

円筒の弾塑性純曲げ崩壊に関する研究*

陳 玳 平^{*1}, 増田健一^{*2}, 尾崎伸吾^{*1}

Study on Elastoplastic Pure Bending Collapse of Cylindrical Tubes

Dai-Heng CHEN^{*3}, Kenichi MASUDA, and Shingo OZAKI

^{*3} Department of Mechanical Engineering, Tokyo University of Science,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601, Japan

In this paper, the elastoplastic bending collapse of cylindrical tube subjected to statically pure bending is studied by using finite element method (FEM). It is revealed in the case of infinite length that the moment of the elastoplastic cylindrical tube is controlled by flattening ratio of tube. Also, it is shown that the flattening ratio of tube can be expressed by axial and circumferential stress as a function of the material and geometrical properties and curvatures. Based on these facts, an approximate numerical method to estimate the maximum moment of cylindrical tubes is proposed, and its validity is shown by comparing with numerical results of FEM.

Key Words : Plasticity, Ovalisation, Pure Bending Collapse, Cylindrical Tube, Finite Element Method

1. 緒 言

円筒の純曲げにおける断面の扁平現象は Brazier⁽¹⁾ によって指摘されて以来, 多くの研究者によって検討されている^{(1)~(6)}. これによって, 円筒の純曲げの際に生じる崩壊は, 軸方向の圧縮応力による座屈に誘起されるものの他に, 断面の扁平によって誘起されるものもあることが明らかにされている. すなわち, 扁平がなければ, 曲げモーメントは曲げとともに上昇するが, 扁平によって曲げモーメントの上昇に最大値が現れ, その最大値が生じた後これまでに軸全長にわたって一様に分布していた曲げ変形は, ある一箇所に集中し, 曲げモーメントは減少し始める. このような曲げモーメントの最大値を予測するためには, 曲げに伴う扁平を定量的に把握する必要がある. 本研究では曲げモーメントが減少し始めることを崩壊と定義する.

これまでも極薄肉円筒の弾性曲げにおける扁平は理論的に解析されている^{(1),(3)}. しかし, 塑性降伏を伴う円筒の塑性曲げにおける扁平現象は FEM のような数値シミュレーション解析によって多く検討されてきたが, 塑性降伏に伴い扁平がどのように変化するかなど, 扁平と塑性降伏の関係についての検討は少なく, 塑性を考慮した扁平の評価式の提案も少ない.

一方, 著者らは先に, アルミニウム合金材を用いて円筒の準静的軸圧潰実験⁽⁷⁾を行い, 大変形による崩壊挙動に関して試験結果と有限要素法解析による数値解析結果とを比較し, 数値解析の有効性を確認している. また, Kyriakides ら⁽⁶⁾はアルミニウム合金材を用いて円筒の純曲げ実験を行い, これに対して, 著者らは数値解析によって Kyriakides ら⁽⁶⁾の試験結果と同様の結果が得られることを確認している.

そこで本研究では, FEM の数値解析結果を用いて, とくに塑性降伏後の扁平に着目して検討を行い, またその結果に基づいて, 円筒の扁平に対する評価の近似式を提案してみる.

2. 解 析 方 法

有限要素法汎用ソフト MSC.Marc を用い, 図 1 に示す長さ L , 肉厚 t , 平均半径 R の薄肉円筒の右端を剛体板に固定する. 左端には Stephens ら⁽²⁾, Guarracino⁽³⁾と同様に, 端部のめぐれを防ぐために, 変形できない蓋を設けるため, 肉厚 $5t$ の蓋を設け, 蓋部分に z 軸回りの回転変位を与える. 円筒の材料は等方・均質な弾塑性材料とし, 塑性降伏条件としてミーゼスの降伏条件を用いて, 円筒の曲げに伴う塑性大変形解析を行う. 塑性降伏後の応力-ひずみ関係は, 主に次式

$$\sigma = \sigma_Y + E_h \left(\varepsilon - \frac{\sigma_Y}{E} \right) = \frac{E - E_h}{E} \sigma_Y + E_h \varepsilon \quad (1)$$

で示すような, 加工硬化係数 E_h が一定な線形硬化則を用いるが, 提案する円筒扁平の評価式の有効性を示

* 原稿受付 原稿受付 2007 年 月 日

^{*1} 正員, 東京理科大学工学部機械工学科 (〒 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3)

^{*2} 正員, 東京理科大学大学院工学研究科学生
Email: chend@rs.kagu.tus.ac.jp

すために、次式

$$\sigma = \left[\frac{7}{3} \varepsilon E \sigma_Y^{(n-1)} - \frac{4}{3} \sigma_Y^n \right]^{\frac{1}{n}} \quad (2)$$

で示すような、 n 乗の硬化則も用いる。ここに、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比、 σ_Y は降伏応力であり、本研究では、とくに断らない限り、 $E=72.4\text{GPa}$ 、 $\nu=0.3$ とする。

非線形挙動の定式化としてアップデーテッドラグランジュ法を用いて幾何学的非線形性を考慮し、平衡方程式を満たすための修正計算法としてニュートン・ラプソン法を採用している。モデル化に際しては、曲げ変形が滑らかに生じるように、円周方向に36分割、軸方向には、各分割要素がほぼ正方形となるように分割して、四辺形双一次厚肉シェル要素を用いて有限要素離散化している。

また、円筒の扁平は両端の境界条件の影響も受け円筒の長さによって異なる⁽³⁾が、本研究では、両端の境界条件の影響をほぼ受けないように、十分長い円筒を用い、解析において半径 $R=25\text{mm}$ 、長さ $L=700\text{mm}$ と固定する。

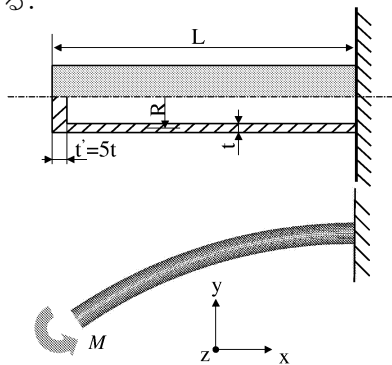


Fig. 1 Tube geometry and loading condition

3. 解析結果および検討

3.1 円筒の塑性曲げに伴う扁平の特徴 図2に、肉厚 $t=0.5\text{mm}$ の円筒について、塑性降伏が生じないように降伏応力 σ_Y を十分大きい値に設定して求めた、最大曲げモーメントが生じるまでの、円筒断面の縦方向半径の短縮 $R-b$ および横方向半径の広がり $a-R$ (a と b はそれぞれ、扁平に伴う円筒断面の横方向と縦方向の半径である)と軸方向の曲率 κ_g (中心軸の曲率)の関係を示す。図には、比較のため円筒の弾性曲げに対するBrazier⁽¹⁾の理論解析の結果も示している。図からわかるように、曲げ曲率 κ_g が小さいときは両者はよく一致し、本研究の解析の有効性は確認される。なお、 κ_g がある程度大きくなると両者の差は現れるが、それはBrazierの理論解析において、円筒の扁平に伴う変位などを十分小さい値としそれらの積などの

項を省略した近似手法によるものと考えられる。たとえば、図に示すように、 $\kappa_g=0.3\text{m}^{-1}$ のとき、 $R-b$ または $a-R$ は約4mmであり、もしそれに対応する半径方向の変位を無限小の値としてそれらの積などを省略すると、 $(4/25)^2 \cong 3\%$ オーダーの誤差が生じる可能性があることは予想できる。

また、図2からわかるように、曲げ曲率 κ_g が小さいときは $R-b \cong a-R$ であるが、 κ_g の増加に伴い、 $R-b > a-R$ となる。以下、円筒の扁平を表す指標として $R-b$ を R で除して無次元化した値 $1-b/R$ を用いて検討を行う。

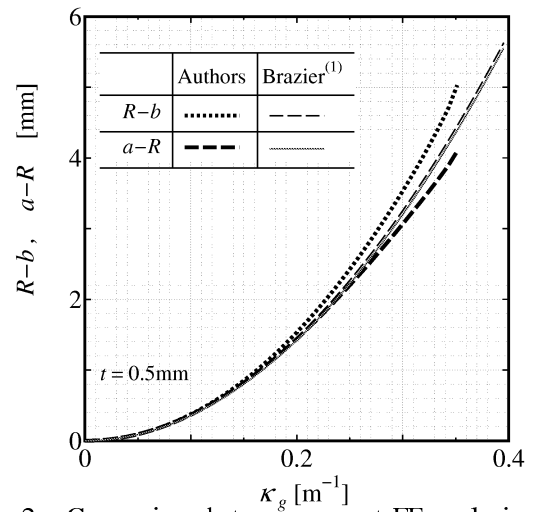


Fig. 2 Comparison between present FE analysis and Brazier's theory⁽¹⁾ for elastic material

図3は2直線硬化則を用いて、加工硬化係数 $E_h/E=0.005, 0.01, 0.02$ の3種類の材料に対して、肉厚 $t=2\text{mm}$ と降伏応力 $\sigma_Y/E=0.001$ を固定して、扁平 $1-b/R$ と無次元化曲率 $\kappa_g \times R^2/t$ との関係を示したものである。図には比較のため、同じ円筒の弾性曲げ (塑性降伏が生じないように降伏応力を十分大きい値に設定した場合をいう。以下同様)に伴う扁平曲線 (本研究では、 κ_g の増加に伴う $1-b/R$ の変化を扁平曲線と呼ぶ)も示している。図3からわかるように扁平曲線に及ぼす加工硬化の影響は小さい。また、弾性曲げは塑性曲げに比べて、同じ曲げ曲率による断面の扁平が大きいことがわかる。例えば、図3に示した例では、 $\kappa_g \times R^2/t = 0.2$ のとき塑性曲げでは $1-b/R \approx 0.01$ に対して弾性曲げでは $1-b/R \approx 0.035$ である。

図4は2直線硬化則を用いて、降伏応力 $\sigma_Y/E=0.00025, 0.001, 0.003, 0.005$ の4種類の材料に対して、肉厚 $t=2\text{mm}$ と加工硬化係数 $E_h/E=0.01$ を固定して求めた、 $1-b/R$ と $\kappa_g \times R^2/t$ の関係を示したものである。図4からわかるように、降伏応力 σ_Y/E が小さいほど、 κ_g の増加に伴う円筒断面扁平の

進展が遅い。図5は2直線硬化則を用いて、円筒肉厚 $t=0.25, 0.5, 1, 2\text{mm}$ の4種類の厚さに対して降伏応力 $\sigma_Y/E=0.001$ 、加工硬化係数 $E_h/E=0.01$ を固定して求めた、 $1-b/R$ と $\kappa_g \times R^2/t$ の関係を示したものである。図5には比較のため、肉厚 $t=0.5, 2\text{mm}$ の2種類の円筒の弾性曲げによる扁平曲線も示している。この図からわかるように、弾性曲げの場合、扁平 $1-b/R$ は無次元化曲率 $\kappa_g \times R^2/t$ のみの関数として整理できるが、塑性曲げの場合、 $1-b/R$ と $\kappa_g \times R^2/t$ の関数関係は肉厚 t によって異なり、肉厚 t が厚いほど同じ $\kappa_g \times R^2/t$ に対する $1-b/R$ の値は小さい。

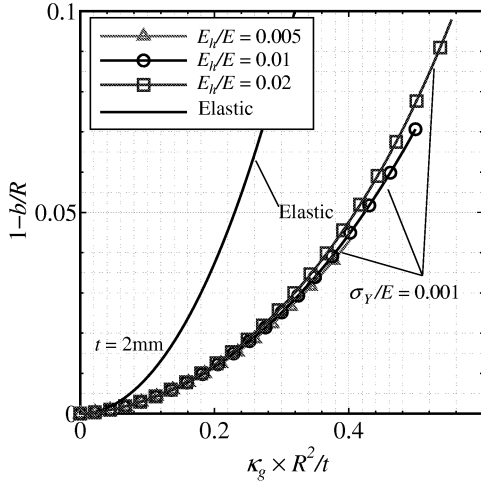


Fig. 3 Relation of $\kappa_g \times R^2/t$ and $1-b/R$ for three levels of hardening ratio E_h/E

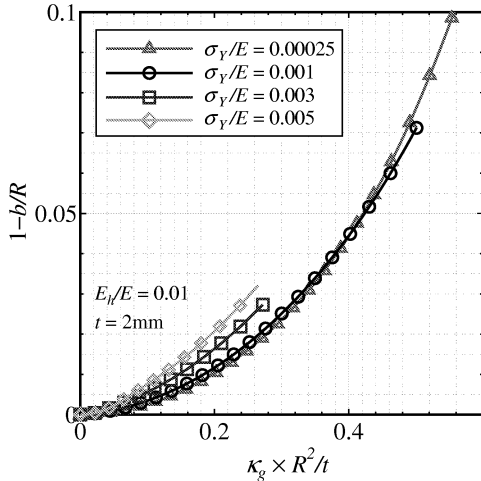


Fig. 4 Relation of $\kappa_g \times R^2/t$ and $1-b/R$ for four levels of yield stress ratio σ_Y/E

図6は、図3に示した、 $E_h/E=0.01$ の場合の扁平曲線と弾性曲げの扁平曲線を両対数線図で再プロットして示すものである。図6からわかるように、弾性的場合の扁平は式

$$1 - \frac{b}{R} \approx \left(\frac{\kappa_g R^2}{t} \right)^2 \quad (3)$$

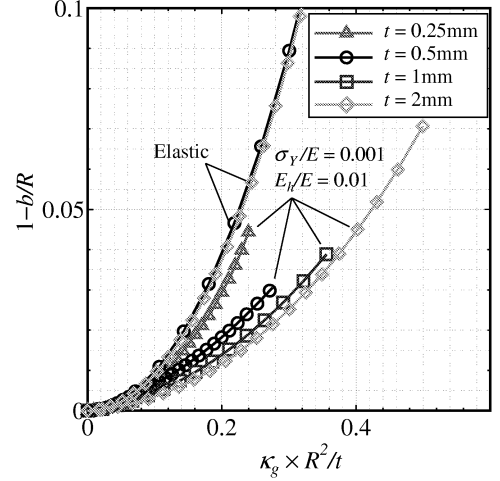


Fig. 5 Relation of $\kappa_g \times R^2/t$ and $1-b/R$ for four levels of thickness t

のように、無次元化扁平量 $1-b/R$ は無次元化曲率 $\kappa_g \times R^2/t$ の2乗に比例する。これに対して、塑性曲げの場合、図6に示したように、その扁平曲線の傾きは最初2であったが、その後一旦下がってから再び2に戻るように、 $(\kappa_g \times R^2/t)$ の指数が曲げ変形とともに変化する。

図6に示した、曲げ変形とともに変化する曲線の $(\kappa_g \times R^2/t)$ の指数をより詳細に検討するために図7に、図6に示した曲線の傾きを扁平速度指数 v_b と称し、

$$v_b = \frac{d[\log_{10}(1-b/R)]}{d[\log_{10}(\kappa_g R^2/t)]} \quad (4)$$

扁平速度指数 v_b を $(\kappa_g \times R^2/t)$ の関数として再プロットして示す。図7からわかるように、扁平速度指数 v_b からは曲げに伴う円筒の扁平の進展は基本的に3つの特徴がある段階に分けられる。段階Iでは、扁平速度指数 v_b が一定で、約2であり、段階IIでは、 v_b が急激に下がり、段階IIIでは v_b が徐々に上昇し約2に戻る。

図7で示した段階における扁平と塑性降伏との関係を見るために、まず、図中の段階I、IIの交点における曲率 κ_g を用いて、式

$$\sigma_x = ER\kappa_g \quad (5)$$

で求めた、これらの曲率 κ_g に対応する円筒の上頂点の軸方向応力 σ_x と材料の降伏応力 σ_Y との比 σ_x/σ_Y を表1の第4行に示す。表1からわかるように、それらの比はほぼ1である。したがって、段階Iでは、塑性降伏がまだ発生していないので、扁平速度指数 v_b が弾性曲げと同じ値の2となることがわかる。そして、円筒上下頂点での塑性降伏が発生すると、段階IからIIへの遷移が起こり、扁平速度指数 v_b が小さくなる。

塑性降伏が発生すると、扁平速度指数 v_b が小さくなる理由は、図8に示す、扁平に関する力学モデルか

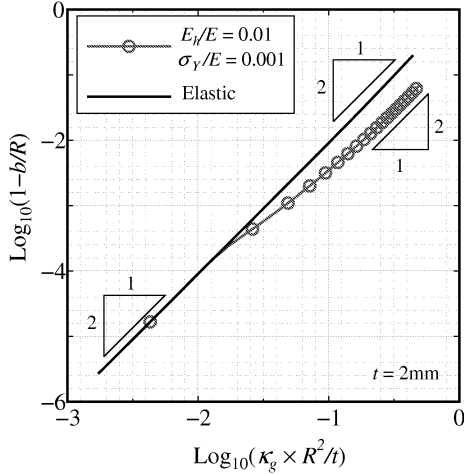


Fig. 6 Comparison between elastic and plastic bendings for flattening

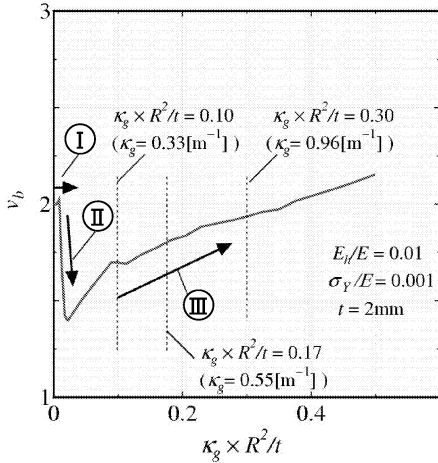


Fig. 7 Relation of $\kappa_g \times R^2/t$ and v_b for plastic bending

Table1:Result of numerical analyses

	$\sigma_y/E = 0.001$					$\sigma_y/E = 0.003$
	$E_t/E = 0.01$				$E_t/E = 0.05$	$n = 5$
	$t/R = 1/25$	$t/R = 2/25$	$t/R = 3/25$	$t/R = 2/25$	$t/R = 2/25$	$t/R = 2/25$
$\kappa_g R^2/t$	0.0263	0.0129	0.00845	0.0129	0.0136	0.0387
σ_x/E	1.05×10^{-3}	1.03×10^{-3}	1.01×10^{-3}	1.03×10^{-3}	1.08×10^{-3}	3.10×10^{-3}
σ_x/σ_y	1.052	1.032	1.014	1.033	1.085	1.033
θ_p	32°	33°	33°	33°	34°	34°
v_b	1.39	1.40	1.41	1.43	1.54	1.43
v_b^*	1.90	1.94	1.95	2.05	1.88	2.04

v_b^* is v_b for $\sigma_\theta|_{eq.(12)}/\sigma_y = 3$

ら説明できる. 図 8(a) は, 曲げ曲率 κ_g のときの円筒の一部分を示すものである. 図 8(a) に示すように, 幅 $dx = d\phi/\kappa_g$ のリングの両端面に, 曲げによって垂直応力 σ_x が生じる. 応力 σ_x は近似的に式

$$\sigma_x = \begin{cases} E(\kappa_g R \sin \theta) & \kappa_g R \sin \theta < \sigma_y/E \\ \sigma_y + E_h(\kappa_g R \sin \theta - \frac{\sigma_y}{E}) & \kappa_g R \sin \theta > \sigma_y/E \end{cases} \quad (6)$$

で評価できる. なお, この説明では, 2直線硬化則に従う材料を用いる. 円筒の曲げによって, 応力 σ_x により半径方向の分布力が生じ, その密度 q は

$$q = \sigma_x t \kappa_g \quad (7)$$

である. したがって, 円筒の扁平は, 図 8(b) に示すような, 密度 q の力による曲がりはりの変形問題として検討できる.

このようなモデルからまず, 弾性範囲において傾きが 2 であることが理解できる. すなわち弾性範囲では, この曲がりはりのたわみは荷重に比例するが, その荷重密度 q は次式

$$q = ERt \sin \theta \kappa_g^2 \quad (8)$$

に示すように, 曲率 κ_g の 2 乗に比例するため, 扁平は曲率 κ_g の 2 乗に比例することとなる. そして, 曲げに伴い上端部付近で塑性降伏が生じると, その荷重密度 q は式

$$q = \left[\sigma_y + E_h \left(\kappa_g R \sin \theta - \frac{\sigma_y}{E} \right) \right] t \kappa_g \quad (9)$$

のようになり, その上昇率 $dq/d\kappa_g$ は弾性的場合より小さい. したがって, 円筒の上下頂点で塑性降伏が生じると, 曲がりはりの中央部での分布荷重の上昇率が小さくなるため, 曲げに伴うたわみの上昇率も弾性的場合よりは小さくなり, 扁平速度指数 v_b は 2 より小さくなることとなる.

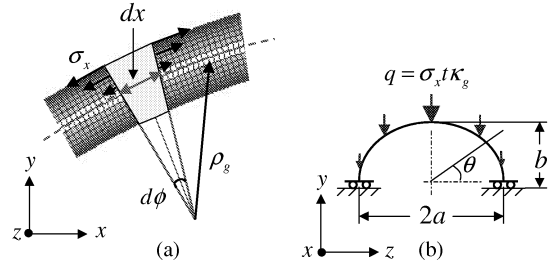


Fig. 8 Schematic representation of mechanical model for pure bending: (a) axial cross-section; (b) radial cross-section

図 9 は, いくつかの曲率 κ_g (その中の $\kappa_g R^2/t = 0.022$ は段階 II と III の交点に対応する曲率) に対応する各変形段階での, 円筒断面における塑性域の広がり性を示すものである. ここに, 色の薄さは相当塑性ひずみの大きさを示し, 色が薄いほど相当塑性ひずみが大きいことを示す. また, 弾性域との境界も破線で示している. ここでは, 対称性を考え, 断面の 4 分の 1 だけを示す. 図 9 からわかるように, 段階 II ($\kappa_g R^2/t = 0.013, 0.017, 0.022$) において, 曲げ曲率 κ_g の増加に伴い, 円筒の上下頂点に生じた塑性域は両側へと急速

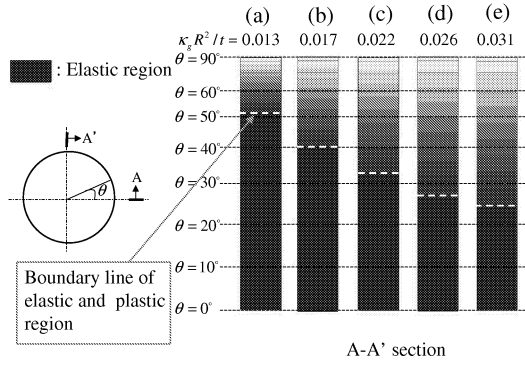


Fig. 9 Variation of plastic region on circumferential A-A' section at phase (a),(b),(c),(d) and (e) corresponding to $\kappa_g R^2/t = 0.013, 0.017, 0.022, 0.026, \text{ and } 0.031$

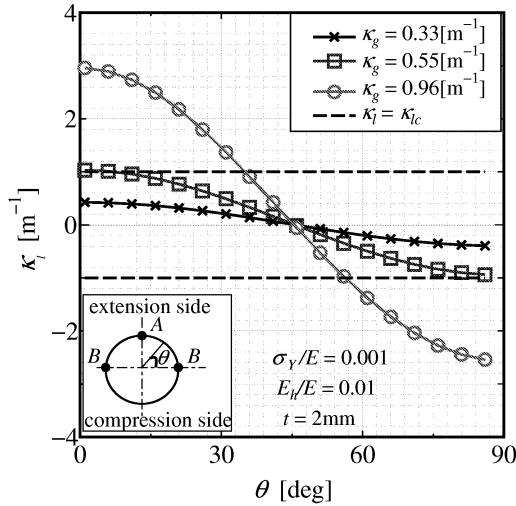


Fig. 10 Relation of θ and κ_l for three levels of κ_g

に広がっていく．扁平速度指数 v_b が最小となる曲率 $\kappa_g R^2/t = 0.022$ において，塑性域は図9の(c)で示したように約 $\theta = 30^\circ$ まで広がっている．

表1の第5行と6行にはそれぞれ，扁平速度指数 v_b が最小となる曲率 κ_g における塑性域の広がり角度 θ_p およびそのときの扁平速度指数 v_b を示している．表1からわかるように，扁平速度指数 v_b が最小となる曲率 κ_g における塑性域の広がり角度 θ_p およびそのときの扁平速度指数 v_b の値は円筒の幾何寸法や材料性質などによって変化するものの，おおよそ $\theta_p \approx 30^\circ$, $v_b \approx 1.5$ である．

また，円筒の扁平に伴い周方向の曲げも生じる．周方向の曲げに伴うその曲率の変化を κ_l とすると， κ_l は式

$$\kappa_l = \frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{R} \quad (10)$$

で評価される．ここに， ρ_l は円筒の横断面各点での曲率半径である．図10に，図7で扱った円筒を例として，図7の $\kappa_g R^2/t = 0.10, 0.17, 0.30$ (それぞれ

$\kappa_g = 0.33, 0.55, 0.96$ に対応する) のときの，周方向における κ_l の分布を示す．図10からわかるように，扁平によって， $\theta = 90^\circ$ の点Aと $\theta = 0^\circ$ の点B(図10を参照)に大きい周方向の曲げが生じる．点Bにおいて，軸方向の曲げによる軸方向応力 σ_x が常にゼロで，それによる塑性降伏は起こらないが， κ_l が次式

$$|\kappa_l| > \kappa_{lc}, \quad \kappa_{lc} = \frac{\sigma_Y}{Et/2} \quad (11)$$

のように $\kappa_{lc} = 2\sigma_Y/Et$ より大きければ，円筒の両側の点Bに，外表面と内表面から塑性変形が発生する．図10には κ_{lc} の値を破線で示している． κ_{lc} の値との比較からわかるように， $\kappa_g = 0.55$ のときに，点Bの円筒内外表面において塑性降伏が発生した．軸方向の曲げ曲率 κ_g がさらに大きくなり $\kappa_g = 0.96$ のとき，図10に示したように，点Bにおける周方向の曲率 κ_l はさらに大きくなるため，塑性域はその内外表面から厚さの中心へと広がる．また，このとき， $|\kappa_l| > \kappa_{lc}$ の θ も大きくなっている．

段階IIIにおいて，図9の(d),(e)で示したように，軸方向応力 σ_x による塑性域の周方向の広がりには段階IIのそれより遅くなる ($|d\theta_p/dk_g|_{III} < |d\theta_p/dk_g|_{II}$)．このことを反映して，段階IIIにおける扁平速度指数 v_b は最小値から徐々に上昇する．そして， κ_g がさらに大きくなり $\kappa_g = 0.55$ のときから，円筒の両側からも，周方向の曲げによる塑性域は発生した．これによって， v_b はさらに大きくなる．ここで，両側の点Bの曲率 κ_{lB} を用いて次式

$$\sigma_\theta = \frac{Et\kappa_{lB}}{2} \quad (12)$$

を用いて応力 $\sigma_\theta|_{eq.(12)}$ を求めた．応力 $\sigma_\theta|_{eq.(12)}$ は実際の点Bの応力ではないが，それと降伏応力との比 $\sigma_\theta|_{eq.(12)}/\sigma_Y$ は，曲率 κ_l によって生じる両端での塑性域の広がりに対応する1つの指標として用いることができる．表1の第7行に，その比の値が3となるときの扁平速度指数 v_b の値を示す．表1からわかるように， $\sigma_\theta|_{eq.(12)}/\sigma_Y = 3$ のとき，扁平速度指数 v_b はほぼ2となっている．

以上に述べた，円筒の塑性曲げにおける横断面扁平の特徴をまとめると，

- (1) 塑性降伏が生じるまで，扁平速度指数 v_b は弾性曲げの場合と同じで約2である．
- (2) 軸方向の曲げ応力 σ_x によって円筒の上下部に塑性域が発生し，その塑性域は曲げの進展に伴い急速に上下端から両側へと広がる．
- (3) 上下部で塑性降伏が生じると，扁平速度指数 v_b は急速に約1.5まで下がる．そのときの塑性域の広がりには約 $\theta \approx 30^\circ$ である．

(4) その後、扁平速度指数 v_b は徐々に上昇する。とくに、応力 $\sigma_{\theta}|_{eq.(12)}$ と降伏応力 σ_Y との比 $\sigma_{\theta}|_{eq.(12)}/\sigma_Y$ の値が 3 となるとき扁平速度指数 v_b は約 2 に戻る。

3-2 扁平曲線の近似式 以上の検討に基づいて、円筒の扁平に関する近似式を求める。まず、図 11 のように、(a) 変形段階 I に対して扁平速度指数 $v_b = 2$ の水平の直線で近似し、(b) 段階 II に対して、その過程が短いということから、 $x = x_1$ の真直ぐの線分で近似し、またその線分における扁平速度指数 v_b の最小値は、表 1 より 1.5 とする。また、(c) 段階 III に対してはそれを斜めの直線と近似するが、扁平速度指数 v_b の値が再び 2 に戻るのは、 $\sigma_{\theta}|_{eq.(12)}/\sigma_Y = 3$ のときであると仮定する。さらに、(d) 扁平速度指数 v_b の値が 2 に戻ったら、その後扁平速度指数 $v_b = 2$ の水平の直線で近似する。すなわち、円筒の扁平速度について次式のように場合分けして考える。

$$v_b = \begin{cases} 2 & \text{for } x \leq x_1 \\ d_1x + d_2 & \text{for } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 2 & \text{for } x \geq x_2 \end{cases} \quad (13)$$

ここに、 $x = \kappa_g R^2/t$ (14)

また、 x_1 は円筒上下部での塑性降伏の発生に対応し、

$$x_1 = \frac{\sigma_Y R}{Et} \quad (15)$$

式 (13) に基づけば、円筒の扁平は次式

$$1 - \frac{b}{R} = \begin{cases} C_1 x^2 & \text{for } x \leq x_1 \\ C_2 x^{d_2} e^{d_1 x} & \text{for } x_1 \leq x \leq x_2 \\ C_3 x^2 & \text{for } x \geq x_2 \end{cases} \quad (16)$$

のように、近似的に評価される。

弾性曲げの FEM の解析結果および式 (3) から、式 (16) の中の未知係数 $C_1 = 1.0$ と定め、そしてその他の未知数 x_2, C_2, C_3, d_1 および d_2 などは以下の 5 つの条件から定める。

(1) x_1 での連続条件より

$$x_1^2 = C_2 x_1^{d_2} e^{d_1 x_1} \quad (17)$$

(2) 表 1 より、 $x = x_1$ のときの v_b の最小値が 1.5 であるため、

$$d_1 x_1 + d_2 \cong 1.5 \quad (18)$$

(3) $x = x_2$ のとき v_b の値が 2 であるため、

$$d_1 x_2 + d_2 \cong 2.0 \quad (19)$$

(4) また $x = x_2$ のとき、 $\sigma_{\theta}|_{eq.(12)}/\sigma_Y = 3$ であるため、

$$\frac{t}{2} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{R} \right) \cong 3 \frac{\sigma_Y}{E} \quad (20)$$

ここに、両側での周方向の曲率半径 ρ_l は断面を楕円と仮定することで、次式で示すように短半径 b で表すことができる。

$$\frac{1}{\rho_l} = \frac{2R - b}{b^2} \quad (21)$$

(5) x_2 での連続条件より

$$C_3 x_2^2 = C_2 x_2^{d_2} e^{d_1 x_2} \quad (22)$$

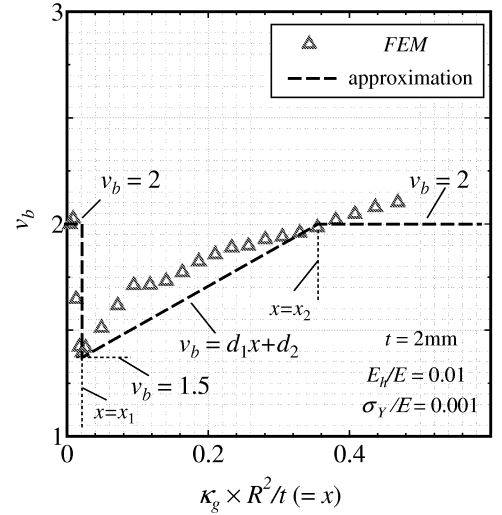


Fig. 11 Poly-linear approximation for relation of $v_b - \kappa_g R^2/t$

式 (17)~(20) および式 (22) より、未知数 x_2, C_2, C_3, d_1 および d_2 などを定めれば、扁平曲線の近似式を得ることができる。ここで種々の場合について、近似式 (16) による結果と FEM の結果との比較を行いその有効性を示す。図 12 は、図 3 に示した、加工硬化係数 $E_h/E = 0.005, 0.01, 0.02$ の 3 種類の 2 直線硬化則に従う材料に対して FEM で求めた扁平曲線と、近似式 (16) による予測値とを比較したものである。また、図 13 は $n = 5$ の n 乗硬化則を用いて、降伏応力 $\sigma_Y/E = 0.00025, 0.001, 0.003$ の 3 種類の材料について、 $t = 0.5\text{mm}$ の円筒に対して FEM で求めた扁平曲線と、近似式 (16) による結果とを比較したものである。図 14 は $n = 5$ の n 乗硬化則を用いて、円筒肉厚 $t = 0.5, 1, 2\text{mm}$ の 3 種類の厚さについて、降伏応力 $\sigma_Y/E = 0.001$ の円筒に対して FEM で求めた扁平曲線と、近似式 (16) による結果とを比較したものである。これらの図からわかるように、種々の場合に対応した精度の良い近似曲線が得られる。

3.3 曲げモーメント 求めた扁平の近似式を用いることで、曲げに伴うモーメント M_g の変化を予測することができる。扁平した円筒の断面を楕円と仮定すれば、モーメント M_g は式

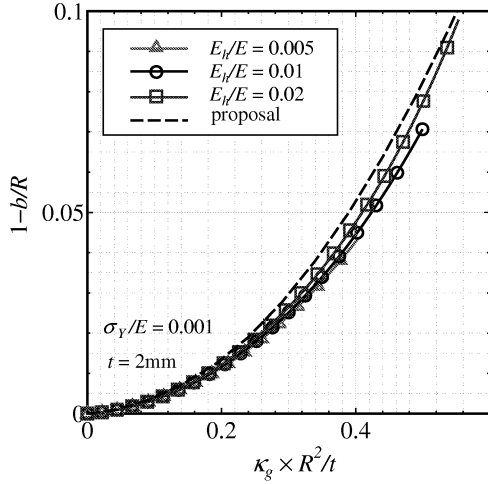


Fig. 12 Comparison between results of FEM and proposal method for three levels of hardening ratio E_h/E

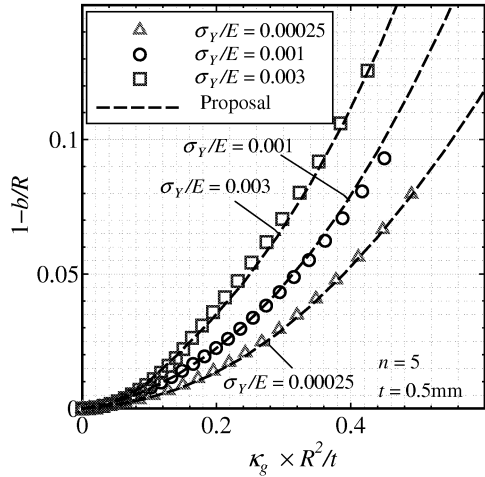


Fig. 13 Comparison between results of FEM and proposal method for three levels of yield stress σ_y/E

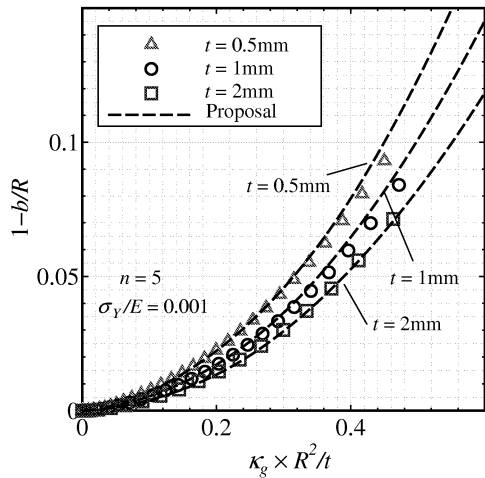


Fig. 14 Comparison between results of FEM and proposal method for three levels of thickness t

$$M = 4t \int_0^{\pi/2} \sigma_x b \sin \theta \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta \quad (23)$$

で求まる．ここに、軸方向応力 σ_x は式 (6) で評価される．

図 15 はこのような近似手法で求めたモーメント M_g を破線で示し、FEM の結果との比較を示すものである．図 15 からわかるように近似手法で求めたモーメント M_g は FEM の結果とほぼ一致するが、曲率 κ_g が大きくなるにつれて誤差が大きくなる．

図 15 に示した誤差の原因を検討するために、図 16 に $\kappa_g = 1.51[m^{-1}]$ のときの $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ における厚さ方向の応力 σ_x の分布について、FEM で求めた結果と式 (6) で求めた値 (細い実線) との比較を示す．この図からわかるように、厚さ方向の応力 σ_x の分布は一樣ではないため両者の値は一致しない．このことに対して本研究では以下のように検討を行う．

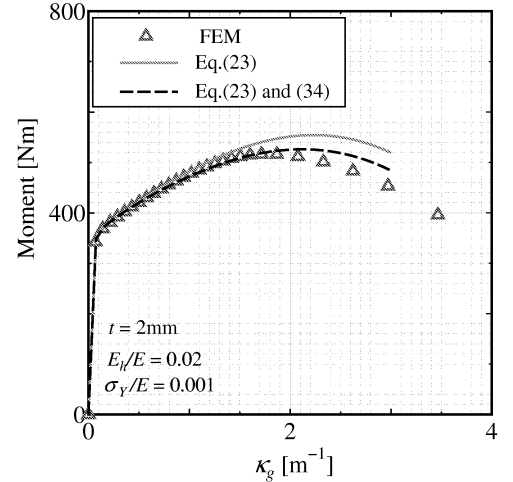


Fig. 15 Comparison between results of FEM and proposal method for moment- κ_g relation

円筒曲げにおける応力とひずみの関係は、ひずみ増分理論に基づき、Ruess の方程式

$$\frac{\dot{e}_x}{\sigma'_x} = \frac{\dot{e}_\theta}{\sigma'_\theta} = \dot{\lambda} \quad (24)$$

を用いて検討することができる．ここに、 σ'_x 、 σ'_θ は偏差応力、 \dot{e}_x 、 \dot{e}_θ は偏差ひずみ速度であり、また比例定数 $\dot{\lambda}$ は

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{e}}}{\bar{\sigma}} \quad (25)$$

で定まる．ここに、 $\dot{\bar{e}}$ と $\bar{\sigma}$ はそれぞれ相当ひずみ速度と相当応力である．

$$\dot{\bar{e}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{e}_x^2 + \dot{e}_\theta^2 + \dot{e}_z^2}, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\sigma_x'^2 + \sigma_\theta'^2 + \sigma_z'^2} \quad (26)$$

薄肉円筒では、 $\sigma_z = 0$ であるため、

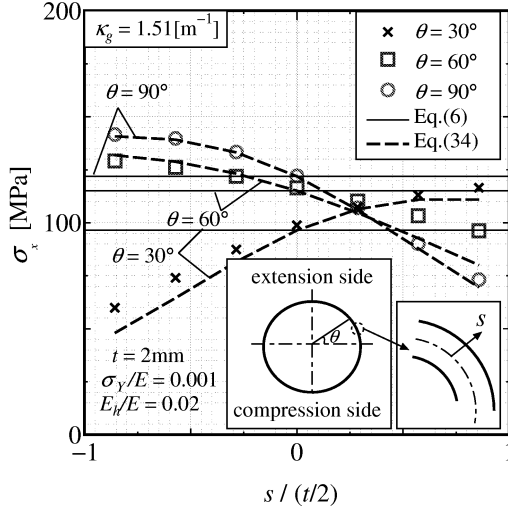


Fig. 16 Comparison between results of FEM and Eqs.(6),(34) for axial stress distribution

$$\sigma'_x = \frac{2\sigma_x - \sigma_\theta}{3}, \quad \sigma'_\theta = \frac{2\sigma_\theta - \sigma_x}{3} \quad (27)$$

となる。よって、

$$\sigma_x = \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}}(2\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}}(2\dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_x) \quad (28)$$

周方向のひずみを

$$\dot{\epsilon}_\theta = \dot{\epsilon}_{\theta m} + \Delta\dot{\epsilon}_\theta \quad (29)$$

として、周方向の平均応力は

$$\sigma_{\theta m} = 0 \quad (30)$$

であることを考慮すれば、式(28)の第2個目の式より

$$\dot{\epsilon}_{\theta m} = -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_x \quad (31)$$

と得られる。これを式(28)の第1個目の式に代入すれば、

$$\sigma_x = \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}} \left(\frac{3}{2}\dot{\epsilon}_x \right) + \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}} \Delta\dot{\epsilon}_\theta \quad (32)$$

ここに、

$$\dot{\bar{\epsilon}}^2 = \dot{\epsilon}_x^2 + \frac{4}{3}\Delta\dot{\epsilon}_\theta^2 \quad (33)$$

よって

$$\sigma_x = \bar{\sigma} \frac{\dot{\epsilon}_x}{\dot{\bar{\epsilon}}} + \bar{\sigma} \frac{2\Delta\dot{\epsilon}_\theta}{3\dot{\bar{\epsilon}}} \quad (34)$$

ここに

$$\dot{\epsilon}_x = y\dot{\kappa}_g, \quad \Delta\dot{\epsilon}_\theta = s\dot{\kappa}_t \quad (35)$$

図16に式(34)で求めた断面における応力 σ_x の分布を破線で示す。図からわかるように、式(34)を用いて求めた応力分布はFEMの結果と良く一致している。図15に、式(34)で求めた応力 σ_x を式(23)に代入して求めたモーメント M_g の予測値を実線で示す。図からわかるようにその値とFEMの値には良い一致が見られる。

4. 結 言

本研究では、有限要素法(FEM)による弾塑性数値解析を行い、円筒の曲げ崩壊に関する検討を行った。その結果、以下の点が明らかになった。

- (1) 無限長の場合、円筒の純曲げにおいて、曲げ崩壊を支配しているものは扁平である。
- (2) 弾性曲げの場合、扁平速度指数は $v_b \cong 2$ であるが、塑性曲げの場合、円筒の上下端部から広がる塑性域の生成により v_b は急激に小さくなる。しかし、軸方向応力 σ_x による塑性域は $\theta \cong 30^\circ$ のところまで広がると v_b は回復し、とくにその後、円筒の両側に扁平による塑性域が生じると v_b はさらに上昇し約2に戻る。
- (3) (2)で述べた塑性降伏と v_b の関係は3つの段階に分けることで精度の良い近似曲線が得られる。
- (4) 提案した扁平曲線、肉厚さ方向の応力分布によって最大モーメント M_{\max} を予測することが可能である。

文 献

- (1) Brazier, L. G., On the flexure of thin cylindrical shells and other "Thin" sections, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol.116(1927), pp.104-114.
- (2) Stephens, W. B. et al., Collapse of long cylindrical shells under combined bending and pressure loads, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol.13, (1975), pp.20-25.
- (3) Guarracino, F., On the analysis of cylindrical tubes under flexure: theoretical formulations, experimental data and finite element analyses, Thin-Walled Structures, Vol.41, (2003), pp.127-147.
- (4) Gellin, S., The plastic buckling of long cylindrical shells under pure bending, International Journal of Solids and Structures, Vol.16, (1980), pp.397-407.
- (5) Wierzbicki, T. and Sinmao, M. V., A simplified model of Brazier effect in plastic bending of cylindrical tubes, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol.71, (1997), pp.19-28.
- (6) Kyriakides, S. and Ju G. T., Bifurcation and localization instabilities in cylindrical shells under bending- I, II. Experiments, Predictions International Journal of Solids and Structures, Vol.29, (1992), pp.1117-1171.
- (7) Haruyama, S., Ushijima, K. and Chen, D., Study of crack initiation in circular tubes of aluminum alloy under axially compressive load, The Japanese Society for Experimental Mechanics, Vol.3 (2003), pp.343-344.