

La méthode de Prony en analyse de vibrations

The Prony's method for vibration analysis



D. GARREAU

Électricité de France, Direction des Études et Recherches, 6, quai Watier, 78400 Chatou.

Dominique Garreau, ancien élève de l'ENSEEIH de Toulouse, spécialiste de mécanique des fluides, a consacré sa thèse de Docteur-Ingénieur à l'étude des vibrations dans les turbines à vapeur. Ingénieur depuis 1985 à la Direction des Études et Recherches d'EDF, il travaille sur les méthodes de détection et d'analyse non stationnaire des signaux, en vue d'applications à la Surveillance, au Diagnostic et à la Maintenance préventive des composants de centrale électrique.



B. GEORGEL

Électricité de France, Direction des Études et Recherches, 6, quai Watier, 78400 Chatou.

Bruno Georgel, ancien élève de l'École Supérieure de Physique et de Chimie de Paris, diplômé d'études approfondies en Electronique et Instrumentation, travaille depuis de nombreuses années dans le *Traitement des Signaux*, en particulier pour les applications aux mesures, aux essais et aux contrôles de matériaux. Il est Responsable du Groupe d'Étude « Méthodes Générales », à la Direction des Études et Recherches d'EDF et auteur de nombreuses publications scientifiques. Il enseigne dans le cadre du stage « *Techniques Modernes de Traitement du Signal et Applications Industrielles* » à l'École Centrale de Paris. Bruno Georgel est aussi Président du Club « *Traitement du Signal* » de la Société des Electriciens et Électroniciens et membre du Comité de Lecture de la revue TS.

RÉSUMÉ

Parmi les méthodes de *Traitement du Signal* fondées sur une modélisation, la méthode de Prony est particulièrement adaptée aux signaux de vibration. Nous en présentons une application directe à l'analyse d'un signal transitoire d'oscillation de ligne électrique. Le but de cette communication est de mettre l'accent sur l'application industrielle des méthodes modernes d'analyse spectrale.

MOTS CLÉS

Prony, signal, modèle, vibration, spectre, mode, analyse spectrale paramétrique.

SUMMARY

Among the different digital signal processing techniques based on modelization, the Prony's method is particularly suited to vibration analysis. We describe a straightforward application of this method to the analysis of the damped oscillations of an electrical transmission line. We emphasize the use of a modern spectral analysis technique in the industrial field.

KEY WORDS

Prony, signal, model, vibration, spectrum, mode, parametric spectrum analysis.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

1. Choix du modèle d'un signal de vibration

2. Rappel de la méthode

3. Application à l'oscillation d'une ligne électrique

Conclusion

Bibliographie

Abréviations

DSE, Densité Spectrale d'Énergie.
 TFR, Transformée de Fourier Rapide.
 $\hat{\cdot}$, estimée d'une grandeur.

Introduction

Dans le but d'améliorer le traitement des signaux provenant d'essais en centrale électrique, nous avons mis en œuvre certains techniques nouvelles d'analyse [1].

Il s'agit des méthodes par modélisation qui, bien qu'anciennes, ont connu un essor important surtout depuis 15 ans. A cela deux raisons :

- 1° l'évolution des moyens de calcul;
- 2° les limites de l'analyse par le classique périodogramme basé sur la transformée de Fourier discrète.

Ces techniques d'analyse ont, bien sûr, considérablement évolué; elles constituent aujourd'hui le sujet de nombreux articles dans la littérature spécialisée. Elles sont encore peu utilisées dans le traitement des signaux industriels. Néanmoins, elles se répandent par l'intermédiaire de l'Analyse Modale Expérimentale [2, 4].

Dans un premier temps, nous justifions le choix de la méthode de Prony pour l'étude des signaux de vibration. Cette méthode a fait l'objet par ailleurs de plusieurs applications [3, 5]. Après l'exposé de l'algorithme proprement dit, nous présentons des résultats obtenus sur un signal transitoire dû aux vibrations d'une ligne électrique aérienne. L'accent est mis sur les difficultés rencontrées et sur les solutions qui ont été apportées.

1. Choix du modèle d'un signal de vibration

"Modéliser un signal $x(t)$ " consiste à chercher un système S et une entrée $u(t)$ (fig. 1) tels que l'erreur entre $x(t)$ et $\hat{x}(t)$ soit la plus faible possible.



Fig. 1

Le système supposé linéaire, invariant dans le temps, est constitué, dans la méthode de Prony, d'une somme de sous-systèmes du second ordre non couplés. Ceci traduit bien la présence dans les spectres de vibration d'un nombre fini de pics importants correspondant aux fréquences propres de la structure.

Le choix du type d'entrée est délicat car on ne dispose pas des signaux réels; il est rare en effet de connaître précisément les sources de vibration d'une structure. On opte ici pour une entrée unique sous la forme d'une impulsion.

La méthode de Prony permet de décomposer, dans le domaine temporel, le signal $x(t)$ en une somme de « modes » :

$$(1) \quad \left[\hat{x}(t) = \sum_{m=1}^{n \text{ mod}} A_m \cos(2\pi f_m t + \theta_m) e^{\sigma_m t} \right]$$

avec : f_m : m -ième fréquence propre; A_m : m -ième amplitude; θ_m : m -ième phase; σ_m : m -ième amortissement ($\sigma_m < 0$).

Remarquons qu'ici le terme « mode » a un sens plus restreint qu'en analyse modale, puisqu'il n'inclut pas la notion de déformée spatiale. Il s'agit d'une analyse en un point d'une structure dans laquelle on cherche les caractéristiques modales ($f_m, A_m, \theta_m, \sigma_m$) sans utiliser l'information supplémentaire qu'apporteraient les autres points.

2. Rappel de la méthode

Sous forme échantillonnée et complexe, notre modèle s'écrit [6] :

$$(2) \quad \left[\hat{x}_n = \sum_{m=1}^p b_m W_m^n, \quad n=0, \dots, N-1 \right]$$

— signal modélisé à l'ordre p
 $b_m \in \mathbb{C}; \quad b_m = A_m \exp(j\theta_m)$
 $W_m \in \mathbb{C}; \quad W_m = \exp(\sigma_m + j2\pi f_m) \cdot \Delta t.$

Toute la difficulté consiste à trouver les coefficients $A_m, \theta_m, \sigma_m, f_m, p$ qui rendent l'erreur minimale :

$$\epsilon = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n - \hat{x}_n|^2$$

Ce problème est difficile, car non linéaire. Pour le résoudre, on peut utiliser des méthodes itératives du calcul numérique classique.

APPLICATIONS

Mais une démarche différente est possible. Elle consiste à diviser la difficulté en trois étapes : deux résolutions de systèmes linéaires et une recherche des racines d'un polynôme (où est reportée la non-linéarité du problème).

On remarque que \hat{x}_n donné par (2) est solution de :

$$(3) \quad \left[\hat{x}_n = - \sum_{m=1}^p a_m \hat{x}_{n-m} \right]$$

avec :

$$(4) \quad P(Z) = \sum_{i=0}^p a_i Z^{p-i} = \prod_{k=1}^p (Z - W_k)$$

où les W_k , pôles de P ne sont autres que ceux définis dans la formule (2).

En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^p a_m \hat{x}_{n-m} &= \sum_{m=0}^p a_m \sum_{l=1}^p b_l W_l^{n-m} \\ &= \sum_{l=1}^p b_l \sum_{m=0}^p a_m W_l^{n-m} \\ &= \sum_{l=1}^p b_l W_l^{n-p} \underbrace{\sum_{m=0}^p a_m W_l^{p-m}}_{P(W_l)} \end{aligned}$$

La première étape consiste donc à résoudre (3), pour n variant de 0 à $n-1$ ($N \gg p$).

La méthode utilise le critère des moindres carrés.

Le système matriciel s'écrit :

$$(5) \quad \mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}$$

avec : $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_p)^T$, vecteur inconnu ; \mathbf{C} : matrice de covariance estimée de terme général :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{N-p-1} \hat{x}_{i+k} \hat{x}_{j+k}$$

\mathbf{C} : première ligne de cette matrice.

Formellement la résolution de ce système revient au calcul des paramètres d'un modèle auto-régressif.

Les W_m de l'équation (2) sont déterminés au cours de la seconde étape, en recherchant les racines du polynôme $P(Z)$ (4).

Il reste enfin à déterminer les coefficients b_m . C'est l'objet de la troisième étape au cours de laquelle on inverse le système linéaire suivant (matrice de Vander Monde) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ W_1 & W_2 & \dots & W_p \\ W_1^2 & W_2^2 & \dots & W_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_1^{N-1} & W_2^{N-1} & \dots & W_p^{N-1} \end{bmatrix}}_{(a)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}}_{(b)} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}}_{(c)}$$

(a) p modes.

(b) p coefficients inconnus.

(c) N échantillons du signal.

Lorsque les W_m et les b_m sont connus, le signal $x(t)$ est modélisé par :

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=1}^p A_m \exp(\sigma_m t) \exp(j(2\pi f_m t + \theta_m))$$

Pour un signal (x_n) réel, les termes (b_m, W_m) sont conjugués deux à deux et traduisent la présence de $p/2$ modes propres.

3. Application à l'oscillation d'une ligne électrique

Le signal considéré provient des oscillations d'une ligne électrique aérienne engendrées par un court-circuit. C'est un signal transitoire d'une durée de 4 secondes (fig. 2). Nous avons visualisé les différentes étapes du traitement à l'aide d'un logiciel spécialisé de traitement du signal (PRINTS-EDF).

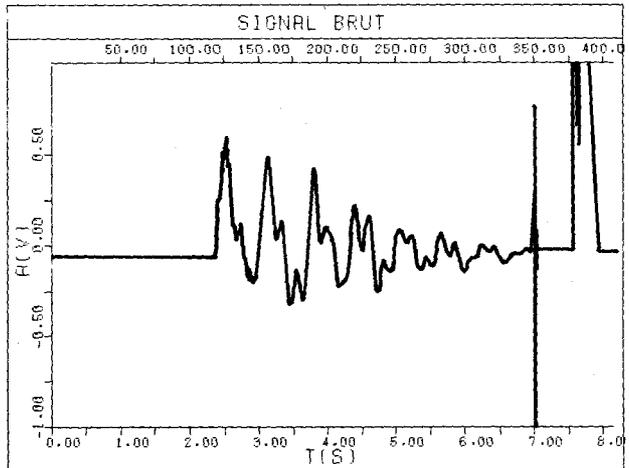


Fig. 2

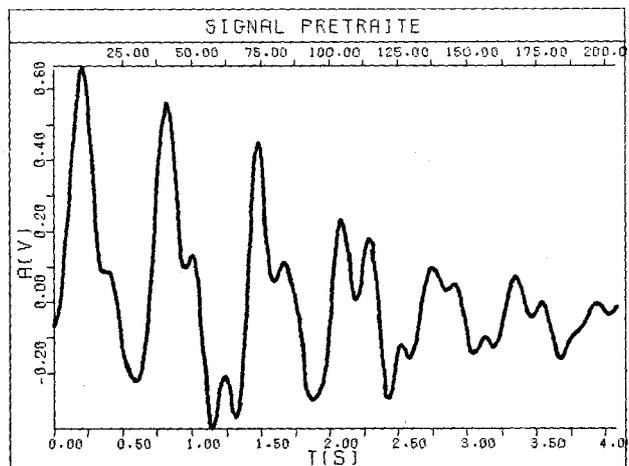


Fig. 3

LA MÉTHODE DE PRONY EN ANALYSE DE VIBRATIONS

ESTIMATION DES PRINCIPAUX MODES :

| numero | amplitude | frequence | amortis.t | phase |
|--------|-----------|-----------|-----------|--------|
| 1 | .28 | .33 | 1.88 | 242.77 |
| 2 | .49 | 1.53 | .43 | 235.43 |
| 3 | .35 | 3.14 | 1.25 | 171.11 |
| 4 | .16 | 3.90 | 1.67 | 26.30 |
| 5 | .11 | 4.78 | .37 | 18.80 |
| 6 | .04 | 6.67 | 1.29 | 56.22 |

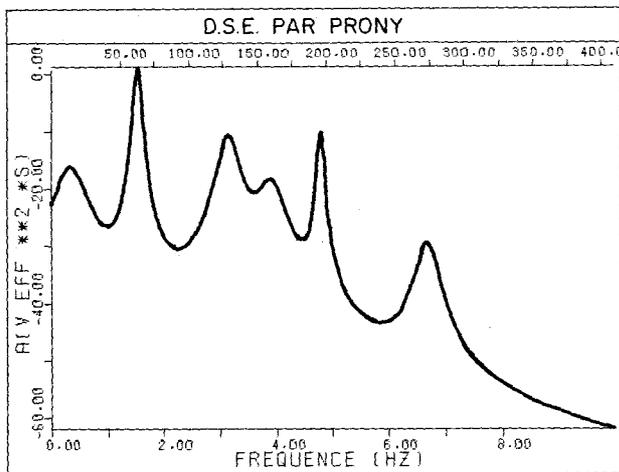


Fig. 4

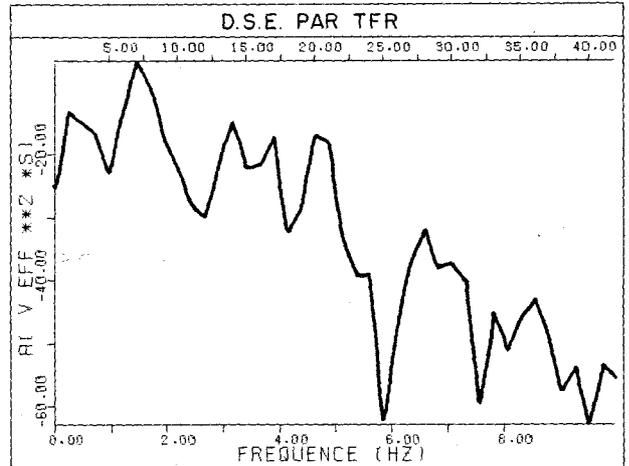


Fig. 5

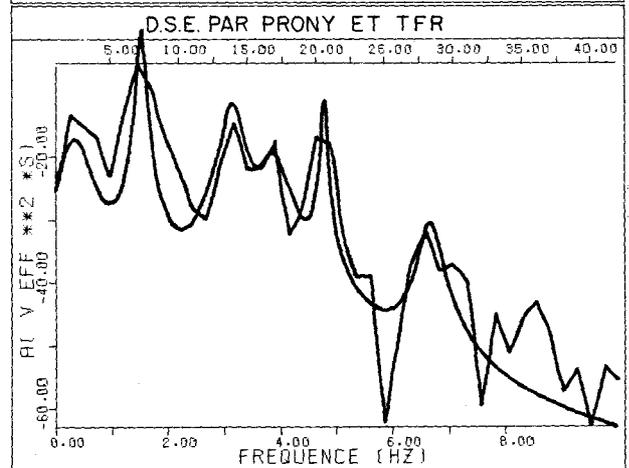


Fig. 6

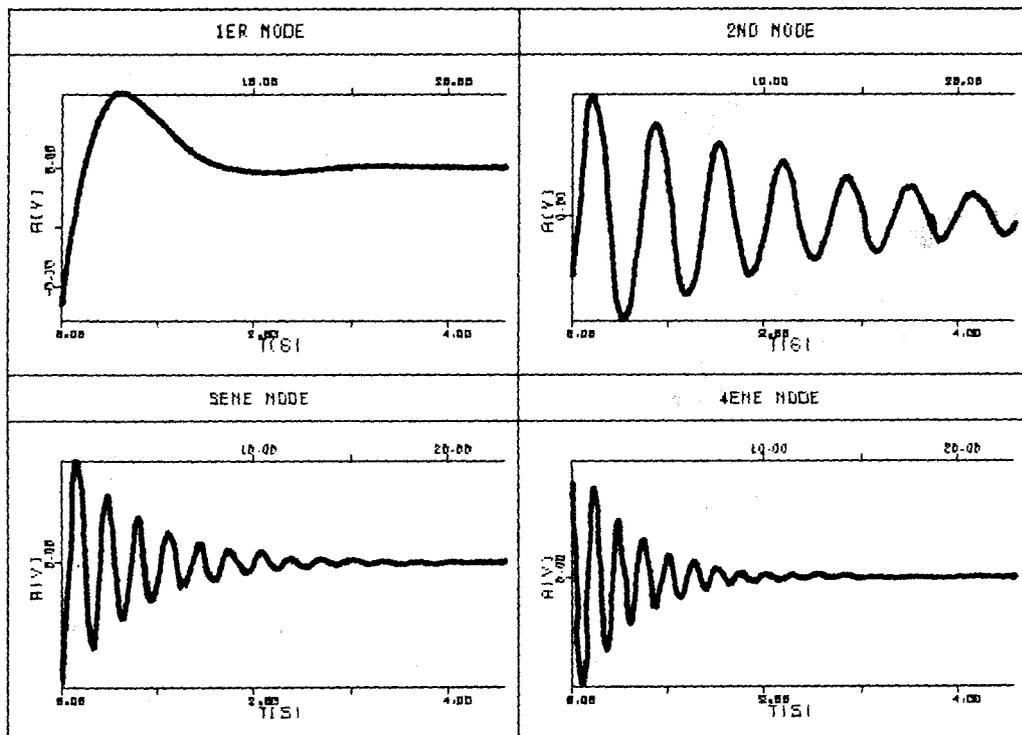


Fig. 7

APPLICATIONS

La première opération consiste à effectuer un pré-traitement (cadrage, filtrage). Le signal obtenu est représenté sur la figure 3.

La méthode de Prony permet d'obtenir une estimation de la DSE (fig. 4) que l'on peut comparer (fig. 6) à celle par TFR (fig. 5). Si on trouve un contenu spectral identique dans les deux cas, on note toutefois une médiocre résolution dans le premier cas (TFR) (au sens classique du terme : $\Delta f = 1/T$).

La modélisation fournit surtout les différents modes qui constituent le signal (fig. 7) et dont la connaissance permet à l'expérimentateur de disposer d'un nombre réduit de paramètres, directement interprétables en terme de dissipation d'énergie dans la structure testée et qu'il peut corrélérer avec des configurations d'essais (dimensionnement des espaceurs entre les conducteurs, délai avant ré-enclenchement sur défaut).

Une synthèse à partir des modes est possible [formule (1)], le signal correspondant est représenté sur la figure 8; cette opération montre que l'on a extrait l'information utile du signal de départ. Une comparaison entre le modèle et le signal de départ est présentée (fig. 9). Elle semble satisfaisante, excepté pour la

fin du signal; cependant le tracé de l'erreur instantanée de modélisation (fig. 10, les droites représentent l'écart-type $\sigma = 0,1$) montre quelques valeurs élevées. Pour les réduire, nous avons appliqué de nouveau la méthode de Prony, mais cette fois sur l'erreur de modélisation. L'erreur obtenue après ce second passage est plus faible ($\sigma = 0,08$), elle correspond à une diminution de 20% de l'écart-type qui traduit une meilleure modélisation du début du signal.

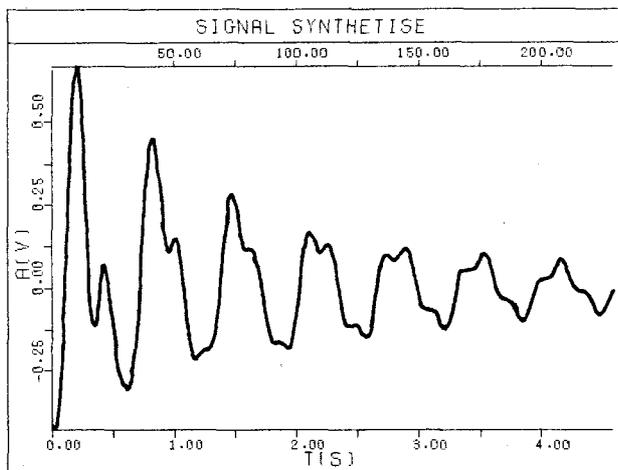


Fig. 8

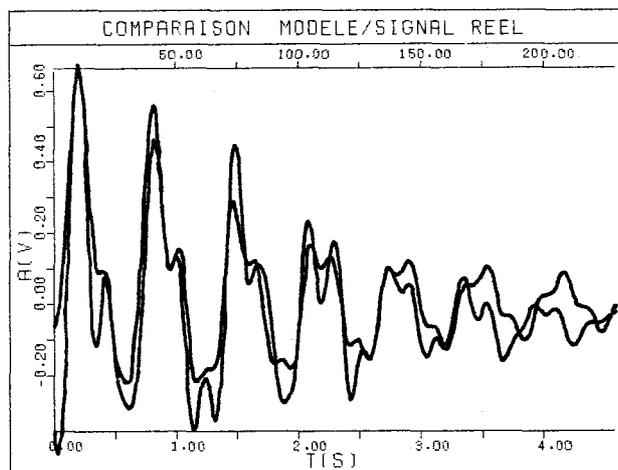


Fig. 9

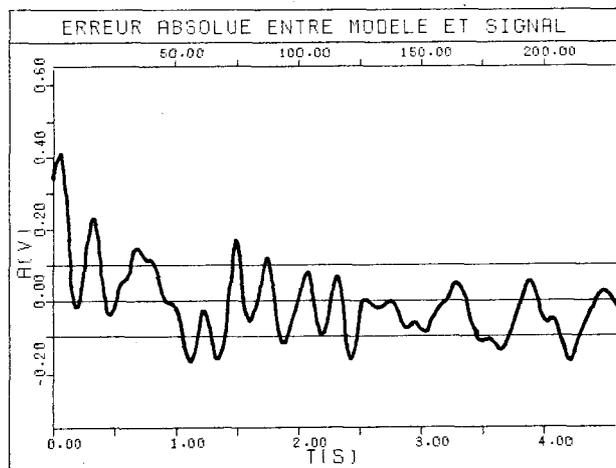


Fig. 10

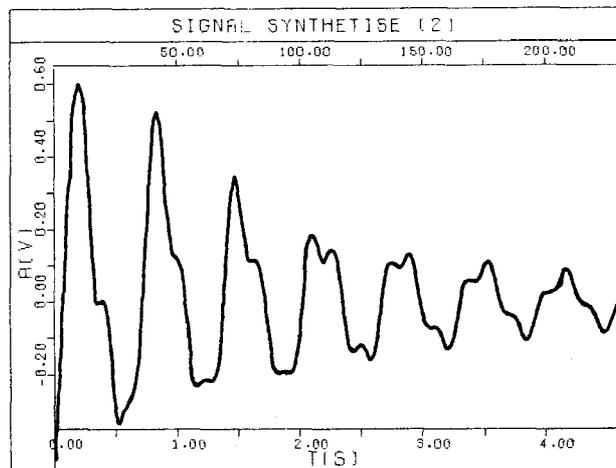


Fig. 11

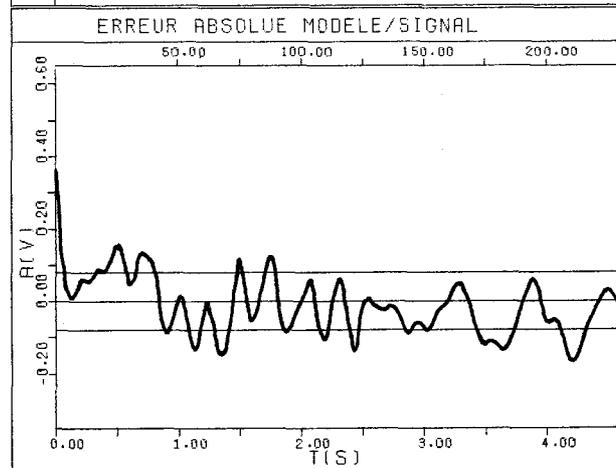


Fig. 12

La valeur relativement faible de l'erreur instantanée de modélisation (10% puis 8%) montre que les hypothèses de départ (le signal observé se compose d'une somme finie de sinus amortis) sont justifiées. De même, le choix de l'ordre (6) semble satisfaisant. Néanmoins, la phase du troisième mode est sans doute mal estimée; on assiste également à une seconde excitation à 3 secondes du début.

Les problèmes rencontrés lors de la mise en œuvre de la méthode sont les suivants :

1° choix de l'ordre (p) difficile;

2° instabilités numériques lors de la recherche des racines du polynôme $P(Z)$ (apparition de modes non réels).

Nous surévaluons l'ordre p systématiquement afin de nous affranchir des effets du bruit (voir [1, 4]).

En ce qui concerne les modes fictifs, ils sont éliminés grâce à des critères physiques (l'amplitude, l'amortissement sont-ils vraisemblables... ?).

Conclusion

La méthode de Prony, qui considère un signal déterministe comme une somme pondérée d'exponentielles, est un outil puissant pour l'étude des signaux de vibration transitoires.

Une extension à l'étude des vibrations entretenues (réponse à un train d'impulsions) serait intéressante, notamment après une analyse synchrone qui éliminerait les composantes périodiques.

Manuscrit reçu le 29 janvier 1986.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. GEORGEL et D. GARREAU, *Méthodes modernes d'analyse spectrale numérique (modèles paramétriques)*, rapport interne EDF/DER HP/126/84-03, 1984.
- [2] J. M. LEURIDAN, Some direct parameter model identification methods applicable for multiple input modal analysis, *Ph. D.*, University of Cincinnati, 1984.
- [3] J. D. MARKEL et A. H. GRAY Jr, *Linear prediction of speech*, Springer Verlag, 1976.
- [4] P. DAVIES et J. K. HAMMOND, A comparison of Fourier and Parametric Methods for Structural System Identification, *Transactions of the ASME*, 106, January 1984.
- [5] R. GRISEL, D. DE BRUCQ et R. LECORDIER, Élimination de raies spectrales par la méthode de Prony étendue, *Traitement du Signal*, 2, n° 1, 1985.
- [6] S. M. KAY et S. L. MARPLE, Spectrum Analysis. A Modern Perspective, *Proceedings of the IEEE*, 69, n° 11, nov. 1981.