DISCREET OF CONTINU

REDE TER GELEGENHEID VAN DE 73e HERDENKING
VAN DE STICHTING DER VRIJE UNIVERSITEIT
OP 20 OCTOBER 1953 UITGESPROKEN
DOOR DE RECTOR-MAGNIFICUS

Dr. J. F. KOKSMA

DRUKKERIJ KLEIJWEGT — LOOSDUINEN

Voor de drieënzeventigste maal ziet door Gods gunst de Vrije Universiteit een jaar aan haar leven toegevoegd. In de stroom van de tijd wijzen drieënzeventig dies hoogtij aan.

Onze gedachten gaan terug naar de stichters onzer hogeschool en naar die allen, die haar hun beste krachten wijdden. Ook verwijlt onze herinnering bij hen uit haar kring, die onder de bezetter voor beginsel en vaderland hun leven offerden.

De geschiedenis der Vrije Universiteit getuigt van zorg en zegen. Stof te over voor een herdenking in het perspectief van uitbreiding en bouw.

Evenwel, een herdenking in dien zin is niet doel van deze zitting. Zij ware ook in het licht van het vijftiende lustrum, dat wij zo de Here wil in 1955 zullen vieren, als vervroegd te beschouwen.

De traditie vraagt van den Rector een toespraak zijn vakgebied betreffend, zij het, dat het uitzonderlijk moment hem de vrijheid verleent, buiten de grenzen van zijn specialisme te treden.

Mijn aanhef getuigde impliciet van onze diepmenselijke behoefte in de continue stroom van ons beleven discrete momenten te fixeren en als het ware op zichzelf te koesteren. Laat ik daaraan het thema van mijn voordracht ontlenen, zij het, dat ik sprekend over: *Discreet of Continu* mij niet in de eerste plaats zal bezighouden met de tijd, de tijd, waarvan Augustinus uitsprak: ‚Wanneer Ge me vraagt, wat de tijd is, weet ik het niet, wanneer Ge het me niet vraagt, weet ik het" [1]).

Wie wel eens neerkeek in het klare water van een bergmeer, ontworstelde zich niet aan de indruk, met een samenhangende continue stof te doen te hebben, zichzelf in alle delen gelijk. Natura non facit saltus, de natuur maakt geen sprongen. Een klein kind, in gedachten, hoorde ik eens zeggen: „Maar ik moet toch zo klein zijn geweest als een lucifer en nog kleiner". Natura non facit saltus: wat groeit kan geen stadium overslaan. Het kind had een fundamenteel principe van de leer der continue functies ontdekt.

Maar leerde niet reeds Democritus de atomen, die ondeelbare laatste bouwstenen der tastbare wereld?

En Democritus heeft school gemaakt, met name in onze tijd. Weliswaar zijn zijn atomen niet meer ondeelbaar, maar daarvoor weet de hedendaagse physica er dan ook zo veel van af, dat een vooraanstaand onderzoeker de cri-de-coeur slaakte: „I am a frightened man" [2]).

De natuur maakt sprongen. „Warmtestof" ontpopte zich als arbeidsvermogen van dansende moleculen, electriciteit als spel van electronen. De aether, die andere getuige van 's mensen hang naar het homogene, verdween; het heelal loste zich op in een wolk van partikeltjes en als wij wijlen Eddington moeten geloven, had hij ze alle geteld [3]).

Maar de energie? De physica leerde ook hier de onhoudbaarheid van het „Natura non facit saltus" en Planck quantiseerde de energie.

Er blijven dan om onze continuïteitshang op bot te vieren de lege ruimte en de blote tijd, wilt ge, in hun wetenschappelijke samenhang van vierdimensionale ruimte-tijd-wereld. Maar heeft niet reeds van Dantzig het koene voorstel gedaan, ook dat continuum op te lossen in atomen: de flitsen? [4]).

Dit alles beperkt zich tot chemie en physica. Noemen we de biologie, dan springen ons mutatietheorie en genen voor ogen. Betreden we het terrein der speculatie, dan ontmoeten we Leibniz' monaden of ook de Boeddhistische leer, volgens welke de menselijke geest, in zijn laatste elementen, de acties, van tijdsatoom tot tijdsatoom de microscopische, maar peilloos diepe kloof van een volstrekt Niets overbrugt.

Zo is er een spanning tussen continuïteitsbesef en atomistiek, die reeds de Griekse wijsbegeerte beheerste, getuige de botsing der wereldbeelden van Parmenides en Democritus, getuige Zeno's paradoxen van Achilles' wedloop met de schildpad en van de vliegende pijl. Een spanning, die wij mensen uit de eeuw van film, televisie en ander gezichtsbedrog niet zullen overschatten, maar die zich niettemin, met name in de exacte wetenschappen, duidelijk manifesteert.

Men denke aan het naast elkaar bestaan van undulatietheorie en partikeltheorie in de natuurkunde, en lette op de wiskunde!

De negentiende-eeuwse mathematicus Hankel heeft de opmerking gemaakt, dat hoewel wijsbegeerte en wiskunde beide met fundamentele problemen te maken hebben, de wiskunde in de loop der eeuwen concrete resultaten bereikte, terwijl de wijsbegeerte weinig verder zou zijn gekomen, wat Hankel verklaart uit de strategie der mathesis, die in stee van blindelings op de te nemen vesting af te stormen, deze door een omtrekkende beweging laat liggen, om ze daarna van de bereikte stellingen uit te beschieten [5]).

Een niet onaantrekkelijk beeld, met name ook ten aanzien van ons dilemma: „discreet of continu?" De wiskunde toch heeft, hoewel verre van daar het laatste woord te hebben gesproken, de problemen op verrassende wijze geconcretiseerd. Het is de taak, die ik mij voor hedenmiddag heb gesteld, U in vogelvlucht daarvan een indruk te geven.

Het domein van het discrete is de rekenkunde, de leer van het tellen, van de *intensieve* grootheden, zoals een ouderwetse term luidt.

Als beeld van het continuum beschouwen wij de streep door een tekenstift getrokken, of wilt ge, de lijn uit de geometrie, de leer van het meten, van de *extensieve* grootheden.

Discreet of continu?

Ik sla U voor, na een algemene oriëntering, zonder de overgangen door al te discrete slagbomen te markeren, achtereenvolgens een blik te slaan :

ten eerste op pogingen het ene tot het andere te herleiden, met name, het continuum te vatten met de leer van het discrete;

ten tweede, op de conceptie van Cantor en zijn school, waarvan kan worden gezegd, dat zij beide noties, met andere, onder één begrip tracht te vangen: de verzameling;

ten derde, op het fascinerende samenspel, dat beide tegenpolen geven te zien in de hedendaagse wiskunde, zowel als in de wisselwerking tussen haar en gebieden waar zij toepassing vindt.

De arithmetica. Het ons eigen vermogen om in het complex onzer gewaarwordingen, dingen van onze zintuigelijke of van onze innerlijke ervaring tot op zekere hoogte van de rest te onderscheiden, te benoemen, te herkennen en op zich zelf te beschouwen, voert ons tot het besef van meer of minder, tot het begrip aantal, zowel als tot het begrip rangorde. Daarbij helpen ons de van ouds zogenaamde natuurlijke getallen: 1, 2, 3,. . . ., een rij van klanken, zo we spreken, een rij van figuurtjes, zo we schrijven, die in vaste volgorde in ons geheugen zijn geprent. Door achtereenvolgende benoeming met deze klanken, het tellen, onderscheiden wij de objecten onzer keuze, daarmee, met de onder het tellen voortschrijdende tijd, een rangorde dier objecten tot stand brengend en, overeenkomstig de het laatst uitgesproken klank, tevens hun aantal vaststellend.

Bij dit tellen ervaren wij, dat het aantal der getelde dingen onafhankelijk is van de door ons te weeg gebrachte rangorde. Bij elkaar voegen van getelde hoeveelheden voert ons tot het begrip som en optellen van gelijke aantallen tot het tijdbesparende begrip product. Door de bittere exercitie met de tafels van vermenigvuldiging leren we in onze prille jeugd producten mechanisch bepalen. Het gevolg van deze training is, dat de meesten onzer zich op rijpere leeftijd slechts met moeite realiseren in hoeverre hun rekenkunst op inzicht, dan wel op ervaring, gewoonte of goedgelovigheid berust.

De mathematicus neemt met een dergelijke chaotische gesteldheid geen genoegen. Hij zoekt orde. Daarin moge voor gewoonte een verantwoorde plaats zijn, in geen geval voor goedgelovigheid. Hij zegt met Dedekind: „Was in der Wissenschaft beweisbar ist, soll nicht ohne Beweis geglaubt werden” [6]). Wat hij zich bij die woorden voorstelt, is een tweede, maar in geen geval denkt hij daarbij aan de empirie in de zin der physica: die moge heuristische betekenis hebben, bewijskracht heeft ze voor hem niet. Geen wonder: twee maal twee bomen zijn meestal vier bomen, maar zijn twee maal twee druppels meestal vier druppels?

Maar niemand kan met niets beginnen en ook de wiskundige zal een of ander min of meer helder beschrijfbaar complex van vooronderstellingen onbewezen moeten aanvaarden.

Wanneer hij er naar streeft, zijn praemissen te vangen in discrete axiomata, doet hij het eenvoudigst, de natuurlijke getallen te introduceren als op zich zelf inhoudloze symbolen, waarmede op voorgeschreven wijze moet worden gemanipuleerd. Reeds de tafels van vermenigvuldiging zijn een aanwijzing, dat een formele gang van zaken mogelijk is. Als hij consequent nominalist wil blijven, heeft hij echter geen antwoord op de vraag naar de betrouwbaarheid van de aldus opgebouwde rekenkunde, evenmin als op de vraag van de practicus naar de waarde harer toepassingen. De axiomaticus, die in deze vragen klaarheid wenst, zal zich moeten verdiepen in meditaties óver zijn wiskunde, daarbij dan metawiskunde bedrijvende.

De wiskundige, die, als de intuïtionisten, zijn geheel van vooronderstellingen meer „extensief" ziet als een op grond van intuïtie evident complex van zekerheden, zonder te pretenderen, dit adaequaat in woorden te kunnen beschrijven, moge de geschetste moeilijkheden goeddeels ontgaan, voor hem blijft de vraag naar zin en achtergrond dier intuïtie.

In alle gevallen rijst zo uiteindelijk de vraag, wat de natuurlijke getallen zijn en waar ze vandaan komen.

Er bestaat een onder diverse belichtingen geciteerde uitspraak van Kronecker over de wiskunde: „Die natürlichen Zahlen schuf der liebe Gott. Alles andere ist Menschenwerk". Of Kronecker dit letterlijk bedoelde, weet ik niet, wel, dat hij het fundamentele karakter der natuurlijke getallen tot uitdrukking wilde brengen, onder afwijzing van bepaalde formalistische opvattingen [7]). Dedekind zegt: „die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen" [8]). U ziet, met citeren komen wij er niet, ook niet als we niet-mathematici te hulp roepen: Oswald Spengler meent: „Denn die Zahl geht dem Geiste vorauf, nicht umgekehrt; Zahlen sind schöpferische, nicht geschaffene Wesenheiten" [9]).

Het is duidelijk, dat de rij van klanken en tekens, waarvan ik zoëven sprak, het werk is van de mens. Zo nodig vervangen we deze symbolen door andere. Wat door die symbolen wordt aangeduid echter, blijft onaangetast: een door de eeuwen zich gelijk gebleven bezit der denkende mensheid, waarbij voor de enkeling het woord van Goethe geldt, dat hij het zich moet verwerven om het te bezitten: onderwijs en opvoeding spreken hier hun woord mee. Belangwekkend is in dit verband het rijke volkenkundige materiaal, waarover met name Popken zoveel wetenswaardigs heeft verteld [10]). Er zijn volkjes, die slechts drie telwoorden bezitten: een, twee, veel.

Het lijdt nauwelijks twijfel, dat wij ons althans de kleinere getallen eigen maken door abstractie uit de ervaring: drie sterren, drie bomen, drie denkbeelden hebben iets gemeen, dat ons voert tot de notie drie. Hoe moeilijk het is, dit abstractievermogen te oefenen, zien wij aan onze kinderen, die slechts node de stap van de benoemde getallen naar de onbenoemde maken.

Grote getallen ontmoeten we in de empirie ook, maar dan toch vaak in de zin van het „veel" bij het primitieve volkje: „het zand dat aan de oever der zee is". Hier vervaagt het begrip van het discrete en het herkennen van dergelijke aantallen kan niet op één lijn worden gesteld met die ene oogopslag, waarin wij een tweetal van een drietal onderscheiden. Archimedes stelde zijn „zandrekening" op, om zich en anderen er van te overtuigen, dat hier werkelijk van een getal sprake is [11]).

Veeleer ontlenen wij de grotere getallen aan ons voorstellingsvermogen, dat, geprikkeld door het zich bij elk telproces manifesterend besef der successie, ons in staat stelt, de aanvankelijk begonnen rij voort te zetten, in de trant van het kleine kind, dat ook als de kersen op zijn, aanhoudt: „nog een, nog een", misschien de simpelste vorm van het principe der volledige inductie [12]). Natuurlijk eist het succesvol voortzetten van de getallenrij, behalve dat voorstellingsvermogen, voldoende ontwikkeling van taalkundige of andere expressieve vermogens.

Wij concluderen: het oproepen van de eindeloze rij der natuurlijke getallen is het werk van de mens, daartoe in staat gesteld door zijn intellectuele vermogens. Die getallen bieden hem een machtig wapen bij de vervulling van zijn opdracht: de schepping te beheersen, de schepping, die hem in laatste instantie de impuls verschaft om dat wapen te smeden.

Hier zijn we dicht genaderd tot de uitspraak van Dedekind omtrent de getallen, maar juist op dit punt verwijderen wij ons daar weer van, wanneer wij belijden, dat de kosmos niet het werk is van de mens, maar Gods schepping, waar die mens met al zijn vermogens deel van uitmaakt. Het aspect van de telbaarheid is in dat geheel geponeerd : de mens treft het aan, evenzeer als hij de rijkdom van problemen en eigenschappen aantreft, waarvoor hem de door hem zelf opgeroepen rij der natuurlijke getallen plaatst. In het geheel van de kosmos stuit hij, naar een uitdrukking van Vollenhoven, op de realiteit van de successie [13]).

Tegen die reële achtergrond, kan men bezwaarlijk met Dedekind de natuurlijke getallen een vrije schepping van de menselijke geest noemen. In het woord schepping, betrokken op mensenwerk, klinkt voor hem, die bij dat woord allereerst aan Genesis 1 denkt, iets van hybris door, maar al volgt men het spraakgebruik, dan nog kan men juist bij de getallenrij moeilijk spreken van een *vrije* schepping, in den zin, waarin men deze term op een sonate, het schaakspel, of vele capita der wiskunde kan toepassen.

Wij zijn dus veeleer dan bij de uitspraak van Dedekind, terecht gekomen bij die van Kronecker, mits in bovenomschreven zin geinterpreteerd. Deze beschouwingswijze verklaart het voor alle denkende mensen dwingende karakter der arithmetica, dat zich ook uit in een uitzonderlijk vertrouwen, of zij nu is opgebouwd volgens de axiomatische, dan wel volgens de „inhoudelijke" methode [14]).

Keren wij tot de natuurlijke getallen terug. In hen ontmoeten wij een puurder expressie van de notie „discreet", dan wij, waar in natuur en denken ook, aantreffen. Als het ware vlijmscherp van elkaar gescheiden, staan zij in hun rij, ieder voor zich met zijn individuele eigenschappen. „Göttinen, thronend in Einsamkeit hehr", zegt het dichterwoord [15]), maar niet minder treffend is het verhaal van Ramanujan, de jong gestorven Indische mathematicus, die, naar het getuigenis van zijn mentor en bewonderaar Hardy, ieder natuurlijk getal als zijn persoonlijke vriend beschouwde. Toen Hardy deze geniale wiskundige tijdens zijn ziekte bezocht en op diens vraag naar nieuws antwoordde: „Geen nieuws. Alles is vandaag even saai, tot mijn taxinummer toe: 1729", leefde Ramanujan onmiddellijk op: „Saai?, dat merkwaardige getal? Het is het kleinste natuurlijke getal, dat zich op meer dan één manier als som van twee derde machten laat schrijven!" [16]).

Dit discrete karakter komt ook tot uiting in diverse notaties.

De eenvoudigste schrijfwijze zou ongetwijfeld de Romeinse zijn, die de eenheid met een streepje aanduidt en de andere getallen achtereenvolgens opbouwt door steeds een streepje meer te plaatsen:

I, II, III, IIII,. . . .

De eis der overzichtelijkheid echter maakt reeds na enige stappen de invoering van nieuwe symbolen gewenst, terwijl bovendien bij het formaliseren van een bewerking als de vermenigvuldiging aanzienlijke moeilijkheden optreden.

Als we de 0 te hulp roepen wordt alles veel eenvoudiger. In West-Europa kreeg dat cijfer pas burgerrecht in de zeventiende eeuw, maar de Hindoes kenden het reeds eeuwen eerder en gebruikten het juist voor het doel, waar het hier om gaat: het schrijven der getallen met behulp van een positiesysteem [17]). Als we in plaats van ons tientallig stelsel het tweetallige gebruiken, wordt ieder getal aangeduid door een eindig stel nullen en enen. Krachtens een na enkele stappen automatisch begrepen wetmatigheid, die uitmunt door eenvoud, laat zich hun eindeloze rij stelmatig opbouwen :

$$1 = 1, 2 = 10, 3 = 11, 4 = 100 \ldots,$$

terwijl dan tevens de regels van optellen en vermenigvuldigen zich uiterst simpel laten formuleren.

Leibniz was hierdoor zo getroffen, dat hij zich voorstelde op grond van de eigenschappen dezer notatie, de toenmalige keizer van China tot het Christendom te kunnen bekeren [18]).

Zonder ons in zijn optimisme te verdiepen, merken we op, dat ten allen tijde, de getallen *nul* en *een* als symbolen voor het absolute niets en de zuivere eenheid, op speculatieve geesten sterke indruk hebben gemaakt. In elk geval moeten we, terugkerend tot het tweetallig stelsel, de suggestieve kracht erkennen van de gedachte, dat de getallenleer zich systematisch laat ontwikkelen uit de beide tekens 0 en 1.

We vatten samen : terwijl overal in de natuur ons een indruk van continue samenhang overweldigt en iedere eenheid, die we daar menen af te zonderen op zich zelf een veelheid omsluit, hebben we in onze geest, in getallen en rekenkunde, een apparaat van uitzonderlijke exactheid gereed liggen, gebouwd op een intuïtief heldere notie van het discrete.

Valt het te verwonderen, dat steeds is getracht juist ook het wezen van het continue met dat apparaat te benaderen?

Het continuum. In de meetkunde zeggen wij: een punt ligt op een lijn. En als iemand vraagt: hoeveel punten liggen er op, dan moeten we antwoorden: eindeloos veel. In de inleiding stelde ik U voor, de lijn te beschrijven door de beweging van een tekenstift. Wie beweging zegt, zegt tijd en wie tijd zegt, voelt zich, minder handtastelijk, maar niet minder suggestief, de notie opgedrongen van een vloeiend continuum. Bij het volgen van mijn streep, heb ik het vermogen, op ieder moment de stift te doen stoppen en zo een punt te fixeren als discretum in het continuum. Maar dat alles is slechts een fictie, want wat ik met de „punt" van mijn nog zo scherp geslepen potlood bedek, is een vlekje. Mijn abstraherend vermogen brengt mij er toe, dit proces in gedachten herhalend, de streep te idealiseren tot een „lijn" en het vlekje tot dat gedachtending, dat we in de geometrie een „punt" noemen.

Maar ook het begrip moment, dat ik tersluiks invoerde, berust reeds op een analoog abstractieproces.

Zo worden we ertoe gebracht het continuum te zien als opgebouwd uit de afzonderlijke punten of momenten, en deze opvatting speelt zelfs een essentiële rol: men denke aan het begrip meetkundige plaats. Dit geeft echter een verlegenheid in ons denken: hoe kan iets dat lengte heeft, opgebouwd zijn uit wat geen delen heeft, zoals Euclides' definitie van het punt luidt? Of om met Anaxagoras te spreken : hoe kan het continuum uit discrete elementen zijn samengesteld, die als met een bijl van elkaar zouden kunnen worden gescheiden? [19]). Wordt bij zo'n scheiding één punt er twee?

Is hier nu wellicht de plaats voor een omtrekkende beweging in de zin van Hankel en kan de rekenkunde ons helpen om de kloof te overbruggen?

Ik sprak van lengte en betrad daarmee het gebied van het meten. Zoals men bij de beschouwing van aantallen aan „minder en meer" denkt, voert de beschouwing van rechte-lijn-segmenten tot de notie „kleiner en groter". Men komt er toe, een gekozen lijnstuk als maat te nemen en andere door afpassen daarmee te vergelijken. Zet men de te beschouwen lijnstukken af op één en dezelfde rechte, en wel van één en hetzelfde punt 0 uit (de oorsprong), waarbij men dan nog een positieve en een negatieve richting kan onderscheiden, dan zou men een brug naar de rekenkunde hebben geslagen, indien de rationale getallen (de breuken) toereikend waren om de lengten aller lijnstukken in de gekozen eenheid uit te drukken: ieder rationaal getal zou dan op een dergelijke getallenrechte het eindpunt P van één en slechts één lijnstuk aanduiden. Men ziet gemakkelijk, dat de bedoelde „rationale punten" P de rechte overal doordringen: op elk stukje, hoe klein ook, liggen zulke punten. De suggestie dringt zich op, dat ze de rechte geheel vullen.

Groot was dan ook de ontsteltenis der Pythagoraeërs, toen hun het bestaan van onderling onmeetbare lijnstukken bleek, bij voorbeeld de diagonaal van een vierkant met de bijbehorende zijde. Hun overtuiging, dat het gehele getal het wezen der dingen uitdrukt, kreeg een schok en volgens de overlevering werd het als een straf der Goden beschouwd, dat hij, die deze ontdekking wereldkundig maakte, op zee verdronk : „het onuitsprekelijke en het beeldloze behoren voor immer verborgen te blijven" [20]).

De eerste voor de hand liggende poging het continuum in de rekenkunde der breuken te vatten was zo reeds in de grijze oudheid als ontoereikend erkend: Euclides zegt uitdrukkelijk: onderling onmeetbare segmenten verhouden zich niet als getallen [21]).

De Griekse meetkunde wist zich te helpen met een geniaal uitgedachte en consequent doorgevoerde leer der evenredigheden, waarbij de rekenkunde geheel buiten beschouwing kon blijven [22]).

Dezelfde vragen hielden Leibniz bezig, toen hij het desideratum formuleerde: een leer der extensieve grootheden te ontwikkelen, die naast die der intensieve als gelijkwaardig kan worden gesteld. Grassmann zag deze vragen op originele wijze onder het oog in zijn Ausdehnungslehre, waarin zowel de oorsprongen der huidige meerdimensionale meetkunde als die der vectoranalyse aanwezig zijn [23]).

In de synthetische meetkunde, zoals die bij voorbeeld door Steiner werd ontwikkeld, zien we hoe het mogelijk is de geometrie los van de rekenkunde te ontwikkelen.

Door de zegetocht van de analytische meetkunde is de synthetische op het tweede plan geraakt; de moderne intuïtionisten, die per definitie slechts dat als exact, als wiskunde aanzien, wat rechtstreeks is gebouwd op het natuurlijk getal, weigeren haar zelfs de naam wiskunde. Ik voor mij kan niet inzien, waarom aan een op constructief geestelijk handelen gebouwde discipline als bij voorbeeld de tegenwoordig veel gesmade beschrijvende meetkunde, haar eigensoortige directe exactheid zou moeten worden ontzegd.

Intussen, in West-Europa drong, sinds de baanbrekende ontdekkingen van Leibniz en Newton op het gebied van differentiaal- en fluxierekening, de ontwikkeling in de richting der analytische beschouwing van het continuum. Niet dat er ook maar enige sprake was van een exactheid als die der Griekse meetkunde. Maar de in mystiek waas gehulde methoden, gebouwd op een vaag, instinctief aangevoeld limietbegrip, leverde een dergelijke stortvloed van verrassende resultaten, dat oeroude mysteries van beweging en continuum zich het een na het ander lieten onthullen.

Scheen het ontbreken van een vast fundament in die vruchtbare periode van de nieuwe calculus daar juist een zekere bekoring aan te verlenen, op den duur kon de reactie niet uitblijven.

Zij leidde tot het thans klassieke begrip van het reële getal, gebouwd op het rationale getal met behulp van een streng gedefiniëerd limietbegrip.

De brug tussen de aldus uitgebreide rekenkunde en het continuum is weer de getallenrechte, maar thans niet meer poreus. Al haar lacunes zijn gedicht: de punten P der rechte corresponderen ondubbelzinnig omkeerbaar met de reële getallen; deze wijzen de afstand 0P aan en omgekeerd.

Op de vele manieren om de reële getallen in te voeren (fundamentaalrijen van Cauchy, snede van Dedekind enz.) behoef ik hier niet in te gaan. Laten we volstaan met de constatering, dat al die methoden leiden tot de stelling, dat de verzameling der reële getallen in wezen identiek is met de verzameling der decimale breuken, of ook met die aller tweedelige breuken, dus in het laatste geval met de verzameling aller oneindige rijen van nullen en enen, waarin een komma is geplaatst. Een reëel getal kan men geven door een voorschrift, waaruit blijkt, hoe de betreffende rij van nullen en enen zich eindeloos voortzet. De plaats van het beeldpunt op de getallenrechte wijst zich dan gemakkelijk: de beschouwde rij van nullen en enen afschrijdend, ziet men dat punt bij ieder nieuw gepasseerd cijfer, als het ware gevangen in een welbepaalde „maas" van „een een-dimensionaal net", waarvan de „mazen" bij iedere stap inkrimpen.

Het fascinerende spel der nullen en enen heeft zich hier, nu ook het continuum daarin is gevangen, verdiept: het schijnt, dat de kosmos een eenvoudig zwart-wit-schema biedt, zo men slechts voor de symbolen nul en een de kleuren zwart en wit substitueert.

Het bouwwerk der klassieke analyse maakte op de generaties der vorige eeuw, wier opvattingen overigens ook thans bij verre na niet zijn uitgestorven, een indruk van onvergankelijkheid. Hankel mag zeker worden gezien als een spreektrompet, wanneer hij uitroept:

„So ist dann der schöne, gewaltige Bau entstanden, dessen Anblick den Mathematiker mit Stolz erfüllt: denn fest gegründet auf unerschütterlichen Fundamenten steigt er planmäszig, durch jenen wissenschaffentlich aesthetischen Takt geleitet, gewaltig empor, an seinen Auszenwerken durch zierliche Türme geschmückt und scheinbar vollendet, während im Inneren hunderte von eifrigen Arbeitern den unendlichen Bau weiter ins Unendliche hinausführen. Möchte er vor den Schicksalen des Turmes zu Babel bewahrt bleiben" [24]).

Deze wens bleek te behoren tot de pia desideria. Reeds Kronecker bracht bezwaren in tegen de reële getallen en analoge constructies op grond van de overtuiging, dat men deze uit de wiskunde kan bannen, voor zover zij een zinvolle uitdrukking geven aan relaties tussen gehele getallen en uit de wiskunde moet bannen voor zover zulks niet het geval is. Zijn ideaal echter, dat sterk aan de lijfspreuk der Pythagoraeërs doet denken, is wel onbereikbaar.

Het was L. E. J. Brouwer, die de fundamenten van het door Hankel bewonderde gebouw deed schokken, door een critiek, die ons in het hart van ons onderwerp brengt :

Hoewel de reële getallen het continuum beschrijven, blijven zij uiteraard individuen, die van elkaar onderscheidbaar moeten zijn; dit is een stilzwijgende conditie, waarop hun theorie is gebouwd. Wanneer men echter volgens een door vrije keus bepaalde afwisseling cijfers 0 en 1 achter de komma neerschrijft, construeert men een tweedelige breuk, die in ieder stadium nog op verschillende wijzen kan worden voortgezet, doch die toch kan worden geacht een reëel getal aan te geven. Een reëel getal echter, dat zich niet a priori met een gegeven ander reëel getal laat indentificeren. Hier komt een dynamische opvatting van het continuum naar voren: veeleer een open veld van mogelijkheden, dan een star systeem van bestaande elementen, veeleer een worden, dan een zijn. Het zwart-wit-schema vergrijst hier als het ware tegen de achtergrond der „niet ingevulde" vakken.

Nu kan men onmiddellijk tegenwerpen, dat er, ook in de wiskunde meer situaties denkbaar zijn, waarin een principiële onzekerheid het handelen verlamt.

Als Pythagoras de opdracht had gekregen zijn jongste 3 leerlingen te nummeren, zou zelfs hij dat op 6 en niet meer dan 6 manieren kunnen doen. Maar als hem bovendien gezegd was, die nummering te verrichten volgens de lengte der leeftijden, die deze jongemannen zouden bereiken, had hij de opdracht onmogelijk kunnen uitvoeren. Van geen der 6 mogelijke volgorden zou hij kunnen uitmaken, of zij met de bedoelde samenviel of niet. Toch verwerpen wij hierom de rekenkunde niet.

Evenwel, er is een verdere critiek van Brouwer, die door geen enkel mathematicus kan worden genegeerd, ook al deelt hij niet diens philosophische grondslag.

Brouwer laat namelijk zien, dat men op vele manieren paren van reële getallen, dus van tweedelige breuken kan opstellen, en wel op een ook voor de klassieke wiskunde onaanvechtbare wijze (dus door het geven van een voorschrift, waarbij ieder cijfer, achter de komma strikt bepaald is), waarvan niet is uit te maken of zij samenvallen dan wel verschillen. Bij deze en dergelijke constructies wordt gebruik gemaakt van het feit, dat er in de wiskunde onopgeloste problemen bestaan; in dit speciale geval wordt aan de constructie ten grondslag gelegd de vraag of er ergens in de decimale ontwikkeling van het beroemde getal pi een bepaald verschijnsel zal optreden, bij voorbeeld of er ergens 10 zevens op elkaar zullen volgen. Vervangt men stelselmatig de decimalen van pi achtereenvolgend door nul, doch spreekt men af, zodra het bedoelde „zevenverschijnsel" is opgetreden de verdere decimalen door 1 te vervangen, dan heeft men een welbepaald reëel getal, waarvan niet bekend, misschien zelfs nooit uit te maken is, of het gelijk dan wel ongelijk aan 0 is.

Een analyse van de betekenis van dit voorbeeld en zijn vèrstrekkende consequenties valt buiten het bestek van deze rede. Zij zou ons voeren naar de vraag of in de wiskunde ieder zinvol geformuleerd probleem een beslissing hetzij in positieve, hetzij in negatieve zin toelaat; naar het verband van deze vraag met die over de betrouwbaarheid van het beginsel van het uitgesloten derde, welke betrouwbaarheid door de intuïtionisten wordt ontkend; naar de rol van de taal in de wiskunde; en met name naar een onderzoek of in bepaalde elkaar (op het eerste horen) uitsluitende uitspraken, termen als „bestaan", „ieder", „gelijk zijn", „verschillen", hetzelfde bedoelen of iets verschillends aanduiden, als ik deze laatste woorden mag gebruiken, zonder ze te definiëren. Bij vorige gelegenheden ben ik op deze vragen dieper ingegaan, ondermeer heb ik er (op de dag af vijftien jaar geleden) [25]) op gewezen, hoe door successieve verruiming van de inhoud van fundamentele begrippen als de opgesomde, verschillende, deels concentrische wiskundige systemen ontstaan, waarvan de graad van evidentie varieert, in soortgelijke trant als (meer globaal gesproken) het exactheidsideaal in de klassieke wiskunde een ander is dan dat in de physica en dit laatste weer een ander dan dat in de biologie of dat in de psychologie.

Als een der engste, maar uiterst exacte systemen mogen we wel aanmerken de door de deze zomer ons ontvallen Nederlandse wiskundige Griss geëntameerde negatieloze wiskunde, die een omheind terrein in het gebied van het intuïtionisme betekent [26]). Als een der ruimste theoriën mogen we de bewijstheorie van Hilbert en zijn volgelingen beschouwen, waarin een gigantische poging wordt ondernomen om van de klassieke wiskunde veilig te stellen wat veilig gesteld kan worden [27]).

Intussen, ook zonder de grondslagenproblematiek zijn er in de klassieke wiskunde problemen te over in betrekking tot de vraag, die ons bezig houdt.

Ik noem allereerst de beroemde continuumproblemen van Cantor, die van ons dilemma een heldere concretisering geven, al moet worden bekend, dat hun oplossing nog in ver verschiet schijnt te liggen.

Door een gelukkige analyse van het begrip „evenveel", slaagde

Cantor [28]) er in dit begrip zo uit te breiden, dat ook verzamelingen met oneindig vele objecten met elkaar kunnen worden vergeleken: de verzameling V met objecten a en de verzameling W met objecten b heten „gelijkmachtig" (bedoeld als een andere naam voor „even groot") als een ondubbelzinnig omkeerbare toevoeging tot stand kan worden gebracht tussen de objecten a enerzijds en de objecten b anderzijds. Het evengroot zijn wordt hier dus niet geconstateerd door een telproces, maar op grond van een correspondentierelatie, op dezelfde wijze als we zonder te tellen onmiddellijk mogen veronderstellen, dat er op een college evenveel studenten als collegekaarten aanwezig zijn. Overigens is tellen niets anders dan het vestigen van een dergelijke correspondentie 1 aan 1 en wel tussen de te tellen objecten en een beginstuk van de rij der natuurlijke getallen. Terwijl bij eindige verzamelingen echter de wijze, waarop de correspondentie wordt gevestigd, niet ter zake doet, omdat, zoals we vroeger reeds opmerkten, de zaak steeds klopt, is het bij vergelijking van twee oneindige verzamelingen juist het probleem, een speciale toevoeging te vinden, die het doet.

Zet men de beide rijen

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \\ 10, & 20, & 30, & 40, \ldots \end{array}$$

netjes onder elkaar, dan ziet men dadelijk dat de verzameling V der natuurlijke getallen gelijkmachtig is met de verzameling W der tienvouden, hoewel de laatste toch kennelijk een echt deel der eerste is.

Wie dit voorbeeld voor het eerst ontmoet zal na de verrassing, dat hier het geheel niet machtiger blijkt dan het deel, wellicht zeggen: nu ja, oneindig is oneindig. In deze laatste indruk zal hij worden versterkt, als hem wordt verteld, dat Cantor heeft bewezen, dat de rechte lijn en het platte vlak, beide opgevat als verzameling hunner punten, gelijkmachtig zijn. Hoe merkwaardig het schijne: de dunne rechte even groot als het volle vlak, men kan zich weer geruststellen: oneindig is oneindig.

Anders wordt de zaak in het licht van een derde resultaat: de rij der natuurlijke getallen is niet gelijkmachtig met de rechte lijn, opgevat als puntverzameling. Het bewijs dezer stelling berust op de voorstelling van de punten der getallenrechte als oneindig voortlopende decimale breuken: bij iedere genummerde rij van zulke breuken zijn steeds breuken aan te wijzen, die niet in de rij voorkomen. Daar de getallenrij 1, 2, 3, ... gelijkmachtig is met een deelverzameling der getallenrechte, is de uitspraak gerechtvaardigd: de machtigheid A van de rij der natuurlijke getallen (de „aftelbare machtigheid") is kleiner dan de machtigheid C van het continuum („de continue machtigheid"), welke uitspraak een fraaie expressie geeft aan de kloof tussen discreet en continu, beide gevangen onder het begrip der verzameling: Het continuum laat zich niet tellen.

Het eerste continuumprobleem van Cantor komt nu neer op de vraag, of er tussen de beide machtigheden A en C van een zekere overbrugging sprake kan zijn, dan wel of zij om zo te zeggen onherroepelijk discreet van elkaar gescheiden staan. Anders gezegd: Laat zich op de rechte een oneindige puntverzameling aangeven, die noch de machtigheid A, noch de machtigheid C heeft?

Dit probleem heeft aanleiding gegeven tot een ontzagwekkende literatuur, die zich ook deels beweegt op het terrein van de zoëven aangeroerde grondslagenstrijd [29]). Voor een strenge intuïtionist is de vraag in deze vorm gesteld niet zinvol. In bepaalde axiomatische systemen echter kan men de vraag haar zin niet ontzeggen, maar hier hoort zij, ondanks grootse pogingen, nog steeds tot de onopgeloste problemen.

Cantor heeft de beroemde continuumhypothese uitgesproken, dat zich tussen A en C geen andere machtigheden bevinden. Gödel heeft bewezen, dat het als juist aanvaarden van deze hypothese geen tegenspraak kan opleveren met de gangbare axiomata, een formidabele prestatie, die echter nog lang geen bewijs van Cantors hypothese inhoudt [30]).

Dat er tussen A en C geen al te groot gedrang van machtigheden optreedt, staat vast op grond van een stelling van König; hierop kan ik binnen het bestek van deze rede evenmin verder ingaan, als op de zeer vele nevenvormen en generalisaties van het continuumprobleem. Ik wijs echter op een buitengewoon belangwekkend vermoeden, waartoe men op grond van de tot dusverre bereikte resultaten gekomen is, namelijk het vermoeden, dat de gangbare axiomenstelsels, waarmede men de theorie der puntverzamelingen beschrijft, niet toereikend zijn om het continuumprobleem te beslissen. Men zou dan in dezelfde situatie verkeren, als in de meetkunde van Euclides, waarin bepaalde stellingen niet kunnen worden bewezen of weerlegd, zonder aan de postulaten van Euclides ook zijn beroemde vijfde postulaat, het parallelenaxioma, toe te voegen.

Een tweede continuumprobleem door Cantor gesteld, is de vraag het continuum zogenaamd wèl te ordenen. Een verzameling heet welgeordend, als haar elementen zodanig in een rangorde zijn gesteld, dat elk harer deelverzamelingen in de zin dier rangorde een eerste element bezit. Aan deze eis voldoet de rij der natuurlijke getallen in de natuurlijke rangorde. Niet echter de getallenrechte in haar natuurlijke rangorde: immers reeds de rij der breuken ½, ⅓, ¼,. . . . vormt een deelverzameling zonder eerste (= kleinste) element.

Nu heeft echter Cantor de overtuiging en Zermelo de bewering uitgesproken, dat iedere verzameling zich wèl laat ordenen [31]). Bij zijn bewijs gebruikt Zermelo een axioma, het beroemde keuze-axioma van Zermelo, dat niet alleen door intuïtionisten, maar ook door vele andere wiskundigen discutabel, zo niet onaanvaardbaar wordt geacht. Ook al verwerpt men de stelling van Zermelo echter, dan nog behoeft de vraag om een speciale verzameling, in casu het continuum, wèl te ordenen, niet alle zin te verliezen. Maar ook deze vraag, die in wezen weer een zekere discretisering, een „telling" van het continuum bedoelt, blijkt tot nu toe onaangrijpbaar.

Het besprokene zou U de indruk kunnen geven, dat in de verzamelingenleer meer de nadruk wordt gelegd op het tellen dan op het meten en inderdaad is dat het geval in de theorie der machtigheden (cardinaalgetallen) en de theorie der ordening (ordinaalgetallen). Maar in de maattheorie der puntverzamelingen op het voetspoor van Borel tot ontplooiïng gebracht door Lebesgue, neemt het meten de centrale plaats in.

Beperken we ons tot de getallenrechte en nemen we daar een puntverzameling. Men kan nu trachten aftelbare rijen van lijnsegmenten te vinden, die de verzameling zo nauw mogelijk omsluiten en dan pogen door limietovergang een maat voor de verzameling te definiëren. Bij deze methode wordt aan het enkele punt, als segment van lengte nul opgevat, volledig recht gedaan. Het verkregen maatbegrip kan weer dienen om oneindige puntverzamelingen, wat haar omvang betreft, met elkaar te vergelijken. Bezien we het deel der getallenrechte tussen de punten 0 en 1, het eenheidsvak, dan hebben de dikste verzamelingen daar de maat 1, de dunste de maat 0. Hoogst opmerkelijk is nu, dat voor een uitgebreide categorie van eigenschappen E, waarvan het zinvol is te vragen, of een gegeven reëel getal de betreffende eigenschap E bezit of niet, de 0-of-1-wet geldt: de verzameling aller reële getallen op ons eenheidsvak, die de eigenschap E bezitten, heeft de maat 0 of de maat 1, een merkwaardige interventie van het discrete, waarop ik niet verder zal ingaan, daar ik zulks in ander verband 15 jaar geleden uitvoerig heb gedaan [32]).

De maattheorie heeft delen der klassieke wiskunde volkomen hernieuwd.

Voor de waarschijnlijkheidsrekening, van ouds zich bezighoudend met typisch discrete vragen over kogeltjes in urnen en dergelijke, bleek zij een bevredigend fundament, dat ook in staat is de leer der meetkundige waarschijnlijkheden mede te dragen. Zo kan men de 0-of-1-wet aldus formuleren: de kans, dat een punt de eigenschap E bezit is 0 of 1. De integraalrekening werd door de maattheorie van Lebesgue als herboren; de problemen van de theorie der Fourierreeksen en der orthogonale functiesystemen zien we door haar pas tegen hun eigenlijke achtergrond.

Had men zich in de klassieke analyse zoveel mogelijk gehouden aan de continue functies, en discontinuïteiten, waar optredend, als onvermijdelijke uitzonderingen aanvaard, in de moderne reële analyse, staat het begrip van de discontinue functie van het begin af zozeer op de voorgrond, dat als het ware een afgrond gaapt tussen haar en haar zuster, de complexe functietheorie, die het begrip der continue functie nog te ruim achtend, zich beperkt tot de studie der analytische functies.

Het is duidelijk, dat waar in de wiskunde twee noties optreden van zo verschillend karakter als die welke vanmiddag ons onderwerp uitmaken, zulks in die wetenschap wel aanleiding moet geven tot een belangwekkend samenspel. Het merkwaardige in dit geval is, dat waar enerzijds de problemen het discrete betreffend, het helderst voor onze geest staan, juist de methoden van wijde en algemene strekking worden ontleend aan de notie van het continue: geleidelijke overgangen lenen zich voor zulke methoden beter dan sprongen.

Zo is het verklaarbaar, dat in het domein der zuivere getallenleer diepe problemen slechts konden worden opgelost door de toepassing van machtige hulpmiddelen uit de zoëven genoemde leer der complexe functies, waar bij uitstek het continuïteitsbegrip hoogtij viert. De vraag, om bij benadering aan te geven hoeveel ondeelbare getallen in de rij der natuurlijke getallen zijn gelegen beneden een natuurlijk getal n, die Gauss aanleiding gaf tot een vermoeden, dat pas in 1896 door de beroemde bewijzen van Hadamard en de la Vallée-Poussin werd bevestigd, levert daarvan een sprekend voorbeeld. Tot voor kort faalde iedere poging om van deze priemgetalstelling een zogenaamd elementair bewijs te vinden. Het werd dan ook als een ontdekking van de eerste rang beschouwd, toen Selberg en Erdös [33]) er in slaagden, een dergelijk bewijs te leveren.

Een andere belangwekkende illustratie ziet men in het uitgebreide gebied der diophantische problemen. Analytisch betekenen zij de vraag naar de oplossingen in gehele getallen van gegeven stelsels vergelijkingen en ongelijkheden. Meetkundig verbeeld beduidt dit de vraag naar het al of niet liggen van regelmatig over één of andere meerdimensionale ruimte verdeelde discrete roosterpunten, op of dichtbij bepaalde in die ruimte gelegen continua.

In deze tak van wiskunde introduceerde reeds Hermite bij typisch discrete problemen de continue variabele. Het was met name Minkowski, die in zijn meetkunde der getallen, hier een aantal op meetkundige intuïtie gebouwde fraaie en fundamentele methoden verzon, waar het continue en het discrete een bekoorlijk samenspel vertonen, dat juist in onze tijd een uitgebreide kring van wiskundigen opnieuw is gaan boeien.

Als men het allereenvoudigste uit deze klasse van problemen nader onder de loupe neemt, te weten het eendimensionale lineaire homogene probleem, heeft men het samenspel als het ware in de oervorm : de vraag, op welke wijzen een op de getallenrechte gegeven reëel getal te benaderen is door rationale getallen. Door generalisering komt men tot verdere vragen, bij voorbeeld, die naar de eigenschappen der transcendente getallen, naar de asymptotische verdeling modulo één van getallenrijen en vele andere, die alle te vangen zijn in de zoëven gegeven algemene formulering.

Bij de leer der transcendente getallen treft men een veelheid van analytische methoden aan, dus berustend op de notie van het continue; bij elk transcendentiebewijs echter speelt op een essentieel punt het discrete zijn merkwaardige rol. Algebraïsch heet het getal, als het wortel is van een hogeremachtsvergelijking met gehele coëfficiënten, transcendent, indien zulks niet het geval is. De definitie van het algebraïsch getal ligt in de sfeer der gehele getallen, wat zich uit in het feit, dat bepaalde uitdrukkingen in de theorie der algebraïsche getallen (samenhangend met symmetrische functies van de wortels der definiërende vergelijking) slechts gehele waarden kunnen hebben. De meeste transcendentiebewijzen berusten in wezen op deze eigenschappen en kunnen dan worden teruggebracht op de constatering, dat een positief getal niet enerzijds willekeurig klein kan worden gemaakt en anderzijds geheel zou zijn en dus minstens gelijk aan 1.

Een andere groep van belangwekkende wiskundige problemen betreft de vraag, hoe uitdrukkingen, die krachtens haar definitie alleen zin hebben voor gehele waarden der veranderlijke grootheden, op passende wijze zijn uit de breiden ook voor continu veranderlijke waarden. Ik denk hier bij voorbeeld aan de gamma-functie die een uitbreiding is van de faculteit, welke laatste bij ieder natuurlijk getal n het aantal manieren voorstelt, waarop men n objecten op een rij kan plaatsen, een typisch discrete uitdrukking dus. Ik denk verder aan afgeleide functies van gebroken orde, die men kan definiëren op grond van de transformatie van Laplace.

In de analyse, waar men volop gebruik maakt van de notie van het continue, treedt toch telkens het discrete op. Vaak in uitdrukkingen, die door limietovergang een continu analogon der oorspronkelijke gedaante te zien geven. Zo staan naast elkaar : sommen en integralen, reeksen en oneigenlijke integralen, differentievergelijkingen en differentiaalvergelijkingen, lineaire vergelijkingen en integraalvergelijkingen. Deze polariteit zet zich in de abstracte algebra voort: Men denke aan de discrete groepen tegenover de continue, aan discreet gewaardeerde lichamen tegenover continu gewaardeerde, waarbij diepgaande verschillen in eigenschappen aan het licht treden.

Wanneer wij thans onze aandacht richten op de wisselwerking tussen wiskunde en natuurwetenschappen, kunnen we nauwelijks beter voorbeeld aanhalen dan het beroemde ergodenprobleem, waar alle tot nu toe genoemde gebieden der mathesis een rol spelen: de analyse, de waarschijnlijkheidsrekening, de maattheorie, de integraal van Lebesgue, de getallentheorie, de abstracte algebra, om maar niet meer te noemen.

Het probleem ontstond in de mechanica der dynamische systemen, de discrete tegenhanger van de continue mechanica der vloeistoffen en der vaste lichamen. Nemen we een eenvoudig voorbeeld : een hoeveelheid gas, die we ons moeten denken als een chaotische verzameling van door elkaar heen warrelende moleculen. Bij de pogingen om uit die microwereld tot uitspraken over de macrowereld: temperatuur, druk en dergelijke grootheden betreffende, te komen, kan men de zaak vereenvoudigen door de zes coördinaten, die op iedere tijd t de plaats en de snelheid aanwijzen, voor alle, zeg N moleculen, achter elkaar op te schrijven, waardoor men 6N getallen krijgt, die men bij iedere betreffende tijd t kan opvatten als coördinaten in een 6N-dimensionale ruimte. Als een eenzame Nautilus zien we dit discrete denkbeeldige partikel door de wijde 6N-dimensionale oceaan snellen en verstarren tot een kromme, zo we de (6 N + 1) dimensionale ruimte-tijd-wereld te hulp roepen. Wat nu te zeggen van die baan? De weerkeerstelling van Poincaré voorspelt, dat zij willekeurig dicht bij ieder punt dier ruimte voorbijkomt, zelfs oneindig vaak, op regelmatige tijden haar bezoek herhalend. Deze uitspraak bleek aanvechtbaar. Haar correctie gaf aanleiding tot de quasi-ergodenhypothese, dat voor bijna alle banen die uitspraak waar is. Maar wat is bijna? Dit eist een precisering en daarbij treden nu al die genoemde onderdelen der wiskunde in actie. Losgesneden van de oorspronkelijke physische voorstelling, werd de ergodentheorie een zuiver mathematische theorie, die doordrong tot in de abstracte algebra.

We zagen reeds, hoe meermalen een het discrete betreffend probleem een oplossing vond met methoden, die essentieel van de notie van het continue gebruik maken. Zulks is ook in de toegepaste wiskunde het geval. Mij denke bij voorbeeld aan de continue interestrekening.

Een zeer sprekend voorbeeld levert de physica. Vele harer verschijnselen laten zich beschrijven door differentiaalvergelijkingen. Dergelijke vergelijkingen echter kan men slechts afleiden op het standpunt, dat het bestudeerde verschijnsel een continu karakter heeft en bij een onbeperkte verkleining van de waarnemingsduur of van het ruimtedeel, waarin men de waarneming doet, dan wel van beide, zichzelf bij die verandering in wezen gelijk blijft, althans zijn zin niet verliest.

Deze veronderstellingen zijn uiteraard niets dan een fictie waaraan we ons overgeven, om het gereedliggende apparaat der mathematische analyse te kunnen toepassen. Ieder begrijpt immers, dat bij een atomaire opbouw der physische wereld deze veronderstelling niet opgaat: in een zeer klein ruimtedeel ligt misschien één of helemaal geen atoom en tijdens het kleine tijdje van waarneming is het, zo aanwezig, allicht weggevlogen. Terwijl onze physicus, laten we zeggen ter afleiding van een curve, die het radioactief verval van een, toch uit een eindig aantal atomen bestaand, brok materie moet voorstellen, bij zijn limietovergang een fraaie differentiaalvergelijking met bijpassende oplossing verkrijgt, verliest in werkelijkheid zijn beschouwing iedere zin.

Toch is dit de wijze, waarop, bij een benadering der natuur met behulp der wiskundige analyse, de physicus is gedwongen te werken.

En de methode heeft zodanig burgerrecht verkregen, dat men allerwegen de opvatting tegenkomt, dat de natuurverschijnselen zich laten beschrijven door differentiaalvergelijkingen meest van de tweede orde, die dan ten overvloede nog lineair zijn.

Nu is de wiskunde een benaderende voorstelling van de werkelijkheid. En reeds op het continue standpunt is men in zeer vele gebieden van natuurkunde en techniek zover, dat de vereenvoudigde veronderstelling, die tot lineaire differentiaalvergelijkingen voeren, niet meer voldoende zijn om ook de fijnere effecten te vangen. Vandaar de belangstelling voor de niet-lineaire differentiaalvergelijkingen, wier theorie grote moeilijkheden biedt.

Maar ook aan het atomaire karakter der natuur wordt in moderne wiskundige onderzoekingen meer en meer recht gedaan. Al zien we het trillende membraam van een trommel de bewegingen uitvoeren, die door de betreffende differentiaalvergelijking zo glad worden beschreven, in werkelijkheid zullen we toch moeten denken aan bewegingen der moleculen, en zou een theorie gelijkend op de kinetische gastheorie op haar plaats zijn.

Dergelijke beschouwingen slaan weer terug op de wiskunde en voerden tot de z.g. Monte Carlo-methode, bij voorbeeld voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Aan een allereenvoudigst voorbeeld laat zich dit verduidelijken.

Als op een groot vel papier een vlek ligt, komt de bepaling van de oppervlakte dier vlek neer op het uitrekenen van een dubbelintegraal. Wanneer men het papier echter tegen de muur hangt en er lukraak op gaat schieten, zal het aantal treffers in de vlek zich ten naastebij verhouden tot het totale aantal gaatjes in het papier als de oppervlakte van die vlek tot die van het papier. Voor practische doeleinden krijgt men nu een bevredigende uitkomst door het tellen der kogelgaatjes. Dit is de grondgedachte van de Monte Carlo-methode, die dus wel een bij uitstek tastbaar voorbeeld levert van een discrete behandelingswijze van een in wezen continu probleem. Bij ingewikkelde problemen is natuurlijk de manier waarop men moet „schieten" gecompliceerder en het aantal benodigde „kogelgaatjes" enorm groot. (U begrijpt, dat ik hier figuurlijk spreek). Men kan dan ook vragen of zodoende de methode niet te bewerkelijk zou worden en of niet aan de klassieke methode de voorkeur moet worden gegeven.

Dat dit laatste niet het geval is, is een gevolg van de verbazingwekkende ontwikkeling die de moderne rekenmachines tijdens de tweede wereldoorlog in de Angel-Saksische landen vertoonden en die na het einde van de oorlog haar zegetocht over de wereld is begonnen.

Ik kom hiermede tot mijn laatste onderwerp.

Bij de beschrijving van de rekenkunde noemde ik de mechanische wijze, waarop wij vermenigvuldigen. Ook het feit, dat grote delen der wiskunde zich laten formaliseren, wijst op de mogelijkheid, dat deze gebieden misschien beter door een machine dan door de mens zelf kunnen worden bewerkt. Het is op die grond, dat Schopenhauer ergens de wiskundigen voorhoudt, dat zij zich bezig houden met wat hij noemt „Die niedrigste aller Geistestätigkeiten". De zaak wordt echter anders, wanneer de mens inderdaad het slavenwerk door machines kan laten uitvoeren. In de oudheid had hij reeds het telraam. Hoewel de eerste moderne rekenmachine reeds werd ontworpen door Leibniz, was het pas de precisietechniek van onze tijd, die het construeren van waarlijk betrouwbare apparaten op grote schaal mogelijk maakte. Thans staan wij aan het begin van een periode, waarin naar het oordeel van ingewijden een omwenteling, op grond van de macht, die de mens met deze moderne hulpmiddelen verkrijgt, te wachten staat, die vergelijkbaar is met de sociale revolutie, die haar aanvang nam met de intrede van de stoommachine.

Merkwaardig is nu, dat ook hier het dilemma discreet-continu uitdrukkelijk op de voorgrond treedt. De hulpmachines der numerieke wiskunde laten zich namelijk onderscheiden in continue, zoals de rekenlineaal en discrete, zoals het telraam.

Bij de continue apparaten, die ook de naam analogonmachines dragen, worden getallen vertaald in de continu veranderlijke grootheden der klassieke physica: lengten, draaiïngshoeken, voltages, weerstanden, lichtintensiteiten en dergelijke. Nadat in de physische wereld de nodige bewerkingen zijn uitgevoerd, wordt ten slotte de uitkomst door meting aan het apparaat ontleend. Daarbij maakt men een schatting: naar mate het instrument verfijnder en stabieler is, wint men aan precisie.

De belangrijkste onder deze machines is de differential analyser, die een minder gelukkige naam draagt, daar ze niet analyseert en differentieert, maar synthetiseert en integreert. Door een gelukkige door Lord Kelvin geïntroduceerde toepassing van het principe der terugkoppeling, dat vandaag aan de dag allerwegen in wetenschap en techniek opduikt en in wezen niets anders is dan het beginsel waarmede bij moderne centrale verwarmingsinstallaties de temperatuur automatisch wordt geregeld, is het mogelijk de machine het door een haar voorgelegde differentiaalvergelijking gegeven verband tussen de onbekende functie en haar afgeleiden ad oculos te demonstreren: de machine levert een grafische voorstelling dier gezochte functie in de vorm van een fraai op een blad papier getekende kromme lijn. Zo levert deze analogon-machine een globaal overzicht der gezochte oplossing. De numerieke data echter moet men door opmeting uit de figuur afleiden.

De discrete of digitale machines werken in wezen door evenementen te tellen: ze leveren getallen, cijferreeksen. Voorbeelden zijn: de tel- en boekhoudmachines en de mechanische of electrische tafelrekenmachines. Al deze apparaten worden, evenals de modernste analogonmachines, in de schaduw gesteld door haar grote en snelle zusters, de electronische rekenautomaten. Het discrete karakter dezer machines treedt met name fascinerend op de voorgrond, wanneer ze gebouwd zijn op het tweetalig stelsel, zoals meer en meer gebruikelijk is. Zoals we zagen, laat ieder natuurlijk getal zich in dat stelsel schrijven met louter nullen en enen. Welnu, als men de 1 representeert door een bepaalde toestand of actie : een spanning, een tik, het ponsen van een gaatje, hoe dan ook, en de nul door afwezigheid van die toestand, of het achterwege laten van die actie, heeft men een eenvoudig principe om natuurlijke getallen mede te delen of vast te leggen. We worden hier herinnerd aan het zwart-wit-schema, dat ik zoëven noemde. Het gaat om ja of neen, aan of uit. Bij een in werking zijnde electronische machine bestaan deze acties in electrische pulsen; daar deze zich eenvoudig laten superponeren, zijn ze uitermate geschikt om er de rekenkundige hoofdbewerkingen, die zoals we reeds opmerkten in het tweetallig stelsel zeer simpel zijn, mede uit te voeren.

Het belang dezer grote machines ligt in 4 dingen: ten eerste zijn ze bliksemsnel. Er zijn er, die in een uur meer bereiken dan 100 geroutineerde rekenaars in een vol jaar. Ten tweede kan men op grond harer snelheid (door de machine eventueel wat langer bezig te houden) de gewenste uitkomst met iedere van te voren vastgestelde graad van precisie verkrijgen. Ten derde zijn deze machines voor uiteenlopende problemen geschikt: ze zijn universeel van opzet, in tegenstelling met de analogiemachines, die meestal voor een speciale klasse van problemen geconstrueerd worden. Ten vierde zijn de machines volautomatisch, dat wil zeggen, de mens grijpt slechts op twee punten in : hij brengt het probleem in de machine; als zij klaar is, neemt hij de keurig door haar (nog wel in het tientallig stelsel) uitgetikte resultaten in ontvangst. Daar tussenin doet hij niets.

Geen wonder, dat een dergelijke machine de vergelijking oproept met het menselijk brein, wat ook in de benaming harer onderdelen en activiteiten uitkomt: ze bezit een geheugen, waarin zij al werkende bepaalde gegevens tijdelijk opbergt om die later weer te voorschijn te halen en te verwerken; ze neemt beslissingen enz. Natuurlijk zoeke men achter deze benamingen niet meer, dan er redelijkerwijs achter kan zitten: een kan heeft een oor, een schoen een neus, een oven een mond. Voorbeelden bij tientallen: met de voortschrijdende cultuur breidt de metafoor haar gebied uit van dat van de vorm naar dat der functie. Het is duidelijk, dat ook de geraffineerdste machine een menselijk brein behoeft om haar te construeren en zonder nut zou staan, als geen levend mathematicus haar zinvolle problemen zou voorleggen.

Maar dat neemt ten eerste niet weg, dat de machine de mens in vaardigheid kan overtreffen. Zo is er een machine gebouwd, die het tegen elke tegenstander opneemt in het nimspel. Ze verloor nooit het spel, wel echter haar aanvankelijke aantrekkingskracht doordat zij de meest geroutineerde tegenspeler in te korte tijd grondig versloeg.

En ten tweede dient opgemerkt, dat zulke machines, juist doordat men haar werkwijze kan opvatten als een grove benadering van het zoveel fijnere psycho-physiologische proces, dat zich in ons afspeelt, waardevolle aanwijzingen over dat proces geven, bij voorbeeld in pathologische gevallen.

Ik zeide reeds, dat men 1,0 kan duiden als ja-neen. Het zal U dan ook niet verwonderen, dat men machines heeft gebouwd, die automatisch problemen der formele logica tot oplossing brengen. Als ik nog de vertaalmachines noem, ben ik geheel gekomen op het gebied der moderne communicatietheorie, waar juist in het licht dezer nieuwe electronische hulpmiddelen zoveel nieuwe perspectieven zich openen [34]).

Keren we terug tot de wiskunde. Het is het natuurlijk getal, dat de essentie der machtige machines uitmaakt. Een overweldigende triomf van het discrete, waarin Pythagoras ongetwijfeld een sprekende illustratie van zijn beginsel zou mogen zien.

De terugwerking van deze ontwikkeling op de wiskunde vervult sommige mathematici met enige zorg. Hoe verfijnd de methoden der moderne analyse mogen zijn en hoe exact haar uitkomsten, ten slotte vraagt de practijk numerieke tabellen die bij benadering de onderzochte situatie beschrijven. Door nu van het begin af de continue beschrijving van het probleem te vervangen door een discrete, kan men, gezien de capaciteiten der moderne machines, de eerstgenoemde misschien op den duur geheel ontberen, waardoor een ontzagwekkend brok wiskunde zijn nut voor de toepassing dreigt te verliezen. Op dezelfde wijze als door het massa-artikel der moderne industrie de geschoolde handwerker, of hij nu schoenen, wapens of meubels vervaardigt, slechts voor de luxe in actie blijft, zou ook een leger van geschoolde mathematici buiten de stroom van de toegepaste wiskunde komen te staan. Anderzijds weliswaar zal de nieuwe ontwikkeling wiskundigen oproepen om het apparaat te verfijnen en te bespelen.

Ik eindig. Ik heb het dilemma „discreet of continu" niet gesteld als een alternatief, waaruit we noodzakelijk zouden moet kiezen, doch het veeleer willen belichten als een polariteit, die we in de schepping aantreffen en die zich in de faculteiten van onze geest weerspiegelt.

Het discrete spreekt misschien meer tot de actieve mens, het continue tot de contemplatieve mens: In de *mystiek* aller tijden valt de nadruk op het verbonden zijn der dingen in een niet restloos op te lossen verband. In de *wetenschap* aller tijden denkt de mens de dingen uiteen, treedt hij in het besef der dualiteit met zijn ik het andere tegemoet, grijpt hij naar het discrete. Een dilemma treedt op, als hij tracht het een door het ander te omvatten.

In de wiskunde spitst zich dat dilemma toe in concrete problemen, die de uiterste vezelen van ons ken-, denk- en expressievermogen raken.

Deze problemen zien we als van wijder betekenis bij het licht van Gallilei's woord, dat het boek der natuur is geschreven in de taal der wiskunde. Liever zou ik het aldus willen formuleren: de wiskunde is de taal, waarin wij de gedachten trachten na te spreken door God in Zijn Schepping neergelegd.

Dat dit spreken een stamelen is, leert ons reeds de bezinning op het dilemma van hedenmiddag. Buigen wij ons in dat besef neer voor Hem, van Wien wordt getuigd: Zijns is geen getal, en Wien, zoals de promotieformule onzer Universiteit het uitdrukt, toekomt ere en aanbidding, ook in de school der wiskunde.

AANTEKENINGEN :

1) Aurelius Augustinus, Confessiones, boek 13.

2) De Nobelprijswinnaar H. C. Urey in een brochure met die titel.

3) A. Eddington, The philosophy of physical science, Cambridge University Press 1939; hfdst. XI.

4) D. van Dantzig, Vragen en Schijnvragen over ruimte en tijd, blz. 18; Inaugurele rede Delft (Groningen 1938).

5) H. Hankel, Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, 2° Auflage (Tübingen 1885).

6) Richard Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen, 6° Auflage (Braunschweig 1930); zie: Vorwort zur ersten Auflage.

7) H. Weber, „Leopold Kronecker", Math. Ann. 43 (1893), 1—25, speciaal blz. 15.

[8]) l.c. [6]).

[9]) Oswald Spengler, Untergang des Abendlandes I, 5° Auflage (München 1920), S. 86.

[10]) J. Popken, De Jeugdperikelen van het getal; Inaugurele rede Utrecht; (Groningen 1947). Ook afgedrukt in Euclides 23 (1948), blz. 80.

[11]) Zie bijv. A. Czwalina, Archimedes; Teubner 1925, blz. 27. Zie ook B. L. van der Waerden, Ontwakende Wetenschap (Groningen 1950), blz. 235.

[12]) Het principe der volledige inductie („Methode van Bernoulli", „stap van n op n + 1") luidt in zijn algemene vorm: Zij E een eigenschap waarvan het zinvol is te vragen of een natuurlijk getal n haar al dan niet bezit. Geldt nu E voor n = 1 en gelukt het uit de aanname dat E geldt voor willekeurige $n \geq 1$, af te leiden dat E ook geldt voor n + 1, dan geldt E algemeen, d.i. voor ieder natuurlijk getal. Dit principe lijkt mij zonder meer evident voor ieder wiens geest er zich voor open stelt.

[13]) D. H. Th. Vollenhoven, De wijsbegeerte der Wiskunde van Theïstisch standpunt, Diss. V.U. 1918.

[14]) Trouwens in deze methoden als zodanig liggen niet de hoofdverschillen, die zich tussen de mathematici openbaren. Die liggen meer in het feit, dat in gangbare nominalistisch getinte beschouwingen, bewijsmiddelen worden toegelaten, die van zeker intuïtionistisch standpunt niet zinvol kunnen worden geïnterpreteerd. Waar de axiomaticus deze middelen achterwege laat, is over en weer positieve waardering zeer wel mogelijk.

[15]) Goethe, Faust.

[16]) Inderdaad is $1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$, terwijl ieder kleiner getal op hoogstens 1 manier te schrijven is als som van 2 derde machten. Voor Ramanujans leven zie G. H. Hardy, Collected papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge University Press, 1927 en ook Hardy's „Obituary notice" in Proc. London Math. Soc. (2), 19 (1921).

[17]) Voor de nog niet geheel opgehelderde geschiedenis van de nul, zie bijv. B. L. van der Waerden, Ontwakende Wetenschap, blz. 59—67.

[18]) Ontleend aan H. Minkowski's gedachtenisrede op Dirichlet. (Bd II van Minkowski's Gesammelte Abhandlungen, S. 495 (Leipzig 1911).

[19]) Zie de belangwekkende beschouwingen hierover in H. Weyl, Die Stufen des Unendlichen. (Jena 1931).

[20]) Vergelijk E. J. Dijksterhuis, De Elementen van Euclides, Groningen (1929—30) (2 delen); speciaal I, bl. 16.

[21]) Euclides, Elementen, Boek X. Voor een belangwekkende inleiding in Euclides, zie E. J. Dijksterhuis, l.c. [20]).

[22]) Euclides, Elementen, Boek V.

[23]) Zie Hermann Grassmann, Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke, Leipzig, 1894 (waarin „Die Ausdehnungslehre von 1844": „die Wissenschaft der extensiven Grösse oder Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disziplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert", Leipzig 1844 en de 2e druk van 1877, zowel als de „Ausdehnungslehre" van 1862.

[24]) l.c. [5]).

[25]) J. F. Koksma, Existentiebewijzen in de Wiskunde, Rede ter gelegenheid van de 58e herdenking van de Stichting der Vrije Universiteit op 20 oktober 1938. Ook afgedrukt in Orgaan van de Chr. Ver. van Natuur- en Geneeskundigen in Nederland (1938).

[26]) G. F. C. Griss, Negatieloze intuïtionistische wiskunde. Verslagen Ned. Akad. van Wet. 53, (1944), 261—268 en verdere artikelen in de Proceedings dier Akad. *49* (1946), *53* (1950), *54* (1951).

[27]) Zie bijvoorbeeld A. Heyting, Mathematische Grundlagenforschung, Intuïtionismus, Beweistheorie (Berlin 1934). (Verschenen in de serie „Ergebnisse der Mathematik", Band III).

[28]) De originele verhandelingen van Cantor zijn ook thans nog het lezen overwaard: G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhaltes (Berlin 1932). Voor een uitvoerige inleiding in de verzamelingenleer zie ook A. A. Fraenkel, Abstract Set Theory (Amsterdam 1953).

[29]) Zie Fraenkel l.c. [28]).

[30]) Kurt Gödel, What is Cantor's continuum problem? Amer. Math. Monthly 54 (1947), blz. 515—525.

[31]) l.c. [29]).

[32]) l.c. [25]).

[33]) Zie bijv. J. G. van der Corput: Démonstration élémentaire du théorème sur la distribution des nombres premiers. Scriptum No. 1, Math. Centrum (1949).

[34]) De lezer, die geïnteresseerd is in het uitgebreide complex van problemen, dat in deze en de voorafgaande passages is aangeduid, zie bijv. de werken van Norbert Wiener, Cybernetics (New York, 1948) en The human use of human beings (Boston, 1950).