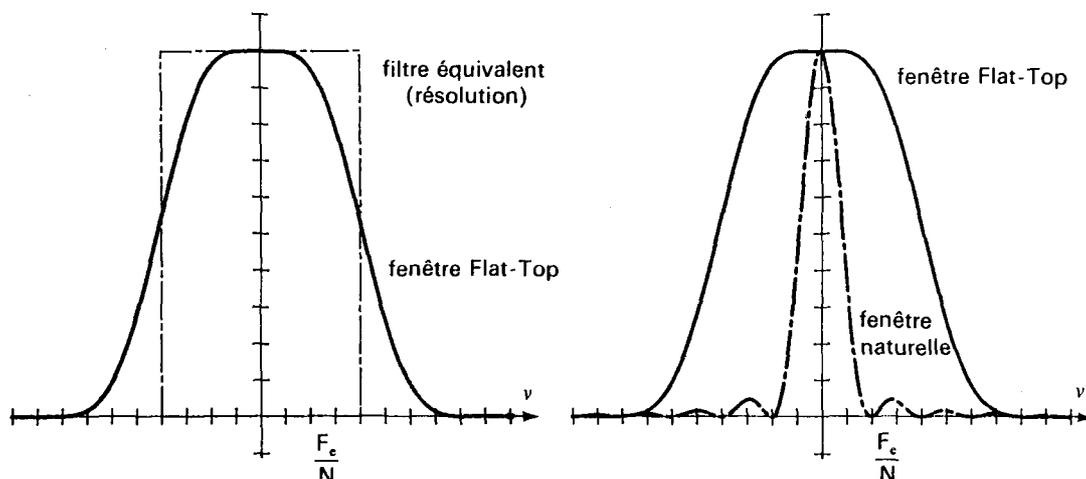


Fig. 6

spectre font partie du transitoire du filtre. Le résultat de cette fenêtre est montré sur la figure 6.

On voit que lorsque ε varie de $\pm 0,5$, l'amplitude reste constante à mieux que le pour cent, mais la fenêtre est beaucoup plus large, et l'on conçoit que l'on ne puisse pas définir la fréquence à mieux que : $\pm F_c/N$ (la largeur à mi-hauteur de cette fenêtre est $4 F_c/N$).

Tant que l'on n'exige pas une *bonne définition en fréquence* cette correction est acceptable mais aucune fenêtre de pondération ne peut permettre de localiser avec précision la fréquence ν_0 .

5. Analyse spectrale de signaux presque périodiques (selon la définition donnée en 4.1) par la méthode du corrélogramme

5.1. FONCTION DE CORRÉLATION

Soit le signal

$$x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t - \varphi)$$

la fonction d'autocorrélation sera :

$$(48) \quad C_{xx}(\tau, T) = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos(2\pi\nu_0 t - \varphi) \times \cos(2\pi\nu_0 t - 2\pi\nu_0 \tau - \varphi) dt$$

le calcul de (48) conduit à :

$$C_{xx}(\tau, T) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi\nu_0 \tau + \frac{A^2}{2} \frac{\sin \pi\nu_0 T}{\pi\nu_0 T} \cos(2\pi\nu_0 T - 2\varphi - \pi\nu_0 \tau)$$

on remarquera que le terme :

$$\frac{A^2}{2} \frac{\sin \pi\nu_0 T}{\pi\nu_0 T} \cos(2\pi\nu_0 T - 2\varphi - 2\pi\nu_0 \tau)$$

qui n'est pas pair par rapport à τ détruit la parité de $C_{xx}(\tau, T)$ on a donc le paradoxe d'une fonction d'autocorrélation qui n'est pas paire. Cela tient à ce que la fonction d'autocorrélation d'un signal périodique est définie par une intégration sur un nombre entier de périodes, auquel cas le produit $\nu_0 T$ est entier, et la fonction d'autocorrélation se réduit $(A^2/2) \cos 2\pi\nu_0 \tau$. Dans tous les cas, l'intégration porte sur un grand nombre de périodes, $\nu_0 T$ est grand, de sorte que le terme

$$\frac{A^2}{2} \frac{\sin \pi\nu_0 T}{\pi\nu_0 T} \cos(2\pi\nu_0 T - 2\varphi - 2\pi\nu_0 \tau)$$

est négligeable.

On aura donc :

$$(49) \quad C_{xx}(\tau, T) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi\nu_0 \tau$$

5.2. TRONCATURE DE LA FONCTION DE CORRÉLATION

Comme on l'a vu en 3.4, on ne calcule la fonction d'autocorrélation que pour des retards allant de $-\tau_m$ à $+\tau_m$.

On dispose donc de :

$$(50) \quad C_{xx}(\tau, \tau_m) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi\nu_0 \tau \cdot \prod_{-\tau_m, \tau_m}(\tau)$$

5.3. SPECTRE OBTENU

Par transformation de Fourier (64) donne

$$(51) \quad S_{xx}(\nu, \tau_m) = \frac{A^2}{2} \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

$$* 2\tau_m \frac{\sin 2\pi\nu\tau_m}{2\pi\nu\tau_m}$$

$$(52) \quad S_{xx}(v, \tau_m) = \frac{A^2}{4} \cdot 2 \tau_m \left[\frac{\sin 2 [\pi (v - v_0) \tau_m]}{2 \pi (v - v_0) \tau_m} + \frac{\sin 2 [\pi (v + v_0) \tau_m]}{2 \pi (v + v_0) \tau_m} \right]$$

5. 4. ÉCHANTILLONNAGE TEMPOREL

Si le signal (et la fonction de corrélation) sont échantillonnés à F_e , la fonction de corrélation obtenue sera, avec $\tau_m = N_m T_e$

$$(53) \quad \hat{C}_{xx}(\tau, N_m T_e) = \sum_{k=-N_m}^{N_m} \frac{A^2}{2} \cos 2 \pi v_0 k T_e \delta(\tau - k T_e)$$

qui aura pour TF :

$$(54) \quad \hat{S}_{xx}(v, N_m T_e) = T_e \sum_{k=-N_m}^{N_m} \frac{A^2}{2} \cos 2 \pi v_0 k T_e e^{-2 \pi j v k T_e}$$

D'après ce qui a été dit au paragraphe 3.9 la relation (54) s'écrit :

$$(55) \quad S_{xx}(v, N_m T_e) = \frac{A^2}{4} 2 N_m T_e \left[\frac{\sin \{ 2 \pi (v - v_0) N_m T_e \}}{N_m \operatorname{tg} \{ 2 \pi (v - v_0) T_e \}} + \frac{\sin \{ 2 \pi (v + v_0) N_m T_e \}}{N_m \operatorname{tg} \{ 2 \pi (v + v_0) T_e \}} \right]$$

qui est équivalent à (52).

5. 5. ÉCHANTILLONNAGE FRÉQUENTIEL DE LA DENSITÉ SPECTRALE

Du fait de l'échantillonnage en fréquence, au pas Δv , on aura

$$v = l \Delta v$$

Mais ici, Δv peut être choisi par l'expérimentateur à la valeur qu'il souhaite, qui peut d'ailleurs varier dans la gamme de fréquence choisie.

Du fait que l'on fait une TF et non une TFD, N_m peut être choisi quelconque (et non plus une puissance de 2).

On pourra donc déterminer très exactement le maximum de $\hat{S}(v, N_m T_e)$.

5. 6. INFLUENCE DES LOBES PARASITES

On a vu que (55) :

$$\hat{S}_{xx}(v, N_m T_e) = \frac{A^2}{4} 2 N_m T_e \left[\frac{\sin \{ 2 \pi (v - v_0) N_m T_e \}}{N \operatorname{tg} \{ 2 \pi (v - v_0) T_e \}} + \frac{\sin \{ 2 \pi (v + v_0) N_m T_e \}}{N \operatorname{tg} \{ 2 \pi (v + v_0) T_e \}} \right]$$

On peut montrer [19] que le maximum de la quantité entre crochets (qui est très proche de :

$$\frac{\sin \{ 2 \pi (v - v_0) N_m T_e \}}{2 \pi (v - v_0) N_m T_e} + \frac{\sin 2 \pi (v + v_0) N_m T_e}{2 \pi (v + v_0) N_m T_e}$$

ne se situe pas à la même fréquence que le maximum de

$$\frac{\sin 2 \pi (v - v_0) N_m T_e}{2 \pi (v - v_0) N_m T_e}$$

et, de plus le maximum de la quantité entre crochets dans (55) n'a pas la valeur 1 comme le maximum de :

$$\frac{\sin \{ 2 \pi (v - v_0) N_m T_e \}}{N_m \operatorname{tg} \{ 2 \pi (v - v_0) T_e \}}$$

L'erreur est d'autant plus grande que v_0 est proche de 0. Pour diminuer cette erreur, il faut diminuer l'importance du terme

$$\frac{\sin 2 [\pi (v + v_0) N_m T_e]}{2 \pi (v + v_0) N_m T_e}$$

Pour cela, il faut utiliser des fenêtres de pondération appliquées à la fonction de corrélation calculée.

Sans fenêtre, le premier lobe positif a une valeur relative de 0,128 soit -18 dB.

Fenêtre de Bartlett (ou triangulaire)

Elle consiste à multiplier $C_{xx}(\tau, N_m T_e)$ par

$$\wedge_{N_m}(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{N_m} & \text{pour } |k| \leq N_m \\ 0 & \text{pour } |k| > N_m \end{cases}$$

Le spectre obtenu est alors :

$$S(v, N_m T_e) = \frac{A^2}{4} 2 N_m T_e \left[\left| \frac{\sin \pi (v - v_0) N_m T_e}{\pi (v - v_0) N_m T_e} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi (v + v_0) N_m T_e}{\pi (v + v_0) N_m T_e} \right|^2 \right]$$

Remarquons que cette fenêtre a même effet sur le spectre que la fenêtre naturelle, ou sectionnement, qui intervient lors de l'analyse spectrale FFT.

Avec cette fenêtre le premier lobe est à 0,047 soit -26 dB.

Fenêtre de Parzen (ou Lavallée-Poussin)

Cette fenêtre résulte de la convolution de deux fenêtres triangulaires identiques.

APPLICATIONS

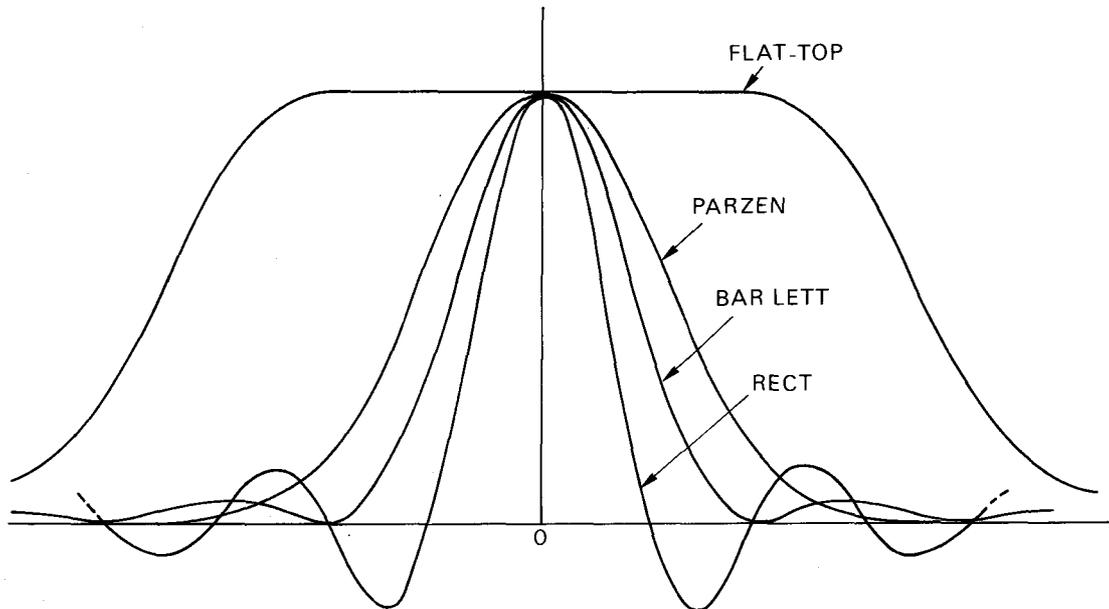


Fig. 7

Elle s'écrit :

$$1 - \left(6 \frac{|k|}{N_m}\right)^2 + 6 \left(\frac{|k|}{N_m}\right)^3 \quad \text{pour } |k| \leq \frac{N_m}{2}$$

$$2 \left(1 - \frac{|k|}{N_m}\right)^3, \quad \frac{N_m}{2} < |k| < N_m$$

0 ailleurs.

Avec une telle fenêtre, le spectre devient :

$$s(\nu, N_m T_e) = \frac{A^2}{4} 2 N_m T_e \left[\left| \frac{\sin(\pi/2)(\nu - \nu_0) N_m T_e}{(\pi/2)(\nu - \nu_0) N_m T_e} \right|^4 + \left| \frac{\sin(\pi/2)(\nu + \nu_0) N_m T_e}{(\pi/2)(\nu + \nu_0) N_m T_e} \right|^4 \right]$$

Le premier lobe est alors à 0,02209 soit -53 dB.

La figure 7 montre l'effet de ces différentes fenêtres sur le spectre d'un signal monochromatique.

A titre de comparaison, nous avons tracé sur la même figure, l'effet d'une fenêtre Flat-Top.

Remarquons aussi qu'il suffit de tronquer la fonction d'autocorrélation à un nombre entier de fois sa période (et cela peut se faire avec une précision suffisante) pour que à la fréquence ν_0 , on ait le maximum de la relation (55) qui se réduit à $(A^2/2) N_m T_e$.

On a donc avec exactitude l'amplitude et la fréquence.

6. Analyse spectrale d'un mélange signal plus bruit

Lorsque l'on a à traiter un mélange de signal périodique et de bruit, il apparaît que ce n'est pas la même

fenêtre qui doit être utilisée selon que l'on souhaite avoir les caractéristiques du bruit ou celles du signal périodique.

Il est donc plus judicieux, si l'on ne veut pas traiter deux fois l'ensemble du signal préalablement enregistré, d'utiliser la méthode de corrélation qui permet une fois la fonction de corrélation acquise, d'utiliser plusieurs fenêtres de pondération successivement.

7. Conclusion

La constitution d'un analyseur FFT est schématiquement la suivante :

- Filtres antirepléments.
- Convertisseurs analogiques-numériques.
- Calculateur de TDF/FFT.
- Micro-ordinateur pour gérer les résultats.

La constitution d'un analyseur à corrélation serait la même à cela près que le calculateur de TDF/FFT serait remplacé par un tri-corrélateur donnant $C_{xx}(\tau)$, $C_{yy}(\tau)$, et $C_{xy}(\tau)$.

Nous avons montré les avantages d'un analyseur à corrélation donnant une plus grande souplesse dans le choix de la période d'échantillonnage en fréquence (5.5), permettant de « bien » échantillonner en fréquence les signaux périodiques (5.6). Enfin nous pensons que l'utilisation d'un analyseur à corrélation permet, grâce à la possibilité d'observation de la fonction de corrélation, une gestion (détermination de la durée retenue de la fonction de corrélation, période en temps, apodisation...) du traitement adapté au signal traité. De plus les corrélateurs en temps réel permettent de traiter des signaux jusqu'à la centaine de

megahertz et même au-delà [16], alors que les analyseurs à FFT ne peuvent traiter des signaux au-delà de la centaine de kilohertz.

En terminant, indiquons que dans le cas très voisin de l'analyse interspectrale, la méthode par corrélation permet d'aligner en temps les deux signaux. L'absence d'un tel recalage dans la méthode par FFT conduit, lorsque l'écart de temps est supérieur à la durée d'une tranche élémentaire à un estimateur de l'interspectre très mauvais.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. CHABERT, J. MAX et D. VIDAL-MADJAR, Application à l'étude de l'ionosphère de l'optimisation du codage dans le calcul des fonctions de corrélation, *GRETSI*, Nice, 16-21 juin 1975.
- [2] P. D. WELCH, The use of FFT for the estimation of power spectra, *IEEE Trans. AU*, 15 juin 1967.
- [3] D. FEST, Caractérisation des oscillateurs de très haute stabilité par une méthode de corrélation, *Thèse de Docteur-Ingénieur*, 16-03-1982, École nationale supérieure de mécanique et de microtechnique de Besançon.
- [4] J. MASSON, Mesures de débit par corrélation dans l'industrie nucléaire, *Thèse de Docteur-Ingénieur*, 23-9-1982, Institut polytechnique de Grenoble.
- [5] D. PIERREJEAN, Étude et réalisation d'un corrélateur pour la mesure de la stabilité et de la pureté spectrale d'oscillateurs ultrastables, *Thèse de doctat*, Université de Franche-Comté, Besançon, 29-11-1985.
- [6] R. M. BRACEWELL, *The Fourier transform and its applications*, 2^e éd. McGraw-Hill, 1983.
- [7] J. MAX, *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, 4^e éd., 1, Masson, 1985.
- [8] A. HELLION, B. ESCUDIE, J. MAX, Étude de la précision des procédés expérimentaux actuels de calcul des densités spectrales énergétiques et des fonctions de corrélation, *Annales des télécommunications*, 26, juillet-août 1971, 78.
- [9] H. CLERGEOT, Choix entre les différentes méthodes quadratiques d'estimation du spectre de puissance, *Annales des télécommunications*, 39, n° 3-4, 1984.
- [10] Y. LECOURTIER et B. PICINBONO, Interprétation des méthodes non paramétriques d'analyse spectrale de signaux aléatoires, *Annales des télécommunications*, 233, n° 9-10, 1978.
- [11] M. BELLANGER, *Le traitement numérique de signal*, 2^e éd., Masson, 1984.
- [12] G. BONNET, *C.R. Acad. Sc.*, 255, 1962, 825-827 et 1064-1066.
- [13] G. BONNET, Sur les corrélateurs utilisant la quantification des signaux, *École d'été OTAN-Marine nationale*, Grenoble 14-26 septembre 1964.
- [14] W. KOFMAN et S. CHAUDOURNE, Étude d'un corrélateur utilisant deux sources de bruits auxiliaires, *Onde électrique*, 53, n° 6, juin 1973.
- [15] *Premier symposium sur le calcul stochastique*, Toulouse 29-11/1-12 1978.
- [16] B. ALEXANDRE, Ph. TRYSTRAM et J. MAX, CORALI corrélateur rapide linéaire et impulsif, *Séminaire GUTS-SEE-URSI*, Grenoble, 8-9 avril 1974.
- [17] V. OPPENHEIM, W. RONALD et SCHAFFER, *Digital signal processing*, 1975, Prentice-Hall.
- [18] M. DIOT, Rapport de stage effectué au LETI dans le cadre de la MST Télécommunications, Université de Toulouse, 1983.
- [19] R. BIGRET, S. BARRIÈRE et Y. VINCENT, Calcul sur ordinateur de la densité spectrale de puissance unilatérale de $A \cos 2\pi f_0 t$ et étude de son maximum, *Note Alstom-Atlantique*, 54 RDME/0967/T 29-4-81.
- [20] M. KUNT, *Le traitement numérique des signaux*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1980.
- [21] F. J. HARRIS, On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier Transform, *PIEEE*, 66, n° 1, Jan. 1978.