hew Hf X

IS MEETKUNDE RUIMTELEER?

OPENBARE LES

GEHOUDEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET AMBT VAN LECTOR AAN DE VRIJE UNIVERSITEIT TE AMSTERDAM OP 30 SEPTEMBER 1938

DOOR

DR. J. HAANTJES

P. J. MULDER & ZOON TE LEIDEN
1938

IS MEETKUNDE RUIMTELEER?

OPENBARE LES

GEHOUDEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET AMBT VAN LECTOR AAN DE VRIJE UNIVERSITEIT TE AMSTERDAM OP 30 SEPTEMBER 1938

DOOR

DR. J. HAANTJES

P. J. MULDER & ZOON TE LEIDEN
1938

Dames en Heeren,

Op de vraag wat meetkunde is, zou U waarschijnlijk en niet ten onrechte antwoorden: „Meetkunde is een deel van de wiskunde." Doch hiermede is alles nog niet gezegd. Zij is door deze uitspraak nog niet gekarakteriseerd. Sprekende over de taak, die de meetkunde heeft op het gebied der natuurwetenschap, zullen wij trachten na te gaan, waardoor ze zich dan van de overige wiskunde onderscheidt.

Het begrip meetkunde heeft in de loop der tijden groote veranderingen ondergaan. Telkens weer heeft men zich bezig gehouden met de vraag, welk deel van de wiskunde toch precies de naam meetkunde verdient. Het streven op zichzelf reeds, door middel van een definitie het terrein van de meetkunde op het uitgestrekte gebied van de wiskunde af te bakenen, doet de meetkunde al een bijzondere plaats innemen. Bij geen enkel ander gebied der wiskunde toch heeft men in die mate behoefte gevoeld aan een definitie. De gebezigde definities zijn niet altijd even positief. Enkele vooraanstaande meetkundigen van deze tijd bijvoorbeeld zijn van meening, dat de meetkunde een niet nader te omschrijven deel van de wiskunde is.

Wij willen nu aan de hand van een kort historisch overzicht van de definitie der meetkunde nagaan, welke opvattingen men in de loop der tijden heeft gehuldigd. Het ligt niet in mijn bedoeling hier een volledig overzicht te geven van de verschillende definities, hoe interessant een dergelijke opsomming ook zou kunnen zijn. Ik noem U slechts enkele, die typeerend zijn voor de tijden, waarin ze werden uitgesproken. Opvallend is, dat deze definities nogal erg uiteenloopend zijn.

Richten wij om te beginnen onze gedachten naar het verre verleden. Voor de Grieken lag de definitie van de meetkunde in het woord *geometrie* besloten. Voor hen was meetkunde de wetenschap, die zich bezig hield met de bepaling van de *maat van de aarde.* Natuurlijk kon deze beperkte omschrijving zich niet lang handhaven. Al heel gauw werd ze becritiseerd, o.a. door PLATO, die deze omschrijving belachelijk vond. Men heeft toen in deze uitdrukking het woord *aarde* door *ruimte* vervangen. Meetkunde werd nu gedefinieerd als de wetenschap, die zich bezig hield met de beschrijving van de figuren van onze ruimte, speciaal wat betreft de maat. Deze definitie heeft men later uitgebreid, door aan het begrip *maat* het begrip *plaats* of *rangschikking* toe te voegen. Niet alle meetkundigen waren het met deze toevoeging direct eens, doch de voorstanders meenden nu eindelijk de goede vorm gevonden te hebben, immers deze beide begrippen wezen op een soort *dualisme* en het dualisme beschouwde men als een van de voornaamste eigenschappen van de natuur.

De zooeven genoemde definitie van de meetkunde bleef ongeveer in deze vorm gehandhaafd tot in de negentiende eeuw. Doch dan geeft FELIX KLEIN blijk van een geheel nieuwe opvatting omtrent de meetkunde. In het jaar 1872 vestigt hij opnieuw de aandacht op het probleem van het wezen der meetkunde door het opstellen van zijn beroemd geworden „*Erlanger Programm*". KLEIN kenschetst hierin de meetkunde als de *invariantentheorie van een transformatiegroep*, een uitspraak, die wel erg verschilt van de reeds genoemde. De omschrijving, die KLEIN hiermee geeft, willen wij met een enkel woord nader toelichten. Als wij nagaan, wat ons eigenlijk interesseert in de gewone meetkunde, als ik met deze naam voor een oogenblik de Euclidische meetkunde mag aanduiden, dan bemerken we, dat het die eigenschappen van lichamen of figuren zijn, die niet veranderen, wanneer we deze lichamen verplaatsen, dus hun punten aan een orthogonale transformatie onderwerpen. Het komt derhalve hierop neer, dat we eigenschappen van figuren, d. w. z. puntverzamelingen, zoeken, die invariant zijn bij de groep van de orthogonale transformaties. Men kan nu ook andere transformatiegroepen beschouwen, en de eigenschappen trachten te vinden, die daarbij invariant zijn. Men verkrijgt dan andere soorten meetkunde, waarop we nader terugkomen.

Men moet de zooeven genoemde uitspraak van KLEIN niet zoozeer als definitie van de meetkunde beschouwen, dan wel als een poging een korte samenvatting te geven van het probleem van de meetkunde, die een leiddraad kan zijn bij het onderzoek. Het „Programm" laat de mogelijkheid zien de verschillende meetkunden vanuit een centraal gezichtspunt te bestudeeren en heeft als zoodanig groote verdienste voor de meetkunde gehad.

Ik wil U nog wijzen op een essentieel verschil, dat er bestaat tusschen de definitie van KLEIN en die uit de oudheid. Laatstgenoemde toch trachtte het *doel* van de meetkunde weer te geven, terwijl we mijns inziens in de uitspraak van KLEIN alleen kunnen zien het aangeven van een *middel*, een *werkwijze*, om tot dat doel te komen. Deze werkwijze bestaat dan in het bestudeeren van de invariantentheorie van een transformatiegroep ; het doel wordt door hem niet nader aangegeven. In dit stadium geeft men het op, het doel nader aan te duiden en vinden we als definities voor de meetkunde alleen nog omschrijvingen van het middel.

Wenden wij ons thans tot enkele meer moderne auteurs, teneinde een indruk te krijgen van de hedendaagsche opvatting. Naast de reeds genoemde uitspraken over de meetkunde stellen wij dan het antwoord dat VEBLEN en WHITEHEAD gegeven hebben op de vraag: „Wat is meetkunde". Dit antwoord, dat men in een van hun werken, dateerend uit het jaar 1932, kan vinden [1]), luidt als volgt:

„Meetkunde is een wiskundige wetenschap .... een tak van de wiskunde wordt meetkunde genoemd, omdat een voldoend aantal competente menschen haar deze naam geeft, op grond van gevoel en traditie."

Natuurlijk is deze uitspraak niet ernstig bedoeld als definitie van de meetkunde. Men moet het zoo verstaan, dat naar de meening van genoemde schrijvers de meetkunde geen scherp omlijnd gebied van de wiskunde vormt en dat het geen zin heeft de wiskunde in meetkundige en niet meetkundige onderdeelen te verdeelen. Men zou dus niet mogen vragen „wat is meetkunde", doch alleen „wat verstaat men tegenwoordig onder meetkunde". Hier geeft men klaarblijkelijk ook op een nadere omschrijving te geven van datgene, wat we zooeven het middel, de werkwijze, genoemd hebben.

Als we de ontwikkeling der meetkunde in de laatste vijftig jaar nagaan, zal het ons niet verwonderen, dat men tot deze uitspraak gekomen is. In het „Erlanger Programm" komt de onderlinge verhouding van de destijds bestaande meetkunden zeer goed uit. Doch de ontwikkeling van de meetkunde stond niet stil. Omstreeks 1917 ontdekten LEVI-CIVITA en SCHOUTEN de pseudoparallele verschuiving of overbrenging. Hieronder verstaat men het volgende: Aan elk punt van een willekeurige n-dimensionale ruimte wordt een Euclidische ruimte toegevoegd, die locale ruimte genoemd wordt. Een afbeelding nu van naburige locale ruimten op elkaar, waarbij lengten en hoeken gelijk blijven, bepaald een meetkunde. Deze nieuwe meetkunde, de meetkunde van de overbrenging, viel niet meer onder het schema van het „Erlanger Programm". Men moest daarom dit schema veranderen, wat men dan ook meerdere malen gedaan heeft. Later werden weer nieuwe meetkundige vondsten gedaan, o.a. werd de projectieve differentiaalmeetkunde ontwikkeld, die op haar beurt een verandering noodig gemaakt zou hebben. Vandaar dan ook de genoemde uitspraak van VEBLEN en WHITEHEAD.

Zooeven hebben we het door KLEIN opgestelde schema gezien

[1]) The foundations of differential geometry. Cambr. Tracts., nr. 29.

als het aangeven van een middel ter bestudeering van de meetkunde, als een bestudeeringswijze. Het spreekt vanzelf, dat dit alleen gerechtvaardigd is, als we aan de meetkunde een zekere taak toeschrijven, een taak, waaraan de tijdgenooten van KLEIN konden arbeiden door zijn beroemd schema uit te werken, terwijl een volgende generatie deze taak kon helpen vervullen door de leer van de overbrengingen te bestudeeren. Deze taak zouden wij willen zien als *het zoeken naar een zoo nauwkeurig mogelijke beschrijving van onze ruimte*, de ruimte, waarin wij leven. Zooals de theoretische physicus naar verklaringen zoekt voor natuurkundige verschijnselen en hiervoor theorieën opstelt, zoo zoekt de meetkundige naar mogelijke ruimtevoorstellingen. Aan anderen, aan de waarnemers van onze ruimte, zal hij het moeten overlaten vast te stellen, welke van deze ruimtevoorstellingen de juiste is. Wij willen de meetkunde dus zien als ruimteleer; deze uitspraak is niet zoozeer bedoeld als definitie, dan wel als een opgaaf voor de meetkunde.

Gelukkig hebben de meetkundigen bij het vervullen van deze taak hun toevlucht genomen tot de wiskunde en heeft men logische systemen opgebouwd, die niet op de ervaring berusten. Het opstellen van een dergelijk systeem komt hierop neer, dat men zekere grondbegrippen (punt, rechte, enz.) definieert en daarvoor eenige axioma's of postulaten gaat invoeren, waarvan geëischt wordt, dat ze niet met elkaar in tegenspraak zijn. Kiest men andere axioma's, dan krijgt men een ander wiskundig systeem, wat we gewoon zijn dan een andere meetkunde te noemen. Om na te gaan of een bepaalde meetkunde als ruimteleer bruikbaar is, zal men dus kunnen volstaan met de axioma's aan de ervaring te toetsen, indien dit tenminste mogelijk is. Men moet daarbij natuurlijk eerst afspreken, welke physische grootheden met de grondbegrippen zullen correspondeeren, b.v. wat we een rechte zullen noemen. Hoewel deze logische systemen, zooals ik reeds opmerkte, niet op de ervaring berusten, heeft toch de ervaring bij de opbouw wel degelijk een groote rol gespeeld. Hierop komen wij nog nader terug.

Het gebied, waarin de meetkundige werkt en de bron, waaruit hij put, is zooals we zien de wiskunde. Wat hij hiervan echter noodig zal hebben, is van te voren onmogelijk te zeggen, vandaar dan ook, dat pogingen dit gebied af te bakenen op den duur moesten falen. Het „Erlanger Programm" bevatte, zooals we gezien hebben, een dergelijke afbakening, die later dan ook bleek te weinig omvattend te zijn. Dit wil niet zeggen, dat dit „Programm" niet van groote beteekenis geweest zou zijn. KLEIN heeft zijn tijdgenooten ongetwijfeld een beter inzicht in de problemen van de meetkunde gegeven.

Wij moeten meetkunde dus wel als een wiskundige wetenschap beschouwen, die echter op een bepaald doel gericht is, namelijk het scheppen van mogelijke ruimtevoorstellingen.

Het lijkt er misschien eenigszins op, dat ik hier aan de vele definities en omschrijvingen, die we van de meetkunde bezitten, nog maar eens een toevoeg. Niets is echter minder waar dan dat. Ik heb slechts de meening weergegeven van vele, misschien mag ik zeggen bijna alle meetkundigen, die aan de opbouw van de meetkunde hebben medegewerkt. Dat het genoemde doel van de meetkunde aan vele meetkundigen voor oogen heeft gestaan, blijkt uit de groote invloed, die de ervaring op haar opbouw heeft gehad. Men kan hier spreken van een wisselwerking, die vaak vruchtbaar gebleken is, doch soms naar het schijnt ook wel de ontwikkeling van de meetkunde heeft geremd.

Teneinde deze bewering met feiten te staven willen we de historische groei van de meetkunde fragmentarisch nagaan en wel speciaal in verband met de zooeven genoemde uitspraak over de meetkunde. Wij zullen hierbij niet naar volledigheid streven wat betreft deze historische ontwikkeling, omdat het ons niet in de eerste plaats om de geschiedenis zelve te doen is, doch willen slechts enkele historische feiten naar voren brengen, die belangrijk zijn geweest voor de grondslagen van de meetkunde. Niet in de eerste plaats het bouwwerk der meetkunde zelf, doch de fundamenten, waarop dit bouwwerk berust, vragen hiervoor onze aandacht.

De oorsprong van de meetkunde vindt men bij de Chaldeeën en de Egyptenaren. Deze meetkunde der oudheid heeft het karakter gehad van een ervaringswetenschap in de enge zin van het woord. Zij diende hoofdzakelijk voor practische doeleinden en beperkte zich tot empirische regels. Het waren vooral de landmeters en bouwmeesters, die deze regels vonden en gebruikten. Een meetkundestelling was voor hen een physische wet, die men verkreeg, of door deze uit andere stellingen af te leiden, het bewijs, dan wel langs empirische weg, de proef.

Een groote ommekeer in deze beschouwingswijze brengen de Grieken. Hun exactheidsbegrip en neiging tot logische redeneering doet hen de proef als bewijsmiddel voor stellingen verwerpen. Men zoekt voor de meetkunde naar een logisch systeem, naar een wiskundige opbouw. De geschiedschrijvers noemen verscheidene personen, allen Grieken, die in deze richting zochten. EUCLIDES (285 v. Chr.), de beroemde schrijver van „de Elementen", neemt onder hen de voornaamste plaats in. Zijn opbouw van de meetkunde is door volgende generaties algemeen aanvaard. Een bepaalde bewering wordt uit een vorige afgeleid, deze weer uit vorige enz., totdat men zoo teruggaande tot enkele stellingen gevoerd wordt, die niet uit vorige zijn af te leiden om de eenvoudige reden, dat er geen vorige zijn. Deze onbewijsbare stellingen worden door EUCLIDES aangenomen. Wij noemen ze axioma's. Tot op deze dag heeft dit systeem, deze meetkunde, zich gehandhaafd. Teneinde haar van de later opgestelde meetkundige systemen te onderscheiden, wordt zij, ter eere van haar grooten grondlegger, *Euclidische meetkunde* genoemd. Het is de meetkunde, die wij ons op het gymnasium of de H.B.S. met meer of minder vrucht hebben trachten eigen te maken.

De groote verdienste van EUCLIDES is, dat hij ons leert, hoe men de meetkunde als logisch systeem, onafhankelijk van de ervaring, kan opbouwen. Naar zijn model wordt ook nu nog steeds gewerkt. Toch heeft bij deze opbouw de ervaring of laat ik liever zeggen de aanschouwing een rol gespeeld. De grondbegrippen, punt, rechte enz., worden beschreven, doch niet gedefinieerd. Hier wordt een beroep op de aanschouwing gedaan. Ook heeft EUCLIDES geen willekeurig stelsel axioma's gekozen, doch hij kiest deze grondstellingen zoo, dat ze met voldoende nauwkeurigheid in overeenstemming zijn met het experiment en direct van toepassing zijn op de ruimte, waarin wij ons bewegen. Hij kiest ze zoo, dat ze naar zijn meening „waarheid" bevatten. Hier bedoel ik met waarheid bevatten, in overeenstemming zijn met de werkelijkheid, geldigheid hebben voor onze ruimte. Het zou nog lang duren voor men aan de waarheid van deze meetkunde zou gaan twijfelen.

Wanneer we nu, zonder bij het tusschenliggende tijdperk lang stil te staan, overgaan van 300 jaar vóór Christus naar de negentiende eeuw na Christus, dan wil dat niet zeggen, dat er wat betreft de meetkunde in deze 2000 jaar weinig gebeurd is, wat vermeldenswaard is. De ontwikkeling van de meetkunde heeft in deze tijd niet stil gestaan. Bestaande methoden werden uitgebreid, en daarnaast vele nieuwe gevonden. Ik wil U er één noemen. De toepassing van de analyse en algebra op de meetkunde. Zij voerde tot de analytische meetkunde, ook wel eens geometrie van DESCARTES genoemd, daar deze de eerste geweest is, die de algebra wist te gebruiken voor de theorie van de krommen. Enkele meetkundigen hebben in de analytische meetkunde een aanranding gezien van het wezen der meetkunde, hoewel ten onrechte. Zij heeft immers niet het doel van de meetkunde veranderd, doch slechts een wijziging gebracht in de methoden, die tot dit doel leiden. Uit de geschriften blijkt ook, dat men het benoodigde deel der analyse niet met de meetkunde vereenzelvigde, doch dat men de meetkunde als ruimteleer bleef beschouwen. MONGE zegt in een van zijn werken, dat niet de analytische formule het doel is, doch slechts de kortste uitdrukkingswijze van werkelijk voorgestelde ruimtelijke betrekkingen. Wij zullen niet langer stil staan bij de methoden, die in het genoemde tijdperk hun intree deden, omdat geen van deze op de beschouwingswijze van het wezen der meetkunde een zoo groote invloed gehad heeft als de in de negentiende eeuw naar voren komende *niet-Euclidische meetkunde.*

Wij hebben reeds gezien, dat de Euclidische meetkunde op een aantal axioma's berust. Van een stelsel axioma's moet vanzelfsprekend steeds geëischt worden, dat deze niet met elkaar in strijd zijn. Er wordt echter ook steeds naar gestreefd ze zóó te kiezen, dat ze onafhankelijk zijn. Wat nu de axioma's van EUCLIDES betreft, men heeft nooit aan het niet strijdig zijn getwijfeld, wel echter aan de onafhankelijkheid. Vele pogingen zijn gedaan één der axioma's, en wel het axioma van de evenwijdige lijn uit de andere af te leiden. Dit axioma komt hierop neer : „men kan in een plat vlak door een punt buiten een rechte lijn steeds één en slechts één rechte lijn trekken, die de eerstgenoemde lijn niet snijdt, hoever men beide ook verlengt." Vooral omstreeks 1800 ontstond er een ware wedijver onder de meetkundigen, wie toch wel de gelukkige zou zijn, het bewijs van dit axioma, waardoor het dan een stelling geworden zou zijn, te vinden. Vele z.g. bewijzen zijn gepubliceerd, doch GAUSS, die zelf in zijn jeugd ook menige poging aangewend heeft, wist al deze bewijzen te weerleggen en de fouten hierin op te sporen.

GAUSS volgt echter nog een andere methode. Hij gaat van de veronderstelling uit, dat het axioma van de evenwijdige lijn niet geldt en stelt nu voor dit axioma een ander in de plaats, namelijk dat men in een plat vlak door een punt buiten een rechte lijn steeds meer dan één rechte lijn kan trekken, die de eerste, hoe ver ook verlengd, niet snijdt. De lijnen door een punt, evenwijdig aan een gegeven rechte, vormen dan een waaiertje. Uit het zoo verkregen axiomastelsel leidt hij nu stellingen af in de hoop op een eigenschap uit te komen, die het gevolg is van de nieuwe axioma's en toch kennelijk onjuist is, d. w. z. in onze ruimte niet geldt. Zou dit gelukken, dan was daarmede de juistheid van de Euclidische meetkunde aangetoond en zou GAUSS de nieuwe meetkunde naast zich hebben neergelegd. Ik wil U enkele stellingen noemen uit deze nieuwe meetkunde, die we *een niet-Euclidische meetkunde* noemen. Een der belangrijkste stellingen drukt uit, dat de som van de hoeken van een driehoek kleiner dan 180° is. De afwijking van 180° blijkt evenredig te zijn met het oppervlak van de driehoek. Teneinde deze stelling aan de practijk te toetsen, wordt de som van de hoeken van een driehoek, gevormd door drie bergtoppen, Brocken, Hoher Hagen en Inselberg, gemeten. De afwijking van 180° blijkt binnen de grenzen van de experimenteele nauwkeurigheid te liggen, waaruit te concludeeren valt, dat indien onze ruimte niet-Euclidisch zou zijn, de afwijking van de Euclidische ruimte wel zeer gering moet zijn. Hierbij kunnen we opmerken, dat de onvermijdelijke waarnemingsfouten het onmogelijk maken door een meting de juistheid van de Euclidische meetkunde aan te toonen. Wel zou het tegendeel uit metingen kunnen volgen.

Een andere eigenschap van de nieuwe meetkunde is het bestaan van een absolute lengte-eenheid. Misschien mag ik dit met een enkel woord toelichten. Zooals we zagen hangt de som van de hoeken van een driehoek af van de oppervlakte van die driehoek en wel zoodanig, dat alle driehoeken, waarvan de som van de hoeken een bepaald bedrag, b.v. 179° is, hetzelfde oppervlak hebben. Dit oppervlak zou men nu als oppervlakte-eenheid kunnen invoeren. Men zou dan een absolute oppervlakte-eenheid verkregen hebben. Met behulp van een dergelijke redeneering is het ook mogelijk tot een absolute lengte-eenheid te komen, een lengte-eenheid dus, die niet ontleend is aan de lichamen, die zich in onze ruimte bevinden, zooals b.v. de cm, doch die ontleend is aan de ruimte zelf. In een brief aan den astronoom SCHUMACHER deelt GAUSS hem dit resultaat mede. SCHUMACHER beschouwt dit als een voldoend bewijs voor de onjuistheid van de nieuwe meetkunde en dus voor de juistheid van de Euclidische meetkunde. Hij vindt het bestaan van een absolute lengte-eenheid absurd en spreekt er zijn verwondering over uit, dat GAUSS er anders over denkt. Deze verdedigt zich door op te merken, dat iets wat ons onnatuurlijk voorkomt, daarom nog niet absoluut onmogelijk genoemd mag worden.

Langzamerhand komt GAUSS tot de overtuiging, dat de noodzakelijkheid van de Euclidische meetkunde niet bewezen kan worden, — noch door het menschelijk verstand, noch voor het menschelijk verstand — zooals hij het uitdrukt. In 1829 deelt hij in een brief aan BESSEL mede, dat hij nog meer in de meening versterkt is, dat men niet zal kunnen beslissen, wat de ware meetkunde is. Toch publiceert hij zijn uitgebreide onderzoekingen niet. Hij weet, dat een publicatie veel stof zal doen opwaaien en de critiek hem niet gespaard zal worden. Om dit te vermijden, zwijgt hij. De menschen zijn er toch niet rijp voor, zoo oordeelt hij. Doch hierin is GAUSS toch te pessimistisch. Want omstreeks 1830 publiceeren twee jongere wiskundigen, geheel onafhankelijk van elkaar, de theorie van de niet-Euclidische meetkunde. Het zijn LOBATSCHEWSKY, hoogleeraar te Kasan en BOLYAI, een Hongaarsch officier. Zonder vrees maken zij de wereld met de nieuwe meetkunde bekend. De verbreiding van hun ideeën gaat echter uiterst langzaam. De publicaties zouden waarschijnlijk onopgemerkt gebleven zijn, als GAUSS er niet geweest was, die zijn groote waardeering voor hun werk niet onder stoelen of banken steekt.

Een beletsel voor het doordringen van de nieuwe ideeën is ook het gezag van KANT. Deze stond immers op het standpunt, dat de ruimtevoorstelling ons a priori gegeven is, onafhankelijk van eenige waarneming. De niet-Euclidische meetkunde nu werd beschouwd als te zijn in strijd met dit standpunt. De critiek van de filosofen is wel zeer scherp. Het verwondert ons dan ook niet, dat GAUSS tot de uitspraak komt, dat begripsverwarringen nergens overvloediger voorkomen dan bij filosofen, die geen wiskundigen zijn! LOBATSCHEWSKY en BOLYAI oogsten dan ook geen dank. De stap is te groot. Men kan hen niet volgen.

Dat ik hier bijna uitsluitend GAUSS noem is niet bedoeld als een streven de niet-Euclidische meetkunde enkel aan hem toe te schrijven, doch wordt gerechtvaardigd door het feit, dat de geschriften en vooral de brieven van GAUSS de beste bron vormen voor de bestudeering van de groei der nieuwe ideeën.

Bekeken vanuit een zuiver wiskundig standpunt staat de nieuwe meetkunde even sterk als de Euclidische meetkunde. Beide systemen berusten op eenige axioma's, die onderling niet met elkaar in strijd zijn; logisch is tegen de niet-Euclidische meetkunde dan ook niets in te brengen. GAUSS beschouwt deze meetkunde echter niet alleen als een logisch systeem. Hij staat op een zuiver empirisch standpunt. De ruimte, waarin wij leven, heeft zijn eigen vaste eigenschappen en het gaat er om deze eigenschappen te vinden. Naar zijn meening zal het experiment moeten beslissen, welke meetkunde in werkelijkheid bestaat, de Euclidische of de niet-Euclidische. In een van zijn brieven waarschuwt hij er dan ook voor, dat men rekening moet houden met het feit, dat de Euclidische meetkunde wel eens fout kan zijn. Wij zien hieruit, dat GAUSS de meetkunde als een ervaringswetenschap heeft beschouwd. Het gaat er voor hem om een beschrijving van onze ruimte te vinden.

De Euclidische en de hier genoemde niet-Euclidische meetkunde vormen, zooals we reeds opgemerkt hebben, niet de eenig mogelijke meetkundige stelsels. Het heeft dan ook geen zin hier langer stil te staan bij de vraag, welke van deze twee meetkunden voor onze ruimte de juiste of wel de meest waarschijnlijke is.

Merkwaardig is de rol, die de ervaring bij het ontstaan van de niet-Euclidische meetkunde heeft gespeeld. De twijfel aan het axioma van de evenwijdige lijn, het axioma, dat niet door de ervaring geverifieerd kon worden, vormde de aanleiding tot onderzoekingen, die tenslotte bekroond werden met de ontdekking van de nieuwe meetkunde. Hier werkt dus de ervaring mede aan de opbouw van de wiskunde. Aan de andere kant heeft zij echter remmend gewerkt op de verbreiding van de nieuwe ideeën. Had men toch de niet-Euclidische meetkunde enkel als een wiskundig systeem ingevoerd, dus los van onze ruimte, dan zou ze zeker spoediger erkend zijn geworden. De critiek van de filosofen, die nu zoo weinig mild geweest is, zou dan waarschijnlijk achterwege gebleven zijn.

Slechts enkele decenniën na het bekend worden van de niet-Euclidische meetkunde van LOBATSCHEWSKY en BOLYAI wordt het onderzoek betreffende de grondslagen van de meetkunde opnieuw een schrede vooruitgebracht door het werk van BERNARD RIEMANN (1826—1866). In 1854 houdt deze in verband met een verkregen docentschap in Göttingen een lezing over de hypothesen, die aan de meetkunde ten grondslag liggen. Als deze voordracht in druk verschijnt, wat pas in 1867, na de dood van RIEMANN, geschiedt, baart zij veel opzien. In zijn „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik" vertelt KLEIN van de buitengewoon groote indruk, die RIEMANN's gedachtengang op hem heeft gemaakt, hoewel veel hem toen nog onbegrijpelijk voorkwam.

Uit het werk van RIEMANN blijkt, zooals we zullen zien, dat hij evenals GAUSS als taak van de meetkunde de leer van onze ruimte voor oogen heeft gehad. Doch vooraf iets over de nieuwe ideeën, die in de genoemde voordracht ontwikkeld zijn.

Zoowel de Euclidische als de niet-Euclidische meetkunde is opgebouwd uit een aantal axioma's, die zekere betrekkingen tusschen de grondbegrippen vastleggen. In hoeverre een dergelijk samenstel van betrekkingen echter noodig of zelfs mogelijk is, ziet men niet direct in. Ook de verhouding van de aangenomen betrekkingen ten opzichte van elkaar blijft daarbij in het duister. Dit vindt zijn oorzaak, aldus RIEMANN, hierin, dat men te weinig aandacht geschonken heeft aan het begrip meerdimensionale ruimte. Hij gaat dan ook uit van een abstracte *n*-dimensionale ruimte. Een punt is dan bepaald door *n* getallen (x^h), coördinaten van het punt genoemd. Verder wordt voor elk punt een algemeene uitdrukking opgesteld voor de lengte van een klein lijn-elementje in dat punt. Een dergelijk lijn-element is bepaald door *n* coördinatenverschillen. RIEMANN kiest nu voor de uitdrukking voor de lengte van een lijn-element de wortel uit een altijd positieve, geheele, homogene quadratische functie van de coördinatenverschillen ($ds^2 = a_{hi}\, dx^h\, dx^i$). De coëfficienten van deze quadratische vorm zullen in het algemeen van het gekozen punt afhangen, dat wil dus zeggen, zijn functies van de coördinaten. De meetkunde van een dergelijke abstracte ruimte, tegenwoordig *Riemannsche ruimte* genoemd, blijkt nu geheel bepaald te zijn door deze quadratische vorm. Wij noemen deze meetkunde Riemannsche meetkunde. Als grondslag voor de meetkunde treedt hier dus op de uitdrukking voor de lengte van een lijnelement. Kiest men voor deze uitdrukking een andere vorm, dan gelden weer andere meetkundige eigenschappen. In een n-dimensionale ruimte zijn derhalve verschillende maatverhoudingen mogelijk. Dit geldt ook voor een ruimte van drie dimensies. Stellen wij ons nu op het standpunt, dat in onze ruimte, in de ruimte, waarin wij leven, een Riemannsche meetkunde geldt, dan blijven er nog oneindig veel mogelijkheden, wat de maatverhoudingen betreft.

RIEMANN voert bij zijn beschouwingen het begrip *kromming* (Krümmungsmass) in, een invariant of getal, dat uit de quadratische vorm, dus uit de maat, kan worden afgeleid. In de Riemannsche meetkunde behoeft deze kromming niet constant te zijn; zij zal in het algemeen van punt tot punt veranderen en is daarnaast ook nog afhankelijk van richtingen in dat punt. Wanneer we echter aannemen, dat in onze ruimte lichamen zonder hun vorm te veranderen willekeurig verplaatst kunnen worden, dan moet deze kromming constant zijn. Er blijven dan voor onze ruimte drie gevallen mogelijk, al naar gelang deze constante nul, negatief, dan wel positief is. Is de kromming nul, dan is de bij de quadratische vorm behoorende meetkunde identiek met de Euclidische meetkunde, is de kromming echter negatief, dan is ze identiek met de niet-Euclidische meetkunde van LOBATSCHEWSKY en BOLYAI. Deze meetkunden komen hier dus voor den dag als bijzondere gevallen van de Riemannsche meetkunde. Het derde geval met constante positieve kromming voert tot een tweede soort niet-Euclidische meetkunde. In deze niet-Euclidische meetkunde van RIEMANN snijden twee in een plat vlak gelegen rechte lijnen elkaar altijd en is de som van de hoeken van een driehoek grooter dan 180°. Geldt deze meetkunde in onze ruimte, dan is de ruimte eindig, hoewel onbegrensd.

U zult U misschien afvragen, waarom RIEMANN als grondslag voor de meetkunde nu juist de wortel uit een quadratische vorm neemt en niet bijvoorbeeld de vierdemachtswortel uit een differentiaalvorm van de vierde graad. In zijn werk noemt RIEMANN deze laatste mogelijkheid wel, doch hij wijst haar meteen van de hand. Hij acht een onderzoek in deze richting niet direct noodig, daar dit betrekkelijk weinig licht zal werpen op de leer van de ruimte. Uit dit gezegde blijkt wel heel duidelijk, dat het ook RIEMANN er om te doen is een beter inzicht te krijgen in de ruimte, wat haar meetkundige eigenschappen betreft. Hij beschouwt de naar hem genoemde meetkunde als een mogelijke beschrijvingswijze van onze ruimte. Zooals RIEMANN laat zien, zijn in een driedimensionale ruimte vele maatverhoudingen denkbaar, doch de eigenschappen, waardoor onze ruimte zich van andere denkbare driedimensionale ruimten onderscheidt, kunnen alleen door de ervaring gevonden worden.

Het spreekt vanzelf, dat het werk van RIEMANN wordt becritiseerd. Het woord kromming brengt velen op een dwaalspoor en heeft aanleiding gegeven tot vele speculaties over het bestaan van een vierde dimensie, want, naar men meende, had de ruimte toch een extra dimensie noodig om krom te zijn. Jarenlang wordt over de kromming van de ruimte gediscussieerd, vooral in Göttingen. Bekend is het rijmpje uit die jaren :

„Die Menschen fassen kaum es
Das Krümmungsmass des Raumes".

Dat RIEMANN zijn resultaten direct op onze ruimte toepast, is ook weer een van de oorzaken, dat zijn ideeën zich betrekkelijk langzaam verbreiden. De Riemannsche meetkunde wil men wel als wiskundig systeem aanvaarden, doch het heeft lang geduurd, voor men haar als een mogelijke beschrijvingswijze der ruimte erkent, terwijl RIEMANN toch juist dit laatste voor oogen heeft gehad.

Haar triomfen viert de Riemannsche meetkunde pas na een halve eeuw als EINSTEIN zijn algemeene relativiteitstheorie ontwikkelt. Door de tijd als vierde dimensie er bij te nemen, wordt onze ruimte uitgebouwd tot een vierdimensionale ruimte. De meetkunde van deze ruimte is nu volgens de relativiteitstheorie een Riemannsche meetkunde.

Heeft de relativiteitstheorie groote invloed gehad op de physica, niet minder heeft ze dit gehad op de ontwikkeling van de meetkunde. De Riemannsche meetkunde wordt plotseling werkelijkheid. Weer gaan de meetkundigen aan het werk om systemen te vinden, die zullen kunnen dienen voor de beschrijving van onze ruimte, nu echter als vierdimensionale ruimte opgevat. Zoo ontstaan de leer van de overbrengingen, de projectieve en conforme differentiaalmeetkunde. Ik wil U slechts de namen noemen van een tweetal leiders op dit gebied : SCHOUTEN en VEBLEN. Dat ook zij de meetkunde als ruimteleer opvatten, blijkt wel hieruit, dat beide de door hen opgestelde meetkundige systemen steeds weer gebruiken voor de beschrijving der ruimte. Als VEBLEN dan ook beweert, dat van de meetkunde slechts gezegd kan worden, dat het een onderdeel van de wiskunde is, dan is dat in zekeren zin in tegenspraak met zijn eigen werk. Wel kunnen wij onderschrijven, dat men het deel van de wiskunde, waarin de meetkundige werkt, niet precies kan afbakenen.

De meetkunde is in de loop der jaren uitgegroeid tot een groot gebouw van stellingen. Natuurlijk willen wij, dat ons gebouw hecht en zonder constructiefouten zal zijn, doch daarnaast interesseert ons ook de vorm van het gebouw en de ideeën, die aan de vormgeving ten grondslag liggen. Het doel van mijn betoog is geweest U te laten zien, dat steeds getracht is zoo te bouwen, dat de meetkunde het best haar taak als ruimteleer zou kunnen vervullen.

Mijne Heeren Directeuren en Curatoren.

Het is mij een behoefte U te danken voor het in mij gestelde vertrouwen, dat U getoond hebt door mij te willen voordragen en benoemen tot lector aan deze Universiteit. Ik hoop mij dit vertrouwen waardig te toonen door mij met alle krachten, die ik van God mag ontvangen, op het werk toe te leggen.

Mijne Heeren Professoren der Wis- en Natuurkundige Faculteit.

Ook U dank ik voor Uw aanbeveling, die de aanleiding tot mijn benoeming vormde. De hartelijke wijze, waarop gij mij zijt tegemoet gekomen, geeft mij het vertrouwen, dat ik ook in de toekomst in alle opzichten op Uw welwillende steun zal mogen rekenen.

Dames en Heeren Studenten.

Gaarne zal ik U zooveel in mijn vermogen ligt bij Uw studie voorlichten. Ik reken daarbij op Uw medewerking. Ik hoop, dat onze samenwerking onder Gods Zegen vruchtbaar zal zijn voor onze wetenschap.