Fluctuaties van aandelenkoersen op een efficiënte markt en de daarbij behorende mogelijke beslissingscriteria: een theoretische beschouwing op basis van het verwachtnutsprincipe.

B. Out

Researchmemorandum 1982-19 juni '82

Vooronderzoek t.b.v. Z.W.O.

Voorwoord

In dit onderzoek zal een aanzet worden gegeven hoe aandelenportefeuilles dienen te worden samengesteld in het geval dat aandelenkoersen een bepaald stochastisch proces volgen.
De studie is mathematisch van aard. Ter wille van de minder wiskundig onderlegde lezer is een appendix opgenomen, waarin enkele gehanteerde begrippen worden uiteengezet.

Niet alle mogelijke stochastische processen worden beschouwd. Beperkt wordt tot stationaire processen die empirisch zijn gestaafd en een theoretische grondslag hebben ten gevolge van een limietstelling uit de wiskunde.

Vele bewijzen van stellingen zullen achterwege worden gelaten. De reden hiervan is dat men deze terug kan vinden in statistische handboeken op dit terrein.

De auteur is dank verschuldigd voor de op- en aanmerkingen van Prof.dr. H.C. Wytzes. Tevens is de auteur Prof.dr. F.C. Palm en Prof. H.C. Tijms erkentelijk voor de vele gedane suggesties.

juni 1982

B. Out

BO/mt

Inleiding

De portefeuilletheorie zoals zij momenteel in handboeken op het terrein van beleggingsleer verschijnt, is correct als verondersteld kan worden dat òf de rendementen normaal verdeeld zijn òf de nutsfunctie van de belegger kwadratisch is. Er zijn al jarenlang indicaties dat rendementen geen normale verdeling volgen.
Mandelbrot en anderen [1)] namen een stabiele (ook wel Pareto-Levy) verdeling waar. Andere empirische verdelingen die waargenomen werden, zijn de lognormale verdeling en de student-t verdeling. Gesuggereerd is daarnaast dat aandelenkoersen ook een logstabiele verdeling of een truncated normale verdeling kunnen volgen. De vraag wordt dan concludent hoe portefeuilles van aandelen in casu moeten worden samengesteld.

Het beslissingscriterium dat in dit onderzoek als basis zal dienen is het verwachtnutcriterium. Wanneer blijkt dat dit criterium te stringent van aard is zullen benaderingen worden toegepast.
In paragraaf 1 zal worden uiteengezet waarom voor dit beslissingscriterium is gekozen.
In paragraaf 2 wordt de huidige theorie, waarin een normale verdeling wordt verondersteld, kort weergegeven.
In paragraaf 3 is de invalshoek een benadering van het nut met behulp van een kwadratische functie.
Paragraaf 4 geeft de portefeuilletheorie weer, uitgaande van de stable distribution.
Paragraaf 5 gaat in op de lognormale verdeling.
In paragraaf 6 komt tenslotte de truncated normale verdeling aan de orde.
In de appendix zullen enkele mathematische eigenschappen worden besproken, die van nut kunnen zijn bij het lezen van het onderzoek.

Paragrafen 1 en 4 t/m 6 zijn zo opgebouwd, dat eerst zal worden nagegaan hoe een dergelijke verdeling eruit ziet en wat de eigenschappen ervan zijn. Vervolgens zal worden ingegaan op portefeuille eigenschappen. In een enkele paragraaf worden de moeilijkheden gestipuleerd die men kan ondervinden bij het schatten van parameters, wanneer men overgaat tot implementatie van modellen met een generiek karakter.

1. Het beslissingsprincipe

1.1 In de beslissingstheorie onder zekerheid weten we hoe we dienen te beslissen.

Welke criteria moeten we echter aanleggen in onzekere situaties? De verwachtingswaarde? Dit zou een mogelijkheid zijn, vooral omdat dit beslissingscriterium gerechtvaardigd kan worden door de verwachte kwadratische afwijking. Deze wordt immers dan geminimaliseerd.

De beste keuze is dat alternatief te kiezen wat de meest geprefereerde kansdichtheid voor ons heeft. Deze voorkeur is persoonlijk van aard en er kan dus in het algemeen geen advies worden gegeven dat iedereen die kansmogelijkheden moet prefereren boven een andere kansdichtheid.

1.2 Uit de volgende 3 axioma's zullen wij ons beslissingscriterium afleiden.

<u>Axioma 1</u>: Stel $f(x)$ is een kansdichtheid, dan hoort bij iedere mogelijke kansdichtheid $f(x)$ een zekerheidsequivalent $\bar{x}$. Dat wil zeggen $\bar{x}$ is de hoogste uitkomst die wij voor het kansspel willen betalen, dan wel de laagste waarvoor wij het van de hand willen doen.

<u>Axioma 2</u>: Veronderstel dat g het volgende kansspel representeert:

$$g = \begin{cases} M & \text{met kans } p \\ 0 & \text{met kans } 1-p \end{cases}$$

Laat $\bar{x}_p$ het zekerheidsequivalent zijn, dan geldt als p stijgt van 0 tot 1 , $\bar{x}_p$ van 0 tot M zal stijgen.

<u>Axioma 3</u>: Veronderstel dat $f(x)$ een kansspel representeert met mogelijkheden $0, 1, \ldots, r, \ldots, M$ en respectievelijke kansen $f(0), f(1), \ldots, f(r), \ldots, f(M)$.

We kunnen het zekere bedrag r vervangen door een binair kansspel met uitkomsten 0 en M .

Stel deze kans is P_r , d.w.z. :

$$r = P_r.M + (1-P_r).0 \; .$$

Het kansspel $f(x)$ kunnen we dus nu vervangen door een nieuw kansspel, zeg $f^r(x)$, waarin de uitkomst op r niet meer voorkomt en wel:

$$f^r(0) = f(0) + f(r)(1 - P_r)$$
$$f^r(1) = f(1)$$
$$f^r(2) = f(2)$$
$$\vdots$$
$$f^r(r) = 0$$
$$\vdots$$
$$f^r(M) = f(M) + f_r\, P_r$$

Er geldt dat de zekerheidsequivalenten voor $f(x)$ en $f^r(x)$ uiteraard dezelfde zijn.

1.3 Als we dit voor alle uitkomsten doen, behalve 0 en M, dat wil zeggen dat we iedere prijs vervangen door een binair kansspel, dus:

$$1 = P_1.M + (1 - P_1).0$$
$$2 = P_2.M + (1 - P_2).0$$
$$\vdots$$
$$M-1 = P_{M-1}.M + (1 - P_{m-1}).0$$

Dan wordt uiteindelijk het kansspel $f(x)$ getransformeerd in een binair kansspel $g(x)$ met eenzelfde zekerheidsequivalent, waarbij g de volgende gedaante heeft:

$$g = \begin{cases} 0 \text{ met kans } f(0) + (1 - P_1)f(1) + \ldots + (1 - P_{M-1})f(M-1) \\ M \text{ met kans } f(M) + P_1\, f(1) + \ldots + P_{M-1}\, f(M-1) \end{cases}$$

Daar de P_j kansen representeren, kunnen we volgens axioma 2 P_0 op 0 en P_M op 1 normeren.
Wij vinden zo bij het kansspel $f(x)$ het getal:

$$(1) \qquad P(f) = \sum_{x=0}^{M} P_x\, f(x)$$

Voor twee willekeurige kansdichtheden $f(x)$ en $g(x)$ kunnen we nu $P(f)$ en $P(g)$ bepalen.
Als $P(f) > P(g)$, dan wordt $f(x)$ geprefereerd boven $g(x)$.
Waarmee we de preferentie-ordening hebben vastgelegd.

1.4 Daar P_x de kans aangeeft wat een beslissingsnemer over heeft om het zekere bedrag x te vervangen door een binair kansspel met mogelijkheden 0 en M , geeft P_x in feite een preferentie weer voor geld. Zodat P_x kan worden beschouwd als een nutswaarde.

Terwille van de uniforme relatie op dit gebied zullen we P_x voortaan met $u(x)$ noteren, ofwel:

$$P_x \equiv u(x) \quad .$$

Formule (1) wordt dan:

$$E\,[u(x)] = \sum_{x=0}^{M} u(x)\; f(x) \quad . \tag{2}$$

Natuurlijk hadden we de P's niet als kansen hoeven te interpreteren, maar zouden wij ze als relatieve gewichten ten opzichte van elkaar kunnen bepalen. Dit is immers het enige wat van belang is.
Het gevolg is nu dat het nut niet automatisch tussen 0 en 1 behoeft te liggen. Dit heeft tot gevolg dat de schaal waarop wij meten niet eenduidig is, maar in feite dezelfde rangordening weergeeft als er een positieve lineaire transformatie op wordt toegepast. Een dergelijke schaal wordt ook wel een kardinale schaal genoemd.

1.5 Gevolg is nu, dat wanneer bovenstaande 3 axioma's geaccepteerd worden, het verwachte nut van een project het beslissingscriterium is.

1.6 De eer van deze axiomatische aanpak komt toe aan F. Ramsey[2].
Later is dit door Von Neumann en Morgenstern[3] geherintroduceerd.

1.7 Enkele veel voorkomende nutsfuncties zijn:

$$u(x) = ax + b$$

$$u(x) = ax^2 + bx + c$$

$$u(x) = \exp\,[-ax + b]$$

$$u(x) = \log\,[ax + b]$$

etc.

Wanneer de nutsfunctie concaaf is spreekt men over een risicoaverse beslisser; wanneer de nutsfuntie convex is over een risicoliefhebber.

1.8 Vaak wordt gesuggereerd dat beleggers en investeerders alleen op de eerste 2 momenten van de verdeling hoeven te letten. Meestal is dit een goede benadering, maar dit hoeft niet altijd het geval te zijn. Dit blijkt alleen al uit het feit als wij de nutsfunctie $u(x)$ benaderen met behulp van een Taylorreeks.
Kiezen wij als vast punt in het domein $E(x)$, dan wordt de Taylor-benadering:

(3) $$u(x) = a_0 + a_1(x - Ex) + a_2(x - Ex)^2 + a_3(x - Ex)^3 + \dots ,$$

waarbij:
$$a_0 = u(Ex)$$
$$a_1 = \frac{d\ u(Ex)}{dx}$$
$$a_2 = \frac{d^2\ u(Ex)}{d\,x^2}$$
$$a_3 = \frac{d^3\ u(Ex)}{d\,x^3}$$

Nemen wij het verwachte nut, dan gaat formule (3) over in:

(4) $$E\ u(x) = a_0 + a_1E(x - Ex) + a_2E(x - Ex)^2 + a_3E(x - Ex)^3 + \dots$$

Wij zien dus dat als alleen op de eerste twee centrale momenten wordt gelet een groot aantal hogere worden verwaarloosd.
Ter illustratie een voorbeeld:

Stel $f(x)$ is normaal verdeeld met verwachting $\mu = 1$ en variantie $\sigma^2 = 1$, dat wil zeggen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\tfrac{1}{2}(x - 1)^2\} .$$

Stel verder dat $g(x)$ Poisson verdeeld is met parameter $\lambda = 1$, ofwel:

$$g(x) = e^{-1} \frac{1}{x!} \qquad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

Berekening leert ons dan dat de verwachting en variantie ook hier gelijk aan 1 zijn. Op basis van de eerste 2 momenten is men dus indifferent tussen $f(x)$ en $g(x)$.

Neem nu aan dat de nutsfunctie van de belegger e^{-sx} is met $s > 0$. Dan is het verwachte nut voor g en f respectievelijk:

$$E\,[u(x)] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \frac{e^{-1}}{x!} = e^{(e^{-s}-1)}$$
$$E\,[u(x)] = e^{-s + \frac{s^2}{2}} .$$

Als $s = 2$, dan geldt $E[u(x)] = 0{,}42$ voor g en $E[u(x)] = 1$ voor f . Er is dus een duidelijk verschil en wel een voorkeur voor verdeling f .

Natuurlijk kan men in deze gevallen de scheefheidscoëfficiënt bepalen; een positieve scheefheid heeft de voorkeur bij risico-averse beleggers. Toch kan ook dan de verkeerde beslissing nog worden genomen. Hiertoe beschouwen wij weer bovenstaand voorbeeld.
Het blijkt dan dat de scheefheidscoëfficiënt welke wordt gedefinieerd door: $\frac{E(x-Ex)^3}{\sigma^3}$ voor f gelijk aan 0 is en voor g gelijk aan 1 is. Zodat de kansdichtheid g ten onrechte zal prevaleren als de belegger bovenstaande nutsfunctie heeft.

2. Efficiënte portefeuilles en het Sharpe single Index model

2.1 Wanneer verondersteld mag worden dat de aandelenremdementen een normale verdeling volgen, kan de verdeling volledig beschreven worden door de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie.
Hoe hoger de standaarddeviatie is des te hoger wordt het risico geacht. Deze gedachte heeft Markowitz (4) op het idee gebracht efficiënte portefeuilles samen te stellen.
Een portefeuille heet effeciënt als er geen andere portefeuille bestaat met een lager risico bij eenzelfde verwacht rendement, of met een hoger verwacht rendement bij eenzelfde risico

2.2 Definieer:

z_j = de fractie belegd in aandelen van onderneming j

r_j = het rendement behaald op de aandelen van onderneming j met verwachting μ_j en variantie σ_j^2

$$\sigma_{ij} = \text{cov}\,(r_i\ ,\ r_j)$$

$$z = (z_1, \ldots, z_n)'$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Het probleem wordt dan:

$$\min \; z'\,\Sigma\, z - \lambda\,\mu' z$$

onder $\Sigma\, z_j = 1$

$z \geq 0$

waarbij λ een niet-negatieve parameter is. Voor een vaste waarde van λ is dit een kwadratisch programmeringsprobleem. De curve die voor de de efficiënte portefeuilles het rendement tegen het risico afzet wordt de efficiënte grenslijn genoemd.

2.3 Een bezwaar van dit model was dat er veel (= n(n-1) covarianties moeten worden uitgerekend.
Sharpe (5) leidde het volgende model af:
Uitgangspunt is dat de aandelen rendementen een multivariate normale verdeling volgen.
Het gevolg hiervan is dat het rendement op de marktportefeuille (r_m) hierdoor ook normaal verdeeld is.

Als r_i en r_m ongeveer een bivariate normale verdeling volgen geldt:

$$(1) \qquad r_i = \alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i$$

met $\beta_i = \dfrac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$ en $\alpha_i = \mu_i - \beta_i \mu_m$

ook wel de regressie parameters voor het i-de aandeel.
Als nu Sharpe's single index benadering wordt toegepast kunnen de verwachte rendementen, de covarianties en varianties uitgedrukt worden met behulp van formule (1).
Immers:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2$$

waarbij $\beta_i^2 \sigma_m^2$ het systematische risico van aandeel i wordt genoemd en $\sigma_{\varepsilon i}^2$ het specifieke risico.
Dit specifieke risico kan gereduceerd worden door diversificatie.
Tevens is indien de storingstermen ongecorreleerd zijn:

$$\text{cov}\ (r_i, r_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

waarbij ρ_{ij} de correlatie tussen de rendementen van i en j zijn en σ_i, σ_j de respectievelijke standaarddeviaties.
Er kan nu een substantiële rekenbesparing worden bereikt om de efficiënten lijn te berekenen.
Op de benaderingswijze à la Markowitz zouden er bij 200 aandelen, 19.900 covarianties worden berekend. In tegenstelling tot het single index model waarvan maar ongeveer 600 data worden berekend.

3. Portefeuilletheorie uitgaande van kwadratische nutsfuncties van de beleggers

3.1 In deze paragraaf zullen wij geen veronderstellingen doen over de rendementsverdeling. Dit betekent dat iedere mogelijke verdeling kan worden toegepast, mits de eerste 2 momenten eindig zijn.
De benaderingswijze zal uitgaan van de veronderstelling dat alle beleggers een kwadratische nutsfunctie hebben. Naast de portefeuille eigenschappen zullen enkele andere resultaten worden besproken die overeenkomen met bevindingen van andere auteurs die onder geheel andere veronderstellingen tot dezelfde resultaten zijn gekomen.

3.2 Veronderstel dat de nutsfunctie van iedere belegger kwadratisch is, dat wil zeggen:

$$u_i\,(Y_i) = Y_i - c_i\,Y_i^2 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

waarbij u_i = Nutsfunctie van belegger i
Y_i = Eindvermogen van belegger i
c_i = gegeven constante met $c_i > 0$.

Definieer verder de volgende variabelen:

W_i = Initiële vermogen van belegger i

m_i = Bedrag dat belegger i in risicovrije titels belegt

z_{ij} = Fractie van onderneming j waarin belegger i belegt

r = 1 + risicovrije rentevoet

v_j = totaal vermogen van onderneming j

p_j = Eigenvermogen van onderneming j

d_j = Vreemdvermogen van onderneming j

x_j = Totale waarde van onderneming j aan het einde van de periode, inclusief dividend, met verwachting μ_j en variantie σ_j^2 .

Wanneer een belegger m_i in risicovrije titels belegt die door een centrale instelling, niet een onderneming zijnde, worden uitgegeven en het overige in aandelen, dan is de belegger gebonden aan de volgende budgetrestrictie:

$$W_i = m_i + \sum_{j=1}^{n} z_{ij}\,p_j \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

Als wij er van uitgaan dat aan het einde van de periode alles wordt geliquideerd, dan is het stochastische vermogen van belegger i aan het einde van de periode gelijk aan:

$$(3) \qquad Y_i = r\,m_i + \sum_{j=1}^{n} z_{ij}\,(x_j - r\,d_j)$$

$x_j - r\,d_j$ is het bedrag dat overblijft voor de aandeelhouders nadat de hoofdsom en intrestlast zijn betaald.
Substitutie van (2) in (3) geeft:

$$(4) \qquad Y_i = r\,W_i + \sum_{j=1}^{n} z_{ij}\,(x_j - r\,v_j)$$

De belegger zal zijn vraag naar aandelen zo bepalen, dat zijn verwacht nut maximaal is. In het algemeen betekent dit:

$$(5) \qquad E\,[u_i'\,(Y_i)(x_j - r\,v_j)] = 0$$

Het totaal wat de ondernemingen tezamen lenen kan niet meer zijn dan het totaal wat de beleggers uitlenen:

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{m} m_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Daar de ondernemingen van de aandeelhouders zijn, geldt tenslotte:

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{m} z_{ij} = 1$$

Te bepalen zijn nu: z_{ij} $\quad (i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n)$

3.3 Uit vergelijking (1) zien wij dat:

$$u_i'\,(Y_i) = 1 - 2\,c_i\,Y_i \quad .$$

Vergelijking (5) wordt dan:

$$E\,[1 - 2\,c_i\,Y_i)\,(x_j - r\,v_j)\,] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(8) \qquad (u_j - r\,v_j) - 2\,c_i\,\{E\,Y_i\,x_j - r\,v_j\,E\,Y_i\} = 0 \quad .$$

Daar $\quad Y_i\, x_j \;=\; r\, W_i\, x_j + \sum_{k=1}^{n} z_{ik}\, x_k\, x_j - \sum_{k=1}^{n} z_{ik}\, r\, v_k\, x_j \quad ,$

en $\quad E\, x_k\, x_j - E\, x_k\, E\, x_j \;=\; \sigma_{jk} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad E\, x_k\, x_j \;=\; \sigma_{jk} + \mu_k\, \mu_j \quad ,$

kan vergelijking (8) als volgt worden geschreven:

$$(\mu_j - r\, v_j) - 2\, c_i \{ r\, W_i\, \mu_j + \sum_{k=1}^{n} z_{ik}\, (\sigma_{jk} + \mu_k\, \mu_j - r\, v_k\, \mu_j) \} +$$

$$+ 2\, c_i\, r\, v_j \{ r\, W_i + \sum_{k=1}^{n} z_{ik}\, (\mu_k - r\, v_k) \} \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mu_j - r\, v_j)\, (1 - 2\, c_i\, r\, W_i) - 2\, c_i \{ \sum_{k=1}^{n} z_{ik} (\sigma_{jk} + \mu_k\, \mu_j - r\, v_k\, \mu_j)$$

$$- r\, v_j \sum_{k=1}^{n} z_{ik}\, (\mu_k - r\, v_k) \} \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mu_j - r\, v_j)\, (1 - 2\, c_i\, r\, W_i) - 2\, c_i \{ \sum_{k=1}^{n} z_{ik} (\sigma_{jk} + \mu_k\, \mu_j - r\, v_k\, \mu_j - r\, v_j$$

$$+ r^2\, v_j\, v_k) \} \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mu_j - r\, v_j)\, (1 - 2\, c_i\, r\, W_i) - 2\, c_i \{ \sum_{k=1}^{n} z_{ik} (\sigma_{jk} + (\mu_j - r\, v_j)(\mu_k - r\, v_k)$$

ofwel:

$$(9) \qquad (\mu_j - r\, v_j)\, \left(\frac{1}{2c_i} - r\, W_i \right) \;=\; \{ \sum_{k=1}^{n} z_{ik}\, (\sigma_{jk} + (\mu_j - r\, v_j)(\mu_k - r\, v_k)$$

(i = 1, ...

Hetgeen de vraag naar aandelen weergeeft.

Zij $\bar{z}_j$ de oplossing van:

$$\sum_k z_k\, (\sigma_{jk} + (\mu_j - r\, v_j)(\mu_k - r\, v_k)) \;=\; (\mu_j - r\, v_j) \quad ,$$

dan is de oplossing van (9):

$$z_{ij} \;=\; \bar{z}_j \left(\frac{1}{2\, c_i} - r\, W_i \right) \qquad (j = 1, \ldots, n) \quad .$$

Sommeren over i geeft:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} \;=\; \bar{z}_j \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2\, c_i} - r \sum_{i=1}^{m} W_i \right) \quad .$$

Met (7) volgt nu:

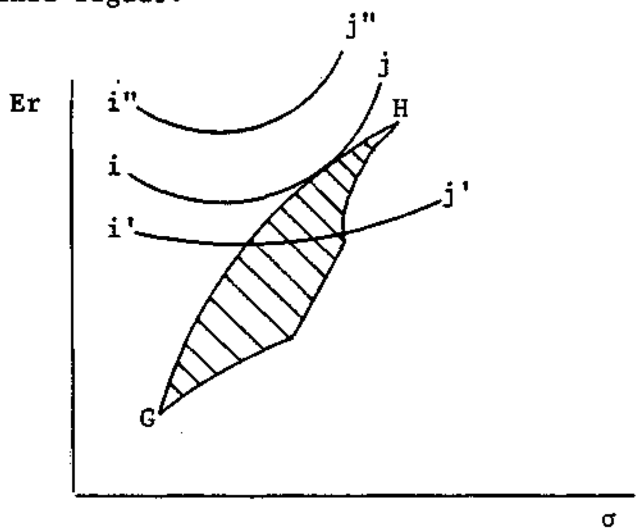
$$\bar{z}_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2c_i} - r \sum_{i=1}^{m} W_i} \quad ,$$

zodat:

$$(10) \qquad z_{ij} = \frac{\frac{1}{2c_i} - r\,W_i}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2c_i} - r \sum_{i=1}^{m} W_i}$$

wat onafhankelijk van j is.
Met andere woorden: in de evenwichtssituatie houden beleggers dezelfde percentages van de uitstaande aandelen van alle ondernemingen aan.

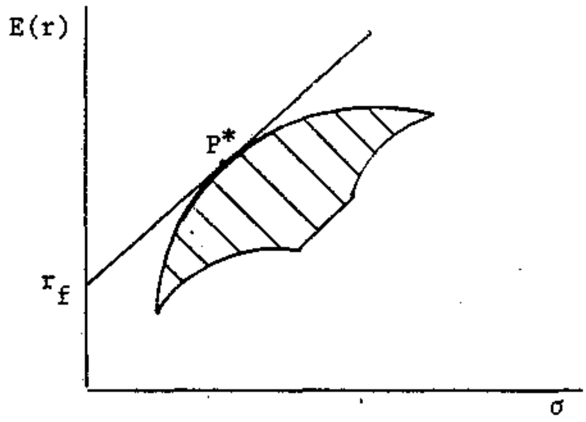
Intuïtief wekt het wat bevreemding op dat bij de bepaling van de fracties μ_j en σ_j^2 geen rol spelen. Wat is hier de oorzaak van?
Om deze vraag te beantwoorden veronderstellen wij dat de indifferentiecurven (= constante verwachte nutscurven) één of andere functie van Er en σ^2 zijn *).
Gegeven de efficiënte grenslijn kan een belegger dan die portefeuille op de efficiente grenslijn kiezen welke zijn verwachtnut maximaliseert.
Zie onderstaande figuur:



Hier stelt GH de efficiënte grenslijn voor en ij, i'j', i"j" enkele indifferentiecurven. Indifferentiecurve ij raakt de efficiënte grenslijn en zal daarom het hoogste verwachtnut realiseren.

*) Dit is gepermitteerd, immers $u(x) = x - cx^2$, zodat
$E\,u(x) = Ex - c\,E\,x^2 = Ex + c(Ex)^2 + c\,\sigma^2$.

Echter doordat er een risicovrij rendement f is, kunnen nu de volgende combinaties worden gemaakt:



Alle punten van de efficiënte grenslijn worden nu gedomineerd door de lijn $r_f P^*$; immers op deze lijn zijn combinaties van risicodragende titels en risicovrije titels beter. Zij geven namelijk bij een zelfde risico een hoger verwachtrendement.
Een belegger i zal dan een fractie α_i in de risicodragende portefeuille P^* beleggen en $(1-\alpha_i)$ in risicovrije titels. Met andere woorden: in ieder aandeel in de portefeuille wordt een zelfde fractie belegd onafhankelijk van μ_j en σ_j^2 van onderneming j .

Conclusie: *Indien de voorkeur van geld van de beleggers door een kwadratische nutsfunctie kan worden herschreven, dan wordt er extreem door de beleggers gediversifieerd.*

3.4 Wij zullen nu enkele relaties afleiden die in de financieringsliteratuur wijd bekend zijn. De eerste is een propositie van Modigliani en Miller (MM) [6]. MM beweren dat de waarde van de onderneming onafhankelijk is van de financieringsmix.

Als wij gebruik maken van het feit dat in het evenwicht $z_{i1} = z_{i2} = \ldots$ $\ldots = z_{in}$, dus $z_{ik} = z_i \ \forall\, k$, kan in vergelijking (9) z_{ik} buiten het sommatieteken worden gehaald. We krijgen dan:

$$z_i \sum_k \{\sigma_{jk} + (\mu_j - r\,v_j)(\mu_k - r\,v_k)\} = (\mu_j - r\,v_j)\left(\frac{1}{2c_i} - r\,W_i\right) \quad .$$

Substitutie van (10) in deze vergelijking geeft:

$$\frac{\frac{1}{2c_i} - r\,W_i}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2c_i} - r \sum_{i=1}^{m} W_i} \sum_{k=1}^{n} (\sigma_{jk} + (\mu_j - r\,v_j)(\mu_k - r\,v_k)) =$$

$$= (\mu_j - r\,v_j)\left(\frac{1}{2c_i} - r\,W_i\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$(11) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \{\sigma_{jk} + (\mu_j - r\,v_j)(\mu_k - r\,v_k)\} = (\mu_j - r\,v_j)\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2c_i} - r\sum_{i=1}^{m} W_i\right) .$$

Bedenken wij dat

$$\sum_{i=1}^{m} W_i = \sum_{i=1}^{m} m_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} z_{ij}\, p_j = \sum_{j=1}^{n} d_j + \sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{j=1}^{n} v_j .$$

Dan wordt vergelijking (11):

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk} - (\mu_j - r\,v_j)\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2c_i} - \sum_{k=1}^{n} \mu_k\right) = 0 ,$$

ofwel:

$$v_j = \frac{1}{r}\left(\mu_j - \frac{\sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2c_i} - \sum_{k=1}^{n} \mu_k}\right) .$$

Definieer nu:

$$b_j = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk} \quad \text{en}$$

$$R = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2c_i} - \sum_{k=1}^{n} \mu_k} .$$

Dan is de evenwichtswaarde van onderneming j gelijk aan:

$$(12) \qquad v_j = \frac{1}{r}(\mu_j - R\,b_j) ,$$

waarmee aangetoond is dat v_j onafhankelijk van d_j, de omvang van het vreemdvermogen is.

Gebruiken we (A.10), dan zien wij dat:

$$b_j = \mathrm{cov}\left(x_j , \sum_{k=1}^{n} x_k\right) ,$$

zodat b_j kan worden geïnterpreteerd als het systematisch risico van onderneming j. Hierbij wordt dus niet alleen σ_j^2 het risico van de onderneming gemeten, maar ook de samenhang met de hele economie.

R is hetzelfde voor alle ondernemingen en zij moet dus gezien worden als een maatstaf voor de risicoaversie van de markt. Het is eenvoudig aan te tonen dat R een soort harmonisch gemiddelde is van de absolute risicoaversiefunctie van de beleggers*)

Stelling:

$$R = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} E\left(\frac{1}{r_i\ (Y_i)}\right)} .$$

Bewijs:

$$r_i\ (Y_i) = \frac{2c_i}{1 - 2c_i\ Y_i} \Rightarrow E\ \frac{1}{r_i\ (Y_i)} = \frac{1}{2c_i} - E\ (Y_i)$$

$$E\ Y_i = r\ W_i + \sum_{j=1}^{n} z_{ij}\ (\mu_j - r\ v_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} E\ Y_i = r \sum_{i=1}^{m} W_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} z_{ij}\ (\mu_j - r\ v_j)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} E\ Y_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j$$

waarmee het gestelde is bewezen.

Conclusie: *Als alle beleggers dezelfde kwadratische nutsfunctie hebben, dan is de waarde van een onderneming onafhankelijk van de verhouding eigen-/vreemdvermogen.*
De waarde is gelijk aan de verdisconteerde waarde tegen de risicovrije rentevoet van het zekerheidsequivalent van de kasontvangsten.
Dit zekerheidsequivalent is de verwachte waarde van de kasontvangsten verminderd met een produkt van het systematisch risico van een onderneming en een gemiddelde marktaversie.

---

*) De absolute risicoaversiefunctie wordt gedefinieerd door:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \Leftrightarrow r(x) = -\frac{d}{dx}\ [\log u'(x)] .$$

Het is nu eenvoudig in te zien dat als twee nutsfuncties dezelfde r(x) hebben, zij een positieve lineaire transformatie van elkaar verschillen. Omdat de nutsschaal cardinaal is betekent dit dat de functies dezelfde preferentie-ordening weergeven.

3.5 Een tweede bekende relatie uit de financieringsliteratuur is het Sharpe-Lintner-model.
Met behulp van dit model wordt aangetoond dat het verwachte rendement op aandeel j een lineair verband houdt met het verwachte rendement op de gehele markt. De relatie is als volgt:

$$(13) \qquad E\,(r_j) = r_f + [E\,(r_m) - r_t]\,\beta_j \quad ,$$

waarbij: r_f = het risicovrije rendement

$$\beta_j = \frac{\text{cov}\,(r_j\,,\,r_m)}{\text{var}\,(r_m)} = \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2}$$

r_j = het rendement op een aandeel in onderneming j

r_m = het rendement op de marktportefeuille

Deze lijn wordt ook wel de Security Market Line genoemd.

Daar $1 + E\,(r_j)$ in ons geval gelijk is aan:

$$(14) \qquad 1 + E\,(r_j) = \frac{\mu_j - r\,d_j}{P_j}$$

kunnen wij met behulp van (12) schrijven:

$$1 + E\,(r_j) = \frac{r\,v_j + R\,b_j - r\,d_j}{P_j} = \frac{r\,P_j + R\,b_j}{P_j} = r + \frac{R\,b_j}{P_j}$$

$$\Rightarrow \quad E\,(r_j) = r_f + \frac{R\,b_j}{P_j} = r_f + R\,P_m\,\frac{\text{cov}\,(x_j\,,\,x_m)}{P_j\,P_m} =$$

$$= r_f + R\,P_m\,\text{cov}\,(r_j\,,\,r_m) =$$

$$= r_f + R\,P_m\,\text{var}\,(r_m)\,\frac{\text{cov}\,(r_j\,,\,r_m)}{\text{var}\,(r_m)} \quad \Rightarrow$$

$$(15) \qquad E\,(r_j) = r_f + R\,P_m\,\text{var}\,(r_m)\,\beta_j \quad ,$$

zodat:

$$E\ (r_m) = r_f + R\ P_m\ \text{var}\ (r_m) \qquad (\text{immers: } \beta_m = 1)$$

Deze laatste relatie ingevuld in (15) geeft:

$$E\ (r_j) = r_f + [E\ (r_m) - r_f]\ \beta_j \quad ,$$

waarmee de relatie is aangetoond door uit te gaan van kwadratische nutsfuncties voor alle beleggers.

Toepassing van dit model is mogelijk wanneer men bijvoorbeeld de vermogenskostenvoet van het eigenvermogen wil kennen van een nieuw project. $E\ (r_j)$ fungeert dan als de minimale vereiste rendementseis indien een onderneming een nieuw project wil entameren. Voor andere mogelijkheden wordt verwezen naar de handboeken op het terrein van de financiering (zie noten (8) en (9)).

4. Portefeuilleselectie in geval de rendementen 'Stable' verdeeld zijn

4.1 Mandelbrot[10] was één van de eersten die zich in 1963 afvroeg of de rendementen van aandelen werkelijk door een normale verdeling konden worden beschreven. Wat was de aanleiding om deze vraag te stellen? Hiertoe komen twee redenen voor in aanmerking.

Ten eerste, deze reden is op empirische gronden gebaseerd; Mandelbrot constateerde dat in de staarten zich meer kansmassa bevond dan dat door de normale verdeling verklaard kon worden.

Ten tweede, geldt er theoretisch dat de enige limiet verdeling van sommen van identiek onafhankelijke stochastische variabelen de stabiele verdeling is (zie voor bewijs Gnedenko en Kolmogorov pp. 162, 163).
Deze stelling is een uitbreiding van de bekende centrale limietstelling. Eindigheid van de eerste twee momenten behoeft nu niet te worden verondersteld zoals bij de centrale limietstelling wel het geval is.

De relatie moge nu duidelijk zijn immers in de portefeuilletheorie wordt het portefeuillerendement gevonden door het rendement van de afzonderlijke aandelen op te tellen. Verondersteld zal worden dat de relatie tussen de aandelenrendementen volgens een multivariate stabiele verdeling te beschrijven zijn.
Het probleem bij het laten varen van de normaliteitsveronderstelling is dat de problemen gecompliceerder worden en het aantal voorhanden instrumenten aanzienlijk minder zijn. Vooral bij het schatten van parameters wordt de zaak moeilijker; wij gaan hier niet verder op in *).
Wij beginnen eerst met enkele eigenschappen van stable distributions in het algemeen.

4.2 Een definitie van de stabiele verdeling is de volgende: laat X en Y onafhankelijk zijn met verdelingsfunctie F. Dan is F stabiel als bij ieder tweetal elementen $c_1 > 0$ en $c_2 > 0$ en een c en γ bestaat zodat $z = (c_1X + c_2Y + c) / \gamma$ ook F als verdelingsfunctie heeft.

*) Verwezen wordt naar de literatuur waarin empirisch onderzoek op dit gebied is verricht, zoals bijvoorbeeld door Mandelbrot[17].

Het komt hierop neer, dat als de som van lineaire combinaties van onafhankelijke en identieke verdeelde stochastische variabelen tot de zelfde familie van verdelingen behoort, dan wordt die familie stabiel genoemd.

Van de stabiele verdelingen is bekend dat zij continu zijn. Men kent de dichtheden, maar ze zijn veelal te gecompliceerd om ze expliciet op te schrijven. De verdelingen kunnen echter bestudeerd worden met behulp van de karakteristieke functies.

Zij $\phi(t)$ de karakteristieke functie, dan is de logaritme van de karakteristieke functie van de stabiele verdeling door Lévy (1924) als volgt gedefinieerd:

$$(1) \qquad \log \phi(t) = i\,a\,t - \gamma\,|t|^{\alpha}\,[1 + i\,\beta \frac{t}{|t|}\,\omega(t,\alpha)] \quad ,$$

waarbij:

$$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{als } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log |t| & \text{als } \alpha = 1 \end{cases}$$

Hierbij is:

- a een locatieparameter
- γ een schaalparameter
- β geeft de scheefheid van de verdeling aan (als $\beta = 0$, dan is de verdeling symmetrisch)
- α de karakteristieke exponent (van de normale verdeling is $\alpha = 2$)

Dus de univariate stabiele familie wordt gekenmerkt door 4 parameters $(a, \gamma, \beta, \alpha)$ met:

$$-\infty < a < \infty \quad , \quad \gamma \geq 0 \quad , \quad -1 \leq \beta \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \alpha \leq 2 \quad .$$

Verder wordt $\frac{t}{|t|}$ per definitie op 0 gesteld als $t = 0$.

4.3 Enkele elementaire eigenschappen zullen hieronder worden gerubriceerd:

1 Alle niet ontaarde stabiele verdelingen zijn continu.

2 Voor $\alpha = 1$, $\beta = 0$ correspondeert $\phi(t)$ met de Cauchy verdelingen.

3 Voor $\alpha = 2$, $\beta = 0$ correspondeert $\phi(t)$ met de normale verdeling.

4 Voor $0 < \alpha \leq 1$ hebben de leden van de stabiele familie geen eerste orde of hogere orde momenten
Voor $1 < \alpha < 2$ bezit de stabiele verdeling momenten van de orde δ met $\delta < \alpha$

5 De stabiele stochastische variabele is positief dan en slechts dan als $\beta = 1$, $\alpha < 1$ en $a \leq 0$.

4.4 In 1937 heeft Lévy de univariate verdeling uitgebreid tot een multivariate verdeling. Wij zullen hier niet op ingaan, maar verwijzen naar de handboeken (zie noten (11), (12), (13) en (14)).
Wij beperken ons tot die multivariate stabiele verdelingen die symmetrisch zijn ten opzichte van een punt in de p-ruimte. Dat wil zeggen $\beta(t) = 0$.
De logaritme van de karakteristieke functie van een $p \times 1$ vector Y kan dan worden gegeven door:

$$\text{(2)} \qquad \text{Log } \phi_Y(t) = i\,a'\,t - \gamma(t) \qquad \gamma > 0 \quad ,$$

waarbij $\gamma(t)$ positief homogeen van de graad α is met $a = (a_1, \ldots, a_p)'$ en $t = (t_1, \ldots, t_p)'$.

4.5 In het algemeen is de probleemformulering als volgt:

$$\begin{array}{ll} \max & E\,[u] \\ \text{onder} & z'\tau = 1 \\ & z_j \geq 0 \end{array}$$

waarbij:

$z' = (z_1, \ldots, z_n)$ met z_j de fractie belegd in onderneming j

$\tau = (1, \ldots, 1)'$.

4.6 Laat P het portefeuillerendement aangeven, dat wil zeggen:

$$P = z'r \qquad \text{en} \qquad r = (r_1, \ldots, r_n)' \; .$$

Het verwachte rendement op een portefeuille is dan:

$$E(P) = z' \, E(r) \quad .$$

Stel dat r een multivariate symmetrische stabiele verdeling volgt met als logaritme van de karakteristieke functie:

$$(3) \qquad \log \phi_r(t) = i \, a' \, t - \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (t' \, \Omega_j \, t)^{\alpha/2}$$

met $a = (a_1, \ldots, a_p)'$ de locatie vector .

Hierbij is dus $\gamma(t)$ gelijk aan $\tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (t'\Omega_j \, t)^{\alpha/2}$ gekozen.
$\phi_r(t)$ is dan de karakteristieke functie van een niet singuliere multivariate symmetrische stabiele verdeling van order m en schaalmatrices Ω_j .
Als $\alpha > 1$*) dan is de locatie vector gelijk aan de verwachting en geldt er dus:

$$E(P) = z'a \quad .$$

De karakteristieke functie van de scalair P wordt dan gegeven door:

$$\phi_P(v) = E \, e^{evP} = E \, e^{ivz'r} \qquad \text{met scalair } v \; .$$

Daar $\phi_r(t) = E \, e^{it'r}$ zien wij dat:

$$\phi_P(v) = \phi_r(vz) \quad ,$$

zodat de logaritme van het portefeuillerendement gelijk is aan:

$$(4) \qquad \log \phi_P(v) = i \, v \, (z'a) - \tfrac{1}{2} \, |v|^{\alpha} \sum_{j=1}^{m} (z' \, \Omega_j \, z)^{\alpha/2}$$

---

*) Verondersteld wordt dat $1 < \alpha \leq 2$; dit blijkt ook uit de empirische studies, zie bijvoorbeeld Blume[16] en Mandelbrot[17] .

4.7 De probleemstelling zoals in 4.6 geformuleerd blijkt te algemeen te zijn. Voor de meeste nutsfuncties wordt dit een niet-lineair programmeringsprobleem. Eenvoudige resultaten zijn alleen mogelijk met exponentiële nutsfuncties. Wij geven een voorbeeld:

Stel $\quad u(P) = 1 - e^{-bP} \quad$ met $\quad b > 0$

en bedenken wij dat:

$$E\,[e^{-bP}] = \phi_P(ib) \qquad (\text{immers } i^2 = -1)$$

dan is dus:

$$(5) \qquad E\,[u(P)] = 1 - \exp\,[a'z\,b + \frac{b^\alpha}{2} \sum_{j=1}^{m} (z'\,\Omega_j\,z)^{\alpha/2}] \quad .$$

Vergelijking (5) maximaliseren is equivalent met

$$\max\,\{a'z\,b + \frac{b^\alpha}{2} \sum_{j=1}^{m} (z'\,\Omega_j\,z)^{\alpha/2}\} \quad .$$

Natuurlijk moet bovendien aan de lineaire restricties worden voldaan zoals vermeld in 4.6.

4.8 In 4.3 is reeds gememoreerd dat de variantie oneindig is. In 4.7 hebben wij aangegeven hoe optimale portefeuilles kunnen worden samengesteld. Nu willen wij het begrip efficiënte portefeuilles introduceren. Hiervoor is nodig dat we kunnen spreken over de verandering in het verwacht rendement bij een verandering van het risico. Wij moeten dus het model met behulp van 2 parameters beschrijven, echter de variantie komt niet in aanmerking.

De schaalparameter γ varieert mee met de spreiding van de verdeling, is altijd eindig en kan dus dienst doen als maatstaf voor het risico. Voor $\alpha = 2$ correspondeert γ met $\sigma^2/2$.

Uit vergelijking (4) zien wij dat de schaalparameter van het risico gedefinieerd kan worden door:

$$(6) \qquad s(z) \equiv \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (z'\,\Omega_j\,z)^{\alpha/2} \quad .$$

We veronderstellen dan wel dat alle rendementen dezelfde karakteristieke exponent hebben. In 4.11 zullen wij deze veronderstelling laten vallen.

4.9 De verzameling van efficiënte portefeuilles kan worden gevonden door λ vast te nemen en door die waarden van z te kiezen die voldoen aan:

$$(7) \qquad \max_z \; [\lambda z'a - \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (z'\Omega_j z)^{\alpha/2}]$$

$$\text{onder} \quad z'\tau = 1$$

$$z_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \; .$$

Als $\alpha = 2$ is bovenstaand probleem een kwadratisch programmeringsprobleem. Voor $1 < \alpha < 2$ hebben wij te maken met een concaaf programmeringsprobleem, want de doelfunctie is een concave functie van z .

4.10 De veronderstelling dat alle ondernemingen dezelfde karakteristieke exponent hebben lijkt een vrij zware eis. Wij kunnen ons voorstellen dat per bedrijfstak eenzelfde karakteristieke exponent mogelijk is. Veronderstel nu dat er n_j aandelen zijn die dezelfde multivariate symmetrische stabiele verdelingen volgen met karakteristieke exponent α_j $(j = 1, \ldots, K)$ en

$$\sum_{j=1}^{K} n_j = n \; .$$

Laat Z_j een $n_j \times 1$ vector van fracties van aandelen zijn van het type met karakteristieke exponent α_j .

Definieer:

$R' = (R_1', \ldots, R_K')$ met $R : n \times 1$ vector.

R_j is de $n_j \times 1$ subvector van R die de aandelenrendement weergeeft met karakteristieke exponent α_j $j = 1, \ldots, K$.

Definieer:

$$P = \sum_{j=1}^{K} z_j' R_j \quad \text{het portefeuillerendement.}$$

De karakteristieke functie van P wordt dan gegeven door:

$$\phi_P(v) = E \exp(i v P) = \phi_R(v Z) \; .$$

Als $t' = (t_1', \ldots, t_K')$ en als

$$\log \phi_{R_k}(t_k) = i\, t_k' \Theta_k - \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (t_k' \Omega_{jk} t_k)^{\alpha_k/2} \; ,$$

dan is (op analoge wijze zoals in 4.7):

(8) $$\log \phi_p(v) = i\,v\,(Z'\Theta) - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{m} |v|^{\alpha_k/2} (Z_k'\,\Omega_{jk}\,Z_k)^{\alpha_k/2}$$

waarbij $\Theta' = (\Theta_1', \ldots, \Theta_K')$.
Verondersteld is dat alle R_j's onafhankelijk zijn.
Formule (8) is helaas geen representatie meer van een stabiele verdeling.
We zouden ook hier

(9) $$s(Z) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{m} (Z_k'\,\Omega_{jk}\,Z_k)^{\alpha_k/2}$$

als het risico van de portefeuille kunnen definiëren.
De efficiënte portefeuilles kunnen dan gevonden worden door:

(10) $$\left\{\lambda Z'\Theta - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{m} (Z_k'\,\Omega_{jk}\,Z_k)^{\alpha_k/2}\right\}$$

onder $Z'\tau = 1$

$Z_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n$

te maximaliseren.

4.11 Zoals al was aangekondigd heeft Fama[15)] het portefeuille selectie model beschreven uitgaande van het single index model.
Verondersteld wordt dan dat het rendement op een aandeel kan worden gerepresenteerd door een index. In formule:

$$r_j = a_j + b_j I + \varepsilon_j \qquad j = 1, \ldots, n \ .$$

b_j geeft de mate van samenhang weer tussen het rendement op de markt en aandeel j .

ε_j is een storing waarvan verondersteld wordt dat $E(\varepsilon_j) = 0$ $j = 1, \ldots, n$.

Uitgaande dat I en ε_j symmetrisch stabiel verdeeld zijn, is het eenvoudig in te zien dat r_j ook symmetrisch stabiel verdeeld is.
De schaal- en locatieparameter worden dan vervolgens door Fama afgeleid.
Uitgaande van deze grootheden gaat Fama na wanneer diversificatie zin heeft. Zijn conclusies zijn als volgt:

Als $\alpha = 1$ is diversificatie in het algemeen inefficiënt.

Voor $\alpha < 1$ kan diversificatie leiden tot een hogere spreiding van de rendementen.

Voor $\alpha > 1$ is diversificatie zinvol en naarmate α toeneemt tot 2 neemt de spreiding sneller af.

Wij ontlenen de volgende tabel:

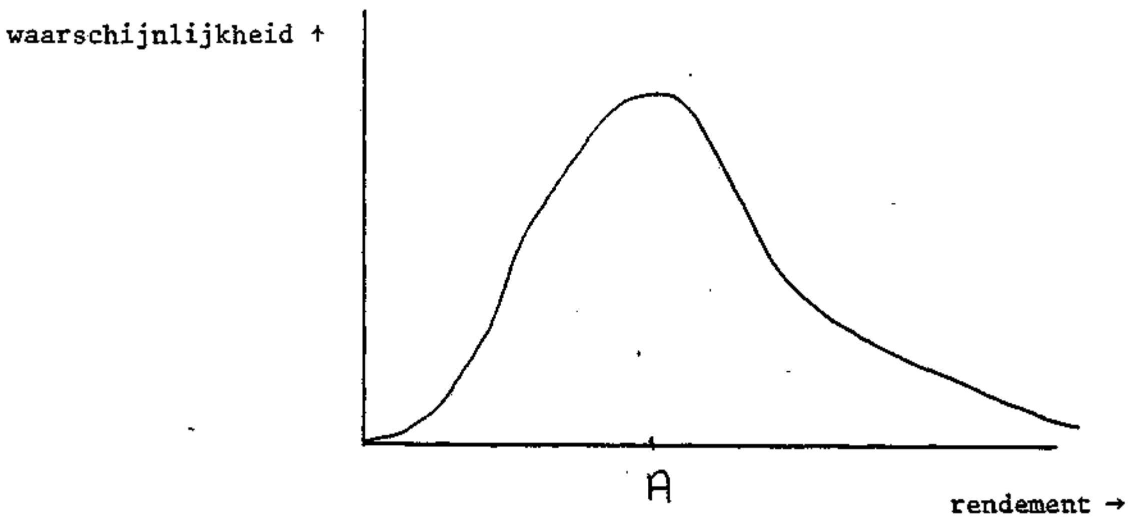
Tabel 1 Waarden van γ_P van verschillende waarden van α en n

	n			
α	1	10	100	1000
2,00	2	1,1	1,010	1,0010
1,75	2	1,178	1,0316	1,0056
1,50	2	1,316	1,100	1,0316
1,25	2	1,562	1,316	1,1780
1,00	2	2	2	2
0,50	2	4,162	11,000	32,6228

Bron: Portfolio Analysis In A Stable Paretian Market, E.F. Fama, Management Science (1965).

5. Portefeuille theorie als de rendementen een lognormale verdeling volgen

5.1 Een groot aantal auteurs zoals Hanoch en Levy [18] e.a. hebben voorgesteld aandelen te selecteren op basis van de eerste drie momenten van de verdeling.
Scheefheid is een maatstaf van de asymmetrie van de verdeling.
De normale verdeling heeft een scheefheid van 0 omdat deze symmetrisch is.
De lognormale verdeling in het hieronderstaande figuur heeft positieve scheefheid.



Punt A geeft de modus aan.
De lognormale verdeling heeft meer kansmassa rechts van dit punt dan links. Er wordt dan gezegd dat het scheef is voor hoge waarnemingen, ofwel positieve scheefheid.
Beleggers worden verondersteld een voorkeur te hebben voor positieve scheefheid.
Ceterus paribus prefereren zij portefeuilles met een hogere kans op hoge rendementen.
Als deze 3 momenten van belang zijn dan kan het portefeuilleprobleem het best worden gerepresenteerd in een drie-dimensionale ruimte met op de drie assen respectievelijk de verwachting, variantie en scheefheid.

De efficiënte verzameling moet dan uit die portefeuilles bestaan met een maximum aan verwacht rendement, een minimum aan variantie en een maximum aan positieve scheefheid.
Problemen doen zich voor doordat de scheefheid van een portefeuille niet op één of andere wijze de som is van de scheefheid van de afzonderlijke aandelen.

Empirische studies van Kendall [19)] en Osborne [20)] hebben aangetoond dat rendementen een lognormale verdeling kunnen volgen.
Wat betreft de resultaten die op dit terrein zijn geboekt, verwijzen wij naar Elton en Gruber [21)] en Ohlson en Ziemba [22)].

Tenslotte nog een enkele opmerking. Zoals eerst werd uitgegaan van een normale verdeling en lognormale verdeling, zo ontstond naar analogie de gedachte dat naast de stabiele verdeling de logstabiele verdeling een rol zou kunnen spelen in de portefeuilletheorie.
Een auteur die zich aan dit vraagstuk heeft gewijd is Ohlson [23)].
Het blijkt dat er dan geen enkel absoluut moment eindig is. Tevens is de som van twee logstabiele variabelen niet logstabiel verdeeld.
Gezien deze feiten en de schattingsproblematiek is het de vraag of deze verdeling van nut kan zijn in de portefeuilletheorie. Onzes inziens is dit niet het geval.

6. De truncated normale verdeling

6.1 Zo gauw niet meer verondersteld kan worden dat de rendementen normaal verdeeld zijn, lijkt het rekenwerk zich enorm uit te breiden.
Vaak moet van te voren worden bepaald of de extra computerkosten kunnen worden goedgemaakt door een betere benadering.
Zo ook in dit geval.
Men weet dat in een range van 6 standaarddeviates om het gemiddelde meer dan 99% van de kansmassa is gecentreerd en het is de vraag of door gebruik te maken van de truncated normale verdeling een verbetering kan worden aangebracht die ook leidt tot een substantiële besparing, dan wel een verhoging van het verwachtnut.
In deze paragraaf zullen wij in het kort de truncated normale verdeling behandelen en een enkel resultaat wat betreft het verwachtnut aan de lezer melden.

6.2 Als x een stochast is met kansdichtheid $f(x)$ en verdelingsfunctie $F(x)$ dan is de dichtheidsfunctie van de truncated stochastische x die geknipt is links van k_1 en rechts van k_2 als volgt:

$$\frac{f(x)}{F_x(k_1) - F_x(k_2)} \qquad x \in (k_1, k_2)$$

Voor de normale stochast betekent dit dat als $g(x)$ de normale kansdichtheid is de truncated normale dichtheid wordt gegeven door:

$$g(x) = \frac{f(x)}{c} \qquad \text{met} \quad c = \Phi(k_2) - \Phi(k_1)$$

met Φ de standaard normale verdeling, waarbij k_1 en k_2 vaste aantallen van de standaarddeviatie zijn dus:

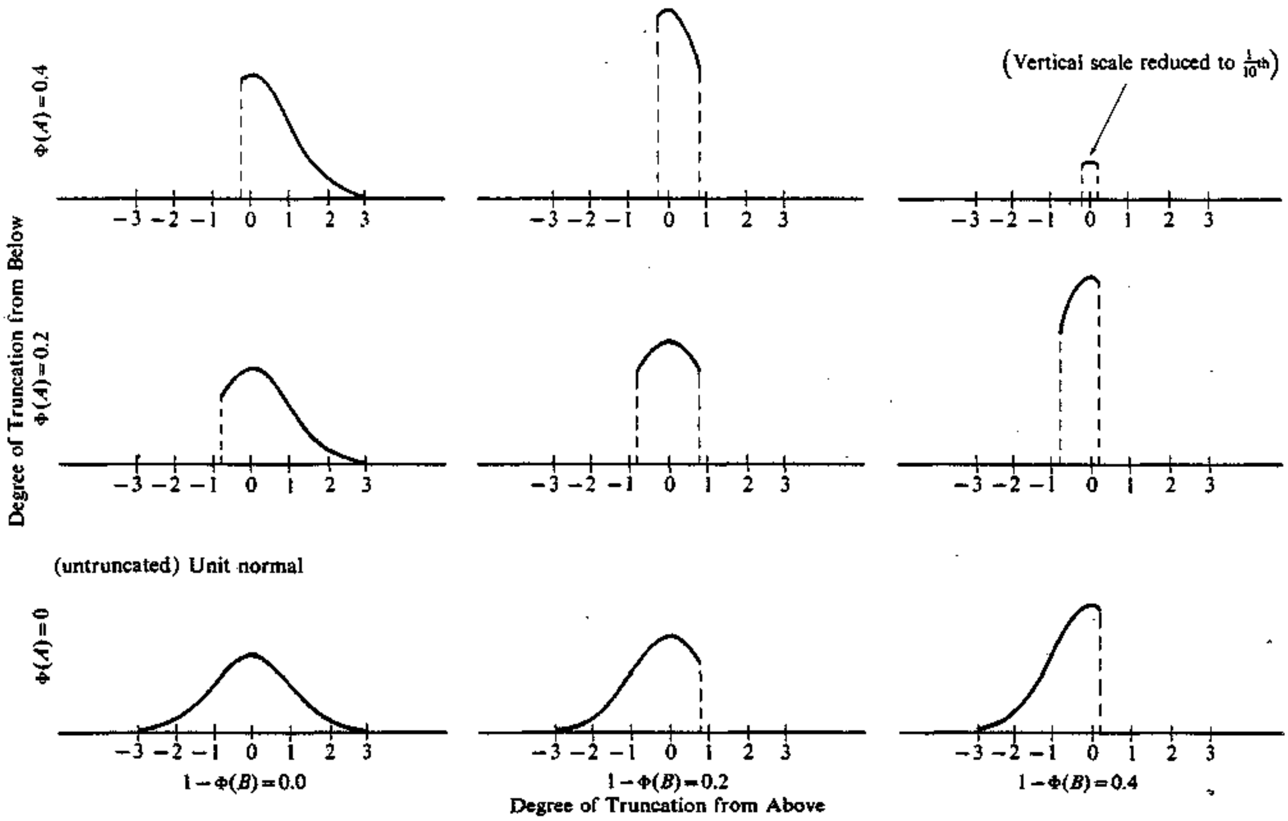
$$\mu - k_1\sigma < x < \mu + k_2\sigma \quad .$$

De hieronderstaande figuur geeft een aantal mogelijke truncations.

FIGURE 3

Density Functions of Some Truncated Unit Normal Distributions

Points of Truncation, $A < B$



Bron: Contiuous univariate distributions,
Norman L. Johnson & S. Kotz,
John Wiley & Sons 1970,
p. 82.

6.3 Wij zullen nu aangeven hoe groot het verschil in verwachtnut is bij een nutsfunctie van de vorm:

$$u(x) = 1 - \exp(-a\,x) \qquad \text{met} \quad a > 0$$

wanneer wel of niet wordt uitgegaan van truncation.

Als $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ dan geldt dat

(1) $$E[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, f(x)\, dx = 1 - \exp(-au + a^2\sigma^2/2)$$

Als x truncated normaal is dan is

(2) $$E[u(x)] = 1 - c^{-1}[\exp(-a\mu + a^2\sigma^2/2) \int_{\mu-k_1\sigma}^{\mu+k_2\sigma} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{(x-(\mu-a\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right] d.$$

Laat $z = (x - (\mu - a\sigma^2)) / \sigma$ dan wordt (2)

(3) $$E[u(x)] = 1 - \exp(-a\mu + a^2\sigma^2/2) \left[\frac{\Phi(a(k_2+\sigma) - \Phi(a(-k_1+\sigma))}{\Phi(k_2) - \Phi(-k_1)}\right] .$$

Het verschil tussen (1) en (3) is de term tussen de vierkante haken.

Wij geven enkele numerieke waarden:

Stel alternatief 1 is N(40,100).
Dan is het verwachtnut bij onderstaande truncations:

k_1 \ k_2	1	3	6	∞
1	1	1	1	1
3	1	1	1	1
6	0,608	0,3015	0,3024	0,3024
∞	-26,495	-22,054	-22,025	-22,025

Wij zien dus dat alleen de ondergrens van belang is.

Doen wij ditzelfde voor alternatief 2 : N(1,1),
dan vinden wij voor het verwachtnut:

k_1 \ k_2	1	3	6	∞
1	0,5760	0,6346	0,6352	0,6352
3	0,3023	0,4058	0,4065	0,4065
6	0,2870	0,3927	0,3935	0,3935
∞	0,2870	0,3927	0,3935	0,3935

Hier blijkt dat de verandering in het verwachtnut zowel voor k_1 als k_2 vrijwel nihil is.
Tot slot kan de vraag rijzen wanneer alternatief 1 ten onrechte de voorkeur krijgt als er niet uit was gegaan van een truncated verdeling, terwijl dit wel het geval is.
Wij constateren dat voor 6σ of minder het verwachtnut van 1 lager is dan van alternatief 2 .

<u>*Conclusie:*</u> *Uitgaande van een exponentiële nutsfunctie blijkt dat in tegenstelling van wat men intuïtief verwacht, het verwachtnut vrij veel kan verschillen wanneer er wel of niet wordt 'getrunceerd' bij een relatief hoge standaarddeviatie. Is de standaarddeviatie niet erg hoog ten opzichte van de verwachtingswaarde, dan kan men in dit geval net zo goed de normale verdeling gebruiken, ook al zou theoretisch de truncated normale verdeling juister zijn.*

Samenvatting

In dit onderzoek zijn enige verkennende beschouwingen uitgevoerd als een van de volgende veronderstellingen wordt gehanteerd:

1. De rendementen zijn normaal verdeeld
2. Alle beleggers kunnen hun voorkeur van geld beschrijven met een kwadratische nutsfunctie
3. De rendementen zijn stabiel verdeeld
4. De rendementen zijn lognormaal verdeeld
5. De rendementen zijn truncated normaal verdeeld

Vast is komen te staan dat in de meeste gevallen diversificatie een zinvolle bezigheid is.
Daarnaast wordt de truncated normale verdeling niet gezien als een belangrijke verdeling in de portefeuilletheorie.
De gedachte is tevens geopperd dat ook de logstabiele verdeling geen belangrijke plaats zal innemen in het portefeuilleraamwerk.
Het grootste belang wordt toegekend aan de stabiele verdeling waarvan de normale verdeling deel uitmaakt.
Verder is het volgens ons van belang dat additioneel onderzoek wordt verricht op de portefeuille selectie mogelijkheden wanneer de rendementen stabiel dan wel lognormaal verdeeld zijn.

Tevens is het nodig dat er verder onderzoek door econometristen wordt gedaan naar schattingsmethoden wanneer de rendementen anders zijn te beschrijven dan door een normale verdeling.

A. Enkele mathematische eigenschappen

A.1 Een complex getal γ is te schrijven als:

$$\gamma = a + bi \quad ,$$

waarbij a en b elementen zijn van de verzameling van reële getallen en $i = \sqrt{-1}$.
bi wordt het imaginaire component van γ genoemd ($\mathrm{Im}\ \gamma$) en a de reële component ($\mathrm{Re}\ \gamma$).

A.2 Als $\gamma = a + bi$, dan heet $\bar{\gamma} = a - bi$ de geconjungeerde van γ .
De absolute waarde van een getal γ is $|\gamma| = \sqrt{\gamma\bar{\gamma}}$.

A.3 Er geldt: $$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$
met ϕ is reëel.

A.4 Bij de bestudering van verdelingsfuncties is het in het algemeen zinvol om de integraal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t,x) \ d\,F(x)$$

te beschouwen, waarbij
$K(t,x)$ een functie van x is, t een parameter en $F(x)$ de verdelingsfunctie.
Veel beschouwde mogelijkheden zijn onder andere:

(i) $$K(t,x) = x^k \quad .$$

De integraal wordt dan de k-de order moment genoemd.

(ii) $$K(t,x) = e^{tx} \quad .$$

Er wordt dan gesproken van de momentgenererende functie.
Het is niet altijd gegarandeerd dat deze functie convergeert.

A.5 De <u>karakteristieke functie</u> van een stochast (of vector van stochasten) is een alternatieve representatie van de kansdichtheid. Het voordeel van deze representatie is dat vele interessante verdelingen, waarvan de dichtheid zich niet in één of andere gesloten vorm laat representeren, toch geanalyseerd kan worden.

A.6 De karakteristieke functie van een continue stochast x wordt gedefinieerd door:

$$\phi_x(t) = E\, e^{itx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx \quad .$$

A.7 Enkele eigenschappen van de karakteristieke functie zijn:

a) $\phi_x(0) = 1$

b) $|\phi_x(t)| \leq 1$

c) $\phi_x(-t) = \overline{\phi_x(t)}$

d) $\phi_x(t)$ is uniform continu

e) Als x en y onafhankelijke stochasten zijn met karakteristieke functies $\phi_x(t)$, $\phi_y(t)$, dan is de karakteristieke functie van $(x + y)$ gelijk aan het produkt van deze functies: $\phi_x(t) \cdot \phi_y(t)$

f) Twee verdelingen zijn dezelfde dan en slechts dan als de karakteristieke functies dezelfde zijn.

A.8 De karakteristieke functie van een continue stochastische vector $y = (y_1, \ldots, y_p)'$ wordt gedefinieerd door:

$$\phi_y(t) = \phi_y(t_1, \ldots, t_p) = E\, e^{it'y} =$$

$$= E \exp \{i \sum_{j=1}^{p} t_j\, y_j\}$$

A.9 Voorbeeld: stel dat we de karakteristieke functie van de normale verdeling willen afleiden en laat x normaal verdeeld zijn met verwachting θ en variantie σ^2 . Dan geldt:

$$\phi_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\}\, dx \quad .$$

Definieer $y = \frac{x-\theta}{\sigma}$, den geldt:

$$\phi_x(t) = e^{it\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma y} \cdot \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dy \quad .$$

Bedenk dat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Zodat bovenstaande vergelijking kan worden geschreven als:

$$\phi_x(t) = e^{it\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it\sigma)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} y^k \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dy \quad .$$

De integraal is precies Ey^k ;

deze is: $\begin{cases} 0 & \text{als } k \text{ oneven is} \\ \dfrac{k}{2^{k/2}(k/2)!} & \text{als } k \text{ even is} \end{cases}$

zodat: $$\phi_x(t) = e^{it\theta} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{it\sigma}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{2\ell} \frac{1}{\ell!} = \exp\{it\theta - \frac{\sigma^2}{2} t\} .$$

A.10 Stelling:

Laat $x_1, \ldots, x_n$ en $y_1, \ldots, y_m$ twee verzamelingen zijn van stochastische variabelen en laat $a_1, \ldots, a_n$ en $b_1, \ldots, b_m$ twee verzamelingen van constanten zijn, dan geldt:

$$\mathrm{cov}\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i\, , \sum_{j=1}^{m} b_j\, y_j\right\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i\, b_j\, \mathrm{cov}\,(x_i, x_j) .$$

Geraadpleegde literatuur

1) Mandelbrot, B., The Variation of Certain Speculative Prices, Journal of Business (1963)

2) Ramsey, F., Truth and Probability, In: The Foundations of Mathematics and other Logical Essays. Londen: K. Paul, Trench, Trusner and Co (1931)

3) Von Neumann, J. and Morgenstern, O., Theory of Games and Economic Behavior, Princeton: Princeton University Press, 3-de druk (1953)

4) Markowitz, H., Portfolio Selection, London: Yale University Press, 4-de druk (1976)

5) Sharpe, W.F., Capital Asset Prices: A theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, The Journal of Finance (1964)

6) Modigliani, F. and Miller, M.H., The Cost of Capital, Corporate Finance, and The Theory of Investment, American Economic Review (1958)

7) Lintner, J., The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky in Stock Portfolios and Capital Budgets, Review of Economics and Statistics (1965)

8) Copeland, T.E. and Weston, J.F., Financial Theory and Corporate Policy, Addison Wesley (1979)

9) Van Horne, J.C., Financial Management and Policy, Prentice Hall, 5-de druk (1980)

10) Mandelbrot, a.w.

11) Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley & Sohns (1966) (Vol II)

12) Loëve, M. Probability Theory, D. Van Nostrand Company, Inc., 3-de druk (1963)

13) Lukacs, E., Characteristic Functions, Griffin, 2-de druk (1970)

14) Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N., Limit Distributions For Sums of Independent Random Variables, Addison-Wesley (1968)

15) Fama, E.F., Portfolio Analysis In a Stable Paretian Market, Management Science (1965)

16) Blume, M.E., Portfolio Theory: A Step Towards its Practical Application, The Journal of Business (1970)

17) Mandelbrot, B., The Variation of Some other Speculative Prices, The Journal of Business (1967)

18) Hanoch, G. and Levy, H., Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility, The Journal of Business (1967)

19) Kendall, M.G., The Analysis of Economic Time Series, Journal of Royal Statistical Society (1953)

20) Osborn, M.F.M., Brownian Motion in the Stock Market Operation Research (1959)

21) Elton, E.J. and Gruber, M.J., Portfolio Theory When Investment Relatives Are Lognormally Distributed, The Journal of Finance (1974)

22) Ohlson, J.A. and Ziemba, W.T., Portfolio Selection in a lognormal Market when the Investor has a Power Utility Function (1976)

23) Ohlson, J.A., Portfolio Selection in a log-Stable Market, Journal of Financial and Quantitative Analysis (1975)